

CHỦ ĐỀ 02: CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

LÝ THUYẾT

❖ Định nghĩa

- Giả sử hàm số f xác định trên tập K và $x_0 \in K$. Ta nói:
- x_0 là **điểm cực tiểu** của hàm số f nếu tồn tại một khoảng $(a;b)$ chứa x_0 sao cho $(a;b) \subset K$ và $f(x) > f(x_0), \forall x \in (a;b) \setminus \{x_0\}$. Khi đó $f(x_0)$ được gọi là **giá trị cực tiểu** của hàm số f .
- x_0 là **điểm cực đại** của hàm số f nếu tồn tại một khoảng $(a;b)$ chứa x_0 sao cho $(a;b) \subset K$ và $f(x) < f(x_0), \forall x \in (a;b) \setminus \{x_0\}$. Khi đó $f(x_0)$ được gọi là **giá trị cực đại** của hàm số f .
- Điểm cực đại và điểm cực tiểu gọi chung là **điểm cực trị**.
- Giá trị cực đại và giá trị cực tiểu gọi chung là **cực trị**.
- Điểm cực đại và điểm cực tiểu được gọi chung là **điểm cực trị của hàm số** và điểm cực trị phải là một điểm trong tập hợp K .
- Giá trị cực đại và giá trị cực tiểu được gọi chung là **giá trị cực trị (hay cực trị)** của hàm số.
- Nếu x_0 là điểm cực trị của hàm số thì điểm $(x_0; f(x_0))$ được gọi là **điểm cực trị của đồ thị** hàm số f .

❖ Quy tắc tìm cực trị

➤ Quy tắc 1:

- **Bước 1:** Tìm tập xác định. Tìm $f'(x)$.
- **Bước 2:** Tìm các điểm x_i ($i = 1; 2; \dots$) mà tại đó đạo hàm của hàm số bằng 0 hoặc hàm số liên tục nhưng không có đạo hàm.
- **Bước 3:** Lập bảng biến thiên hoặc bảng xét dấu $f'(x)$. Nếu $f'(x)$ đổi dấu khi đi qua x_i thì hàm số đạt cực trị tại x_i .

➤ Định lý

- Giả sử $y = f(x)$ có đạo hàm cấp 2 trong khoảng $(x_0 - h; x_0 + h)$ với $h > 0$. Khi đó:
- Nếu $f'(x_0) = 0, f''(x_0) < 0$ thì hàm số f đạt cực đại tại x_0 .
- Nếu $f'(x_0) = 0, f''(x_0) > 0$ thì hàm số f đạt cực tiểu tại x_0 .

Từ định lý trên, ta có một quy tắc khác để tìm cực trị của hàm số

➤ Quy tắc 2:

- **Bước 1:** Tìm tập xác định. Tìm $f'(x)$.
- **Bước 2:** Tìm các nghiệm x_i ($i = 1; 2; \dots$) của phương trình $f'(x) = 0$.
- **Bước 3:** Tính $f''(x)$ và tính $f''(x_i)$.

Nếu $f''(x_i) < 0$ thì hàm số f đạt cực đại tại điểm x_i .

Nếu $f''(x_i) > 0$ thì hàm số f đạt cực tiểu tại điểm x_i .

VÍ DỤ MINH HỌA

VÍ DỤ 1. Hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x + 1$ đạt cực tiểu tại điểm

A. $x = -1$.

B. $x = 1$.

C. $x = -3$.

D. $x = 3$.

Chọn B

Ta có hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x + 1$ có tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$$y' = x^2 + 2x - 3; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases}.$$

$$y'' = 2x + 2; y''(-3) = -4 < 0; y''(1) = 4 > 0.$$

Suy ra hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 1$.

VÍ DỤ 2. Cho hàm số $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 3(7m-3)x$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số không có cực trị. Số phần tử của S là

A. 2.

B. 4.

C. 0.

D. Vô số.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 3(7m-3)x$ (1) $\Rightarrow y' = 3x^2 - 6(m+1)x + 3(7m-3)$.

Ta có: $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2(m+1)x + 7m-3 = 0$ (2)

Hàm số đã cho không có cực trị

$\Leftrightarrow$ Phương trình $y' = 0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép

$$\Leftrightarrow \Delta'_{(2)} \leq 0 \Leftrightarrow (m+1)^2 - 1 \cdot (7m-3) \leq 0 \Leftrightarrow m^2 - 5m + 4 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq m \leq 4.$$

Do m là số nguyên nên $m \in \{1; 2; 3; 4\}$. Vậy tập S có 4 phần tử.

VÍ DỤ 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x^2 - 1)(x - 4)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số $g(x) = f(3-x)$ có bao nhiêu điểm cực đại?

A. 0.

B. 1.

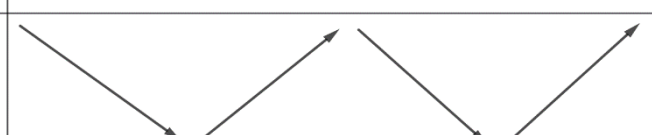
C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn B

Từ giả thiết, ta có bảng biến thiên của hàm số $f(x)$

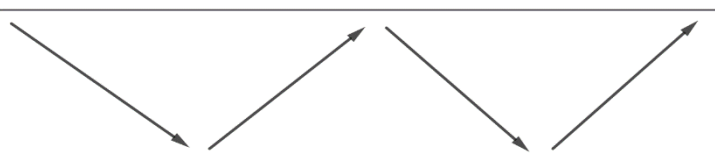
x	$-\infty$	-1	1	4	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$					

Ta có $g(x) = f(3-x) \Rightarrow g'(x) = -f'(3-x)$.

Từ bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ ta có

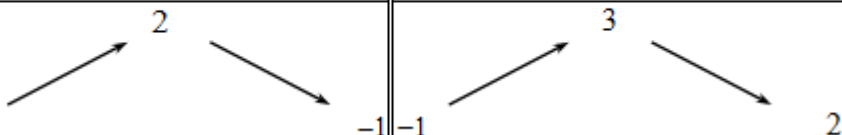
$$g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow f'(3-x) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3-x \leq -1 \\ 1 \leq 3-x \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ -1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Như thế ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x)$

x	$-\infty$		-1		2		4		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$									

Từ bảng biến thiên, ta nhận thấy hàm số $g(x)$ có một điểm cực đại.

VÍ DỤ 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$		$+$	0	$-$	
y	$-\infty$								

Số điểm cực trị của hàm số $y = |f(x)|$ là

A. 7.

B. 5.

C. 6.

D. 8.

Lời giải

Chọn B

Gọi đồ thị của hàm số $y = f(x)$ là (C) .

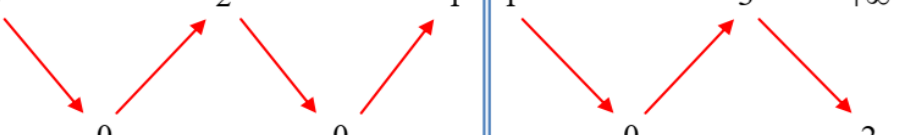
Đặt $g(x) = |f(x)|$ và gọi (C') là đồ thị của hàm số $y = g(x)$. Đồ thị (C') được suy ra từ đồ thị (C) như sau:

Giữ nguyên phần đồ thị của (C) phía trên Ox ta được phần I.

Với phần đồ thị của (C) phía dưới Ox ta lấy đối xứng qua Ox , ta được phần II.

Hợp của phần I và phần II ta được (C') .

Từ cách suy ra đồ thị của (C') từ (C) , kết hợp với bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ ta có bảng biến thiên của hàm số $y = g(x) = |f(x)|$ như sau:

x	$-\infty$	a	-1	b	0	c	1	$+\infty$
$y = f(x) $	$+\infty$	0	2	0	1	0	3	$+\infty$
								

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số $y = |f(x)|$ có 5 điểm cực trị.

VÍ DỤ 5. Cho hàm số $y = \frac{x^5}{5} - (2m-1)x^4 - \frac{m}{3}x^3 + 2019$. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$?

A. Vô số.

B. 1.

C. 2.

D. 0.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = x^4 - 4(2m-1)x^3 - mx^2 = x^2[x^2 - 4(2m-1)x - m]$.

Dễ thấy $x = 0$ là một nghiệm của đạo hàm y' . Do đó hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$ khi và chỉ khi y' đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua nghiệm $x = 0$. Ta thấy dấu của y' là dấu của hàm số $g(x) = x^2 - 4(2m-1)x - m$. Hàm số $g(x)$ đổi dấu khi đi qua giá trị $x = 0$ khi $x = 0$ là nghiệm của $g(x)$. Khi đó $g(0) = 0 \Leftrightarrow m = 0$.

Thử lại, với $m = 0$ thì $g(x) = x^2 + 4x$ đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua giá trị $x = 0$.

Vậy có 1 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

VÍ DỤ 6. Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng đi qua điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx + 2$ cắt đường tròn tâm $I(1;1)$, bán kính $R = 1$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho diện tích tam giác IAB đạt giá trị lớn nhất?

A. $m = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$.

B. $m = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{2}$.

C. $m = \frac{2 \pm \sqrt{5}}{2}$.

D. $m = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

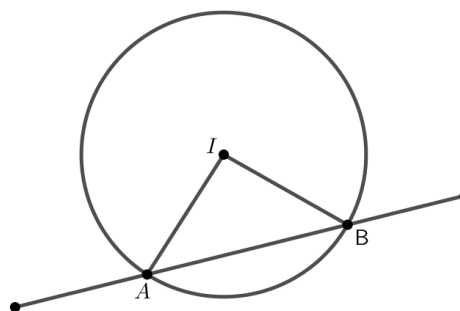
Chọn B

Ta có $y = x^3 - 3mx + 2 \Rightarrow y' = 3x^2 - 3m$. Hàm số $y = x^3 - 3mx + 2$ có 2 điểm cực trị

$\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 3x^2 - 3m = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m > 0$ (1)

Ta có: $y = \frac{1}{3}x.y' - 2mx + 2$.

Suy ra phương trình đường thẳng Δ đi qua hai điểm cực đại và cực tiểu là $y = -2mx + 2 \Leftrightarrow 2mx + y - 2 = 0$



Đường thẳng Δ cắt đường tròn tâm $I(1;1)$, bán kính $R = 1$ tại hai điểm phân biệt A, B

$$\Leftrightarrow d(I; \Delta) < R \Leftrightarrow \frac{|2m-1|}{\sqrt{4m^2+1}} < 1 \Leftrightarrow |2m-1| < \sqrt{4m^2+1} \Leftrightarrow -4m < 0 \text{ luôn đúng do } m > 0$$

$$\text{Ta có } S_{IAB} = \frac{1}{2} \cdot IA \cdot IB \cdot \sin AIB = \frac{1}{2} \cdot \sin AIB \leq \frac{1}{2}. \text{ Dấu bằng xảy ra } \Leftrightarrow \sin AIB = 1 \Leftrightarrow AIB = 90^\circ.$$

Khi đó tam giác IAB vuông cân tại I có $IA = 1$ nên

$$d(I; \Delta) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{|2m-1|}{\sqrt{4m^2+1}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow 4m^2 - 8m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{2} \text{ thỏa mãn đk (1)}$$

Vậy diện tích tam giác IAB đạt giá trị lớn nhất khi $m = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{2}$.

VÍ DỤ 7. Tìm tất cả giá trị của tham số m để hàm số $y = x^4 + 2(m-2)x^2 + 3m - 2$ có ba điểm cực trị.

A. $m \in (2; +\infty)$.

B. $m \in (-2; 2)$.

C. $m \in (-\infty; 2)$.

D. $m \in (0; 2)$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } y = x^4 + 2(m-2)x^2 + 3m - 2; y' = 4x^3 + 4(m-2)x = 4x(x^2 + m - 2)$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = 2 - m \end{cases} \quad (1)$$

Để hàm số có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \text{phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác } 0 \Leftrightarrow 2 - m > 0 \Leftrightarrow m < 2.$$

VÍ DỤ 8. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+1)^2(x^2 - 4x)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x) = f(2x^2 - 12x + m)$ có đúng 5 điểm cực trị?

A. 18.

B. 17.

C. 16.

D. 19.

Lời giải.

Chọn B

$$\text{Ta có: } f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2(x^2 - 4x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 4 \end{cases}, \text{ trong đó } x = -1 \text{ là nghiệm kép.}$$

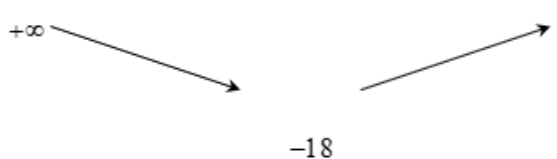
$$g(x) = f(2x^2 - 12x + m) \Rightarrow g'(x) = (4x - 12)f'(2x^2 - 12x + m)$$

$$\text{Xét } g'(x) = 0 \Leftrightarrow (4x - 12)f'(2x^2 - 12x + m) = 0 \quad (*)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ 2x^2 - 12x + m = -1 \\ 2x^2 - 12x + m = 0 \\ 2x^2 - 12x + m = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ 2x^2 - 12x + m = -1 \text{ (I)} \\ 2x^2 - 12x = -m \text{ (1)} \\ 2x^2 - 12x = 4 - m \text{ (2)} \end{cases}$$

(Điểm cực trị của hàm số $g(x)$ là nghiệm bội lẻ của phương trình $(*)$ nên ta loại phương trình

$$2x^2 - 12x + m = -1). \text{ Xét hàm số } y = 2x^2 - 12x \text{ có đồ thị (C) có } y' = 4x - 12$$

x	$-\infty$		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$				
			-18		

Để $g(x)$ có đúng 5 điểm cực trị thì mỗi phương trình (1);(2) đều có hai nghiệm phân biệt $\neq 3$
Do đó, mỗi đường thẳng $y = 4 - m$ và $y = -m$ phải cắt đồ thị (C) tại 2 điểm phân biệt có hoành độ khác 3. Nhận xét: đường thẳng $y = 4 - m$ luôn nằm trên đường thẳng $y = -m$.
Ta có: $-18 < -m \Leftrightarrow m < 18$. Vậy có 17 giá trị m nguyên dương.

VÍ DỤ 9. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{1}{3}x^3 - (2m-1)x^2 + (8-m)x + 2$ với $m \in \mathbb{R}$. Tập hợp tất cả các giá trị của m để hàm số $y = f(|x|)$ có 5 cực trị là khoảng $(a; b)$. Tích $a.b$ bằng

A. 12. B. 16. C. 10. D. 14.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y' = x^2 - 2(2m-1)x + 8 - m$.

Vì $f(|x|)$ là hàm chẵn (do $f(|-x|) = f(|x|)$), nên đồ thị hàm $f(|x|)$ đối xứng qua trục Oy . Do đó, khi hàm $f(x)$ có hai cực trị dương thì hàm $f(|x|)$ sẽ có thêm hai cực trị đối xứng qua trục Oy và một cực trị còn lại chính là giao điểm của đồ thị hàm $f(|x|)$ và trục Oy .

Yêu cầu bài toán tương đương với phương trình $y' = 0$ có 2 nghiệm dương phân biệt.

$$\text{Điều kiện tương đương là } \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2m-1)^2 - (8-m) > 0 \\ 2m-1 > 0 \\ 8-m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2 - 3m - 7 > 0 \\ m > \frac{1}{2} \\ m < 8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \vee m > \frac{7}{4} \\ m > \frac{1}{2} \\ m < 8 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \left(\frac{7}{4}; 8 \right). \text{ Vậy } a = \frac{7}{4}, b = 8 \text{ và } a.b = 14.$$

DẠNG 1**Cơ bản về cực trị hàm số**

- Câu 1:** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ là $f'(x) = (x-2018)(x-2019)(x-2020)^4$. Hàm số đã cho có bao nhiêu điểm cực trị?
A. 2. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 3.
- Câu 2:** Hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x + 1$ đạt cực tiểu tại điểm
A. $x = -1$. **B.** $x = 1$. **C.** $x = -3$. **D.** $x = 3$.
- Câu 3:** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)^2(x-3)^3(2x+3), \forall x \in \mathbb{R}$. Số cực trị của hàm số đã cho là
A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.
- Câu 4:** Cho hàm số $f(x)$ có $f'(x) = x^2(x-1)(x+2)^5$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là
A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.
- Câu 5:** Hàm số $y = 2x^3 - x^2 + 5$ có điểm cực đại là
A. $x = \frac{1}{3}$. **B.** $x = 0$. **C.** $M(0;5)$. **D.** $y = 5$.
- Câu 6:** Cho hàm số $f(x)$ có $f'(x) = x(x-1)(x+2)^2$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là
A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 1.
- Câu 7:** Hàm số $y = \frac{2x+5}{x+1}$ có bao nhiêu điểm cực trị?
A. 3. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 1.
- Câu 8:** Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ có hai điểm cực trị A và B . Điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng AB ?
A. $M(0;-1)$. **B.** $Q(-1;10)$. **C.** $P(1;0)$. **D.** $N(1;-10)$.
- Câu 9:** Số nào sau đây là điểm cực đại của hàm số $y = x^4 - 2x^3 + x^2 + 2$.
A. $\frac{1}{2}$. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 2.
- Câu 10:** Cho $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-2)(x-3)^2$. Khi đó số cực trị của hàm số $y = f(2x+1)$ là
A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.
- Câu 11:** Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 1$. Xét các mệnh đề sau đây
 1) Hàm số có 3 điểm cực trị; 2) Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-1;0)$; $(1;+\infty)$
 3) Hàm số có 1 điểm cực trị; 4) Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$; $(0;1)$
 Có bao nhiêu mệnh đề **đúng** trong bốn mệnh đề trên?
A. 2. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 3.
- Câu 12:** Hàm số $f(x) = C_{2019}^0 + C_{2019}^1 x + C_{2019}^2 x^2 + \dots + C_{2019}^{2019} x^{2019}$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 0. B. 2018. C. 1. D. 2019.

Câu 13: Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 2$. Tọa độ điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là

A. $(-2; 0)$. B. $(-1; 4)$. C. $(0; 1)$. D. $(1; 0)$.

Câu 14: Cho hàm số $f(x) = 1 + C_{10}^1 x + C_{10}^2 x^2 + \dots + C_{10}^{10} x^{10}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho bằng

A. 10. B. 0. C. 9. D. 1.

Câu 15: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x-1)(x-2)(3^x-1), \forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho bằng

A. 2. B. 1. C. 3. D. 4.

Câu 16: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x^2-9)(x^2-3x)^2, \forall x \in \mathbb{R}$. Gọi T là giá trị cực đại của hàm số đã cho. Chọn khẳng định đúng.

A. $T = f(0)$. B. $T = f(9)$. C. $T = f(-3)$. D. $T = f(3)$.

Câu 17: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x^2-9)(x^2-3x)^2, \forall x \in \mathbb{R}$. Gọi T là giá trị cực đại của hàm số đã cho. Chọn khẳng định đúng.

A. $T = f(0)$. B. $T = f(9)$. C. $T = f(-3)$. D. $T = f(3)$.

Câu 18: Gọi A, B, C là các điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 4$. Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC bằng

A. $\sqrt{2} + 1$. B. $\sqrt{2}$. C. $\sqrt{2} - 1$. D. 1.

Câu 19: Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 1$ có đồ thị (C) . Biết rằng đồ thị (C) có ba điểm cực trị tạo thành ba đỉnh của một tam giác, gọi là ΔABC . Tính diện tích ΔABC .

A. $S = 2$. B. $S = 1$. C. $S = \frac{1}{2}$. D. $S = 4$.

Câu 20: Cho hàm số $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 3(7m-3)x$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số không có cực trị. Số phần tử của S là

A. 2. B. 4. C. 0. D. Vô số.

Câu 21: Cho hàm số $y = f(x)$ có đúng ba điểm cực trị là $-2; -1; 0$ và có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Khi đó hàm số $y = f(x^2 - 2x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 6. B. 4. C. 5. D. 3.

Câu 22: Cho hàm số $f(x) = x^2(x-1)e^{3x}$ có một nguyên hàm là hàm số $F(x)$. Số điểm cực trị của hàm số $F(x)$ là

A. 1. B. 2. C. 3. D. 0.

Câu 23: Số điểm cực trị của hàm số $y = \left| \sin x - \frac{x}{4} \right|, x \in (-\pi; \pi)$ là

A. 2. B. 4. C. 3. D. 5.

Câu 24: Biết phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ($a \neq 0$) có đúng hai nghiệm thực. Hỏi đồ thị hàm số $y = |ax^3 + bx^2 + cx + d|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 4.

B. 5.

C. 2.

D. 3.

Câu 25: Số điểm cực trị của hàm số $f(x) = \int_{2x}^{x^2} \frac{2tdt}{1+t^2}$ là

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Câu 26: Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số $y = f(-2x^2 + 4x)$ là.

A. 3.

B. 4.

C. 2.

D. 5.

Câu 27: Biết rằng đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x - \frac{1}{x}$ có ba điểm cực trị thuộc một đường tròn (C). Bán kính của (C) gần đúng với giá trị nào dưới đây?

A. 12,4.

B. 6,4.

C. 4,4.

D. 27.

Câu 28: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (3-x)(x^2-1) + 2x, \forall x \in \mathbb{R}$. Hỏi hàm số $y = f'(x) - x^2 - 1$ có bao nhiêu điểm cực tiểu.

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 1.

Câu 29: Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị như hình vẽ. Chọn mệnh đề **đúng** trong các mệnh đề sau:

A. Hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có hai điểm cực trị trái dấu.

B. Đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ cắt trục tung tại điểm có tung độ dương.

C. Đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có hai điểm cực trị nằm bên phải trục tung.

D. Tâm đối xứng của đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ nằm bên trái trục tung.

Câu 30: Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ với $a > 0, c > 2018$ và $a + b + c < 2018$. Số điểm cực trị của hàm số $y = |f(x) - 2018|$ là

A. 1.

B. 3.

C. 5.

D. 7.

Câu 31: Hàm số $f(x) = \left| \frac{x}{x^2+1} - m \right|$ có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2.

B. 3.

C. 5.

D. 4.

Câu 32: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x^2-1)(x-4)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số $g(x) = f(3-x)$ có bao nhiêu điểm cực đại?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Câu 33: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và bảng xét dấu đạo hàm

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Hàm số $y = 3f(-x^4 + 4x^2 - 6) + 2x^6 - 3x^4 - 12x^2$ có tất cả bao nhiêu điểm cực tiểu?

A. 3.

B. 0.

C. 1.

D. 2.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.A	2.B	3.B	4.B	5.B	6.A	7.B	8.D	9.A	10
11	12.A	13.D	14.D	15.C	16.C	17.C	18.C	19.B	20.B
21	22.A	23.D	24.D	25.D	26.D	27.B	28.D	29.A	30.D
31	32.B	33.D							

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Chọn A

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2018 \\ x = 2019 \\ x = 2020 \end{cases}$.

Bảng xét dấu của $f'(x)$:

x	$-\infty$	2018	2019	2020	$+\infty$	
y'		+	0	-	0	+

Dựa vào bảng xét dấu của $f'(x)$ ta thấy $f'(x)$ đổi dấu qua hai điểm $x = 2018; x = 2019$ nên hàm số đã cho có hai điểm cực trị.

Câu 2: Chọn B

Ta có hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x + 1$ có tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$y' = x^2 + 2x - 3; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases}; y'' = 2x + 2; y''(-3) = -4 < 0; y''(1) = 4 > 0.$

Suy ra hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 1$.

Câu 3: Chọn B

Ta có $f'(x)$ đổi dấu khi qua các giá trị $x = 3$ và $x = \frac{-3}{2}$ nên hàm số có 2 cực trị.

Câu 4: Chọn B

Xét phương trình $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$

Ta có bảng xét dấu sau:

x	$-\infty$	-2	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+

Dễ thấy $f'(x)$ đổi dấu khi qua $x = -2$ và $f'(x)$ đổi dấu khi qua $x = 1$ nên hàm số có 2 điểm cực trị.

Câu 5: Chọn B

Ta có $y' = 6x^2 - 2x$, $y'' = 12x - 2$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{1}{3} \end{cases}$

$y''(0) = -2 < 0 \Rightarrow x = 0$ là điểm cực đại của hàm số $y = 2x^3 - x^2 + 5$.

Chú ý: phân biệt điểm cực đại của hàm số là x_{cd} , còn điểm cực đại của đồ thị hàm số là $(x_{cd}; y_{cd})$.

Câu 6: Chọn A

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$.

Nhận thấy $(x+2)^2 > 0 \forall x \neq -2 \Rightarrow f'(x)$ không đổi dấu khi qua nghiệm $x = -2$ nên $x = -2$ không phải là điểm cực trị hàm số.

Ngoài ra $f'(x)$ cùng dấu với tam thức bậc hai $x(x-1) = x^2 - x$ nên suy ra $x = 0; x = 1$ là hai điểm cực trị của hàm số.

Câu 7: Chọn B

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Ta có $y' = \frac{-3}{(x+1)^2} < 0 \forall x \in D$.

Do y' không đổi dấu nên hàm số không có cực trị.

Câu 8: Chọn D

Cách 1: Xét hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$, $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$.

Ta có $f(x) = \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}\right) \cdot f'(x) - 8x - 2$.

Đồ thị hàm số $f(x)$ có hai điểm cực trị A và B nên $f'(x_A) = f'(x_B) = 0$.

Suy ra $\begin{cases} y_A = f(x_A) = -8x_A - 2 \\ y_B = f(x_B) = -8x_B - 2 \end{cases}$

Do đó phương trình đường thẳng AB là $y = -8x - 2$.

Khi đó ta có $N(1; -10)$ thuộc đường thẳng AB .

Cách 2: Xét hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$,

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -1 \end{cases}$.

Suy ra tọa độ hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A(3; -26)$ và $B(-1; 6)$.

Ta có $\overrightarrow{AB}(-4; 32)$ cùng phương với $\vec{u}(-1; 8)$.

Phương trình đường thẳng AB đi qua $B(-1; 6)$ và nhận $\vec{u}(-1; 8)$ làm vectơ chỉ phương là

$\begin{cases} x = -1 - t \\ y = 6 + 8t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$

Khi đó ta có $N(1; -10)$ thuộc đường thẳng AB .

Câu 9: Chọn A

Ta có $y' = 4x^3 - 6x^2 + 2x$; $y' = 0 \Leftrightarrow 2x(2x^2 - 3x + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$.

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$	
y'		-	0	+	0	-	0	+		
y	$+\infty$									$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có điểm cực đại của hàm số đã cho là $x = \frac{1}{2}$.

Câu 10: Chọn C

$$y' = 2.f'(2x+1) = 2(2x+1-2)(2x+1-3)^2 = 2(2x-1)(2x-2)^2.$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = 1 \end{cases}. \text{ Nên hàm số có một cực trị.}$$

Câu 11: Chọn D

$$y' = 4x^3 - 4x \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 1 \\ x = 1 \Rightarrow y = 0 \\ x = -1 \Rightarrow y = 0 \end{cases}$$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$-$	$+$	$-$	$+$	
y	$+\infty$	0	1	0	$+\infty$

Hàm số có 3 điểm cực trị, đồng biến trên khoảng $(-1;0)$; $(1;+\infty)$ và nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$; $(0;1)$. Vậy mệnh đề 1, 2, 4 đúng.

Câu 12: Chọn A

$$\text{Ta có: } f(x) = C_{2019}^0 + C_{2019}^1 x + C_{2019}^2 x^2 + \dots + C_{2019}^{2019} x^{2019} = (1+x)^{2019}$$

$$\Rightarrow f'(x) = 2019.(1+x)^{2018} \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

Vì $x = -1$ là nghiệm bội chẵn nên $x = -1$ không phải là điểm cực trị của hàm số.

Câu 13: Chọn D

Ta có: $y' = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$; $y'' = 6x \Rightarrow y''(1) = 6 > 0; y''(-1) = -6 < 0$.

Vậy điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là $(1; 0)$.

Câu 14: Chọn D

Áp dụng khai triển nhị thức Niu tơn, ta có:

$$f(x) = 1 + C_{10}^1 x + C_{10}^2 x^2 + \dots + C_{10}^{10} x^{10} = (1+x)^{10} \Rightarrow f'(x) = 10(1+x)^9$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘			$+\infty$

Vậy hàm số đã cho có duy nhất một điểm cực trị $x = -1$.

Câu 15: Chọn C

$$\text{Ta có: } f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2(x-1)(x-2)(3^x-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}.$$

Vậy hàm số đã cho có 3 điểm cực trị.

Câu 16: Chọn C

$$\text{Ta có } f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 9)(x^2 - 3x)^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x-3)^3(x+3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 3 \\ x = 0 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-3		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗ $f(-3)$ ↘ $f(0)$ ↘ $f(3)$ ↗ $+\infty$							

Dựa vào bảng biến thiên ta có giá trị cực đại của hàm số là $T = f(-3)$.

Câu 17: Chọn C

$$\text{Ta có } f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 9)(x^2 - 3x)^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x-3)^3(x+3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 3 \\ x = 0 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-3		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗ $f(-3)$ ↘ $f(0)$ ↘ $f(3)$ ↗ $+\infty$							

Dựa vào bảng biến thiên ta có giá trị cực đại của hàm số là $T = f(-3)$.

Câu 18: Chọn C

Cách 1:

$$\text{Ta có } y' = 4x^3 - 4x. \text{ Khi đó } y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}.$$

Suy ra đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 4$ có ba điểm cực trị là $A(0;4)$, $B(1;3)$ và $C(-1;3)$.

Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC , ta có $BC \cdot \overrightarrow{IA} + AC \cdot \overrightarrow{IB} + AB \cdot \overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

$$\text{Mà } AB = AC = \sqrt{2} \text{ và } BC = 2 \text{ nên suy ra } I\left(0; \frac{4+3\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right).$$

Phương trình đường thẳng BC là $y = 3$.

Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC là $r = d(I, BC) = \sqrt{2} - 1$.

Cách 2:

Áp dụng công thức tính bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC ta có:

$$r = \frac{S_{ABC}}{p} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}} = \sqrt{2} - 1$$

$$\text{trong đó } a = BC = 2; b = c = AB = AC = \sqrt{2}; p = \frac{a+b+c}{2}$$

Cách 3:

Áp dụng công thức tính bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC ta có:

$$r = (p-a) \tan \frac{A}{2} = \sqrt{2} - 1 \text{ với } \cos A = \frac{(-2)^3 + 8.1}{(-2)^3 - 8 - 1} = 0 \Rightarrow A = 90^\circ.$$

Câu 19: Chọn B

$$\text{Ta có } y' = 4x^3 - 4x; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$$

Tọa độ các điểm cực trị của đồ thị hàm số là: $A(0;1)$, $B(-1;0)$, $C(1;0)$

$$\overrightarrow{AB} = (-1; -1); \overrightarrow{AC} = (1; -1) \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \\ AB = AC = \sqrt{2} \end{cases}$$

Suy ra ΔABC vuông cân tại A do đó $S = \frac{1}{2} AB \cdot AC = 1$.

Câu 20: Chọn B

Xét hàm số $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 3(7m-3)x \Rightarrow y' = 3x^2 - 6(m+1)x + 3(7m-3)$.

Ta có: $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2(m+1)x + 7m-3 = 0$. Hàm số đã cho không có cực trị

$\Leftrightarrow$ Phương trình $y' = 0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép

$$\Leftrightarrow \Delta'_{(2)} \leq 0 \Leftrightarrow (m+1)^2 - 1 \cdot (7m-3) \leq 0 \Leftrightarrow m^2 - 5m + 4 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq m \leq 4.$$

Do m là số nguyên nên $m \in \{1; 2; 3; 4\}$. Vậy tập S có 4 phần tử.

Câu 21: Chọn D

Do hàm số $y = f(x)$ có đúng ba điểm cực trị là $-2; -1; 0$ và có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $f'(x) = 0$ có ba nghiệm là $x = -2; x = -1; x = 0$.

Đặt $g(x) = f(x^2 - 2x) \Rightarrow g'(x) = (2x - 2) \cdot f'(x^2 - 2x)$. Vì $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $g'(x)$ cũng liên tục trên $\mathbb{R}$. Do đó những điểm $g'(x)$ có thể đổi dấu thuộc tập các điểm thỏa mãn

$$\begin{cases} 2x - 2 = 0 \\ x^2 - 2x = -2 \\ x^2 - 2x = -1 \\ x^2 - 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Ba nghiệm trên đều là nghiệm đơn hoặc bội lẻ nên hàm số $g(x)$ có ba điểm cực trị.

Câu 22: Chọn A

Hàm số $f(x)$ có TXĐ là $\mathbb{R}$, có một nguyên hàm là hàm số $F(x) \Rightarrow F'(x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$ nên

$$F'(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2(x-1)e^{3x} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Ta có bảng xét dấu $F'(x)$ như sau

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$F'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng trên, ta thấy hàm số $F(x)$ có một điểm cực trị.

Câu 23: Chọn D

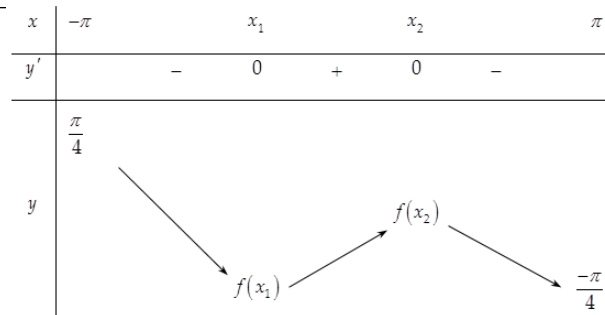
Xét hàm số $y = f(x) = \sin x - \frac{x}{4}$ với $x \in (-\pi; \pi)$.

$$\text{Ta có } f'(x) = \cos x - \frac{1}{4}. f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right) \\ x = x_2 \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

$$f(x_1) = \sin x_1 - \frac{x_1}{4} = -\frac{\sqrt{15}}{4} - \frac{x_1}{4} < -\frac{\sqrt{15}}{4} + \frac{\pi}{8} < 0.$$

$$f(x_2) = \sin x_2 - \frac{x_2}{4} = \frac{\sqrt{15}}{4} - \frac{x_2}{4} > \frac{\sqrt{15}}{4} - \frac{\pi}{8} > 0.$$

Bảng biến thiên



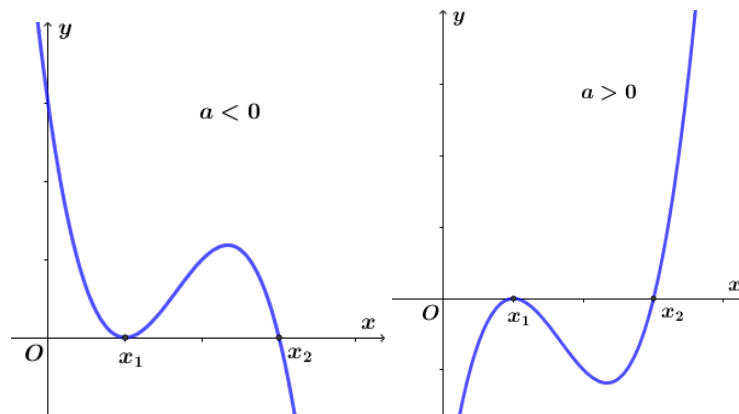
Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy hàm số có hai điểm cực trị và đồ thị hàm số cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt khác x_1, x_2 . Suy ra hàm số $y = \left| \sin x - \frac{x}{4} \right|$, với $x \in (-\pi; \pi)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 24: Chọn D

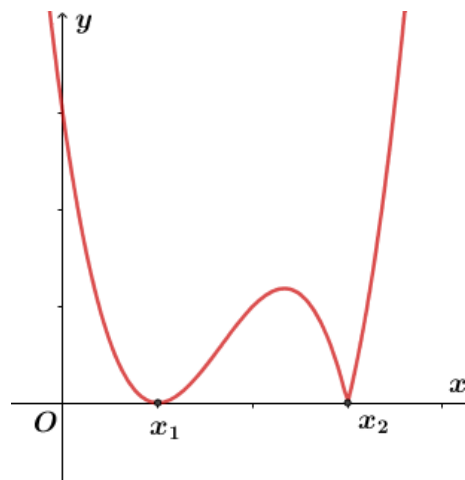
Phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, $a \neq 0$ là sự tương giao của đồ thị hàm số $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, $a \neq 0$ và trục hoành.

Do phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, $a \neq 0$ có đúng hai nghiệm thực nên phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ có thể viết dưới dạng $a(x - x_1)^2(x - x_2) = 0$ với x_1, x_2 là hai nghiệm thực của phương trình. Khi đó đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) tiếp xúc trục hoành tại điểm có hoành độ x_1 và cắt trục hoành tại điểm có hoành độ x_2 .

Đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) ứng với từng trường hợp $a > 0$ và $a < 0$:



Đồ thị hàm số $y = |ax^3 + bx^2 + cx + d|$ ($a \neq 0$) tương ứng là



Vậy đồ thị hàm số $y = |ax^3 + bx^2 + cx + d|$ ($a \neq 0$) có tất cả 3 điểm cực trị.

Câu 25: Chọn D

Gọi $F(t)$ là nguyên hàm của hàm số $y = \frac{2t}{1+t^2}$.

Khi đó: $f(x) = F(t)\big|_{2x}^{x^2} = F(x^2) - F(2x) \Rightarrow f'(x) = 2x \cdot F'(x^2) - 2F'(2x)$

$$= 2x \cdot \frac{2x^2}{1+x^4} - 2 \cdot \frac{4x}{1+4x^2} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{8x^5 + 4x^3 - 8x}{(1+x^4)(1+4x^2)}.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 8x^5 + 4x^3 - 8x = 0 \Leftrightarrow 4x(2x^4 + x^2 - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{4} \\ x^2 = \frac{-1 - \sqrt{17}}{4} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = x_1 = \frac{\sqrt{-1 + \sqrt{17}}}{2} \\ x = x_2 = -\frac{\sqrt{-1 + \sqrt{17}}}{2} \end{cases}.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	x_2	0	x_1	$+\infty$			
$f'(x)$		-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$		$f(0)$		$+\infty$			

$\swarrow$ $f(x_2)$ $\nearrow$ $\searrow$ $f(x_1)$ $\nearrow$

Từ bảng biến thiên suy ra: Hàm số có 3 điểm cực trị.

Câu 26: Chọn D

Quan sát đồ thị $f(x)$, ta thấy hàm số có hai điểm cực trị $x = -2; x = 0$ vì vậy

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ có hai nghiệm $x = -2; x = 0$ nên $f'(x) = 3a(x+2)x$.

Ta có:

$$\begin{aligned} y' &= [f(-2x^2 + 4x)]' = (-4x + 4)f'(-2x^2 + 2x) = (-4x + 4)(-2x^2 + 4x) \\ &= 3a(-4x + 4)(-2x^2 + 4x)(-2x^2 + 4x + 2) \\ &\Leftrightarrow y' = -48ax(x-2)(x-1)(x^2 - 2x - 1). \end{aligned}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \\ x = 1 + \sqrt{2} \\ x = 1 - \sqrt{2} \end{cases} \quad \text{và dấu của } y' \text{ đổi khi } x \text{ qua mỗi nghiệm trên.}$$

Vậy hàm số đã cho có 5 điểm cực trị.

Câu 27: Chọn B

TXĐ: $D = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$

$$y' = x - 3 + \frac{1}{x^2} = \frac{x^3 - 3x^2 + 1}{x^2}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 \approx 2,8794 \\ x_2 \approx 0,6527 \\ x_3 \approx -0,5321 \end{cases}.$$

$\Rightarrow$ Tọa độ các điểm cực trị: $A \approx (2,879; -4,84), B \approx (0,653; -3,277), C \approx (-0,532; 3,617)$.

Gọi $(C): x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ (1) là đường tròn đi qua ba điểm cực trị.

Thay tọa độ ba điểm A, B, C vào (1) ta được hệ phương trình 3 ẩn sau:

$$\begin{cases} 5,758a - 9,68b - c \approx 31,71 \\ 1,306a - 6,554b - c \approx 11,17 \\ -1,064a + 7,234b - c \approx 13,37 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \approx 5,374 \\ b \approx 1,0833 \\ c \approx -11,25 \end{cases}$$

$$\Rightarrow R \approx \sqrt{a^2 + b^2 - c} \approx \sqrt{41,3} \approx 6,4$$

Câu 28: Chọn D

Ta có $f'(x) = -x^3 + 3x^2 + 3x - 3 \Rightarrow y' = f''(x) - 2x = -3x^2 + 4x + 3$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{13}}{3};$$

$$y'' = -6x + 4; y''\left(\frac{2 + \sqrt{13}}{3}\right) = -2\sqrt{13} < 0; y''\left(\frac{2 - \sqrt{13}}{3}\right) = 2\sqrt{13} > 0$$

Suy ra hàm số có 1 điểm cực tiểu.

Câu 29: Chọn A

$$\text{Từ đồ thị ta có: } \begin{cases} \frac{a}{c} < 0 \\ -\frac{d}{c} < 0 \\ \frac{b}{d} > 0 \\ -\frac{b}{a} > 0 \\ a.d - b.c < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{c} < 0 & (1) \\ \frac{d}{c} > 0 & (2) \\ \frac{b}{d} > 0 & (3) \\ \frac{b}{a} < 0 & (4) \\ a.d - b.c < 0 & (5) \end{cases}$$

A. Hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có hai điểm cực trị trái dấu

$\Leftrightarrow y' = 3ax^2 + 2bx + c$ có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow 3a.c < 0 \Leftrightarrow a.c < 0$. Đúng với (1)

B. Đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ cắt trục tung tại điểm có tung độ dương.

Sai Suy ra $d > 0$ Chưa đủ để kết luận $\frac{d}{c} > 0$ vì ở đây $c > 0$ hoặc $c < 0$ ví dụ như hàm số

$$y = \frac{-x-2}{-3x-5}; y = \frac{x+2}{3x+5} \text{ rõ ràng } \frac{-2}{-5} = \frac{2}{5} > 0.$$

C. Đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có hai điểm cực trị nằm bên phải trục tung.

Sai vì

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'_{y'} > 0 \\ -\frac{2b}{3a} > 0 \\ \frac{c}{3a} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'_{y'} > 0 \\ \frac{b}{a} < 0 \\ \frac{c}{a} > 0 \end{cases} \quad \text{Trái với (1)}$$

D. Tâm đối xứng của đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ nằm bên trái trục tung.

Sai vì

Hoành độ tâm đối xứng là nghiệm của $y'' = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{3a}$

Yêu cầu của đề hoành độ tâm đối xứng âm nên $-\frac{b}{3a} < 0 \Leftrightarrow \frac{b}{a} > 0$ Trái với (3)

Câu 30: Chọn D

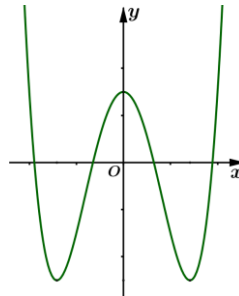
Xét hàm số $g(x) = f(x) - 2018 = ax^4 + bx^2 + c - 2018$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} a > 0 \\ c > 2018 \\ a + b + c < 2018 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \\ c > 2018 \end{cases} \Rightarrow a \cdot b < 0 \Rightarrow \text{hàm số } y = g(x) \text{ là hàm trùng phương có 3}$$

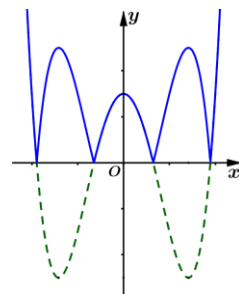
điểm cực trị.

Mà $g(0) = c - 2018 \Rightarrow g(0) > 0$, $g(1) = a + b + c - 2018 < 0 \Rightarrow g(x_{CT}) \leq g(1) < 0 \Rightarrow$ đồ thị hàm số $y = g(x)$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt.

Đồ thị hàm số $y = g(x)$ có dáng điệu như sau



Từ đồ thị $y = g(x)$, ta giữ nguyên phần phía trên trục Ox , phần dưới trục Ox ta lấy đối xứng qua trục Ox , ta được đồ thị hàm số $y = |g(x)|$.



Từ đó ta nhận thấy đồ thị $y = |g(x)|$ có 7 điểm cực trị.

Câu 31: Chọn D

Xét hàm số $g(x) = \frac{x}{x^2 + 1} - m$, TXĐ: $\mathbb{R}$.

Ta có $g'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$							

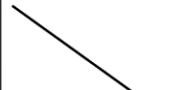
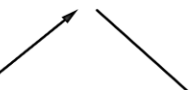
Từ bảng biến thiên ta có hàm số $y = g(x)$ luôn có hai điểm cực trị.

Xét phương trình $g(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{x^2+1} - m = 0 \Leftrightarrow mx^2 - x + m = 0$, phương trình này có nhiều nhất hai nghiệm.

Vậy hàm số $f(x)$ có nhiều nhất bốn điểm cực trị.

Câu 32: Chọn B

Từ giả thiết, ta có bảng biến thiên của hàm số $f(x)$

x	$-\infty$		-1		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$									

Ta có $g(x) = f(3-x) \Rightarrow g'(x) = -f'(3-x)$.

Từ bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ ta có

$$g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow f'(3-x) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3-x \leq -1 \\ 1 \leq 3-x \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ -1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Như thế ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x)$

x	$-\infty$		-1		2		4		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$									

Từ bảng biến thiên, ta nhận thấy hàm số $g(x)$ có một điểm cực đại.

Câu 33: Chọn D

Có $y' = -(12x^3 - 24x) \cdot f'(-x^4 + 4x^2 - 6) + 12x^5 - 12x^3 - 24x$

$$\begin{aligned}
&= -12x(x^2 - 2) \cdot f'(-x^4 + 4x^2 - 6) + 12x(x^4 - x^2 - 2) \\
&= -12x(x^2 - 2) \cdot (f'(-x^4 + 4x^2 - 6) - (x^2 + 1)).
\end{aligned}$$

$$\text{Khi đó } y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(-x^4 + 4x^2 - 6) - (x^2 + 1) = 0 \\ x^2 - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \\ f'(-x^4 + 4x^2 - 6) = x^2 + 1 \end{cases}.$$

Ta có $-x^4 + 4x^2 - 6 = -(x^2 - 2)^2 - 2 \leq -2, \forall x \in \mathbb{R}$.

Do đó $f'(-x^4 + 4x^2 - 6) \leq f'(-2) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Mà $x^2 + 1 \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

Do đó phương trình $f'(-x^4 + 4x^2 - 6) = x^2 + 1$ vô nghiệm.

Hàm số $y = 3f(-x^4 + 4x^2 - 6) + 2x^6 - 3x^4 - 12x^2$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	$+\infty$			
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Vậy hàm số $y = 3f(-x^4 + 4x^2 - 6) + 2x^6 - 3x^4 - 12x^2$ có 2 điểm cực tiểu.

DẠNG 2**Cực trị hàm tổng và hàm hợp**

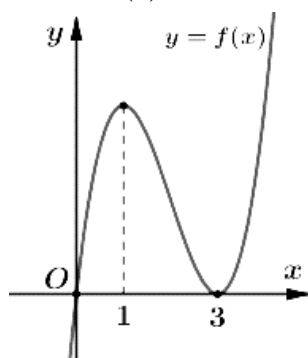
Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Hàm số $g(x) = f(x^2 - 2x + 1 - |x - 1|)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 8. B. 7. C. 9. D. 10.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ biết $f(1) > 1$ và có đồ thị như hình vẽ dưới.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in (-2020; 2021)$ để hàm số sau đây có tất cả 9 điểm

$$\text{cực trị } g(x) = \left| f^3(x) + \frac{3}{2}f^2(x) + m \right|.$$

- A. 1 B. 2 C. 0 D. 4

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	1		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	3		1		2		0		$+\infty$

The graph shows a piecewise linear function $f(x)$ defined on the interval $(-\infty, +\infty)$. The function is composed of several linear segments connecting the following points: $(-\infty, -\infty)$, $(1, 3)$, $(2, 1)$, $(3, 2)$, $(4, 0)$, and $(+\infty, +\infty)$. The function has local maxima at $x=1$ and $x=3$, and a local minimum at $x=2$.

Hàm số $y = 2[f(x)]^3 - 9[f(x)]^2 + 12f(x) + 2021$ có bao nhiêu điểm cực đại?

- A. 5. B. 10. C. 7. D. 9.

Câu 4: Cho hàm số bậc bốn $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$		3		3			
	$-\infty$	$\nearrow$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$\searrow$	$-\infty$

Số điểm cực tiểu của hàm số $g(x) = [f(x-1)]^2 + 2021$ là

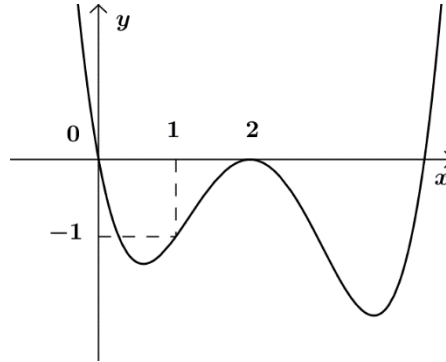
- A. 5. B. 4. C. 3. D. 7.

Câu 5: Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{\pm\sqrt{3}\}$, thỏa mãn

$1 - x^3 = 2x^2 f(x) + x f^2(x) - f'(x)$ và $f(1) = 0$. Hàm số $g(x) = [f(2x-1)]^2$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 6: Cho hàm số bậc năm $y = f(x)$ có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ dưới đây



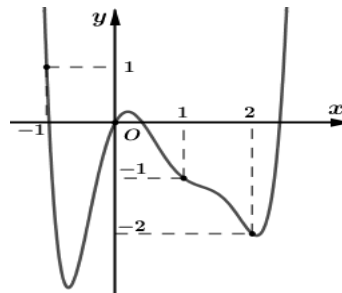
Tìm tất cả các giá trị của m để số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x^2 - 3x + m)$ là 5.

- A. $(2; +\infty)$. B. $(-\infty; \frac{17}{4})$. C. $(-\infty; \frac{9}{4})$. D. $(\frac{9}{4}; \frac{17}{4})$.

Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = (x-12)^{2020}(x^2 - 2x)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in (-2020; 2020)$ để hàm số $y = f(x^2 - 2020x + 2021m)$ có 3 điểm cực trị dương.

- A. 4038. B. 2021. C. 2020. D. 2019.

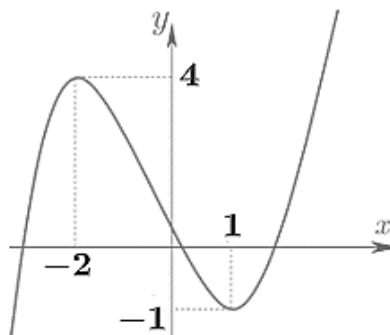
Câu 8: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, $g(-2) > 0$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới.



Số điểm cực trị của hàm số $y = |g(x)| = |2f(x+2) + (x+1)(x+3) + \log_2 2021|$ là

- A. 2. B. 1. C. 3. D. 4.

Câu 9: Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ



Có bao nhiêu giá trị m nguyên để hàm số $y = f(|f^2(x) - 2f(x) - m|)$ có 17 cực trị.

A. 4.

B. 0.

C. 2.

D. 6.

Câu 10: Cho $f(x)$ là hàm số bậc bốn thỏa mãn $f(0) = 0$. Hàm số $f'(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	3	$\frac{13}{4}$	$-\infty$

Hàm số $g(x) = |f(x^3) + 6x|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2

B. 4

C. 5

D. 3

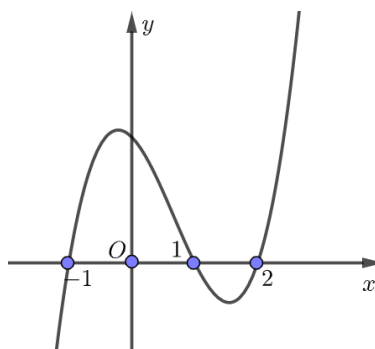
Câu 11: Cho $f(x)$ là hàm số bậc bốn thỏa mãn $f(0) = 0$. Hàm số $f'(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	1	$\frac{7}{6}$	$-\infty$

Tìm m nguyên để hàm số $g(x) = |f(x^3) + 3m^2x + m - 1|$ có nhiều điểm cực trị nhất có thể. Thì giá trị m nhỏ nhất thỏa mãn thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(-2; 0)$.B. $(-1; 1)$.C. $(1; \frac{3}{2})$.D. $(\frac{3}{2}; 3)$.

Câu 12: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ dưới đây.



Hàm số $g(x) = (|x| + |x^2 - 1|)$ có bao nhiêu điểm cực đại

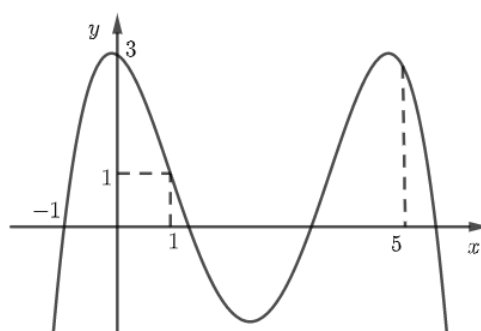
A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. 7.

Câu 13: Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$, có đồ thị như hình vẽ dưới đây



Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = 8f(x^3 - 3x + 3) - (2x^6 - 12x^4 + 16x^3 + 18x^2 - 48x + 1)$ là

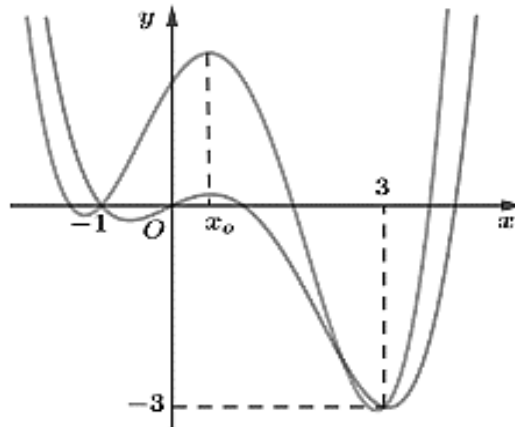
A. 5.

B. 3.

C. 7.

D. 9.

Câu 14: Cho hai hàm số bậc bốn $y = f(x)$ và $y = g(x)$ có các đồ thị như hình dưới đây.



Số điểm cực trị của hàm số $h(x) = f^2(x) + g^2(x) - 2f(x)g(x)$ là

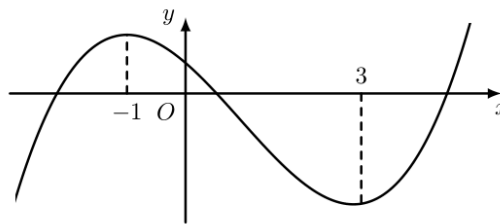
A. 5.

B. 4.

C. 6.

D. 3.

Câu 15: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = f((x-1)^2 + m)$ có 3 điểm cực trị. Tổng các phần tử của S là

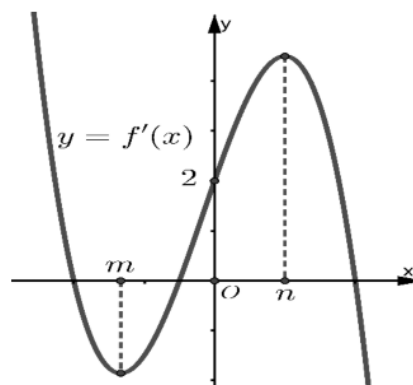
A. 2.

B. 4.

C. 8.

D. 10.

Câu 16: Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e, (a \neq 0)$ có đồ thị của đạo hàm $f'(x)$ như hình vẽ.



Biết rằng $e > n$. Số điểm cực trị của hàm số $y = f(f(x) - 2x)$ bằng

A. 7.

B. 10.

C. 14.

D. 6.

Câu 17: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-2		1	$+\infty$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$		2		5	$-\infty$

Số điểm cực đại của hàm số $g(x) = [f(2x^2 + x)]^2$ là

A. 3.

B. 4.

C. 2.

D. 1.

Câu 18: Cho hàm số bậc bốn trùng phương $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$		-1		1		-1	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $y = \frac{1}{x^4} [f(x) - 1]^4$ là

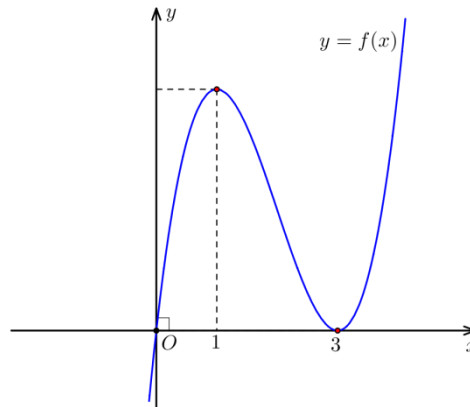
A. 6.

B. 7.

C. 5.

D. 4.

Câu 19: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $h(x) = |f^2(x) + f(x) + m|$ có đúng 3 cực trị.

A. $m \geq \frac{1}{4}$.B. $m \leq 1$.C. $m < 1$.D. $m > \frac{1}{4}$.

Câu 20: Cho hàm số bậc bốn $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
y'	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
y							
						</	

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = \frac{(x-2)^4}{[f(x+1)]^3}$ là

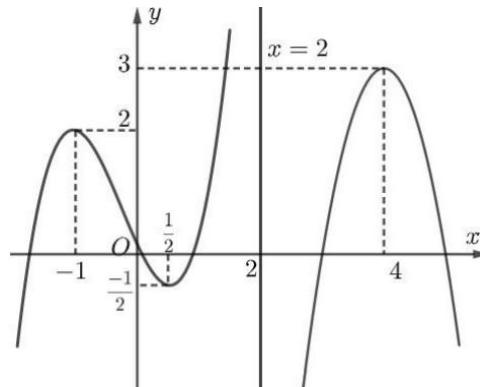
A. 7.

B. 4.

C. 5.

D. 6.

Câu 21: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên các khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$ có đồ thị như hình vẽ.



Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(|2x-1|+2)$ là

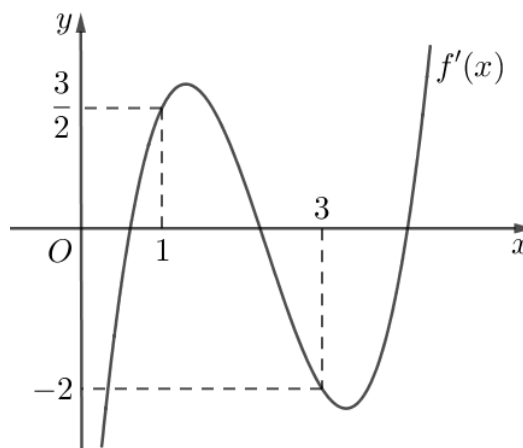
A. 5.

B. 4.

C. 2.

D. 3.

Câu 22: Cho hàm đa thức bậc bốn $y = f(x)$, hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Số điểm cực tiểu của hàm số $g(x) = f(x^4) - 2x^3 + 1$ là

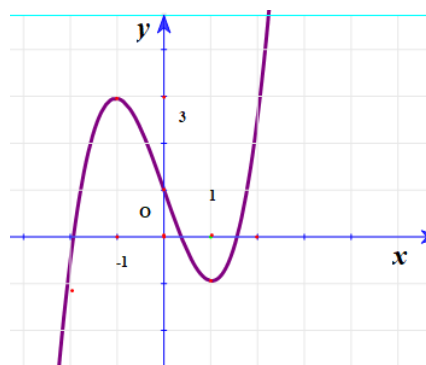
A. 3.

B. 6.

C. 4.

D. 5.

Câu 23: Cho hàm bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số $y = [xf(x-1)]^2$ là



A. 9.

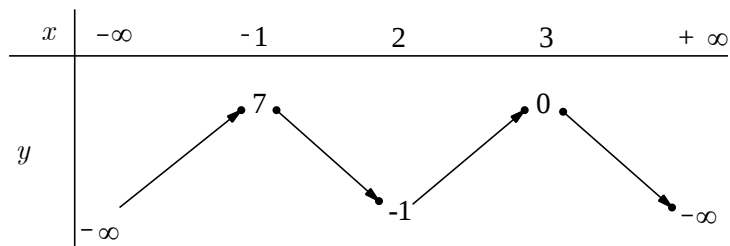
B. 7.

C. 6.

D. 5.

Câu 24: Cho bảng biến thiên của hàm số $f(2x-1)$ như hình vẽ bên dưới. Số điểm cực trị của hàm số

$f\left(4-3\sqrt{4x-x^2}\right)$ tương ứng là



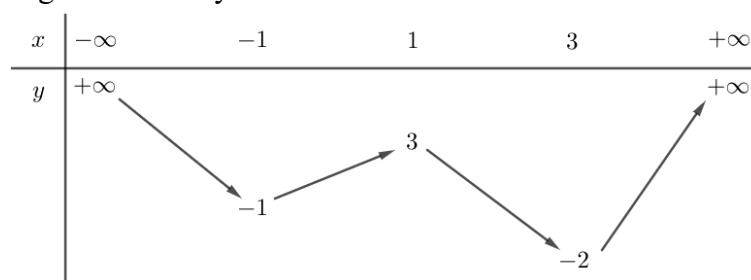
A. 3.

B. 5.

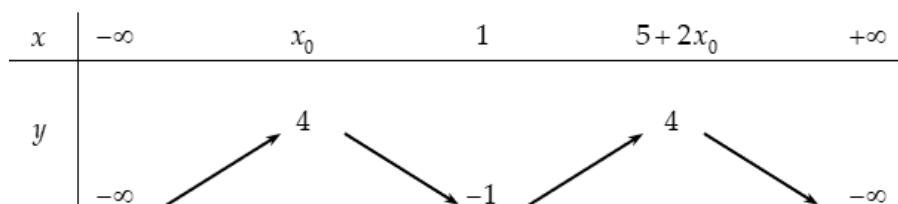
C. 4.

D. 7

Câu 25: Cho bảng biến thiên của hàm số $f(3-2x)$ như hình vẽ bên dưới. Hỏi hàm số $f(x^2-2x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-2;0)$.B. $(1;2)$.C. $(2;+\infty)$.D. $(-\infty;-2)$.

Câu 26: Cho hàm số $f(x)$ liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$. Biết rằng hàm số $f(x)$ có 2 điểm cực trị là $x=a; x=8-a$. Bên dưới cho bảng biến thiên của hàm số $f(x^2-2x+3)$. Số điểm cực trị của hàm số $f(x^3-3x^2+1)$ là



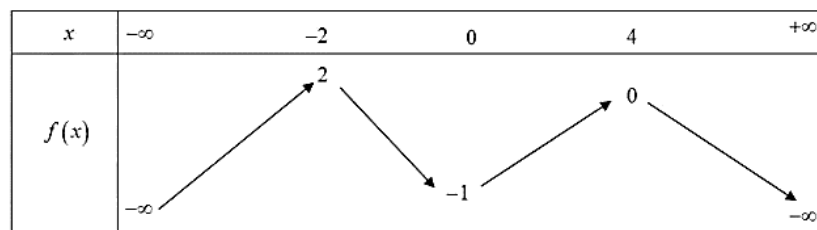
A. 3.

B. 4.

C. 8.

D. 6

Câu 27: Cho bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ như hình vẽ. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = x^4 \cdot [f(x)]^2$ là:



A. 9.

B. 6.

C. 5.

D. 7

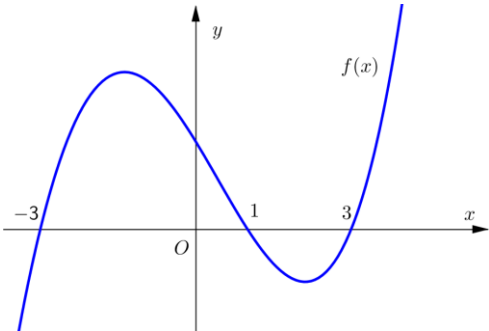
Câu 28: Cho bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ như hình vẽ. Số điểm cực trị của hàm số

$g(x) = x^2 \cdot [f(x+2)]^6$ là

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	2	-4	2	$-\infty$

- A. 5 .
- B. 12 .
- C. 7 .
- D. 9

Câu 29: Cho đồ thị hàm đa thức $y = f(x)$ như hình vẽ. Hỏi hàm số $g(x) = f(x) \cdot f(2x + 1)$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?



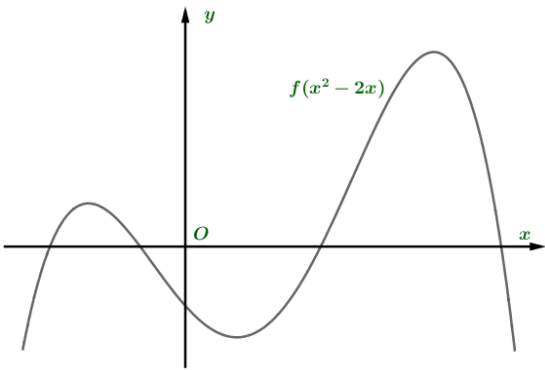
- A. 5 .
- B. 6 .
- C. 7 .
- D. 9

Câu 30: Cho bảng biến thiên của hàm đa thức $f(x)$ như hình vẽ. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = (x - 2)^3 [f(x - 1)]^2$ là:

x	$-\infty$	-2	-1	1	2	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	3	-2	0	2	$+\infty$

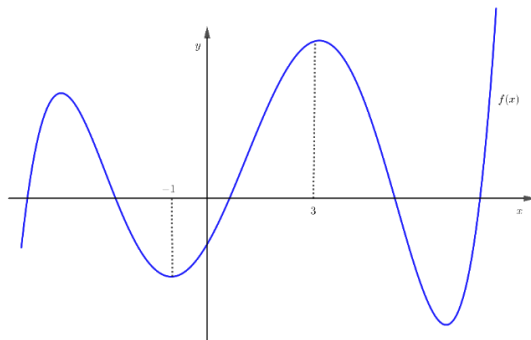
- A. 8 .
- B. 5 .
- C. 7 .
- D. 6 .

Câu 31: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết đồ thị hàm số $y = f(x^2 - x)$ như hình vẽ. Hỏi hàm số $y = f(x^2 - 2mx - |x - m| + m^2)$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị.



- A. 7 .
- B. 3 .
- C. 5 .
- D. 9

Câu 32: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết đồ thị hàm số $f(x)$ được cho như hình vẽ. Gọi S là tập các giá trị nguyên của tham số $m \in [-21; 21]$ để hàm số $y = f(-|x + 2021m| - 2m + 1)$ có đúng 5 điểm cực trị. Số phần tử của S là:



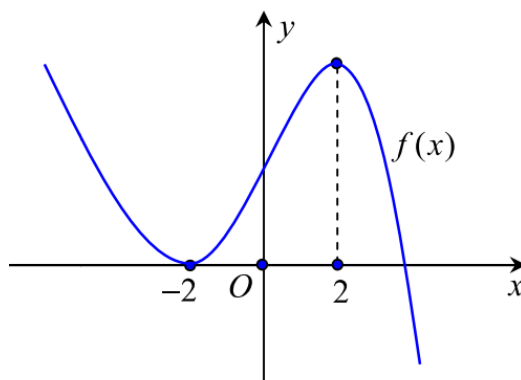
A. 5.

B. 2.

C. 1.

D. 3.

Câu 33: Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ. Hỏi có bao nhiêu giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = f(x^3 - mx^2 - 5x + 4m)$ có 6 điểm cực trị?



A. 1.

B. 2.

C. 4.

D. 5.

Câu 34: Cho bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ như hình vẽ bên dưới. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = [f(x) - m]^3 - 3f(x)$ có đúng 9 điểm cực trị?

x	$-\infty$					$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$		-5	2	-2	$+\infty$

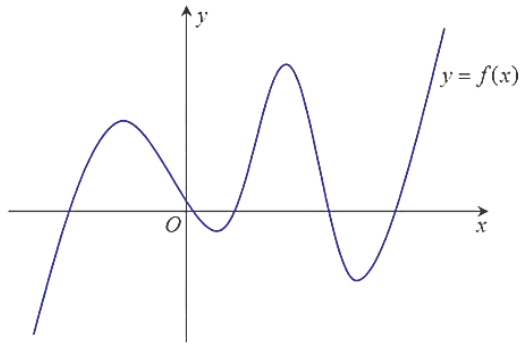
A. 4.

B. 5.

C. 6.

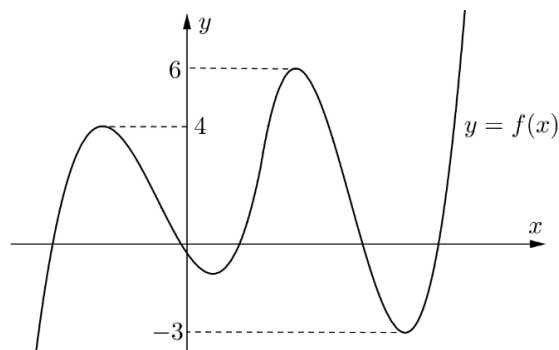
D. 3.

Câu 35: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục xác định trên $\mathbb{R}$, có đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ bên dưới. gọi S là tập hợp chứa các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = (f(x))^3 - m \cdot (f(x))^2 - (2m - 3)f(x) + 2021$ có đúng 4 điểm cực trị. Số phần tử của tập S là:



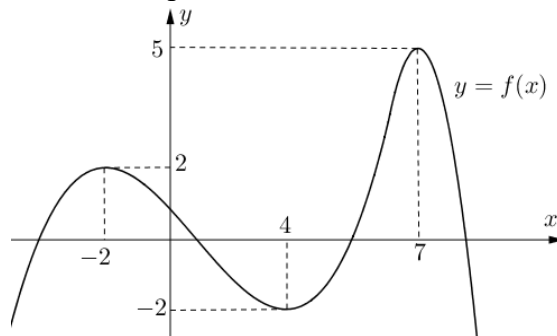
- A. 11. B. 8. C. 10. D. 9.

Câu 36: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$, đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ dưới. gọi S là tập các giá trị nguyên của tham số $m \in [-20; 20]$ để hàm số $y = (f(x))^2 - 2(m+2)f(x) - 3m + 12$ có đúng 5 điểm cực trị. Số phần tử của tập S là:



- A. 35 B. 32 C. 33 D. 34

Câu 37: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$, đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ dưới. gọi S là tập các giá trị nguyên của tham số $m \in [-20; 20]$ để hàm số $y = (f(x) + m)^2$ có đúng 5 điểm cực trị. Số phần tử của tập S là:



- A. 20 B. 22 C. 21 D. 19

Câu 38: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên của hàm số như hình vẽ. Hàm số $y = [f(x)]^3 + 6[f(x)]^2 + 2021$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

x	$-\infty$	-2	0	3	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	-4	1	-3	$+\infty$

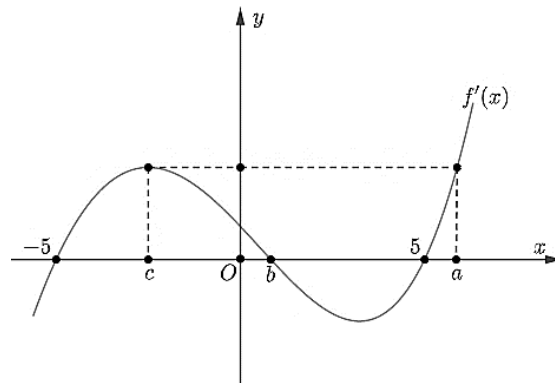
A. 3

B. 5

C. 6

D. 7

Câu 39: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ dưới đây. Biết rằng $f(10) = 30f(-6) = 30f(5) = 30$. Hỏi hàm số $y = f(f(x) - 3x + 9)$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?



A. 7.

B. 3.

C. 5.

D. 9

Câu 40: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau. Hỏi hàm số $y = f(x^3 - 3x^2 + 1)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

x	$-\infty$	-3	0	1	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	1	-6	-2	$-\infty$

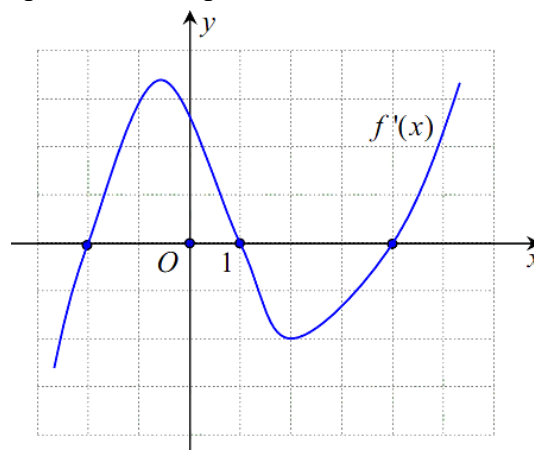
A. 7.

B. 3.

C. 5.

D. 9

Câu 41: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ dưới đây. Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $f(2^{x^3-3x+2} + m)$ có đúng 9 điểm cực trị. Số phần tử của tập S là:



A. 8.

B. 6.

C. 4.

D. 10

Câu 42: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục và xác định trên toàn $\mathbb{R}$. Biết rằng biểu thức đạo hàm $f'(x) = \left(x^2 - 5x + 1 - \frac{m}{4}\right)\left(x^2 - 4x + \frac{m}{4} + 8\right)$. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $f(|x|)$ có 5 điểm cực trị. Số phần tử của tập S là

A. 31.

B. 35.

C. 33.

D. 37

Câu 43: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x) = f^3(x) - 3mf(x) + 11 - 2m$ có đúng 9 điểm cực trị?

x	$-\infty$	-3	0	1	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	5	-3	1	$-\infty$

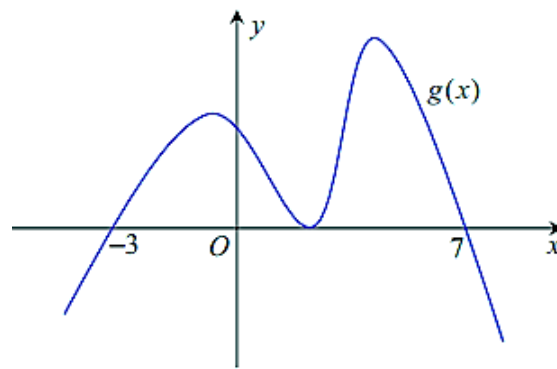
A. 3.

B. 5.

C. 8.

D. 9

Câu 44: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Đặt $f(x) = \int_{2018}^{x^2-2x} g(t)dt$. Số điểm cực trị của hàm số $f(x)$ tương ứng là:



A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 5

Câu 45: Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x + 1$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-60; 60]$ để phương trình $f(x^2 - 2mx + 1) = 0$ có đúng 3 điểm cực trị?

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 1

Câu 46: Cho hàm số $f(x) = |x^3 - 3mx^2 + 3(2m-1)x - m|$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-2022; 2022]$ để hàm số $f(x)$ có đúng 5 điểm cực trị nằm về phía bên phải của trục tung Oy ?

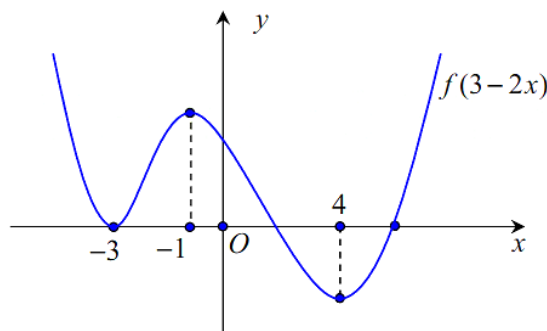
A. 2019.

B. 2020.

C. 2021.

D. 2022

Câu 47: Cho hàm số $y = f(3-2x)$ như hình vẽ. Biết rằng tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x^2 - 2m|x|)$ có đúng 7 điểm cực trị là $(a; b]$. Giá trị của biểu thức $P = 2(a^2 + b^2)$ là:



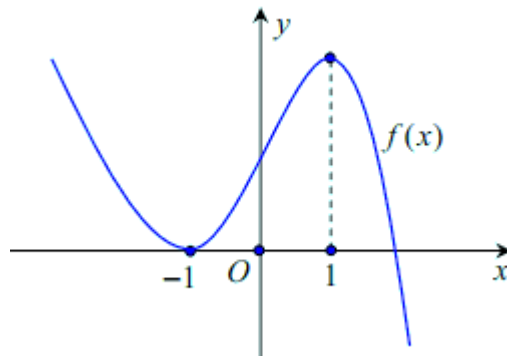
A. 5.

B. 10.

C. 15.

D. 20

Câu 48: Cho hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x^3 - mx^2 - 2x + m)$ có đúng 6 điểm cực trị?



- A. 3. B. 1. C. 4. D. 2

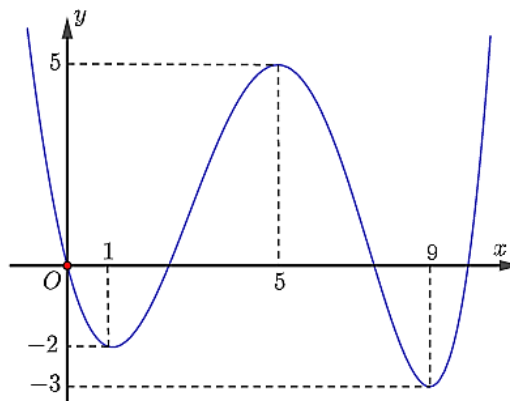
Câu 49: Cho hàm số bậc ba có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây:

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	4	-1	$+\infty$	

Số giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = f(x^3 - 3|x^2 - 1| + m)$ có 10 điểm cực trị?

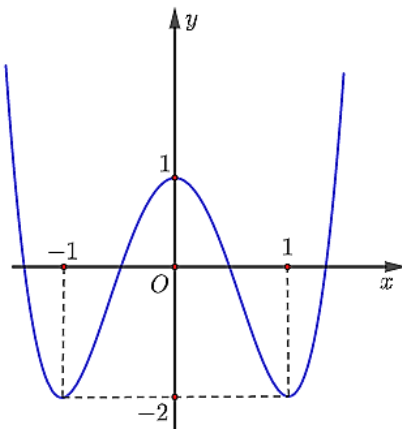
- A. 2. B. 3. C. 0. D. 1

Câu 50: Cho hàm số bậc bốn có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x) = f(|f^2(x) - 2f(x) - m|)$ có 51 điểm cực trị?

- A. 2. B. 3. C. 0. D. 1



A. 5. **B. 7.** **C. 9.** **D. 11.**

x	$-\infty$	-3	-1	1	2	3	$+\infty$
$u'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

The graph shows a periodic function $u(x)$ with a sawtooth pattern. The function is defined on the real line, with vertical asymptotes at $x = -3, -1, 1, 3, \dots$. The function increases linearly from $-\infty$ at $x = -3$ to 0 at $x = -1$, then decreases linearly to $-\infty$ at $x = 1$. This pattern repeats, with another peak at $x = 3$.

A. 6. **B. 7.** **C. 8.** **D. 9.**

BẢNG ĐÁP ÁN

1.B	2.C	3.A	4.B	5.D	6.C	7.D	8.C	9.C	10.D
11.D	12.A	13.A	14.A	15.A	16.A	17.C	18.C	19.D	20.C
21.C	22.C	23.B	24.A	25.B	26.B	27.D	28.D	29.A	30.D
31.C	32.B	33.B	34.A	35.D	36.C	37.B	38.D	39.A	40.A
41.B	42.C	43.C	44.C	45.A	46.C	47.B	48.D	49.C	50.D
51.B	52.B								

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT**Câu 1: Chọn B**

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } g'(x) &= \left(2x - 2 - \frac{x-1}{|x-1|} \right) \cdot f'(x^2 - 2x + 1 - |x-1|) \\ &= (x-1) \left(2 - \frac{1}{|x-1|} \right) \cdot f'(x^2 - 2x + 1 - |x-1|) = (x-1) \left(\frac{2|x-1|-1}{|x-1|} \right) \cdot f'(x^2 - 2x + 1 - |x-1|) \end{aligned}$$

$$\text{Phương trình } x-1=0 \Leftrightarrow x=1$$

$$\text{Khi: } 2|x-1|-1=0 \Leftrightarrow |x-1|=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{3}{2} \\ x=\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Khi: } f'(x^2 - 2x + 1 - |x-1|) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 1 - |x-1| = -1 \\ x^2 - 2x + 1 - |x-1| = 0 \\ x^2 - 2x + 1 - |x-1| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x-1|^2 - |x-1| + 1 = 0 \\ |x-1|^2 - |x-1| = 0 \\ |x-1|^2 - |x-1| - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Giải các phương trình trên ta được } \begin{cases} |x-1|=0 \\ |x-1|=1 \\ |x-1|=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=2 \\ x=0 \\ x=\frac{3+\sqrt{5}}{2} \\ x=\frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$\Rightarrow g'(x)=0$ có 7 lần đổi dấu. Vậy hàm số có 7 điểm cực trị.

Câu 2: Chọn C

Số cực trị của hàm số $g(x) = \left| f^3(x) + \frac{3}{2}f^2(x) + m \right|$ bằng số cực trị của hàm số

$h(x) = f^3(x) + \frac{3}{2}f^2(x) + m$ cộng với số giao điểm của đồ thị hàm số

$h(x) = f^3(x) + \frac{3}{2}f^2(x) + m$ và đường thẳng: $y = 0$.

Xét hàm số: $h(x) = f^3(x) + \frac{3}{2}f^2(x) + m$.

Có: $h'(x) = 3f^2(x) \cdot f'(x) + 3f(x) \cdot f'(x) = 3f(x) \cdot f'(x) [f(x) + 1]$

Giải phương trình: $h'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ f'(x) = 0 \\ f(x) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \\ x = 1 \\ x = \alpha, (\alpha < 0) \end{cases}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	α	0	1	3	$+\infty$
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$	$+$
$h(x)$	$-\infty$	$m + \frac{1}{2}$	m	$h(1)$	m	$+\infty$

Ta có $h(1) > m + \frac{1}{2}$. Nên đồ thị hàm số $g(x)$ có 9 điểm cực trị

$\Leftrightarrow m < 0 < m + \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{-1}{2} < m < 0$. Đối chiếu điều kiện suy ra không có giá trị nào của m .

Câu 3: Chọn A

Hàm số $y = g(x) = 2[f(x)]^3 - 9[f(x)]^2 + 12f(x) + 2021$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có $y' = 6 \cdot f^2(x) \cdot f'(x) - 18f(x) \cdot f'(x) + 12f'(x) = 6f'(x)[f^2(x) - 3f(x) + 2]$.

Giải phương trình đạo hàm: $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 & (1) \\ f(x) = 1 & (2) \\ f(x) = 2 & (3) \end{cases}$

Từ (1), ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \\ x = 3 \\ x = 4 \end{cases}$.

Từ (2), ta có $f(x) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \in (-\infty; 1) \\ x = 2 \text{ (nghiem kép)} \\ x = b \in (3; 4) \\ x = c \in (4; +\infty) \end{cases}$.

Từ (3), ta có $f(x) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = d \in (a; 1) \\ x = e \in (1; 2) \\ x = 3 (\text{ngheem kep}) \\ x = u \in (c; +\infty) \end{cases}$

Lập bảng xét dấu, ta có

x	$-\infty$	a	d	1	e	2	3	b	4	c	u	$+\infty$							
$f'(x)$		+		+		+	0		0	0		-	0		+		+		
$f(x)-1$		-	0			+		0		0	-		-	0	+		+		
$f(x)-2$		-		-	0		0	-		-	0	-		-			-	0	+
y'		+	0	-	0	0	0	0	-	0	0	-	0	0	-	0	0	+	

Dựa vào bảng biến thiên, ta có hàm số $y = g(x)$ có 5 điểm cực đại.

Câu 4: Chọn B

Ta có: $g'(x) = 2f(x-1)f'(x-1)$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2f(x-1) \cdot f'(x-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x-1) = 0 \\ f'(x-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = a (a < -1) \\ x-1 = b (-1 < b < 0) \\ x-1 = c (0 < c < 1) \\ x-1 = d (d > 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1+a (x < 0) \\ x = 1+b (0 < x < 1) \\ x = 1+c (1 < x < 2) \\ x = 1+d (x > 2) \end{cases}$$

$$f'(x-1) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 < -1 \\ 0 < x-1 < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ 1 < x < 2 \end{cases}$$

x	$-\infty$	$1+a$	0	$1+b$	1	$1+c$	2	$1+d$	$+\infty$			
$f(x-1)$	-	0	+	+	0	-	-	0	+	+	0	-
$f'(x-1)$	+	+	0	-	-	0	+	+	0	-	-	-
$g'(x)$	-	0	+	0	-	0	+	0	-	0	+	+

Vậy hàm số $y = g(x)$ có 4 điểm cực tiểu.

Câu 5: Chọn D

Ta có:

$$1 - x^3 = 2x^2 f(x) + x f^2(x) - f'(x) \Leftrightarrow 1 + f'(x) = x [x^2 + 2x f(x) + f^2(x)] = x [x + f(x)]^2$$

$$\Rightarrow \frac{1 + f'(x)}{[x + f(x)]^2} = x \Rightarrow \int \frac{1 + f'(x)}{[x + f(x)]^2} dx = \int x dx \Rightarrow -\frac{1}{x + f(x)} = \frac{x^2}{2} + C$$

$$\text{Do } f(1) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{1 + f(1)} = \frac{1}{2} + C \Rightarrow C = -\frac{3}{2}$$

Khi đó: $-\frac{1}{x+f(x)} = \frac{x^2-3}{2} \Rightarrow f(x) = -\frac{2}{x^2-3} - x \Rightarrow f'(x) = \frac{4x}{(x^2-3)^2} - 1$

Suy ra: $f(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{x^2-3} = x \Leftrightarrow x^3 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2(x+2) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -2$

Và $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x = (x^2-3)^2 \Leftrightarrow 4x = x^4 - 6x^2 + 9 \Leftrightarrow x^4 - 6x^2 - 4x + 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = a > 2 \end{cases}$

Khi đó: $g'(x) = 4f'(2x-1)f(2x-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 = -2 \\ 2x-1 = 1 \\ 2x-1 = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ x = 1 \\ x = \frac{a+1}{2} > \frac{3}{2} \end{cases}$

Ta có: $f(x)$ không xác định khi $x = \pm\sqrt{3} \Rightarrow g(x)$ không xác định khi

$2x-1 = \pm\sqrt{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pm\sqrt{3}+1}{2}$

Mặt khác: $g'(-1) = 4 \cdot f'(-3) \cdot f(-3) = 4 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) \cdot \frac{8}{3} < 0$ và

$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{-\sqrt{3}+1}{2}\right)^+} g(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow \left(\frac{-\sqrt{3}+1}{2}\right)^-} g(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)^+} g(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow \left(\frac{-\sqrt{3}+1}{2}\right)^-} g(x) = +\infty,$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

Ta có bảng biến thiên:

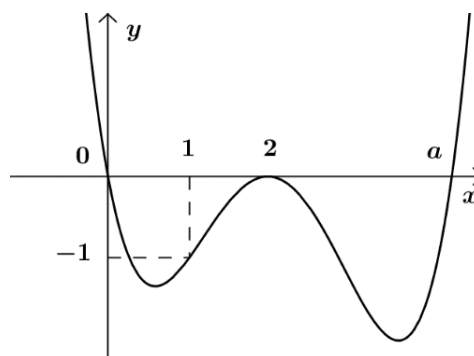
x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}+1}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}+1}{2}$	$\frac{a+1}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	-	0	+
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\nearrow$	$+\infty$	$\searrow$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra $g(x)$ có 3 điểm cực tiểu

Câu 6: Chọn C

Ta có: $g'(x) = (2x-3) \cdot f'(x^2-3x+m)$. Cho $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3=0 & (1) \\ f'(x^2-3x+m)=0 & (2) \end{cases}$

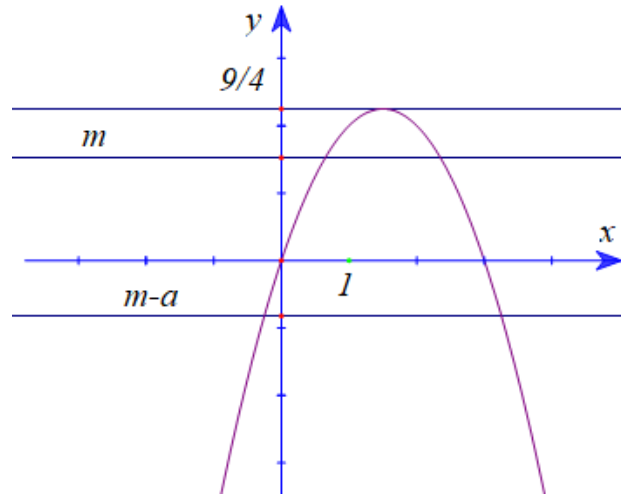
Ta có: $(1) \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$.



$$\text{Và (2)} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + m = 0 \\ x^2 - 3x + m = 2 \\ x^2 - 3x + m = a, a > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -x^2 + 3x \\ m - 2 = -x^2 + 3x \\ m - a = -x^2 + 3x \end{cases}$$

Với $x^2 - 3x + m = 2$ thì $g'(x) = 0$ có nghiệm kép.

Xét hàm số $y = -x^2 + 3x$ ta có đồ thị



Do $a > 2$, suy ra $m < \frac{9}{4}$ phương trình $g'(x) = 0$ có 5 nghiệm đơn phân biệt nên $g(x)$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi $m < \frac{9}{4}$

Câu 7: Chọn D

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } y &= f(x^2 - 2020x + 2021m) \Rightarrow y' = (2x - 2020) f'(x^2 - 2020x + 2021m) \\ &= (2x - 2020)(x^2 - 2020x + 2021m - 12)^{2020} (x^2 - 2020x + 2021m)(x^2 - 2020x + 2021m - 2) \\ y' = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2020 = 0 & (1) \\ x^2 - 2020x + 2021m - 12 = 0 & (2) \\ x^2 - 2020x + 2021m = 0 & (3) \\ x^2 - 2020x + 2021m - 2 = 0 & (4) \end{cases} \end{aligned}$$

Dễ thấy (2), (3), (4) không có nghiệm chung, và $(x^2 - 2020x + 2021m - 12)^{2020} \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số $y = f(x^2 - 2020x + 2021m)$ có 3 điểm cực trị dương khi hai phương trình (3), (4) có 2 nghiệm trái dấu khác 1010.

$$(3) \text{ có 2 nghiệm trái dấu khác 1010} \Leftrightarrow \begin{cases} 2021m < 0 \\ 1010^2 - 2020 \cdot 1010 + 2021m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < 0$$

$$(4) \text{ có 2 nghiệm trái dấu khác 1010} \Leftrightarrow \begin{cases} 2021m - 2 < 0 \\ 1010^2 - 2020 \cdot 1010 + 2021m - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < \frac{2}{2021}$$

Vậy $m < 0$ thì hàm số có 3 cực trị dương.

Do $m \in (-2020; 2020)$ nên có 2019 số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

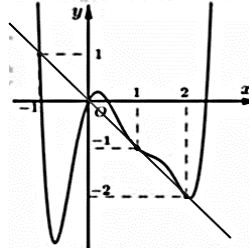
Câu 8: Chọn C

Xét hàm số $g(x) = 2f(x+2) + (x+1)(x+3) + \log_2 2021$

Ta có $g'(x) = 2f'(x+2) + 2x + 4$. Cho $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x+2) = -(x+2)$.

Đặt $t = x+2$ ta được $f'(t) = -t$. (1)

(1) là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị $y = f'(t)$ và đường thẳng $d : y = -t$



Dựa vào đồ thị của $y = f'(t)$ và đường thẳng $y = -t$ ta có

$$f'(t) = -t \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 0 \\ t = 1 \\ t = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2 = -1 \\ x+2 = 0 \\ x+2 = 1 \\ x+2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = -2 \\ x = -1 \\ x = 0 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$

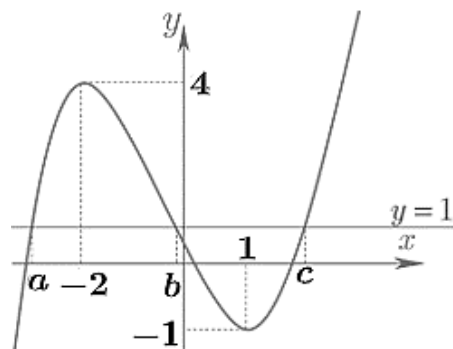
x	$-\infty$	-3	-2	-1	0	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0
$g(x)$						

Suy ra hàm số $g(x) = 2f(x+2) + (x+1)(x+3) + \log_2 2021$ có 2 điểm cực trị và $g(x) = 0$ có 1 nghiệm bội lẻ.

Vậy hàm số $y = |g(x)| = |2f(x+2) + (x+1)(x+3) + \log_2 2021|$ có 3 điểm cực trị.

Câu 9: Ta thấy hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại các điểm $x = -2$ và $x = 1$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } y' &= \frac{(f^2(x) - 2f(x) - m)' (f^2(x) - 2f(x) - m)}{|f^2(x) - 2f(x) - m|} f'(|f^2(x) - 2f(x) - m|) \\ &= \frac{2f'(x)(f(x)-1)(f^2(x)-2f(x)-m)}{|f^2(x)-2f(x)-m|} \left(\underbrace{|f^2(x)-2f(x)-m|}_{>0} + 2 \right) (|f^2(x)-2f(x)-m|-1) \end{aligned}$$



$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2; x = 1 \\ f(x) = 1 \Leftrightarrow x = a, x = b, x = c \\ f^2(x) - 2f(x) - m = 0 \Leftrightarrow f^2(x) - 2f(x) = m \\ |f^2(x) - 2f(x) - m| = 1 \Leftrightarrow f^2(x) - 2f(x) = m \pm 1 \end{cases}$$

Xét hàm số $g(x) = f^2(x) - 2f(x)$; $g'(x) = 2f'(x)[f(x) - 1]$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2; x = 1 \\ f(x) = 1 \Leftrightarrow x = a, x = b, x = c \end{cases}; \begin{cases} g(a) = g(b) = g(c) = 1^2 - 2 \cdot 1 = -1 \\ g(-2) = 4^2 - 2 \cdot 4 = 8 \\ g(1) = (-1)^2 - 2 \cdot (-1) = 3 \end{cases}$$

Bảng biến thiên hàm số $g(x)$

x	$-\infty$	a	-1	b	1	c	$+\infty$						
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$					
$g(x)$	$+\infty$		-1		8		-1		3		-1		$+\infty$

Số nghiệm bội lẻ của $y' = 0$ phụ thuộc vào số giao điểm của đồ thị hàm số $g(x)$ với 3 đường thẳng $d_1: y = m + 1$, $d_2: y = m$, $d_3: y = m - 1$.

Yêu cầu bài toán tương đương với 3 trường hợp sau.

Trường hợp 1: d_1, d_2, d_3 đều cắt đồ thị hàm số $g(x)$ tại 4 điểm phân biệt không trùng với các điểm $x \in -2; 1; a; b; c$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 \leq m + 2 < 8 \\ 3 \leq m < 8 \\ 3 \leq m - 2 < 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq m < 6 \\ 3 \leq m < 8 \\ 5 \leq m < 10 \end{cases} \Leftrightarrow 5 \leq m < 6 \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m = 5.$$

Trường hợp 2: 2 đường thẳng d_1, d_2 cắt đồ thị hàm số $g(x)$ tại 6 điểm phân biệt và d_3 không cắt hoặc tiếp xúc đồ thị hàm số $g(x)$ tại điểm có tung độ bằng -1 .

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m + 2 < 3 \\ -1 < m < 3 \\ m - 2 \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < m < 1 \\ -1 < m < 3 \\ m \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m < 1 \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m = 0 \quad (2).$$

Trường hợp 3: Hai đường thẳng d_1 cắt đồ thị hàm số $g(x)$ tại 2 điểm phân biệt và d_2 cắt đồ thị hàm số $g(x)$ tại hai điểm phân biệt, d_3 cắt $g(x)$ tại 6 điểm phân biệt.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m + 2 \geq 8 \\ 3 \leq m < 8 \\ -1 < m - 2 < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 6 \\ 3 \leq m < 8 \\ 1 < m < 5 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \emptyset \quad (3)$$

Từ (1), (2) & (3) $\Rightarrow$ có 2 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 10: Chọn D

Xét hàm số $h(x) = f(x^3) + 6x$ có $h'(x) = 3x^2 f'(x^3) + 6$.

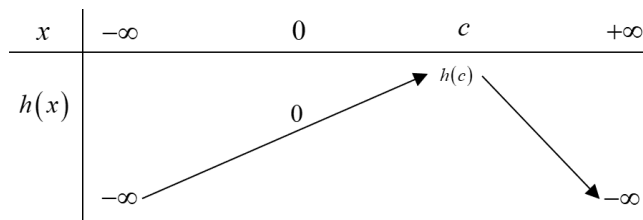
Ta có $h'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x^3) = \frac{-2}{x^2}$ (*)

Ta dễ dàng thấy được $f''(x) = a(x+1)(x+2) \Rightarrow f'(x) = a\left(\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 2x + C\right)$

Từ bảng biến thiên: $f'(-2) = 3$, $f'(-1) = \frac{13}{4}$ ta tìm được $a = -\frac{3}{2}$, $C = -\frac{4}{3}$, từ đó $f'(0) = 2 > 0$

Với $x < 0$, $f'(x) > 0$ nên kéo theo $f'(x^3) > 0$ mà $\frac{-2}{x^2} < 0$ nên phương trình (*) không có nghiệm và $h'(x) > 0$.

Với $x > 0$, $f'(x)$ là hàm số nghịch biến, còn $\frac{-2}{x^2}$ là hàm số đồng biến nên phương trình (*) có nhiều nhất 1 nghiệm. Ta có $h'(0) \approx +\infty$ và $h'(+\infty) \approx -\infty$ nên phương trình (*) có nghiệm duy nhất $x = c > 0$. Từ đó ta có bảng biến thiên của $h(x)$



Do ta có $h(0) = f(0) + 6 \cdot 0 = 0$ nên $h(c) > 0$

Từ đó suy ra hàm số $g(x) = |h(x)|$ có 3 cực trị.

Câu 11: Chọn D

Xét hàm số $h(x) = f(x^3) + 3m^2x + m - 1$ có $h'(x) = 3x^2 f'(x^3) + 6m^2$.

Nếu $m = 0$ thì $h(x) = f(x^3)$ nên $g(x) = |f(x^3) + 3m^2x + m - 1|$ có 3 cực trị

Xét với $m \neq 0$

Ta có $h'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x^3) = \frac{-2m^2}{x^2}$ (*)

Ta dễ dàng thấy được $f''(x) = a(x+1)(x+2) \Rightarrow f'(x) = a\left(\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 2x + C\right)$

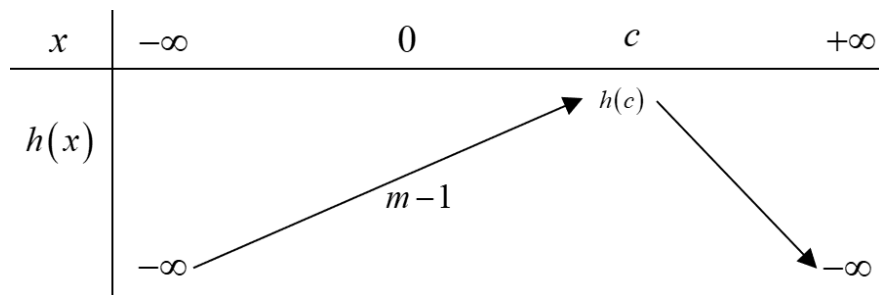
Từ bảng biến thiên: $f'(-2) = 1$, $f'(-1) = \frac{7}{6}$ ta tìm được $a = -1$, $C = -\frac{1}{3}$, từ đó $f'(0) = \frac{1}{3} > 0$

Với $x < 0$, $f'(x) > 0$ nên kéo theo $f'(x^3) > 0$ mà $\frac{-2m^2}{x^2} < 0$ nên phương trình (*) không có nghiệm và $h'(x) > 0$.

Với $x > 0$, $f'(x)$ là hàm số nghịch biến, còn $\frac{-2m^2}{x^2}$ là hàm số đồng biến nên phương trình (*)

nhiều nhất 1 nghiệm. Ta có $\lim_{x \rightarrow 0} \left(f'(x^3) + \frac{2m^2}{x^2}\right) \approx +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f'(x^3) + \frac{2m^2}{x^2}\right) \approx -\infty$ nên phương trình (*) có nghiệm duy nhất $x = c > 0$.

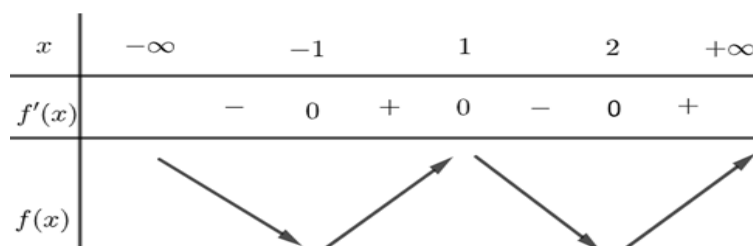
Từ đó ta có bảng biến thiên của $h(x)$



Dựa vào bảng biến thiên và $h(0) = f(0) + m - 1 = m - 1$ nên hàm số $g(x) = |h(x)|$ có nhiều nhất 3 cực trị nếu $h(c) > 0$. Từ đó ta cần $h(0) \geq 0 \Rightarrow m \geq 1$. Vậy $m \geq 0$.

Câu 12: Chọn A

Từ đồ thị của $y = f'(x)$, suy ra bảng biến thiên của $y = f(x)$ như sau



Đặt $u = |x| + |x^2 - 1|$.

Ta có bảng ghép trục sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
$ x $	$-x$	$-x$	0	x	x			
$ x^2 - 1 $	$x^2 - 1$	0	$1 - x^2$	$1 - x^2$	$x^2 - 1$			
u	$x^2 - x - 1$	$1 - x - x^2$	$1 + x - x^2$	$x^2 + x - 1$				
u	$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$	$\frac{5}{4} - \left(x + \frac{1}{2}\right)^2$	$\frac{5}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$	$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$				
u	$+\infty$	2	1	$\frac{5}{4}$	1	$\frac{5}{4}$	2	$+\infty$
$f(u)$								

Vậy hàm số $g(x) = f(|x| + |x^2 - 1|)$ có ba điểm cực đại.

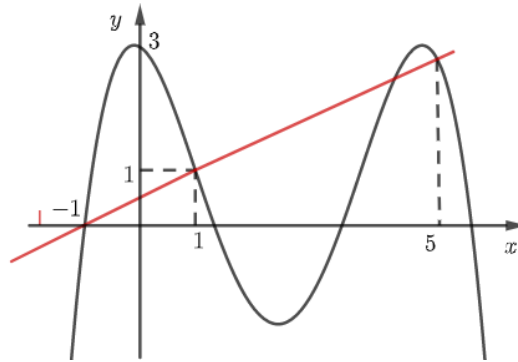
Câu 13: Chọn A

Ta có: $g'(x) = 8(3x^2 - 3)f'(x^3 - 3x + 3) - (12x^5 - 48x^3 + 48x^2 + 36x - 48)$.

$$= 24(x^2 - 1) \left[f'(x^3 - 3x + 3) - \frac{(x^3 - 3x + 3) + 1}{2} \right];$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1. \\ f'(x^3 - 3x + 3) = \frac{(x^3 - 3x + 3) + 1}{2} \end{cases} \quad (1).$$

Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$, ta có:



Đặt $t = x^3 - 3x + 3$. Phương trình (1) trở thành: $f'(t) = \frac{t+1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 1 \\ t = 5 \end{cases}.$

Với $t = -1$ ta có: $x^3 - 3x + 3 = -1$. Phương trình này có 1 nghiệm.

Với $t = 1$ ta có: $x^3 - 3x + 3 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$, trong đó $x = 1$ là nghiệm kép.

Với $t = 5$ ta có: $x^3 - 3x + 3 = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -1 \end{cases}$, trong đó $x = -1$ là nghiệm kép.

Như vậy $g'(x) = 0$ có 3 nghiệm đơn phân biệt và 2 nghiệm bội ba.

Câu 14: Chọn A

Ta có: $h(x) = [f(x) - g(x)]^2 \Rightarrow h'(x) = 2[f(x) - g(x)][f'(x) - g'(x)].$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) - g(x) = 0 & (1) \\ f'(x) - g'(x) = 0 & (2) \end{cases}$$

Từ đồ thị ta thấy phương trình (1) có đúng 3 nghiệm phân biệt là $x = -1$; $x = x_1$ ($x_1 \in (-1; 3)$); $x = 3$, và $f(x) - g(x)$ đổi dấu khi đi qua các nghiệm này. Do đó các nghiệm trên là nghiệm bội lẻ của (1). Mà $f(x)$ và $g(x)$ đều là đa thức bậc 4 nên bậc của phương trình (1) nhỏ hơn hoặc bằng 4. Từ đó suy ra phương trình (1) là phương trình bậc 3.

Do phương trình (1) là phương trình bậc 3 có 3 nghiệm phân biệt nên phương trình (2) phải có 2 nghiệm phân biệt không trùng các nghiệm của phương trình (1).

Suy ra $h'(x) = 0$ có 5 nghiệm phân biệt và $h'(x)$ đổi dấu khi đi qua các nghiệm đấy, nên hàm $h(x)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 15: Chọn A

Xét hàm số $y = f((x-1)^2 + m)$ có đạo hàm $y' = 2(x-1)f'((x-1)^2 + m)$.

$$\text{Cho } y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ (x-1)^2 + m = -1 \\ (x-1)^2 + m = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ (x-1)^2 = -1-m \\ (x-1)^2 = 3-m \end{cases}$$

Để hàm số có 3 điểm cực trị thì $-1-m \leq 0 < 3-m \Leftrightarrow -1 \leq m < 3 \Rightarrow m \in \{-1; 0; 1; 2\}$

Vậy tổng các phần tử của S là 2.

Câu 16: Chọn A

Ta có $y' = (f(x) - 2x)' \cdot f''(f(x) - 2x) = (f'(x) - 2) \cdot f''(f(x) - 2x)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) - 2 = 0 \\ f''(f(x) - 2x) = 0 \end{cases}$$

Khi $f'(x) - 2 = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 2$ có 3 nghiệm.

$$\text{Khi } f''(f(x) - 2x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} f(x) - 2x = m \quad (1) \\ f(x) - 2x = n \quad (2) \end{cases}$$

Xét phương trình (1): $f(x) - 2x = m (m < 0)$, đặt $g(x) = f(x) - 2x \Rightarrow g'(x) = f'(x) - 2$.

$$\text{Phương trình đạo hàm } g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 < m \\ x = 0 \\ x = x_2 > n \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

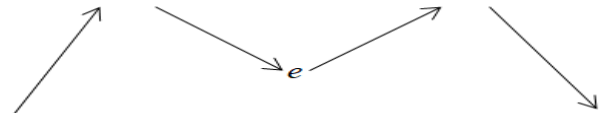
x	$-\infty$	$x_1 < m$	0	$x_2 > n$	$+\infty$			
$g'(x)$		+	0	-	0	+	0	-
$g(x)$								

Từ bảng biến thiên $\Rightarrow$ phương trình (1) có 2 nghiệm.

Xét phương trình (2): $f(x) - 2x = n (n < e)$, đặt $h(x) = f(x) - 2x \Rightarrow h'(x) = f'(x) - 2$.

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 < m \\ x = 0 \\ x = x_2 > n \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$x_1 < m$			0	$x_2 > n$			$+\infty$
$h'(x)$		+	0	-	0	+	0	-	
$h(x)$									

Từ bảng biến thiên $\Rightarrow$ phương trình có 2 nghiệm.

Vậy hàm số $y = f'(f(x) - 2x)$ có 7 điểm cực trị.

Câu 17: Chọn C

Ta có $g'(x) = \left[f(2x^2 + x) \right]^2 = 2f(2x^2 + x)(4x + 1)f'(2x^2 + x)$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(2x^2 + x) = 0 \\ 4x + 1 = 0 \\ f'(2x^2 + x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + x = a \quad (a > 1) \\ x = -\frac{1}{4} \\ 2x^2 + x = 1 \\ 2x^2 + x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8a}}{4} \quad (a > 1) \\ x = -\frac{1}{4} \\ x = \frac{1}{2} \\ x = -1 \end{cases}.$$

Vì $a > 1$ nên có thứ tự các nghiệm của $g'(x) = 0$ là:

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{1+8a}}{4} < x_2 = -1 < x_3 = -\frac{1}{4} < x_4 = \frac{1}{2} < x_5 = \frac{-1 + \sqrt{1+8a}}{4}.$$

Vậy $g'(x) = 0$ có 5 nghiệm đơn như trên suy ra $g'(x)$ đổi dấu khi x chạy qua các nghiệm đơn.

Với $0 \in \left(-\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right) (0 \in (x_3; x_4))$. Xét $g'(0) = 2.f(0)f'(0) > 0$. Suy ra $g'(x) > 0$ trên khoảng

$\left(-\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right)$ hay khoảng $(x_3; x_4)$. Ta có bảng xét dấu của $g'(x)$ như sau

x	$-\infty$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$+\infty$					
$g'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	0	-	0	+

Ta có hàm $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên hàm số $g(x) = \left[f(2x^2 + x) \right]^2$ cũng liên tục trên $\mathbb{R}$.

Vậy hàm số $g(x) = \left[f(2x^2 + x) \right]^2$ có 2 điểm cực đại là $x = x_2 = -1$ và $x = x_4 = \frac{1}{2}$.

Câu 18: Chọn C

Giả sử $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$. Từ $\begin{cases} f'(0) = 0 \\ f(0) = 1 \\ f'(\pm 1) = 0 \\ f(\pm 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -4 \\ c = 1 \end{cases}$. Suy ra $f(x) = 2x^4 - 4x^2 + 1$.

Khi đó $y = \frac{1}{x^4} [2x^4 - 4x^2]^4 = 2^4 x^4 (x^2 - 2)^4$. Có $y' = 2^4 \cdot 4 \cdot x^3 \cdot (x^2 - 2)^3 \cdot (2x - 2)$.

Và $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$; $x = \pm\sqrt{2}$; $x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$. Do đó, hàm số y có 5 cực trị.

Câu 19: Chọn D

$$\text{Xét } g(x) = f^2(x) + f(x) + m \Rightarrow g'(x) = 2f(x)f'(x) + f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f(x) = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Ta có: $f'(x) = 0 \Rightarrow$ có hai nghiệm là $x = 0; x = 3$ và $f(x) = -\frac{1}{2} \Rightarrow$ có một nghiệm là $x = a < 0$ nên hàm số $g(x)$ có ba cực trị. Do đó đồ thị hàm số $h(x) = |f^2(x) + f(x) + m|$ có đúng 3 cực trị thì phương trình $f^2(x) + f(x) + m = 0$ vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta = 1 - 4m < 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{4}$.

Câu 20: Chọn C

Từ bảng biến thiên $\Rightarrow$ phương trình $f'(x) = 0$ có ba nghiệm là $x = -1; x = 0; x = 1$

$\Rightarrow f'(x)$ có dạng $f'(x) = kx(x-1)(x+1) = k(x^3 - x)$, với $k \in \mathbb{R}$ và $k \neq 0$

$\Rightarrow f(x) = k\left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + C\right)$, C là một hằng số

Mà đồ thị hàm số $f(x)$ đi qua $(1; 3)$ và $(0; -1) \Rightarrow \begin{cases} k\left(-\frac{1}{4} + C\right) = 3 \\ kC = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -16 \\ C = \frac{1}{16} \end{cases}$

$$\Rightarrow f(x) = -16\left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{16}\right) = -4x^4 + 8x^2 - 1$$

$$\Rightarrow f(x+1) = -4(x+1)^4 + 8(x+1)^2 - 1$$

$$\Rightarrow f(x+1) = -4(x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1) + 8(x^2 + 2x + 1) - 1$$

$$\Rightarrow f(x+1) = -4x^4 - 16x^3 - 16x^2 + 3 \Rightarrow f'(x+1) = -16x^3 - 48x^2 - 32x$$

$$\text{Ta có: } g'(x) = \frac{4(x-2)^3 [f(x+1)]^3 - (x-2)^4 \cdot 3[f(x+1)]^2 \cdot f'(x+1)}{[f(x+1)]^6}$$

$$\Rightarrow g'(x) = \frac{4(x-2)^3 f(x+1) - 3(x-2)^4 f'(x+1)}{[f(x+1)]^4} = \frac{(x-2)^3 [4f(x+1) - 3(x-2)f'(x+1)]}{[f(x+1)]^4}$$

$$\text{Do đó: } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=0 \Leftrightarrow x=2 \\ 4f(x+1) - 3(x-2)f'(x+1) = 0 \end{cases}$$

$$\text{Phương trình: } 4f(x+1) - 3(x-2)f'(x+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4(-4x^4 - 16x^3 - 16x^2 + 3) - 3(x-2)(-16x^3 - 48x^2 - 32x) = 0$$

$$\Leftrightarrow -16x^4 - 64x^3 - 64x^2 + 12 - 3(-16x^4 - 16x^3 + 64x^2 + 64x) = 0$$

$$\Leftrightarrow -16x^4 - 64x^3 - 64x^2 + 12 + 48x^4 + 48x^3 - 192x^2 - 192x = 0$$

$$\Leftrightarrow 32x^4 - 16x^3 - 256x^2 - 192x + 12 = 0 \Leftrightarrow 8x^4 - 4x^3 - 64x^2 - 48x + 3 = 0$$

$$\text{Xét hàm số } h(x) = 8x^4 - 4x^3 - 64x^2 - 48x + 3$$

$$\text{Ta có: } h'(x) = 32x^3 - 48x^2 - 128x + 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \\ x = x_2 \\ x = x_3 \end{cases} \text{ với } x_1 < -1 < 0 < x_2 < 1 < 2 < x_3$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	x_1	-1	0	x_2	1	x_3	$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	$+\infty$	$h(x_1)$	-1	3	$h(x_2)$	-105	$h(x_3)$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra phương trình $h(x) = 0$ có 4 nghiệm phân biệt

Mà $h(2) = -233 \Rightarrow x = 2$ không là nghiệm của phương trình $h(x) = 0$

$\Rightarrow$ Phương trình $g'(x) = 0$ có 5 nghiệm phân biệt

Vậy hàm số $g(x) = \frac{(x-2)^4}{[f(x+1)]^3}$ có 5 điểm cực trị.

Câu 21: Chọn C

$$g(x) = f(|2x-1|+2) \Rightarrow g'(x) = \frac{2(2x-1)}{|2x-1|} f'(|2x-1|+2)$$

$$\text{Ta có: } g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(|2x-1|+2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |2x-1|+2 = -1 \text{ (VN)} \\ |2x-1|+2 = \frac{1}{2} \text{ (VN)} \Leftrightarrow |2x-1|+2 = 4 \\ |2x-1|+2 = 4 \end{cases}$$

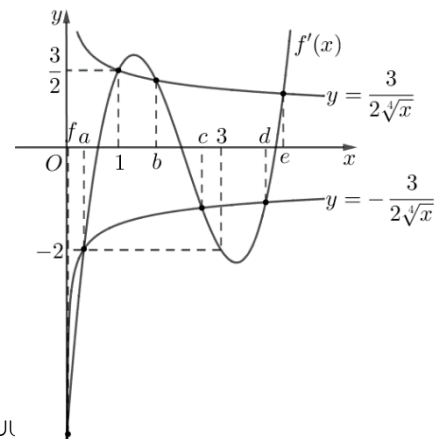
$$\Leftrightarrow |2x-1| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 = 2 \\ 2x-1 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$g'(x)$ không xác định tại $x = \frac{1}{2}$ và $g'(x)$ đổi dấu tại $x = \frac{1}{2}$, nhưng tại $x = \frac{1}{2}$ thì $g(x)$ không xác định. Vậy hàm số có 2 điểm cực trị là $x = -\frac{1}{2}$, $x = \frac{3}{2}$.

Câu 22: Chọn C

$$\text{Ta có: } g(x) = f(x^4) - 2x^3 + 1 \Rightarrow g'(x) = 4x^3 \cdot f'(x^4) - 6x^2 = 2x^2 \cdot [2x \cdot f'(x^4) - 3]$$

$$\text{Xét } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \\ f'(x^4) = \frac{3}{2x} \end{cases} \quad (*)$$



$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ f'(x^4) = -\frac{3}{2\sqrt[4]{x^4}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x^4 = f \vee x^4 = a \vee x^4 = c \vee x^4 = d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\sqrt[4]{f} \\ x = -\sqrt[4]{a} \\ x = -\sqrt[4]{c} \\ x = -\sqrt[4]{d} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ f'(x^4) = \frac{3}{2\sqrt[4]{x^4}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^4 = 1 \vee x^4 = b \vee x^4 = e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \sqrt[4]{b} \\ x = \sqrt[4]{e} \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$-\sqrt[4]{d}$	$-\sqrt[4]{c}$	$-\sqrt[4]{a}$	$-\sqrt[4]{f}$	0	1	$\sqrt[4]{b}$	$\sqrt[4]{e}$	$+\infty$		
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$		$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	

Vậy hàm số $g(x)$ có 4 điểm cực tiểu.

Câu 23: Chọn B

Đặt: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

Ta có: đồ thị giao với trục Oy tại điểm $(0;1) \Rightarrow d = 1$.

Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị là $(-1;3); (1;-1)$ nên

$$\Rightarrow \begin{cases} 3a - 2b + c = 0 \\ 3a + 2b + c = 0 \\ a + b + c + 1 = -1 \\ -a + b - c + 1 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = 1 \\ c = -3 \end{cases} \Rightarrow f(x) = x^3 - 3x + 1.$$

$$\Rightarrow f(x-1) = (x-1)^3 - 3(x-1) + 1 = x^3 - 3x^2 + 3 \Rightarrow f'(x-1) = 3x^2 - 6x.$$

$$\text{Có } g(x) = [xf(x-1)]^2 \Rightarrow g'(x) = 2xf(x-1)[f(x-1) + xf'(x-1)].$$

$$\Rightarrow g'(x) = 2x(x^3 - 3x^2 + 3)(4x^3 - 9x^2 + 3).$$

$$\text{Suy ra } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^3 - 3x^2 + 3 = 0 \\ 4x^3 - 9x^2 + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x \approx 2,532 \\ x \approx 1,347 \\ x \approx -0,879 \\ x \approx 2,076 \\ x \approx 0,694 \\ x \approx -0,52 \end{cases}$$

Phương trình $g'(x)$ là phương trình bậc 7 và có 7 nghiệm phân biệt nên hàm số $g(x)$ có 7 điểm cực trị.

Câu 24: Chọn A

$$\text{Ta có } \sqrt{4x - x^2} = \sqrt{4 - (2-x)^2} \in [0; 2]$$

$$y = f\left(4 - 3\sqrt{4x - x^2}\right) \Rightarrow y' = 3 \frac{x-2}{\sqrt{4x-x^2}} f'\left(4 - 3\sqrt{4x - x^2}\right)$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=0 \\ f'\left(4 - 3\sqrt{4x - x^2}\right) = 0 \end{cases}$$

$$f'\left(4 - 3\sqrt{4x - x^2}\right) = f'\left[2 \frac{5-3\sqrt{4x-x^2}}{2} - 1\right] = 0$$

$$\text{Ta có } \sqrt{4x - x^2} = \sqrt{4 - (2-x)^2} \in [0; 2] \text{ nên } \frac{5-3\sqrt{4x-x^2}}{2} \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right]$$

$$f'\left[2 \frac{5-3\sqrt{4x-x^2}}{2} - 1\right] = 0 \Leftrightarrow \frac{5-3\sqrt{4x-x^2}}{2} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{4x-x^2} = \frac{1}{3}.$$

Phương trình này có 2 nghiệm

Vậy y' có 3 nghiệm, và qua mỗi nghiệm này thì y' đổi dấu, do đó hàm số có 3 cực trị.

Câu 25: Chọn B

Trước hết ta khôi phục bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ từ bảng biến thiên của hàm

$f(v(t)) = f(3-2t)$ như sau:

t	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$
$x = 3 - 2t$	$+\infty$	5	1	-3	$-\infty$
$f(3 - 2t) = f(x)$	$+\infty$				$+\infty$

Ta có thể vẽ lại bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ cho dễ nhìn như sau:

x	$-\infty$	-3	1	5	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$				$+\infty$

Xét hàm số $f(x^2 - 2x) = f(u); u = x^2 - 2x$. Ta có bảng biến thiên ghép $[x; u; f(u)]$ từ kỹ năng ghép trực như sau:

x	$-\infty$	$1 - \sqrt{6}$	$1 - \sqrt{2}$	1	$1 + \sqrt{2}$	$1 + \sqrt{6}$	$+\infty$
u	$+\infty$	5	1	-1	1	5	$+\infty$
$f(u)$	$+\infty$						$+\infty$

Suy ra hàm số đồng biến trên $(1-\sqrt{6}; 1-\sqrt{2})$, $(1; 1+\sqrt{2})$, $(1+\sqrt{6}; +\infty)$.

Mà $(1; 2) \subset (1; 1+\sqrt{2})$. Nên hàm số đồng biến trên $(1; 2)$.

Câu 26: Chọn B

Chọn hàm số $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 4x^2 - 12x + 4$ liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Khi đó } f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 8x - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 = a \\ x = 6 = 8 - a \end{cases}$$

$\Rightarrow$ hàm số $f(x)$ có 2 điểm cực trị là $x = a; x = 8 - a$.

$$\text{Ta có } f(x^2 - 2x + 3) = -\frac{1}{3}(x^2 - 2x + 3)^3 + 4(x^2 - 2x + 3)^2 - 12(x^2 - 2x + 3) + 4$$

$$\Rightarrow [f(x^2 - 2x + 3)]' = 0 \Leftrightarrow (2x - 2)f'(x^2 - 2x + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2 = 0 \\ f'(x^2 - 2x + 3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - 2x + 3 = 2 \\ x^2 - 2x + 3 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 = x_0 \\ x = 3 = 5 + 2x_0 \end{cases}$$

Bảng biến thiên của hàm số $f(x^2 - 2x + 3)$ thỏa đề bài.

$$\text{Mặt khác: } [f(x^3 - 3x^2 + 1)]' = 0 \Leftrightarrow (3x^2 - 6x)f'(x^3 - 3x^2 + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 6x = 0 \\ f'(x^3 - 3x^2 + 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 6x = 0 \\ x^3 - 3x^2 + 1 = 2 \\ x^3 - 3x^2 + 1 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \\ x \approx 3,103 \\ x \approx 3,425 \end{cases} \quad (4 \text{ nghiệm đơn})$$

Vậy hàm số $f(x^3 - 3x^2 + 1)$ có 4 điểm cực trị.

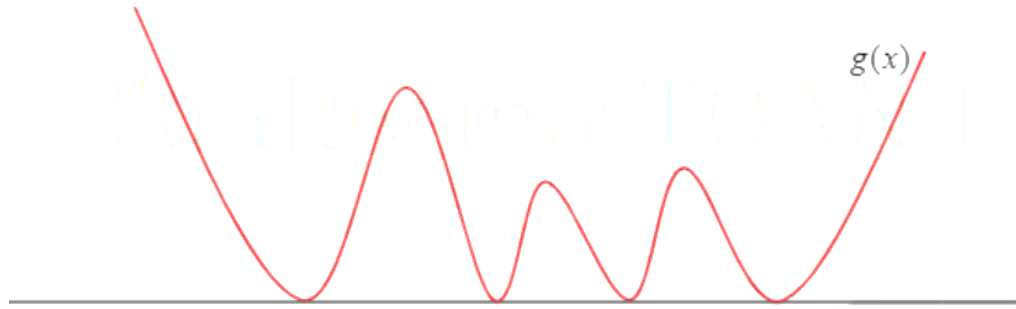
Câu 27: Chọn D

Ta có :

$$x^2 \cdot f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = a, (a < -2) \\ x = b, (-2 < b < 0) \\ x = 4 \end{cases}, \text{ trong đó } x = 0 \text{ là nghiệm bội chẵn, } x = a, x = b \text{ là nghiệm}$$

bội lẻ, $x = 4$ là nghiệm bội chẵn.

Suy ra $g(x) = x^4 \cdot [f(x)]^2 = 0$ có bốn nghiệm bội chẵn suy ra ĐTHS $g(x)$ tiếp xúc với trục Ox tại bốn điểm. Mặt khác hàm số $g(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = +\infty$ nên ta có thể phác họa đồ thị hàm số $g(x)$ như sau :



Vậy hàm số có 7 cực trị.

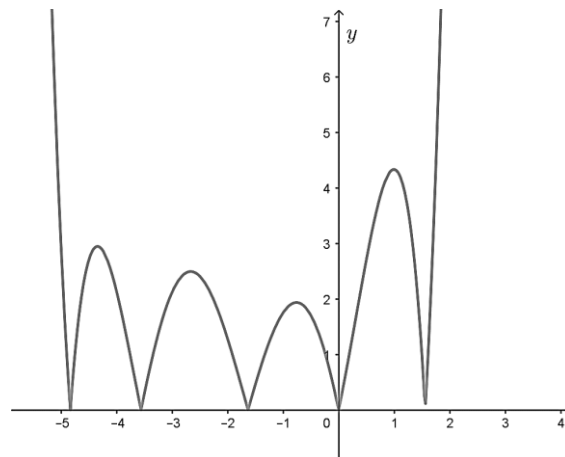
Câu 28: Chọn D

$$\text{Ta có: } g(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \\ [f(x+2)]^6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f(x+2) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x+2 = a < -2 \\ x+2 = b, b \in (-2; 0) \\ x+2 = c, c \in (0; 2) \\ x+2 = d > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = a-2 < -4 \\ x = b-2 \in (-4; -2) \\ x = c-2 \in (-2; 0) \\ x = d-2 > 0 \end{cases}$$

Suy ra đồ thị hàm số $y = g(x)$ cắt trục hoành tại 5 điểm phân biệt, và cả 5 nghiệm đều là nghiệm kép.

Ta suy ra hình dáng đồ thị $y = g(x)$ như sau



Dựa vào đồ thị ta suy ra hàm số có 9 điểm cực trị.

Câu 29: Chọn A

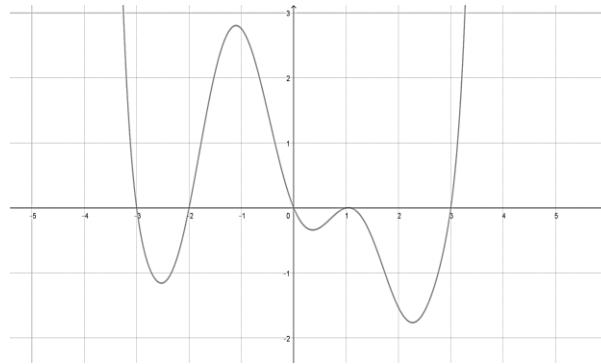
Ta có:

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) \cdot f(2x+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ f(2x+1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 1 \\ x = 3 \\ 2x+1 = -3 \\ 2x+1 = 1 \\ 2x+1 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 1 \\ x = 3 \\ x = -2 \\ x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Suy ra đồ thị hàm số $y = g(x)$ cắt trục hoành tại 6 điểm, trong đó các nghiệm $\{-3; 3; -2; 0\}$

là nghiệm đơn và $x = 1$ là nghiệm kép

Ta có hình dáng đồ thị $y = g(x)$ như sau



Suy ra hàm số có 5 điểm cực trị.

Câu 30: Chọn D

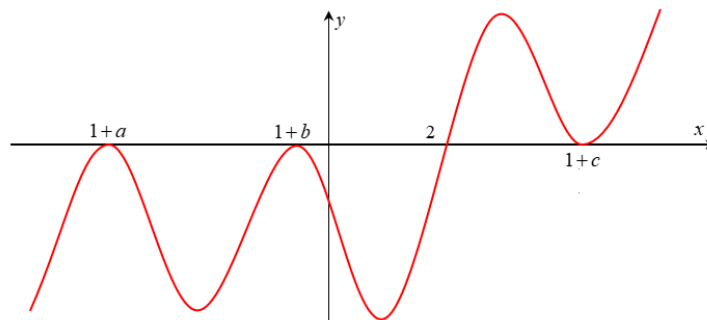
$$\text{Nhận xét } \begin{cases} g(x) \geq 0, \forall x \geq 2 \\ g(x) < 0, \forall x < 2 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty \end{cases},$$

$$\text{Cho } g(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^3 = 0 \\ [f(x-1)]^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ f(x-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x-1 = a (a < -2) \\ x-1 = b (-2 < b < -1) \\ x-1 = 1 \\ x-1 = c (c > 2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ x = 1 + a < -1 \\ x = 1 + b \in (-1; 2) \\ x = 1 + c > 3 \end{cases}$$

Do đó $g(x) = 0$ có 4 nghiệm phân biệt trong đó có ba nghiệm bội chẵn và 1 nghiệm bội lẻ

Hay đồ thị $g(x)$ có 3 điểm tiếp xúc với trục hoành và một điểm giao điểm với trục hoành mà tại đó hàm số đổi dấu



Vậy hàm số $g(x)$ có 6 cực trị.

Câu 31: Chọn C

Ta có $y = f(|x-m|^2 - |x-m|)$

Đặt $g(x) = f(x^2 - x)$. Suy ra $g(|x|) = f(x^2 - |x|)$. Suy ra $g(|x-m|) = f(|x-m|^2 - |x-m|)$

Ta biết số điểm cực trị của hàm $g(|x|)$ và $g(|x-m|)$ là như nhau.

Hàm số $g(x)$ có 2 điểm cực trị dương nên hàm $g(|x|)$ có 5 điểm cực trị.

Suy ra hàm $g(|x-m|)$ có tất cả là 5 điểm cực trị.

Câu 32: Chọn B

Hàm số $y = f(-|x+2021m|-2m+1)$ có cùng số điểm cực trị với hàm số $y = f(-|x|-2m+1)$.

Sơ đồ biến đổi đồ thị:

$$f(x) \rightarrow f(-x) \rightarrow f(-(x+2m-1)) = f(-x-2m+1) \rightarrow f(-|x|-2m+1)$$

Các điểm cực trị của hàm số $f(x)$ là: $(x_1 = a < -1)$; $(x_2 = -1)$; $(x_3 = -3)$; $(x_4 = -b < -3)$

Suy ra các điểm cực trị của hàm số $f(-(x+2m-1)) = f(-x-2m+1)$ là

$$(x_1 = -a-2m+1); (x_2 = 1-2m+1); (x_3 = -3-2m+1); (x_4 = -b-2m+1)$$

Để hàm số $y = (-|x|-2m+1)$ có đúng 5 điểm cực trị thì hàm số $y = f(-x-2m+1)$ có đúng 2 giá trị của m.

Câu 33: Chọn B

$$\text{Ta có: } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$y = f(x^3 - mx^2 - 5x + 4m) \Leftrightarrow y' = (3x^2 - 2mx - 5) \cdot f'(x^3 - mx^2 - 5x + 4m) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 2mx - 5 = 0 \\ f'(x^3 - mx^2 - 5x + 4m) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 2mx - 5 = 0 \\ x^3 - mx^2 - 5x + 4m = -2 \\ x^3 - mx^2 - 5x + 4m = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 2mx - 5 = 0 & (1) \\ (x-2)[x^2 - (m-2)x - 2m-1] = 0 & (2) \\ (x+2)[x^2 - (m+2)x + 2m-1] = 0 & (3) \end{cases}$$

$$\text{Có } \begin{cases} \Delta_1 = m^2 + 15 > 0 \\ \Delta_2 = m^2 - 4m + 8 > 0 \\ \Delta_3 = m^2 - 4m + 8 > 0 \end{cases}$$

Nên (1) luôn có 2 nghiệm phân biệt, (2) luôn có 3 nghiệm phân biệt, (3) luôn có 3 nghiệm phân biệt.

Để hàm số $y = f(x^3 - mx^2 - 5x + 4m)$ có 6 điểm cực trị thì (1) có 2 nghiệm trùng với các nghiệm của (2) hoặc (3).

Trường hợp 1: Phương trình (1) nhận $x = -2$ là nghiệm $\Leftrightarrow m = \frac{7}{4}$ (thử lại thỏa mãn).

Trường hợp 2: Phương trình (1) nhận $x = 2$ là nghiệm $\Leftrightarrow m = \frac{-7}{4}$ (thử lại thỏa mãn).

Vậy có 2 giá trị $m = \pm \frac{7}{4}$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 34: Chọn A

Ta có: $y = [f(x) - m]^3 - 3[f(x) - m] - 3m$

$$\Rightarrow y' = \{3[f(x) - m]^2 - 3\} \cdot f'(x) \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3[f(x) - m]^2 - 3 = 0 \\ f'(x) = 0 \end{cases}$$

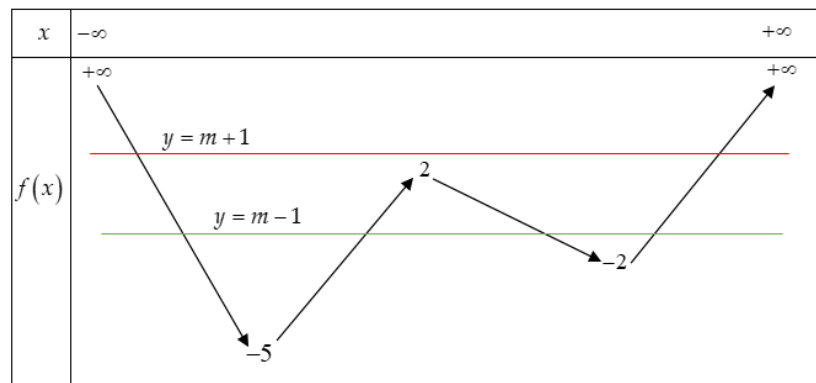
$$\Leftrightarrow \begin{cases} [f(x) - m]^2 = 1 \\ f'(x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = m + 1(1) \\ f(x) = m - 1(2) \\ f'(x) = 0(3) \end{cases}$$

Nhận xét: số điểm cực trị của hàm số $y = [f(x) - m]^3 - 3f(x)$ là tổng số nghiệm bội lẻ của ba phương trình (1);(2);(3).

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra phương trình (3) có 3 nghiệm phân biệt.

Vậy để hàm số $y = [f(x) - m]^3 - 3f(x)$ có 9 điểm cực trị thì phương trình (1) và (2) có 6 nghiệm phân biệt bội lẻ. Căn cứ vào bảng biến thiên, có 2 trường hợp sau:

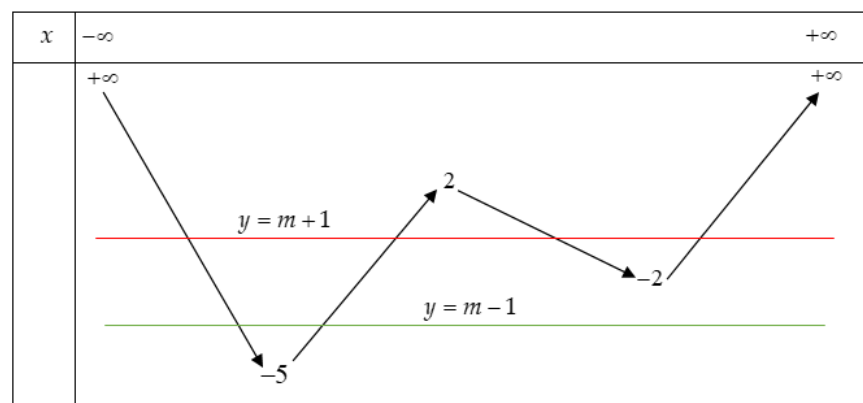
Trường hợp 1: Phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt, phương trình (2) có 4 nghiệm phân biệt.



$$\Rightarrow \begin{cases} m+1 > 2 \\ -2 < m-1 < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ -1 < m < 3 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < m < 3 \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m = 2.$$

Khi $m+1=2 \Leftrightarrow m=1$ thì phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt, trong đó có 1 nghiệm bội chẵn nên $m=1$ (thỏa mãn).

Trường hợp 2: Phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt, phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt.



$$\Rightarrow \begin{cases} -2 < m+1 < 2 \\ -5 < m-1 < -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < m < 1 \\ -4 < m < - \end{cases} \Leftrightarrow -3 < m < -1 \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m = -2.$$

Chủ đề 02: Cực trị của hàm số

Khi $m-1=-2 \Leftrightarrow m=-1$ thì phương trình (2) có 3 nghiệm phân biệt, trong đó có 1 nghiệm bội chẵn nên $m=-1$ (thỏa mãn).

Vậy $m \in \{-2; -1; 1; 2\}$.

Câu 35: Chọn D

Ta có:

$$\begin{aligned} y' &= 3f'(x)[f(x)]^2 - 2m \cdot f'(x) \cdot f(x) - (2m-3) \cdot f'(x) \\ &= f'(x) \left[3(f(x))^2 - 2mf(x) - (2m-3) \right] \end{aligned}$$

$$\text{Cho } y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ 3(f(x))^2 - 2mf(x) - (2m-3) = 0 \end{cases}$$

Dựa vào đồ thị $\Rightarrow f'(x) = 0$ có 4 nghiệm đơn phân biệt.

Để hàm số có 4 cực trị $\Rightarrow 3(f(x))^2 - 2mf(x) - (2m-3) = 0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép.

$$\text{Đặt } t = f(x) \Rightarrow 3t^2 - 2mt - (2m-3) = 0$$

Phương trình vô nghiệm:

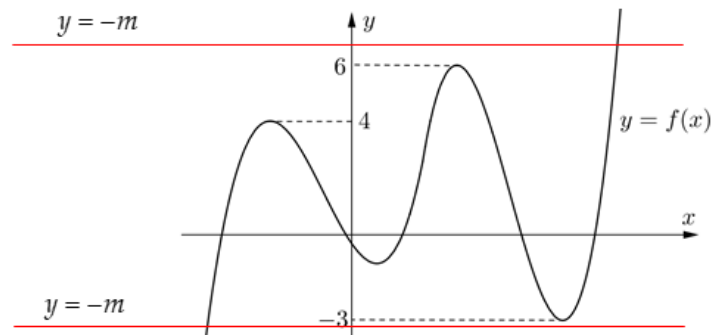
$$\Leftrightarrow \Delta' \leq 0 \Leftrightarrow m^2 + 3(2m-3) \leq 0 \Leftrightarrow m^2 + 6m - 9 \leq 0 \Leftrightarrow -3 - 3\sqrt{2} \leq m \leq -3 + 3\sqrt{2}$$

Vậy có 9 giá trị của tham số m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 36: Chọn C

$$\text{Ta có } y' = 2f(x)f'(x) - 2(m+2)f'(x) = 2f'(x)(f(x) - m - 2)$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 (*) \\ f(x) = m + 2 \end{cases}$$



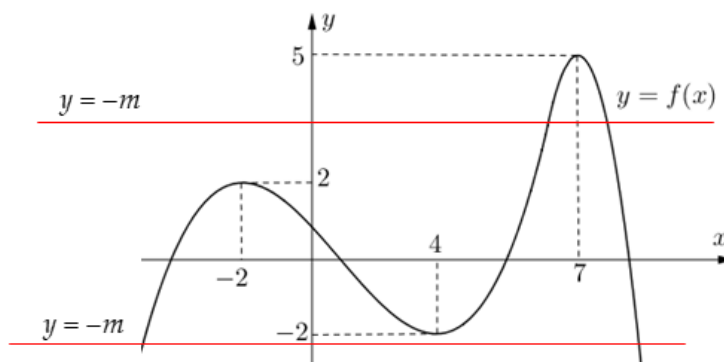
Dựa vào đồ thị thì (*) có 4 nghiệm

$$\text{Do đó để hàm số có 5 điểm cực trị} \Leftrightarrow \begin{cases} m+2 \leq -3 \\ m+2 \geq 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -5 \\ m \geq 4 \end{cases}. \text{ Vậy có 33 giá trị } m.$$

Câu 37: Chọn B

$$\text{Ta có: } y' = 2(f(x) + m) \cdot f'(x)$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = -m \\ f'(x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 4 \\ x = 7 \end{cases}$$



Hàm số có 5 điểm cực trị khi

$$\begin{cases} -m \leq -2 \\ 2 \leq -m < 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 2 \\ -5 < m \leq -2 \end{cases}. \text{ Vậy có 22 giá trị } m$$

Câu 38: Chọn B

Ta có: $y' = 3f^2(x) \cdot f'(x) + 12f(x) \cdot f'(x) = 3f(x) \cdot f'(x)(f(x) + 4)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ f'(x) = 0 \\ f(x) = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a (a < -2) \\ x = b (-2 < b < 0) \\ x = c (0 < c < 3) \\ x = d (d > 3) \\ x = -2 \\ x = 0 \\ x = 3 \\ x = -2 \end{cases}$$

x	$-\infty$	a	-2	b	0	c	3	d	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$				1				$+\infty$
			-4			-3			

Bảng xét dấu.

x	$-\infty$	a	-2	b	0	c	3	d	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$

Dựa vào bảng xét dấu y' thì hàm số có 4 điểm cực tiểu

Câu 39: Chọn A

Xét hàm số $y = g(x) = f(f(x) - 3x + 9) \Rightarrow g'(x) = (f'(x) - 3)f'(f(x) - 3x + 9)$.

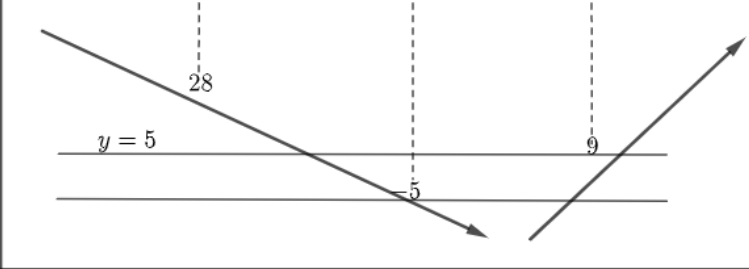
Giải phương trình đạo hàm: $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 3 \quad (\text{có một nghiệm boi le}) \\ f'(f(x) - 3x + 9) = 0 \end{cases}$

Để xét phương trình $f'(f(x) - 3x + 9) = 0$ thì ta cần khảo sát hàm số $h(x) = f(x) - 3x + 9$.

Chủ đề 02: Cực trị của hàm số

Ta có: $h'(x) = f'(x) - 3 = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 3 \Leftrightarrow x = c; x = a$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-6	c	5	a	10	$+\infty$
$h(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	
$h'(x)$							

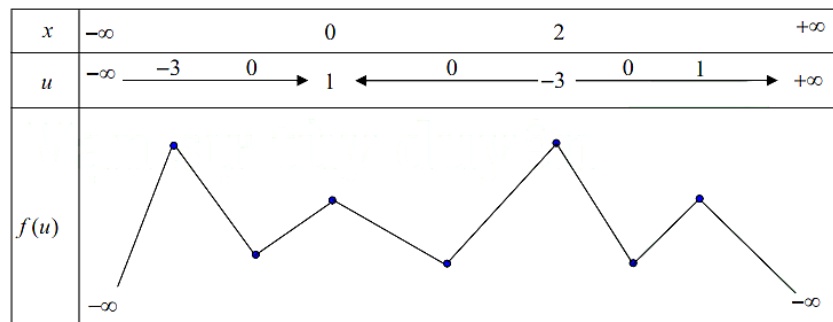
$$\text{Xét } f'(f(x) - 3x + 9) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} h(x) = f(x) - 3x + 9 = -5 \Rightarrow 2 \text{ nghiệm bội lẻ} \\ h(x) = f(x) - 3x + 9 = b \in (0; 5) \Rightarrow 2 \text{ nghiệm bội lẻ} \\ h(x) = f(x) - 3x + 9 = 5 \Rightarrow 2 \text{ nghiệm bội lẻ} \end{cases}$$

Như vậy phương trình đạo hàm $g'(x) = 0$ có 7 nghiệm bội lẻ ứng với 7 điểm cực trị.

Câu 40: Chọn A

Đặt $u = x^3 - 3x^2 + 1 \Rightarrow u' = 3x^2 - 6x$.

Sử dụng phương pháp ghép trục như sau:



Như vậy hàm số có tất cả 7 điểm cực trị.

Câu 41: Chọn B

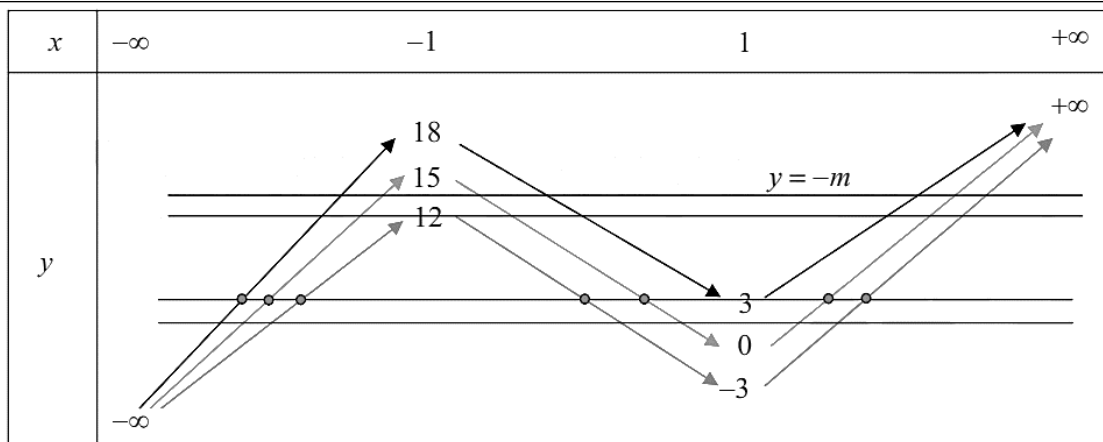
Xét hàm số $g(x) = f(2^{x^3-3x+2} + m) \Rightarrow g'(x) = 3(x^2 - 1) \cdot 2^{x^3-3x+2} \cdot f'(2^{x^3-3x+2} + m) \cdot \ln 2$.

$$\text{Cho } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1 \Rightarrow \text{có 2 nghiệm bội lẻ} \\ f'(2^{x^3-3x+2} + m) = 0 \end{cases}.$$

Để thỏa mãn yêu cầu bài toán thì phương trình $f'(2^{x^3-3x+2} + m) = 0$ phải có 7 nghiệm bội lẻ.

$$\text{Ta có: } f'(2^{x^3-3x+2} + m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{x^3-3x+2} + m = -2 \\ 2^{x^3-3x+2} + m = 1 \\ 2^{x^3-3x+2} + m = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{x^3-3x+2} + 2 = -m \\ 2^{x^3-3x+2} - 1 = -m \\ 2^{x^3-3x+2} - 4 = m \end{cases}$$

Xét sự biến thiên của ba hàm số $2^{x^3-3x+2} + 2$, $2^{x^3-3x+2} - 1$, $2^{x^3-3x+2} - 4$ trên cùng một hệ trục tọa độ



Để phương trình $f'(2^{x^3-3x+2} + m) = 0$ phải có 7 nghiệm bội lẻ thì

$$\begin{cases} 12 \leq -m < 15 \\ 0 < -m \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -15 < m \leq -12 \\ -3 \leq m < 0 \end{cases} \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m = \{-14; -13; -12; -3; -2; -1\}.$$

Vậy có 6 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn.

Câu 42: Chọn C

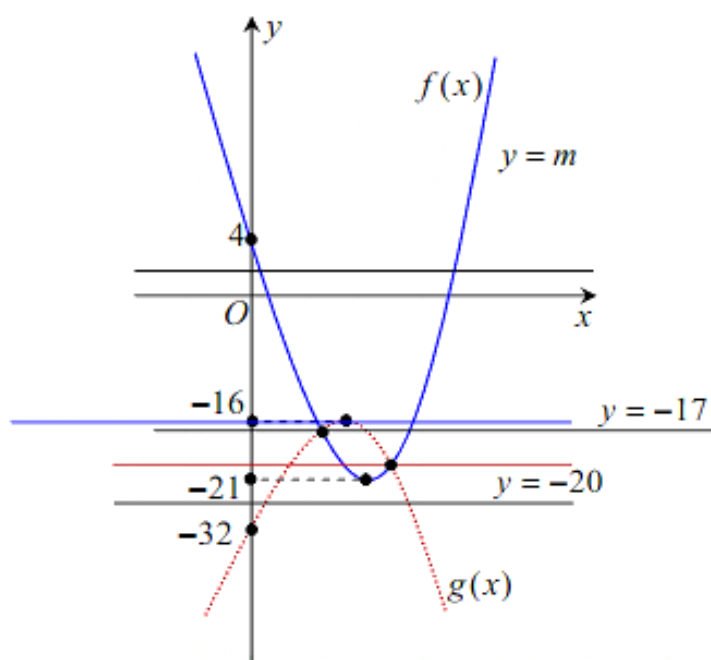
Hàm số liên tục và xác định trên toàn $\mathbb{R}$ và có đạo hàm không triệt tiêu trên một lân cận chứa điểm $x = 0$ nên hàm số $f(|x|)$ đạt cực trị tại điểm $x = 0$.

Để hàm số $f(|x|)$ có 5 điểm cực trị thì hàm số $f(x)$ phải có hai điểm cực trị dương.

$$\text{Ta có: } f'(x) = \left(x^2 - 5x + 1 - \frac{m}{4}\right) \left(x^2 - 4x + \frac{m}{4} + 8\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5x + 1 - \frac{m}{4} = 0 \\ x^2 - 4x + \frac{m}{4} + 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4(x^2 - 5x + 1) = m = f(x) \\ -4(x^2 - 4x + 8) = m = g(x) \end{cases}$$

Vẽ hai đồ thị hàm số $f(x)$, $g(x)$ trên cùng một hệ trục tọa độ như sau:



$$\text{Để có đúng hai điểm cực trị dương thì } \begin{cases} -16 \leq m < 4 \\ -32 < m \leq -21 \\ m = -17 \\ m = -20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -16 \leq m \leq 3 \\ -31 \leq m \leq -21 \\ m = -17 \\ m = -20 \end{cases} \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} \text{có tất cả 33}$$

giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn.

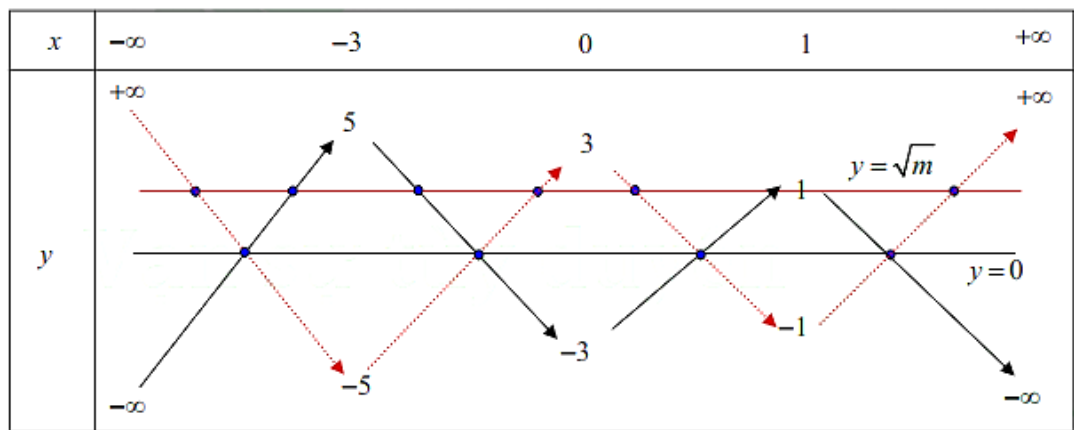
Câu 43: Chọn C

$$\text{Có: } g'(x) = 3(f^2(x) - m). f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \Rightarrow \text{có 3 nghiệm đơn: } x = -3; x = 0; x = 1 \\ f^2(x) - m = 0 \end{cases}$$

Để hàm số $g(x)$ có đúng 9 điểm cực trị thì phương trình $f^2(x) - m = 0$ phải có 6 nghiệm bội lẻ.

Suy ra: $\begin{cases} f(x) = \sqrt{m} \\ -f(x) = \sqrt{m} \end{cases}$. Xét sự tương giao của hai hàm số $f(x)$ và $-f(x)$ trên cùng một bảng

biến thiên như hình vẽ sau đây:



Suy ra $1 \leq \sqrt{m} < 3 \Leftrightarrow 1 \leq m < 9 \Rightarrow$ có 8 giá trị nguyên m thỏa mãn.

Câu 44: Chọn C

$$\text{Ta có: } f(x) = \int_{2018}^{x^2-2x} g(t) dt = G(t) \Big|_{2018}^{x^2-2x} = G(x^2-2x) - G(2018).$$

$$\text{Đạo hàm } f'(x) = G'(x^2-2x)(2x-2) = g(x^2-2x) \cdot 2(x-1).$$

Xét phương trình

$$g(x^2-2x) \cdot 2(x-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \Rightarrow \text{nghiệm bội lẻ} \\ g(x^2-2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x = -3 \text{ (vô nghiệm)} \\ (x^2-2x)^2 = a > 0 \Rightarrow \text{có hai nghiệm kép} \\ x^2-2x = 7 \Leftrightarrow x = 1 \pm 2\sqrt{2} \Rightarrow \text{hai nghiệm bội lẻ} \end{cases} \end{cases}$$

Suy ra phương trình đạo hàm có 3 nghiệm bội lẻ nên hàm số có 3 điểm cực trị.

Câu 45: Chọn A

$$\text{Xét hàm số } g(x) = f(x^2 - 2mx + 1) \Rightarrow g'(x) = 2(x-m) f'(x^2 - 2mx + 1).$$

$$\text{Cho } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ f'(x^2 - 2mx + 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ x^2 - 2mx + 1 = 1 \\ x^2 - 2mx + 1 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ x^2 - 2mx = 0 \\ x^2 - 2mx + 2 = 0 \end{cases} \quad (*)$$

Bài toán yêu cầu phương trình (*) phải có đúng 3 nghiệm bội lẻ. Đã có một nghiệm bội lẻ ở phương trình (1), vậy nên trong hai phương trình bậc hai còn lại phải có một phương trình có hai nghiệm phân biệt và phương trình còn lại không có nghiệm phân biệt.

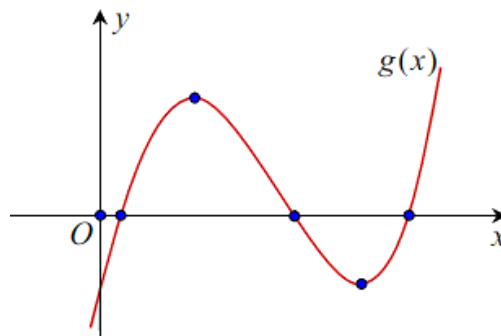
$$\text{Ta có: } \Delta_2 = 4m^2 \text{ và } \Delta_3 = 4m^2 - 8 \Rightarrow \begin{cases} \Delta_2 = 4m^2 > 0 \\ \Delta_3 = 4m^2 - 8 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ -\sqrt{2} \leq m \leq \sqrt{2} \end{cases} \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m = \{\pm 1\}.$$

Vậy có hai giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 46: Chọn C

$$\text{Đặt } g(x) = x^3 - 3mx^2 + 3(2m-1)x - m.$$

Hình vẽ minh họa:



$$\text{Đạo hàm } g'(x) = 3x^2 - 6mx + 3(2m-1) = 3(x^2 - 3mx + 2m-1) = 0 \Rightarrow x = 1; x = 2m-1.$$

Yêu cầu bài toán tương đương với đồ thị hàm số $y = g(x)$ có hai điểm cực trị và hai điểm cực trị này nằm phía bên phải Oy và nằm về hai phía của trục hoành, đồng thời $g(0) < 0$. Suy ra:

$$\begin{cases} 2m-1 \neq 1 \\ 2m-1 > 0 \\ g(1) \cdot g(2m-1) < 0 \\ g(0) = -m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m > \frac{1}{2} \\ (2m-2)(-4m+12m^2-10m+2) < 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m > \frac{1}{2} \\ \left[m < \frac{2-\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow m > \frac{2+\sqrt{2}}{2} \right] \\ m > \frac{2+\sqrt{2}}{2} \\ m > 0 \end{cases}$$

Kết hợp điều kiện $\xrightarrow[m \in \mathbb{Z}]{m \in [-2022; 2022]} 2 \leq m \leq 2022$. Vậy có tất cả 2021 giá trị thỏa mãn.

Câu 47: Chọn B

$$\text{Hàm số } f(3-2x) \text{ đạt cực trị tại } \begin{cases} x = -3 \Rightarrow 3-2x = 9 \\ x = -1 \Rightarrow 3-2x = 5 \\ x = 4 \Rightarrow 3-2x = -5 \end{cases}$$

Vậy ta coi như hàm số $f(x)$ sẽ đạt cực trị tại các điểm $x = -5; x = 5; x = 9$.

$$\text{Ta đặt } g(x) = f(x^2 - 2mx) \Rightarrow g(|x|) = f(x^2 - 2m|x|).$$

Nhận thấy hàm số $g(x) = f(x^2 - 2mx)$ xác định tại điểm $x = 0$ và không phải là hằng số trong một khoảng chứa điểm $x = 0$, nên hàm số $g(|x|) = f(x^2 - 2m|x|)$ sẽ đạt cực trị tại $x = 0$.

Để hàm số $g(|x|) = f(x^2 - 2m|x|)$ có 7 điểm cực trị thì hàm số $g(x) = f(x^2 - 2mx)$ có 3 điểm cực trị dương.

$$\text{Ta có: } g'(x) = (2x - 2m)f'(x^2 - 2mx) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m & (1) \\ x^2 - 2mx = 9 & (2) \\ x^2 - 2mx = 5 & (3) \\ x^2 - 2mx = -5 & (4) \end{cases}$$

Để thấy phương trình (2) và (3) mỗi phương trình cho ta một nghiệm đơn và dương. Phương trình (4) nếu có nghiệm đơn và dương thì sẽ có hai nghiệm phân biệt. Vì vậy phương trình (4) không thể có hai nghiệm phân biệt dương, tức là phải có hai nghiệm phân biệt âm hoặc không có hai nghiệm phân biệt và phương trình (1) có nghiệm dương.

Suy

ra:

$$\begin{cases} m > 0 \\ \Delta'_{(4)} = m^2 - 5 \leq 0 \\ \begin{cases} \Delta'_{(4)} = m^2 - 5 > 0 \\ 2m \leq 0 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow 0 < m \leq \sqrt{5} \rightarrow m \in (0; \sqrt{5}] \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = \sqrt{5} \end{cases} \Rightarrow P = 2(a^2 + b^2) = 2(0^2 + 5) = 10$$

Câu 48: Chọn D

Xét hàm số $g(x) = f(x^3 - mx^2 - 2x + m) \Rightarrow g'(x) = (3x^2 - 2mx - 2)f'(x^3 - mx^2 - 2x + m)$.

Yêu cầu bài toán xảy ra khi phương trình đạo hàm phải có 6 nghiệm bội lẻ:

$$\text{Ta có: } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 2mx - 2 = 0 \\ f'(x^3 - mx^2 - 2x + m) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2mx - 2 = 0 \\ \begin{cases} x^3 - mx^2 - 2x + m = -1 \\ x^3 - mx^2 - 2x + m = 1 \end{cases} \end{cases}$$

Phương trình $3x^2 - 2mx - 2 = 0$ luôn cho hai nghiệm phân biệt. Suy ra hai phương trình còn lại phải cho đúng 4 nghiệm bội lẻ:

$$\begin{cases} x^3 - mx^2 - 2x + m = -1 \\ x^3 - mx^2 - 2x + m = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x^2 - (m-1)x - m-1) = 0 & (1) \\ (x-1)(x^2 - (m+1)x + m-1) = 0 & (2) \end{cases}$$

Nhận thấy hai phương trình (1), (2) luôn cho hai nghiệm phân biệt, và các nghiệm của hai phương trình này là không trùng nhau.

Để hai phương trình có đúng 4 nghiệm bội lẻ thì:

Trường hợp 1: $x = 1$ là nghiệm của $(x-1)(x^2 - (m-1)x - m-1) = 0$ và $x = -1$ không phải là nghiệm của $(x-1)(x^2 - (m+1)x + m-1) = 0$.

Trường hợp 2: $x = -1$ là nghiệm của $(x-1)(x^2 - (m+1)x + m-1) = 0$ và $x = 1$ không phải là nghiệm của $(x-1)(x^2 - (m-1)x - m-1) = 0$.

$$\text{Suy ra: } \begin{cases} 1-(m-1)-m-1=0 \\ 1+(m+1)+m-1 \neq 0 \\ 1-(m-1)-m-1 \neq 0 \\ 1+(m+1)+m-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{2} \\ m \neq -\frac{1}{2} \\ m \neq \frac{1}{2} \\ m = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m = \pm \frac{1}{2}.$$

Vậy có hai giá trị thực của m thỏa mãn.

Câu 49: Chọn C

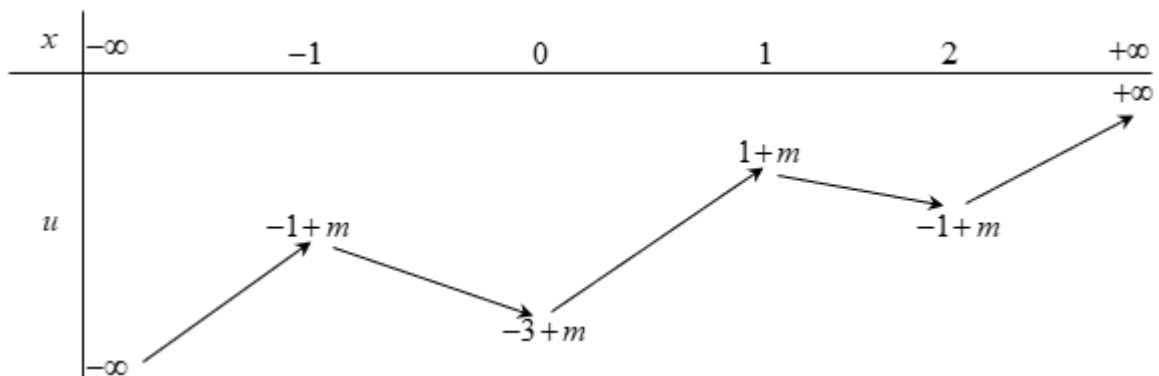
$$\text{Ta có: } f'(x) = a(x+2)(x-1) \Rightarrow f(x) = a\left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x\right) + b.$$

$$\text{Đồ thị hàm số đi qua } A(-2;4), B(1;-1) \text{ nên ta có: } \begin{cases} 4 = \frac{10}{3}a + b \\ -1 = -\frac{7}{6}a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{10}{9} \\ b = \frac{8}{27} \end{cases}.$$

$$\text{Hàm số ban đầu là } f(x) = \frac{10}{9}\left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x\right) + \frac{8}{27}.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x^3 - 3|x^2 - 1| + m \\ f(x) \rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \end{cases} \end{cases}$$

Bảng biến thiên:



$$\text{Yêu cầu bài toán xảy ra khi và chỉ khi: } \begin{cases} -2 > -3+m \\ 1 < -1+m \\ -3+m < -2 < -1+m \\ -1+m < 1 < 1+m \\ -2 > -1+m \\ 1 < 1+m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ m > 2 \\ -1 < m < 1 \\ 0 < m < 2 \\ m < -1 \\ m > 0 \end{cases} \begin{matrix} (\text{loại}) \\ (\text{loại}) \end{matrix}.$$

Vậy $m \in (0;1) \Rightarrow$ không có giá trị nào của m thỏa mãn.

Câu 50: Chọn D

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = f^2(x) - 2f(x) - m \\ h(x) = f(|x|) \end{cases} \Rightarrow u'(x) = 2f'(x) \cdot f(x) - 2f'(x).$$

$$\text{Giải phương trình đạo hàm: } u'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{1; 5; 9\} \\ f(x) = 1 \Leftrightarrow x \in \{a; b; c; d\} \end{cases}.$$

$$\text{Lại có: } h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \{\pm 9; \pm 5; \pm 1; 0\}.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	a	1	b	5	c	9	d	$+\infty$		
$u'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$u(x)$	$+\infty$										$+\infty$

$$\text{Để hàm số } g(x) \text{ có 51 điểm cực trị thì } \begin{cases} -9 \leq -1-m \\ -5 > -1-m \\ 1 < 8-m \\ 5 > 8-m \\ 9 < 15-m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 8 \\ m > 4 \\ m < 7 \\ m > 3 \\ m < 6 \end{cases} \Leftrightarrow 4 < m < 6.$$

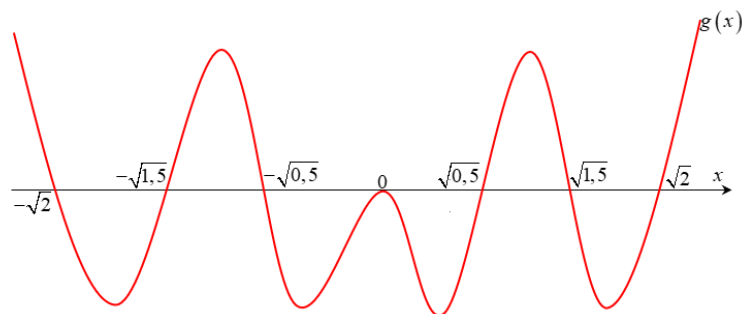
Vậy có một giá trị $m = 5$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 51: Chọn B

$$\text{Ta có: } g(x) = x^2 [f(x^2 - 1)]^3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \\ f(x^2 - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \\ x^2 - 1 = -1 \\ x^2 - 1 \approx -0,5 \\ x^2 - 1 \approx 0,5 \\ x^2 - 1 = 1 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow x \in \{0; \pm \sqrt{0,5}; \pm \sqrt{1,5}; \pm \sqrt{2}\}.$$

Phác họa nhanh đồ thị:



Câu 52: Chọn B

Xét hàm số $y = |x^2 - 8x + 7| + x^2 - 3$, tập xác định trên $\mathbb{R}$.

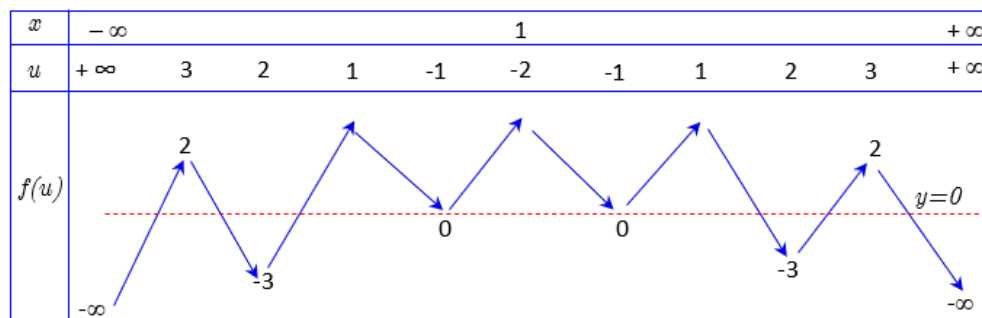
Ta có: $y = \begin{cases} 2x^2 - 8x + 4 & \text{neu } x \leq 1 \text{ hoặc } x \geq 7 \\ 8x - 10 & \text{neu } 1 < x < 7 \end{cases} \Rightarrow y' = \begin{cases} 4x - 8 & \text{neu } x \leq 1 \text{ hoặc } x \geq 7 \\ 8 & \text{neu } 1 < x < 7 \end{cases}.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		7		$+\infty$
y'		-		+		+	

Suy ra hàm số có một điểm cực trị $x = 1$.

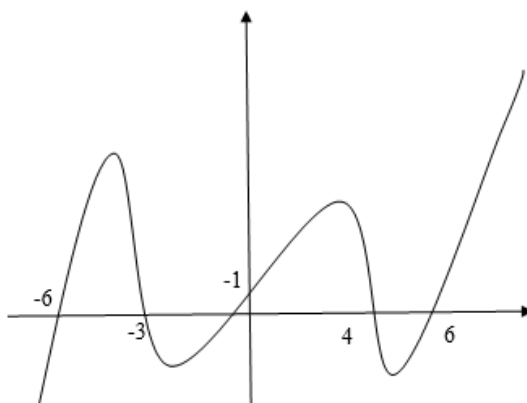
Đặt $u = |x^2 - 8x + 7| + x^2 - 3$. Sử dụng phương pháp ghép trực:



Suy ra hàm số $y = |f(u)|$ có 7 điểm cực đại.

DẠNG 3**Bài toán truy tìm hàm ngược**

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(3-x)$ như hình vẽ



Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x^2 - 2x + 3)$ là

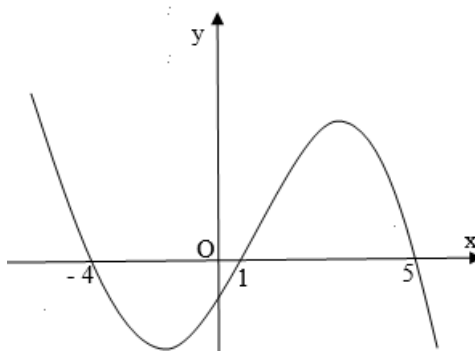
A. 3.

B. 7.

C. 6.

D. 5.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(1+2x)$ như hình vẽ



Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in [-2021; 2021]$ để hàm số $y = f(-|x|^2 + 2|x| - 2020 + m)$ có 7 điểm cực trị

A. Không có giá trị nào.

B. 5 giá trị.

C. 6 giá trị.

D. 7 giá trị.

Câu 3: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $g(x) = f(3-x)$ có bảng biến thiên như bên dưới

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$		
$g'(x)$	-	0	+	0	-	
$g(x)$	$+\infty$			0		$-\infty$
		-4				

Hàm số $h(x) = f(x^2 + 1)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Câu 4: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $g(x) = f(-x^3 - x)$

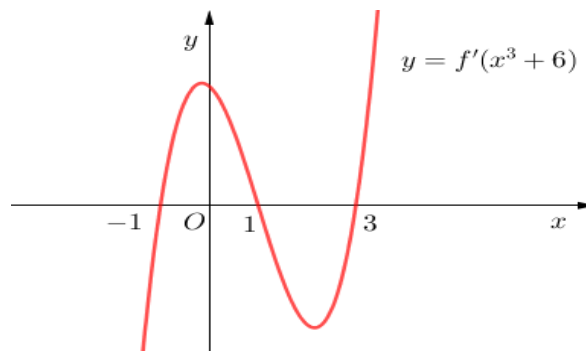
có bảng biến thiên như bên dưới

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	$+\infty$	$g(0)$	$g(1)$	$-\infty$	

Hàm số $h(x) = f(2x^2 - x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 5: Cho hàm đa thức bậc ba $y = f'(x^3 + 6)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây



Hỏi hàm số $g(x) = f(x^2 + 4x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 7.

Câu 6: Cho hàm số $y = f(2x^2 - 4x + 3)$ có đạo hàm và liên tục trên $\mathbb{R}$ (bảng biến như hình sau)

x	$-\infty$	-5		1		6		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$+\infty$				3			$+\infty$
			0				0	

Hỏi hàm số $g(x) = f(x^3 + 3x^2)$ có ít nhất bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 4. B. 5. C. 6. D. 8.

Câu 7: Cho hàm đa thức $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có bảng xét dấu của như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
$f'(x+1)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Số điểm cực đại của hàm số $y = f(x^2 + |x| + 1)$ là

- A. 3. B. 2. C. 4. D. 1.

Câu 8: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y = f(3 - 4x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$		
y'		+	0	-	0	+
y						

Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x^2 - 2x - 10)$ là

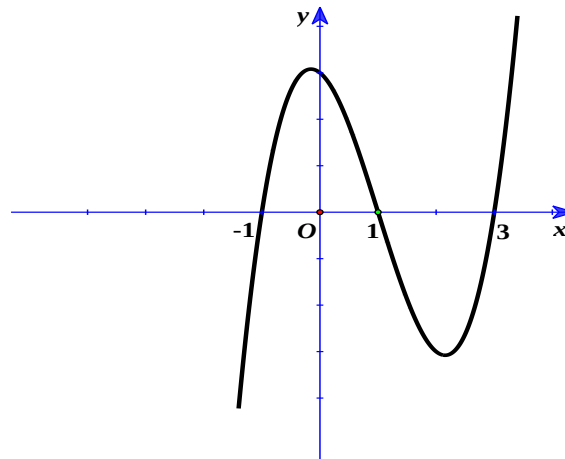
A. 6.

B. 5.

C. 4.

D. 3.

Câu 9: Đồ thị của hàm $y = f'(1-4x)$ như hình vẽ dưới đây. Số các giá trị nguyên của $m \in [-2021; 2021]$ để số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x^2 + 4x - 3m - 2)$ nhiều nhất là



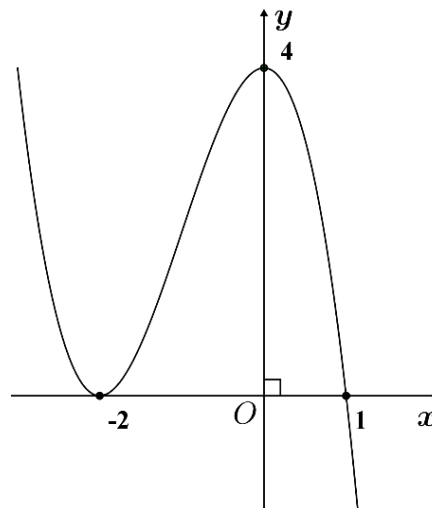
A. 4040.

B. 2024.

C. 4002.

D. 2020.

Câu 10: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(3-2x)$ như hình vẽ. Hàm số $g(x) = f(|x^2 - 3|)$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?



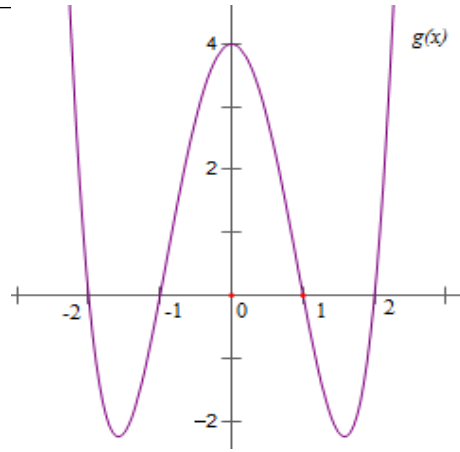
A. 4.

B. 1.

C. 3.

D. 5.

Câu 11: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên R . Hàm số $g(x) = f'(1-x^2)$ là hàm số bậc bốn có đồ thị như hình vẽ như dưới

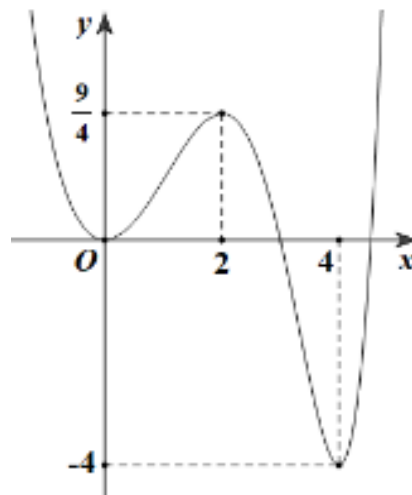


Hàm số $y = f(x^2 - 2|x|)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 3. B. 5. C. 7. D. 9.

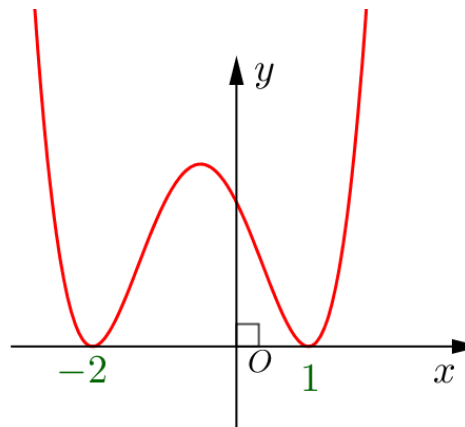
Câu 12: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $y = f(5 - 2x)$ như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m thuộc khoảng $(-9; 9)$ thỏa mãn $2m \in \mathbb{Z}$ và hàm số

$y = \left| 2f(4x^3 + 1) + m - \frac{1}{2} \right|$ có 5 điểm cực trị?



- A. 26. B. 25. C. 24. D. 27.

Câu 13: Giả sử $f(x)$ là một đa thức bậc bốn. Đồ thị hàm số $y = f(1 - x)$ được cho như hình bên.



Hỏi hàm số $g(x) = f(x^2 + 2)$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

- A. 3. B. 0. C. 1. D. 2.

Câu 14: Cho hàm số $y = f(x^2 - 2x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên dưới

x	$-\infty$	-3	1	5	$+\infty$
$f(x^2 - 2x)$	$+\infty$	-1	4	-1	$+\infty$

Biết hàm số $f(x)$ có đúng hai điểm cực trị là $x = -2$ và $x = a$. Hàm số $f(x^2 - 4x + 4)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

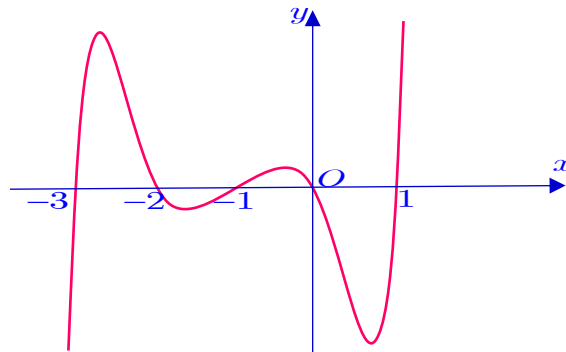
A. 5.

B. 3.

C. 1.

D. 4.

Câu 15: Cho hàm đa thức $y = \left[f(x^2 + 2x) \right]'$ có đồ thị như hình vẽ



Tổng giá trị nguyên của $m \in [-10; 10]$ để hàm số $g(x) = f(|x - 2| + m)$ có 5 cực trị

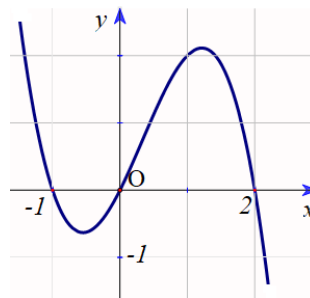
A. -52.

B. 55.

C. -55.

D. 56.

Câu 16: Cho hàm số $y = f'(x^3 - x^2 - 2x + 3)$ là hàm số bậc 3 có đồ thị là đường cong như hình vẽ.



Biết $f(0) > 0$, $f(-1) < 0$. Hàm số $g(x) = |f(x^4 - 2x^2)|$ có mấy điểm cực tiểu?

A. 3.

B. 2.

C. 5.

D. 6.

Câu 17: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $f'(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	-3	2	-1	$+\infty$

Hàm số $g(x) = f(e^{2x} - 2x - 2)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

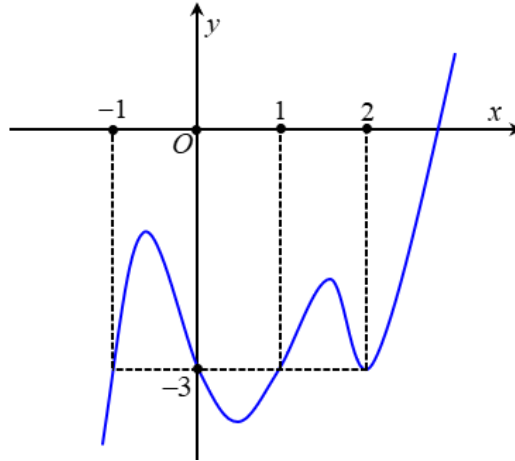
A. 9.

B. 11.

C. 5.

D. 7.

Câu 18: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(0) < 0$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ cho bởi hình vẽ dưới đây.



Hàm số $g(x) = |f(|x|) + 3|x|$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

A. 2.

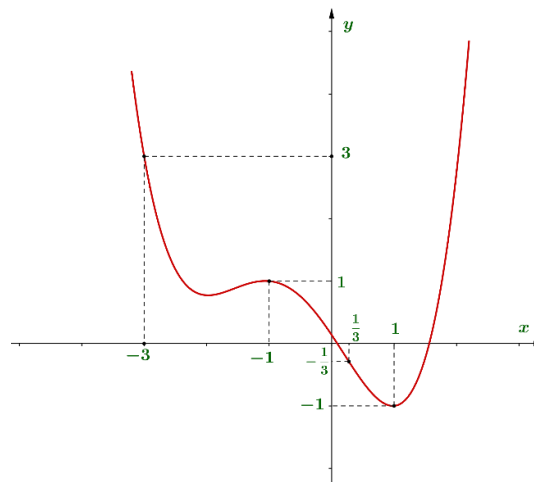
B. 3.

C. 4.

D. 5.

Câu 19: Cho hàm số $y = f(x)$, hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số

$$g(x) = 2f\left(\frac{5\sin x - 1}{2}\right) + \frac{(5\sin x - 1)^2}{4} + 3 \text{ có bao nhiêu điểm cực trị trên khoảng } (0; 2\pi)?$$



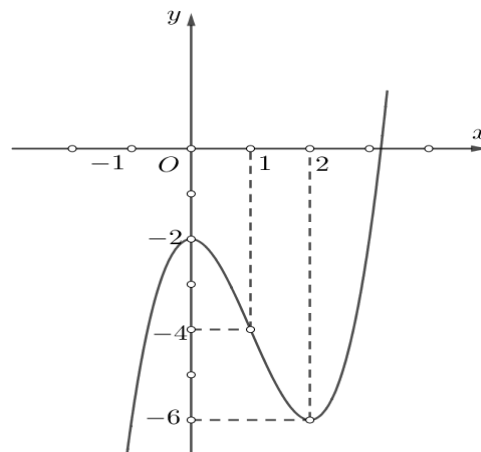
A. 9.

B. 7.

C. 6.

D. 8.

Câu 20: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-20; 20]$ để hàm số $g(x) = |f(1 - |x|) + m|$ có 5 điểm cực trị?



A. 14.

B. 15.

C. 16.

D. 17.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.B	2.A	3.C	4.C	5.D	6.A	7.D	8.B	9.D	10.A
11.B	12.A	13.D	14.D	15.C	16.D	17.A	18.D	19.D	20.D

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Xét hàm số $y = f(x^2 - 2x + 3)$ ta có

$$y' = (2x - 2)f'(x^2 - 2x + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ f'(x^2 - 2x + 3) = 0 \end{cases}$$

Giải $f'(x^2 - 2x + 3) = 0$, đặt $x^2 - 2x + 3 = 3 - t$ từ đồ thị hàm số $y = f'(3 - t)$ ta có

$$f'(x^2 - 2x + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 3 = 9 \\ x^2 - 2x + 3 = 6 \\ x^2 - 2x + 3 = 4 \\ x^2 - 2x + 3 = -1 \\ x^2 - 2x + 3 = -3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 6 = 0 \\ x^2 - 2x - 3 = 0 \\ x^2 - 2x - 1 = 0 \\ x^2 - 2x + 4 = 0 \\ x^2 - 2x + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \\ x = 1 \pm \sqrt{2} \\ x = 1 \pm \sqrt{7} \end{cases}$$

Phương trình $f'(x^2 - 2x + 3) = 0$ có 7 nghiệm bội đơn phân biệt suy ra hàm số $y = f(x^2 - 2x + 3)$ có đúng 7 điểm cực trị.

Câu 2: Xét hàm số $y = f(-x^2 + 2x - 2020 + m)$ ta có

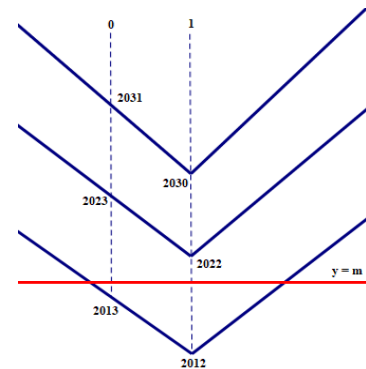
$$h'(x) = (-2x + 2) \cdot f'(-x^2 + 2x - 2020 + m).$$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ f'(-x^2 + 2x - 2020 + m) = 0, (*) \end{cases}$$

Giải (*), đặt $-x^2 + 2x - 2020 + m = 1 + 2x$, ta có

$$f'(-x^2 + 2x - 2020 + m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + 2x - 2020 + m = -7 \\ -x^2 + 2x - 2020 + m = 3 \\ -x^2 + 2x - 2020 + m = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = x^2 - 2x + 2013 \\ m = x^2 - 2x + 2023 \\ m = x^2 - 2x + 2031 \end{cases}$$

hàm số $y = f(-|x|^2 + 2|x| - 2020 + m)$ có 7 điểm cực trị khi và chỉ khi hàm số $y = f(-x^2 + 2x - 2020 + m)$ có 3 điểm cực trị dương, từ đồ thị hàm số ta suy ra $2012 < m < 2013$, do $m \in [-2021; 2021]$ suy ra $m \in \emptyset$.



Câu 3: Ta có $g'(x) = -f'(3-x); g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=3 \end{cases}$.

Suy ra $x=1; x=3$ là các nghiệm của phương trình $f'(3-x) = 0$.

Do đó $f'(0) = 0; f'(2) = 0$.

Ta có $h'(x) = 2xf'(x^2+1)$;

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ f'(x^2+1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x^2+1=0 \\ x^2+1=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-1 \\ x=1 \end{cases}.$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
$h'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Vậy hàm số $h(x)$ có 3 điểm cực trị.

Câu 4: Ta có $g'(x) = -(3x^2+1)f'(-x^3-x); g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}$.

Suy ra $x=0; x=1$ là các nghiệm của phương trình $f'(-x^3-x) = 0$.

Do đó $f'(0) = 0; f'(-2) = 0$.

Ta có $h'(x) = (4x-1)f'(2x^2-x)$;

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{4} \\ f'(2x^2-x)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{4} \\ 2x^2-x=0 \\ 2x^2-x=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{4} \\ x=0 \\ x=\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$		
$h'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Vậy hàm số $h(x)$ có 3 điểm cực trị.

Câu 5: Ta có: $f'(x^3+6) = a(x-1)(x+1)(x-3)$ (với $a > 0$).

Với $x=-1$ thì $f'(5) = 0$.

Với $x=1$ thì $f'(7) = 0$.

Với $x=3$ thì $f'(33) = 0$.

$$\text{Suy ra } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ x=7 \\ x=33 \end{cases}.$$

Ta có: $g'(x) = (2x+4)f'(x^2+4x)$.

$$\Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+4=0 \\ f'(x^2+4x)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x^2+4=5 \\ x^2+4=7 \\ x^2+4=33 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=\pm 1 \\ x=\pm\sqrt{3} \\ x=\pm\sqrt{29} \end{cases}.$$

Vậy hàm số $g(x)$ có 7 điểm cực trị.

Câu 6: Ta có $y' = (4x-4)f'(2x^2-4x+3) = 0$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x-4=0 \\ f'(2x^2-4x+3)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ f'(2x^2-4x+3)=0 \end{cases} \quad (1)$$

Từ bảng biến thiên ta thấy $y' = 0$ có 3 nghiệm bội lẻ $x = -5, x = 1, x = 6$.

Như vậy phương trình (1) có nghiệm bội lẻ $x = -5$ hoặc $x = 6$.

Thay $x = -5$ vào (1) ta được: $f'(73) = 0$.

$$\text{Thay } x = 6 \text{ vào (1) ta được: } f'(51) = 0. \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 73 \\ x = 51 \end{cases}.$$

Ta có: $g'(x) = (3x^2+6x)f'(x^3+3x^2) = 0$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2+6x=0 \\ f'(x^3+3x^2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2+6x=0 \\ x^3+3x^2=73 \\ x^3+3x^2=51 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-2 \\ x \approx 3,382... \\ x \approx -5,022... \end{cases}.$$

Vậy hàm số $g(x)$ có ít nhất 4 điểm cực trị.

Câu 7: Từ bảng xét dấu của $f'(x+1)$ ta có:

$$f'(x+1) = (x+1)x(x-1)h(x) \text{ với } h(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow f'(x+1) = (x+1-2)(x+1)(x+1-1)h(x).$$

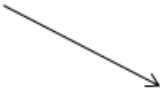
Đặt $t = x+1$ khi đó $f'(t) = t(t-1)(t-2)U(t)$ với $t = x+1 \Rightarrow h(x) = U(t) > 0$ với mọi t thỏa mãn điều kiện.

$$\text{Vậy } f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=0 \\ t=1 \\ t=2 \end{cases}.$$

Mặt khác ta có: $g(x) = f(x^2+x+1) \Rightarrow g'(x) = (2x+1)f'(x^2+x+1) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1=0 \\ x^2+x+1=0 \\ x^2+x+1=1 \\ x^2+x+1=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-1 \\ x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ x=\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \\ x=\frac{-1}{2} \end{cases}.$$

Ta có bảng biên thiên sau:

x	$-\infty$	$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$		-	+	-	+	-	+
$g(x)$							
$g(x)$							

Vì $y = g(|x|) = f(x^2 + |x| + 1)$ và $g(x) = f(x^2 + x + 1)$ đối xứng nhau qua trục tung nên hàm số $y = f(x^2 + |x| + 1)$ có một điểm cực đại.

Vậy hàm số $|g(x)| = y = \left| f\left(\frac{x-1}{x-2}\right) \right|$ có tối đa 6 điểm cực trị.

Câu 8: $y = f(x^2 - 2x - 10) \Rightarrow y' = (2x - 2)f'(x^2 - 2x - 10).$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ f'(x^2 - 2x - 10) = 0 \end{cases}$$

Xét $f'(x^2 - 2x - 10) = 0.$

Đặt $x^2 - 2x - 10 = 3 - 4t.$

$$\text{Ta có } f'(3 - 4t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \Leftrightarrow 3 - 4t = -9 \\ t = 2 \Leftrightarrow 3 - 4t = -5 \end{cases}.$$

$$\text{Nên } f'(x^2 - 2x - 10) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 10 = -9 \\ x^2 - 2x - 10 = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + \sqrt{2} \\ x = 1 - \sqrt{2} \\ x = 1 + \sqrt{6} \\ x = 1 - \sqrt{6} \end{cases}.$$

Vậy hàm số $y = f(x^2 - 2x - 10)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 9:

$$\text{Từ giả thiết ta có } f'(1 - 4x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \\ x = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 - 4x = 5 \\ 1 - 4x = -3 \\ 1 - 4x = -11 \end{cases}$$

$$\text{Từ đó suy ra } f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 5 \\ t = -3 \\ t = -11 \end{cases}.$$

$$\text{Ta có } g(x) = f(x^2 + 4x - 3m - 2) \Rightarrow g'(x) = (2x + 4)f'(x^2 + 4x - 3m - 2)$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x^2 + 4x - 3m - 2 = 5 \\ x^2 + 4x - 3m - 2 = -3 \\ x^2 + 4x - 3m - 2 = -11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \left((-2)^2 + 4(-2) = -4 \right) \\ x^2 + 4x = 3m + 7 \\ x^2 + 4x = 3m - 1 \\ x^2 + 4x = 3m - 9 \end{cases}$$

Lập bảng biến thiên của hàm số $y = x^2 + 4x$ ta được $\min_{\mathbb{R}}(x^2 + 4x) = y(-2) = -4$.

Vậy hàm số $g(x) = f(x^2 + 4x - 3m - 2)$ có nhiều điểm cực trị nhất khi $3m - 9 > -4 \Leftrightarrow m > \frac{5}{3}$.

Vì giá trị nguyên của $m \in [-2021; 2021]$ nên $m \in \{2; 3; \dots; 2021\}$. Vậy có 2020 số.

Câu 10: Ta có $y = f'(3 - 2x) = a(x + 2)^2(x - 1)$ với $a < 0$

Với $x = -2$ ta có $f'(7) = 0$

Với $x = 1$ ta có $f'(1) = 0$

Suy ra $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ x = 1 \end{cases}$ trong đó $x = 7$ là nghiệm bội hai.

Ta có: $g(x) = f(|x^2 - 3|) = f\left(\sqrt{(x^2 - 3)^2}\right) \Rightarrow g'(x) = \frac{x(x^2 - 3)}{|x^2 - 3|} \cdot f'(|x^2 - 3|)$

$g'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ |x^2 - 3| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 2 \\ x = \pm \sqrt{2} \end{cases}$ và $x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{3}$ thì $g'(x)$ không xác định

Xét $g'(-3) = \frac{-3 \cdot 6}{6} f'(6)$. Ta có $f'(6) = f'\left(3 - 2 \cdot \frac{-3}{2}\right)$

Nên $f'(6) = f'\left(3 - 2 \cdot \frac{-3}{2}\right) = a\left(-\frac{3}{2} + 2\right)^2\left(-\frac{3}{2} - 1\right) > 0$ vì $a < 0$ suy ra $g'(-3) < 0$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-2	$-\sqrt{3}$	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	2	$+\infty$			
$g'(x)$		$-$	0	$+$	$ $	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Hàm số có 4 điểm cực tiểu.

Câu 11:

Hàm số $g(x)$ là hàm số bậc 4 nên có dạng

$$g(x) = a(x + 2)(x + 1)(x - 1)(x - 2), a > 0 \Rightarrow f'(1 - x^2) = a(x^2 - 4)(x^2 - 1)$$

$$\text{Đặt } t = 1 - x^2 \Rightarrow f'(t) = at(t + 3)$$

$$y = f(x^2 - 2|x|) \Rightarrow y' = \left(2x - \frac{2x}{\sqrt{x^2}}\right) f'(x^2 - 2|x|) = 2ax \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x^2}}\right) (x^2 - 2|x|)(x^2 - 2|x| + 3)$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = -1 \\ x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	$+$

Dựa vào bảng biến thiên ta có hàm số $y = f(x^2 - 2|x|)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 12:

Đặt $t = 5 - 2x$. Khi $y = f(5 - 2x)$ có 3 điểm cực trị $x = 0, x = 2, x = 4$ thì $y = f(t)$ có 3 điểm cực trị $t = 5, t = 1, t = -3$ và $f(5) = 0, f(1) = \frac{9}{4}, f(-3) = -4$.

Bảng xét dấu $y = f(t)$ như sau:

t	$-\infty$	-3	1	5	$+\infty$			
$f'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(t)$	$+\infty$		-4		$\frac{9}{4}$		0	$+\infty$

$$\text{Xét } g(x) = 2f(4x^3 + 1) + m - \frac{1}{2} \Rightarrow g'(x) = 24x^2 f'(4x^3 + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \\ 4x^3 + 1 = 5 \\ 4x^3 + 1 = 1 \\ 4x^3 + 1 = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \\ x = 1 \\ x^3 = 0 \\ x = -1 \end{cases}$$

$\Rightarrow y = g(x)$ có 3 điểm cực trị.

$$\text{Xét phương trình } 2f(4x^3 + 1) + m - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow f(4x^3 + 1) = \frac{1}{4} - \frac{m}{2}.$$

Đặt $u = 4x^3 + 1 \Rightarrow u \in \mathbb{R}$.

Số nghiệm $f(4x^3 + 1) = \frac{1}{4} - \frac{m}{2}$ bằng số nghiệm phương trình $f(u) = f(t) = \frac{1}{4} - \frac{m}{2}$.

Để $y = \left| 2f(4x^3 + 1) + m - \frac{1}{2} \right|$ có 5 điểm cực trị thì $f(t) = \frac{1}{4} - \frac{m}{2}$ có 2 nghiệm đơn phân biệt

$$\text{Suy ra } \begin{cases} \frac{1}{4} - \frac{m}{2} \geq \frac{9}{4} \\ -4 < \frac{1}{4} - \frac{m}{2} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -4 \\ \frac{1}{2} \leq m < \frac{17}{2} \end{cases}. \text{ Vì } m \in (-9; 9) \text{ và } 2m \in \mathbb{Z} \text{ nên có 26 giá trị.}$$

Câu 13: Đồ thị hàm số $y = f(1 - x)$ tiếp xúc với trục hoành tại điểm có hoành độ $x = -2$ và $x = 1$.

Suy ra $y = f(1 - x) = a(x + 2)^2 \cdot (x - 1)^2$ trong đó $a > 0$.

$$y = f(1 - x) = a[3 - (1 - x)]^2 \cdot [-(1 - x)]^2.$$

Do đó, $f(x) = a(3-x)^2 \cdot x^2 \Rightarrow f'(x) = 2ax \cdot (3-x) \cdot (3-2x)$.

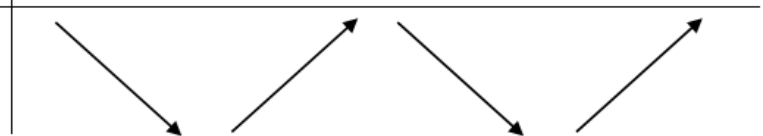
Ta có bảng xét dấu của $f'(x)$:

x	$-\infty$		0		$\frac{3}{2}$		3		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	

$$g'(x) = 2x \cdot f'(x^2 + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + 2 = 0 \\ x^2 + 2 = \frac{3}{2} \\ x^2 + 2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	
$g(x)$									

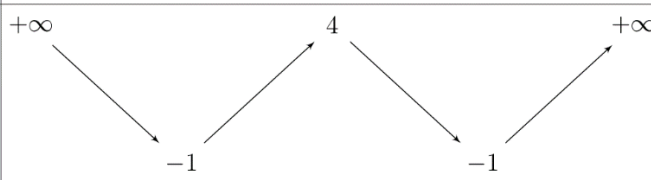


Từ bảng biến thiên, ta thấy hàm số $g(x) = f(x^2 + 2)$ có 2 điểm cực tiểu.

Câu 14: Đặt $t = x^2 - 2x$.

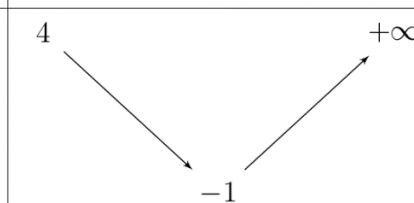
Ta có một phần bảng biến thiên của hàm số $f(t)$ như sau

x	$-\infty$	-3	1	5	$+\infty$
$t = x^2 - 2x$	$+\infty$	15	-1	15	$+\infty$
$f(t) = f(x^2 - 2x)$	$+\infty$		4		$+\infty$



Ta vẽ lại một phần bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ như sau

x	-1	15	$+\infty$
$f(x)$	4		$+\infty$



Suy ra hàm số $f(x)$ có đúng hai điểm cực trị là $x = -2$ và $x = 15$.

$$\text{Xét hàm số } g(x) = f(x^2 - 4x + 4) \Rightarrow g'(x) = (2x - 4) f'(x^2 - 4x + 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x^2 - 4x + 4 = -2 \\ x^2 - 4x + 4 = 15 \end{cases}$$

Phương trình $x^2 - 4x + 4 = -2$ vô nghiệm.

Phương trình $x^2 - 4x + 4 = 15$ có hai nghiệm phân biệt khác 2.

Vậy hàm số $f(x^2 - 4x + 4)$ có 3 điểm cực trị.

Câu 15: Ta có: $\left[f(x^2 + 2x) \right]' = (2x + 2)f'(x^2 + 2x) = a(x + 3)(x + 2)(x + 1)(x)(x - 1) \quad (a > 0)$

$$\Rightarrow f'(x^2 + 2x) = \frac{a}{2}(x + 3)(x + 2)x(x - 1) = \frac{a}{2}(x^2 + 2x - 3)(x^2 + 2x)$$

$$\text{Đặt } t = x^2 + 2x \Rightarrow f'(t) = \frac{a}{2}(t - 3)t.$$

$$\text{Ta có } g' = \frac{x-2}{|x-2|} f'(|x-2| + m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ f'(|x-2| + m) = 0 \end{cases}$$

Đề hàm số $g(x)$ có 5 cực trị

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |x-2| + m = 0 \\ |x-2| + m = 3 \end{cases} \text{ phải có 4 nghiệm phân biệt} \Leftrightarrow \begin{cases} -m > 0 \\ 3 - m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m < 3 \end{cases} \Leftrightarrow m < 0.$$

Suy ra $m \in \{-10; -9; \dots; -1\}$. Tổng giá trị m nguyên là -55 .

Vậy hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(5; 9)$.

Câu 16: Từ đồ thị ta thấy $f'(x^3 - x^2 - 2x + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$ do đó ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3$.

Xét $h(x) = f(x^4 - 2x^2)$ ta có $h'(x) = (4x^3 - 4x)f'(x^4 - 2x^2)$,

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow (4x^3 - 4x)f'(x^4 - 2x^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \\ f'(x^4 - 2x^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \\ x^4 - 2x^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$$

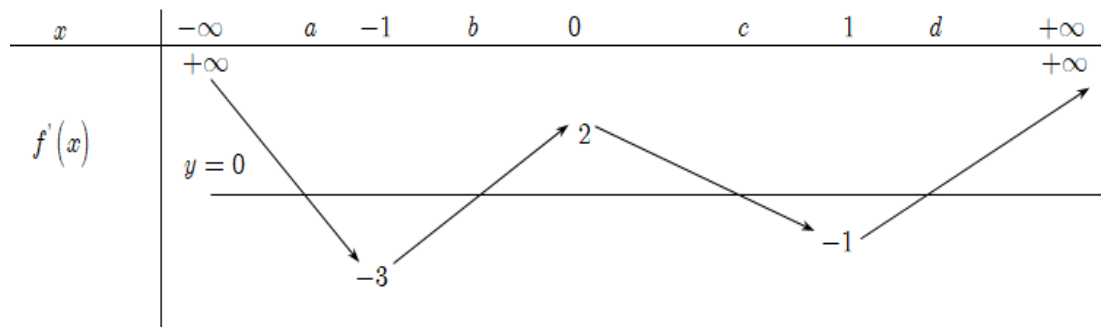
(Tất cả các nghiệm đều bội lẻ)

Ta có bảng biến thiên của hàm số $h(x) = f(x^4 - 2x^2)$ như sau:

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	0	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$h'(x)$	+	0	-	0	+	0	-
$h(x)$	$-\infty$	$f(3)$	$f(-1)$	$f(0)$	$f(-1)$	$f(3)$	$-\infty$

Do hàm số $y = f'(x^3 - x^2 - 2x + 3)$ là hàm bậc 3 suy ra $y = f'(x)$ là hàm bậc nhất có hệ số bậc nhất âm và $f'(3) = 0$ do đó $f(3) > f(0)$, theo giả thiết $f(0) > 0$, $f(-1) < 0$ nên kết hợp với bảng biến thiên của hàm số $h(x) = f(x^4 - 2x^2)$ ta suy ra hàm số $g(x) = |f(x^4 - 2x^2)|$ có 6 điểm cực tiểu.

Câu 17: Dựa vào bảng biến thiên của $f'(x)$



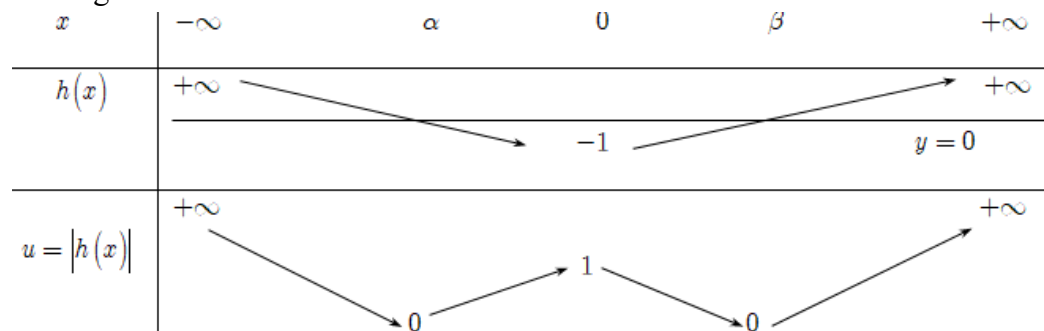
Ta thấy $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \in -\infty; -1 \\ x = b \in -1; 0 \\ x = c \in 0; 1 \\ x = d \in 1; +\infty \end{cases}$

Đặt $h(x) = e^{2x} - 2x - 2$

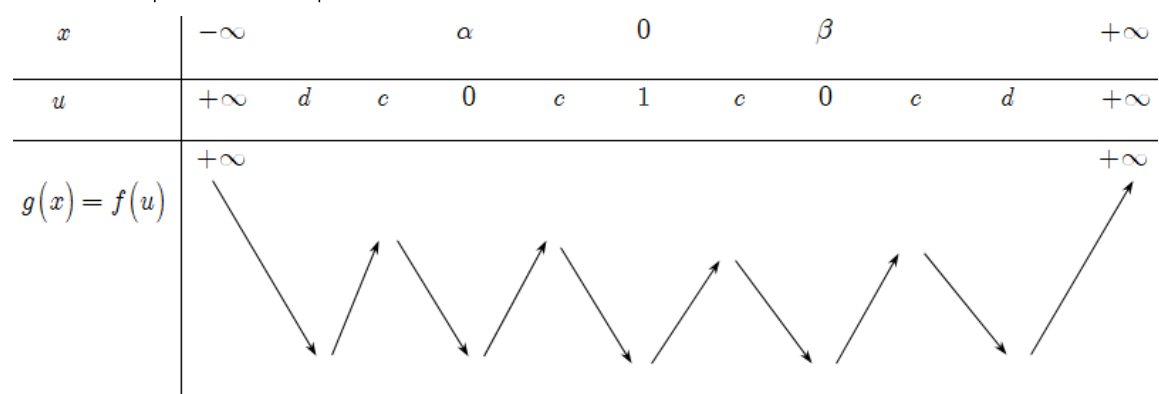
$h'(x) = 2e^{2x} - 2 \Rightarrow h'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{2x} = 1 \Leftrightarrow x = 0$

$h(x) = 0 \Leftrightarrow e^{2x} - 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha \approx -0,92 \\ x = \beta \approx 0,57 \end{cases}$

Nên ta có bảng biến thiên sau:



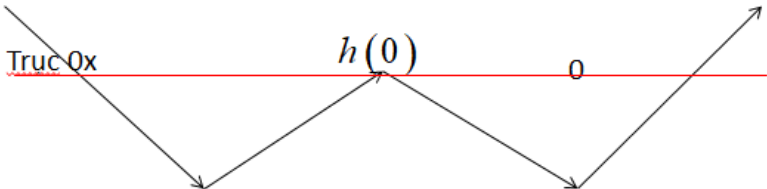
Sử dụng phương pháp ghép trực, ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x) = f(|e^{2x} - 2x - 2|) = f(u)$ như sau:



Vậy hàm số $g(x) = f(|e^{2x} - 2x - 2|)$ có 9 điểm cực trị.

Câu 18: Đặt: $h(x) = f(x) + 3x \Rightarrow h'(x) = f'(x) - (-3)$

Từ đồ thị hàm $y = f'(x)$ ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
$h'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$h(x)$							

Số điểm cực trị dương của hàm $|h(x)|$ là 2.

Do đó số điểm cực tiểu của $g(x)$ là: $2.2+1=5$.

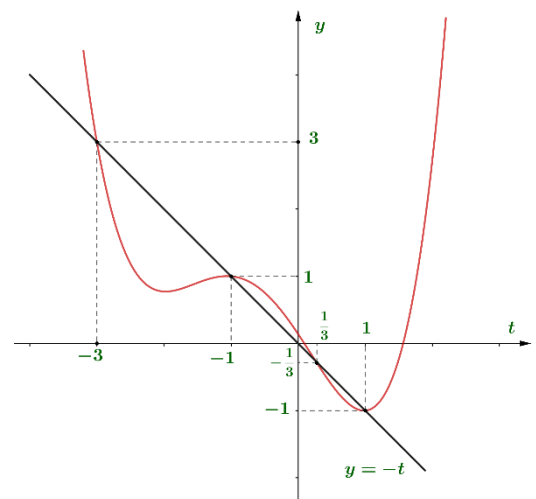
Câu 19: Đặt $t = \frac{5\sin x - 1}{2}$

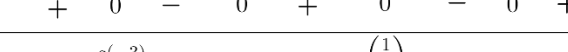
Suy ra $g(t) = 2f(t) + t^2 + 3$

Ta có $g'(t) = 2f'(t) + 2t = 0 \Leftrightarrow f'(t) = -t$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \pm 1 \\ t = \frac{1}{3} \\ t = -3 \end{cases}$$

Bảng biến thiên:



t	$-\infty$	-3		-1		$\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$g'(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(t)$										

Suy ra:

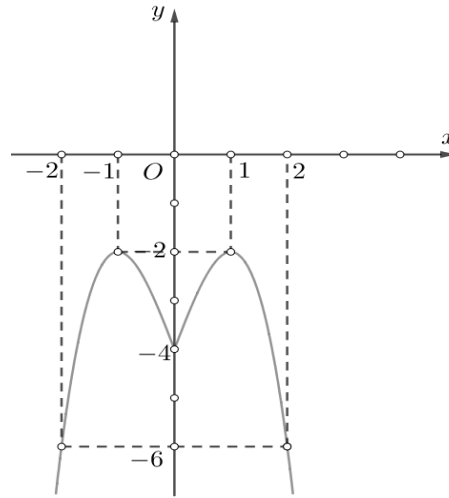
x	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π	
t	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	1	2	1	$\frac{1}{3}$	-1	$-\frac{1}{2}$
$g(t)$								

Câu 20: $f(x)$ có hai cực trị là $x=0, x=2 \Rightarrow f'(x) = ax(x-2) \Rightarrow f(x) = \frac{a}{3}x^3 - ax^2 + C$.

$$f(0) = -2, f(1) = -4 \Rightarrow a = 3, c = -2 \Rightarrow f(x) = x^3 - 3x^2 - 2.$$

$$f(1-|x|) = \begin{cases} f(1-x), & \text{khi } x \geq 0 \\ f(1+x), & \text{khi } x < 0 \end{cases} \Rightarrow f(1-|x|) = \begin{cases} -x^3 + 3x - 4, & \text{khi } x \geq 0 \\ x^3 - 3x - 4, & \text{khi } x < 0 \end{cases}.$$

Ta có đồ thị của $f(1-|x|)$ như sau:



Đặt $h(x) = f(1-|x|) + m$. Ta có $g(x) = |h(x)|$.

$g(x)$ có 5 cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình $h(x) = 0$ có 2 nghiệm đơn $\Leftrightarrow m \geq 4$.

Vậy có 17 giá trị m thỏa yêu cầu bài toán.

DẠNG 4**Cực trị chứa dấu giá trị tuyệt đối**

❖ Một số kiến thức cần nắm:

➤ **Cách vẽ đồ thị hàm số $y = |f(x)|$:**

- Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ được vẽ bằng cách:
- Giữ nguyên phần đồ thị của hàm số $y = f(x)$ nằm phía trên trục hoành.
- Lấy đối xứng phần đồ thị của hàm số $y = f(x)$ nằm phía dưới trục hoành qua trục hoành đồng thời xóa phần phía dưới trục hoành.

➤ **Tính chất đặc biệt của đồ thị hàm số $y = |f(x)|$:**

- Số cực trị của hàm số $y = |f(x)|$ bằng tổng số cực trị hàm số $y = f(x)$ và số điểm cắt của $y = f(x)$ và trục Ox (không tính điểm tiếp xúc).
- Hàm số $y = f(|x|)$ là hàm số chẵn đồ thị đối xứng qua trục tung. Đồ thị được vẽ bằng cách:
- Giữ nguyên đồ thị của hàm số $y = f(x), (C_1)$ ứng với $x \geq 0$.
- Với $x < 0$ được vẽ bằng cách lấy đối xứng phần đồ thị (C_1) qua trục tung.
- Gọi (C_1) có số điểm cực trị là α .
- Nếu (C_1) cắt trục tung thì số điểm cực trị của $y = f(|x|)$ là $2\alpha + 1$ (một điểm cực trị là $x = 0$).
- Nếu (C_1) không cắt trục tung thì số điểm cực trị của $y = f(|x|)$ là 2α .
- Số điểm cực trị của hàm số $f(|x|)$ là: $2a + 1$ với a là số điểm cực trị dương của hàm số $y = f(x)$ (số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nằm phía bên phải trục tung).
- Số điểm cực trị (nếu có) của hàm số $y = f(ax + b) + c$ bằng số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$.

➤ Đồ thị hàm số có dạng $y = |u(x)| \cdot v(x)$

- Từ đồ thị $(C): y = u(x) \cdot v(x)$ suy ra đồ thị $(C'): y = |u(x)| \cdot v(x)$.
- Ta có: $y = |u(x)| \cdot v(x) = \begin{cases} u(x) \cdot v(x) & \text{neu } u(x) \geq 0 \\ -u(x) \cdot v(x) & \text{neu } u(x) < 0 \end{cases}$

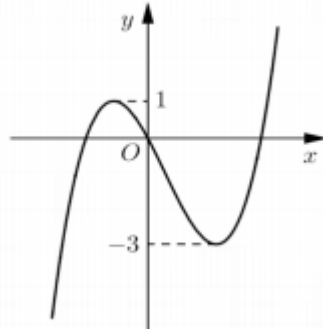
➤ Cách vẽ đồ thị hàm số (C') từ đồ thị (C) :

- Giữ nguyên miền đồ thị $u(x) \geq 0$ của đồ thị $(C): y = f(x)$.
- Bỏ phần đồ thị miền $u(x) < 0$ của (C) , lấy đối xứng phần đồ thị bị bỏ qua Ox .

Câu 1: Cho $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-1)^2(x^2-4)$ số điểm cực trị của hàm số $y = f(|x|)$ là

- A. 5. B. 3. C. 2. D. 4.

Câu 2: Cho hàm bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số có ba điểm cực trị.



- A. $m \leq -1$ hoặc $m \geq 3$. B. $m \leq -3$ hoặc $m \geq 1$. C. $m = -1$ hoặc $m = 3$. D. $-1 \leq m \leq 3$.

Câu 3: Có tất cả bao nhiêu số nguyên m thuộc đoạn $[-2017; 2017]$ để hàm số $y = |x^3 - 3x^2 + m|$ có ba điểm cực trị?

- A. 4032. B. 4034. C. 4030. D. 4028.

Câu 4: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = |x^4 - mx^2 + m|$ có 7 cực trị.

- A. $(4; +\infty)$. B. $(0; 1)$. C. $(0; 4)$. D. $(1; +\infty)$

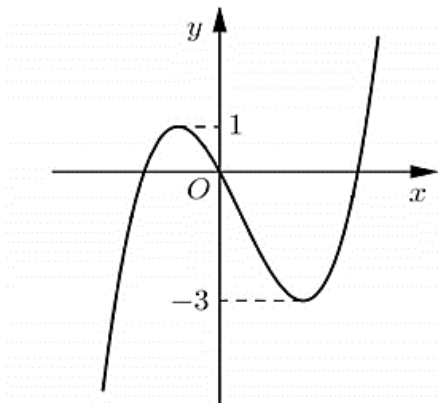
Câu 5: Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ thỏa mãn $a > 0, d > 2018, a + b + c + d - 2018 < 0$. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = |f(x) - 2018|$.

- A. 3. B. 5. C. 2. D. 1.

Câu 6: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m|$ có 7 điểm cực trị?

- A. 3. B. 5. C. 6. D. 4.

Câu 7: Cho hàm số bậc ba có đồ thị $y = f(x)$ như hình vẽ dưới đây. Tất cả các số thực của tham số m để hàm số $y = |f(x) + m|$ có 5 điểm cực trị là



- A. $\begin{cases} m \leq -1 \\ m \geq 3 \end{cases}$. B. $-1 < m < 3$. C. $\begin{cases} m = -1 \\ m = 3 \end{cases}$. D. $1 < m < 3$.

Câu 8: Cho hàm số đa thức bậc bốn $y = f(x)$ có ba điểm cực trị $x = -1; x = 0; x = 2$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = f(|x+m|)$ có 7 điểm cực trị.

- A. $m < -1$. B. $m < 0$. C. $-1 < m < 2$. D. $m < 2$.

Câu 9: Cho hàm số $y = |x|^3 - mx + 5$. Gọi a là số điểm cực trị của hàm số đã cho. Mệnh đề nào dưới đây đúng

- A. $a = 0$. B. $a \leq 1$. C. $1 < a \leq 3$. D. $a > 3$.

Câu 10: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = |x|^3 - (2m+1)x^2 + 3m|x| - 5$ có 5 điểm cực trị:

- A. $\left(-\infty; \frac{1}{4}\right) \cup (1; +\infty)$. B. $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right) \cup (1; +\infty)$. C. $(1; +\infty)$. D. $\left(0; \frac{1}{4}\right) \cup (1; +\infty)$.

Câu 11: Cho hàm số $f(x) = x^3 - (2m-1)x^2 + (2-m)x + 2$. Tìm tập hợp các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = f(|x|)$ có 5 điểm cực trị:

- A. $-\frac{5}{4} < m < 2$. B. $\frac{5}{4} < m < 2$. C. $\frac{1}{2} < m < 2$. D. $-2 < m < \frac{5}{4}$.

Câu 12: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = |x|^3 - (2m+1)x^2 + 3m|x| - 5$ có 3 điểm cực trị:

- A. $(-\infty; 0)$. B. $(1; +\infty)$. C. $(-\infty; 0]$. D. $\left[0; \frac{1}{4}\right)$.

Câu 13: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y			5		1		$+\infty$

$-\infty \xrightarrow{\quad} 5 \xrightarrow{\quad} 1 \xrightarrow{\quad} +\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $f(|x|)$ bằng

- A. 5. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 14: Cho hàm số: $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - mx^3 + \frac{3}{2}(m^2-1)x^2 + (1-m^2)x + 2019$ với m là tham số thực. Biết rằng hàm số $y = f(|x|)$ có số điểm cực trị lớn hơn 5 khi $a < m^2 < b + 2\sqrt{c}$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$). Giá trị $T = a + b + c$ bằng

- A. 6. B. 8. C. 7. D. 5.

Câu 15: Có bao nhiêu số nguyên $m \in [-10; 10]$ để hàm số $y = |mx^3 - 3mx^2 + (3m-2)x + 2 - m|$ có 5 điểm cực trị?

- A. 7. B. 10. C. 9. D. 11.

Câu 16: Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ có bảng biến thiên như hình vẽ sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$				0				$+\infty$

$\swarrow$ $\searrow$ $\swarrow$ $\searrow$
 -20 -20

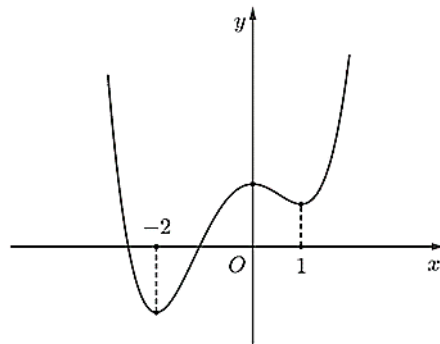
Có bao nhiêu số nguyên dương m để hàm số $y = |f(x) + m|$ có 7 điểm cực trị?

- A. 0. B. 21. C. 18. D. 19.

Câu 17: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x^3 - 2x^2)(x^3 - 2x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số $y = |f(1 - 2018x)|$ có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị

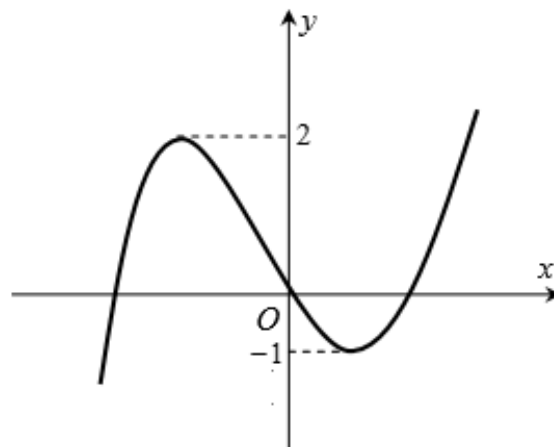
- A. 9. B. 2022. C. 11. D. 2018.

Câu 18: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Các điểm $x = -2; x = 0; x = 1$ là các điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f(|x + 1| - 3)$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?



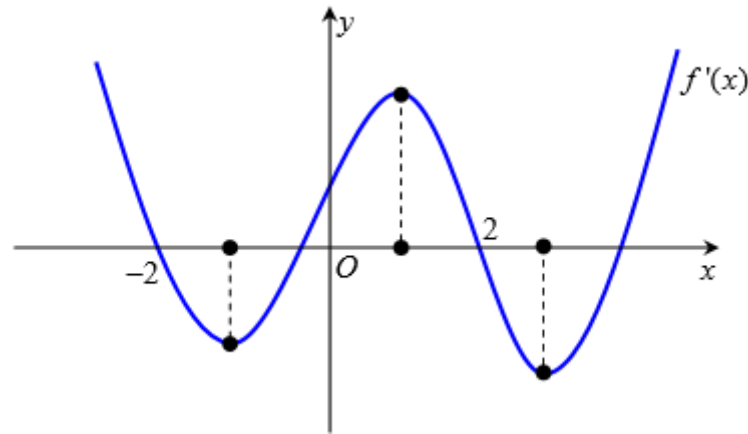
- A. 5. B. 4. C. 7. D. 9.

Câu 19: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Số giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = |2f(x) - 3m|$ có 5 điểm cực trị là:



- A. 2. B. 3. C. 0. D. 1.

Câu 20: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị đạo hàm $y = f'(x)$ như hình vẽ dưới đây. Hàm số $y = |f(x^3 - 3x) + 2|$ có tối đa bao nhiêu điểm cực trị?



A. 16.

B. 17.

C. 19.

D. 18

Câu 21: Biết phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ($a \neq 0$) có đúng hai nghiệm thực. Hàm số $y = |ax^3 + bx^2 + cx + d|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3.

B. 5.

C. 4.

D. 2.

Câu 22: Có bao nhiêu số nguyên $m \in (-20; 20)$ để hàm số $y = |x^2 - 2x + m| + 2x + 1$ có ba điểm cực trị?

A. 17.

B. 16.

C. 19.

D. 18.

Câu 23: Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y = |x^3 + (2m-1)x^2 + (2m^2 - 2m - 9)x - 2m^2 + 9|$ có 5 điểm cực trị.

A. 7.

B. 5.

C. 6.

D. 4.

Câu 24: Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y = |x|^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 4)|x| + 1$ có 3 điểm cực trị.

A. 3.

B. 5.

C. 6.

D. 4.

Câu 25: Có bao nhiêu số nguyên $m \in (-10; 10)$ để hàm số $y = |x|^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 4)|x| + 1$ có 5 điểm cực trị.

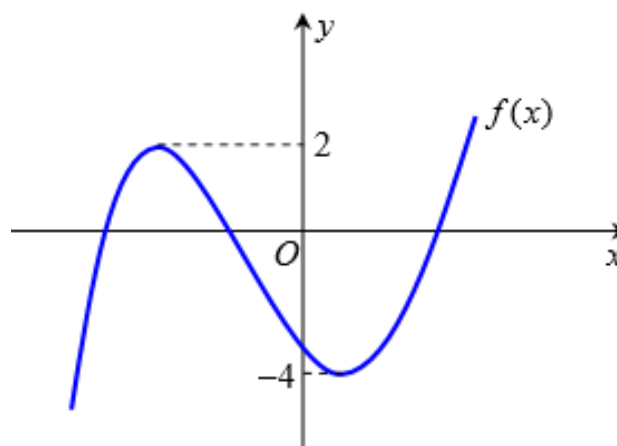
A. 3.

B. 6.

C. 8.

D. 7.

Câu 26: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-2021; 2012]$ để hàm số $y = |f^2(x) - 2f(x) + m + 4|$ có đúng 5 điểm cực trị?



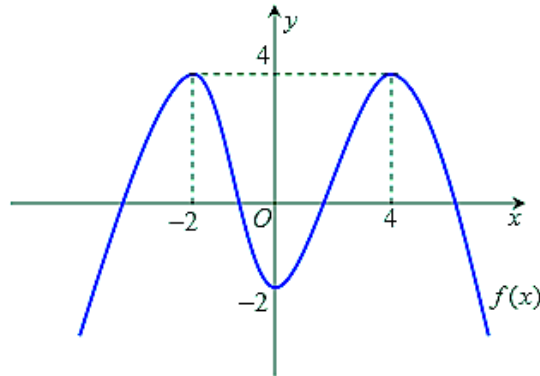
A. 2104.

B. 2016.

C. 2105.

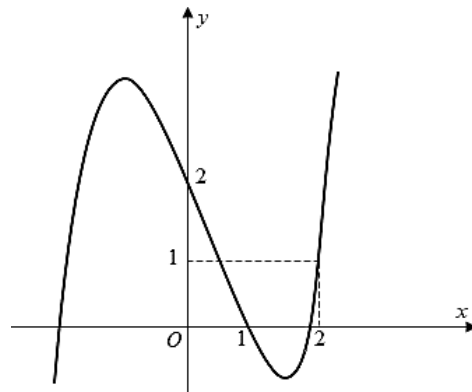
D. 2017

Câu 27: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = |4f^2(x) + 8f(x) + m - 1|$ có đúng 15 điểm cực trị?



- A. 2. B. 3. C. 0. D. 1.

Câu 28: Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



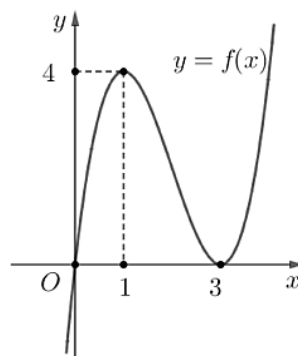
Hàm số $y = |4f(x) - 2x^3 + 7x^2 - 8x + 1|$ có tối đa bao nhiêu điểm cực trị

- A. 5. B. 6. C. 7. D. 8.

Câu 29: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)^3(x^2 + (4m-5)x + m^2 - 7m + 6)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y = f(|x|)$ có đúng 5 điểm cực trị.

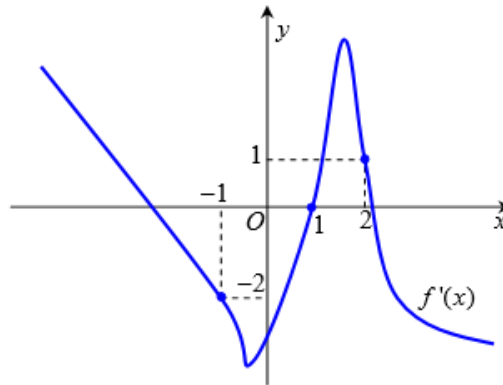
- A. 4. B. 2. C. 5. D. 3.

Câu 30: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số $y = |(f(x))^2 + f(x) - 2|$ là



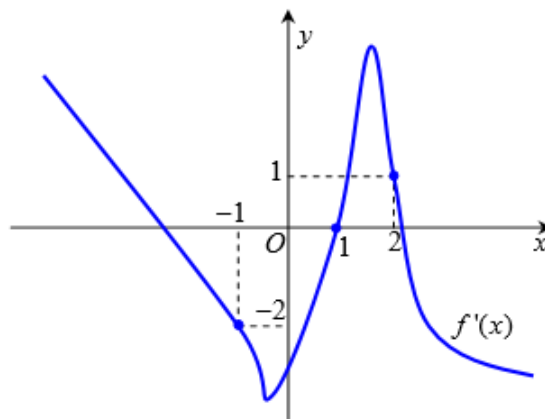
- A. 6. B. 9. C. 5. D. 7.

Câu 31: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị đạo hàm $y = f'(x)$ như hình vẽ dưới đây. Hỏi hàm số $y = |2f(x) - x^2 + 2x + 3|$ có tối đa bao nhiêu điểm cực trị?



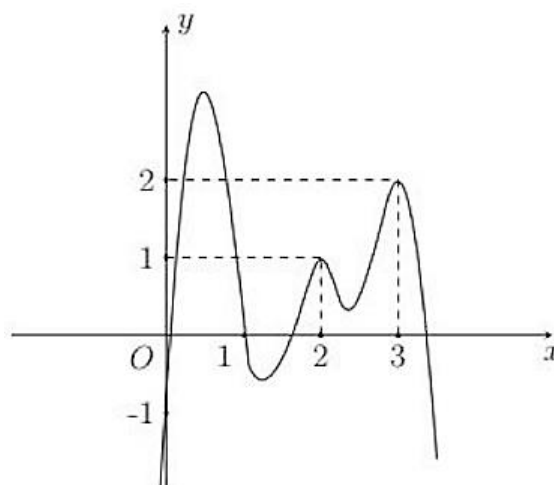
- A. 2. B. 3. C. 5. D. 7

Câu 32: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị đạo hàm $y = f'(x)$ như hình vẽ dưới đây. Hỏi hàm số $y = |2f(x^2 - 2x) - x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 4x + 2021|$ có tối đa bao nhiêu điểm cực trị?



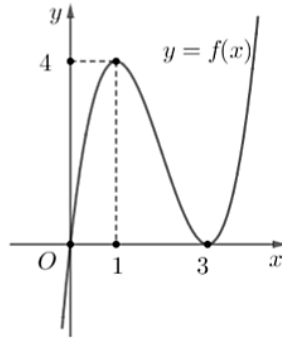
- A. 9. B. 11. C. 10. D. 12.

Câu 33: Cho $f(x)$ là một hàm đa thức và có đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ bên. Hàm số $y = |2f(x) - (x-1)^2|$ có tối đa bao nhiêu điểm cực trị?



- A. 9. B. 7. C. 3. D. 5.

Câu 34: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Khi hàm số $y = \left| \left(f(x) \right)^2 + f(x) + m \right|$ có số điểm cực trị là ít nhất. Giá trị nhỏ nhất của tham số m thuộc khoảng nào dưới đây?



- A. $(0;1)$. B. $(-\infty;-1)$. C. $(-1;0)$. D. $(1;+\infty)$.

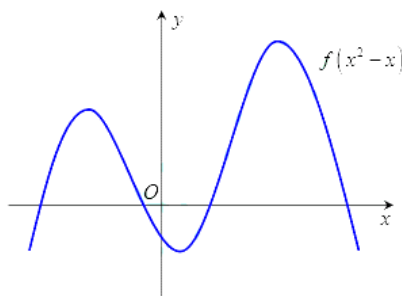
Câu 35: Cho hàm số $y = f(x) = x^2 - 2mx + 4m|x - m| + 2$. Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số $m \in (-21;21)$ để hàm số $y = f(x)$ có ba điểm cực trị. Số phần tử của S

A. 20. B. 16. C. 18. D. 19

Câu 36: Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 3mx^2 + 6mx + m - 1$. Số giá trị nguyên của tham số $m \in [-2021;2021]$ để hàm số $y = f(|x + 2019m - 2020|)$ có đúng 5 điểm cực trị

A. 2016. B. 2018. C. 2019. D. 2017

Câu 37: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết đồ thị hàm số $y = f(x^2 - x)$ được cho như hình vẽ dưới đây. Hỏi hàm số $y = f(x^2 - 2mx - |x - m| + m^2)$ có tất cả bao nhiêu cực trị?



- A. 2. B. 3. C. 5. D. 1.

Câu 38: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$	-2	-1	3	5	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	$+\infty$	-2	1	0	3	$-\infty$

Xét hàm số $g(x) = f(|x - 4|) + 2018^{2019}$. Số điểm cực trị của hàm số $g(x)$ là:

- A. 5. B. 1. C. 9. D. 2.

Câu 39: Cho hàm số $f(x) = \left| \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} + m \right|$. Hàm số có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2.

B. 3.

C. 5.

D. 4.

Câu 40: Cho hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, với a, b, c là các số thực thỏa mãn $\begin{cases} a + b + c < -1 \\ 4a - 2b + c > 8 \\ c < 0 \end{cases}$. Hàm số

$y = |f(|x|)|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

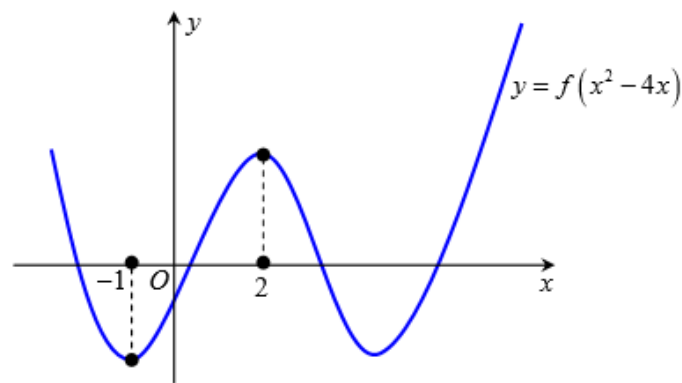
A. 7.

B. 9.

C. 11.

D. 5.

Câu 41: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết đồ thị hàm số $y = f(x^2 - 4x)$ được cho như hình vẽ dưới đây. Hỏi hàm số $y = f(x^2 - 2|x| + 12)$ có tất cả bao nhiêu cực trị?



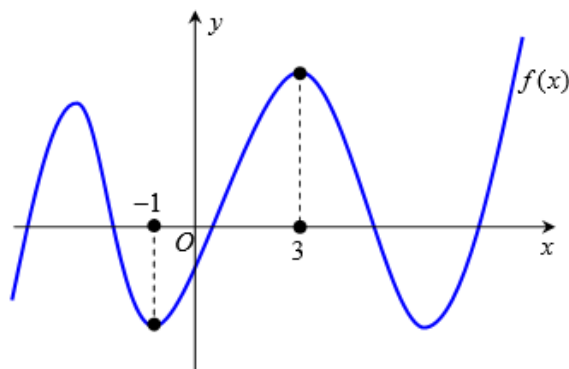
A. 7.

B. 3.

C. 5.

D. 1.

Câu 42: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết đồ thị hàm số $y = f(x)$ được cho như hình vẽ dưới đây. Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số $m \in [-21; 21]$ để hàm số $y = (-|x + 2021m| - 2m + 1)$ có đúng 5 điểm cực trị. Số phần tử của tập S là



A. 2.

B. 3.

C. 0.

D. 1.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.B	2.A	3.A	4.B	5.B	6.D	7.B	8.A	9.B	10.D
11.B	12.C	13.C	14.B	15.B	16.D	17.A	18.C	19.A	20.B
21.A	22.C	23.B	24.D	25.D	26.B	27.B	28.C	29.D	30.D
31.D	32.B	33.D	34.A	35.A	36.C	37.C	38.A	39.B	40.D
41.A	42.A								

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Chọn D

Ta có phương trình $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = \pm 2 \end{cases}$. Do nghiệm $x = 1$ là nghiệm bội chẵn nên $x = 1$ không phải là điểm cực trị. Vậy hàm số $f(x)$ đã cho có 3 cực trị nhưng chỉ có một cực trị $x = 2 > 0 \Rightarrow$ hàm số $f(|x|)$ có 3 cực trị.

Câu 2: Chọn D

Hàm số $f(x)$ đã cho có hai điểm cực trị nên hàm số $f(x) + m$ cũng có hai cực trị. Vậy hàm số $y = |f(x) + m|$ ba cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình có tổng số nghiệm đơn và bội lẻ bằng 1 $\Leftrightarrow \begin{cases} -m \geq 1 \\ -m \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -1 \\ m \leq 3 \end{cases}$.

Câu 3: Chọn A

Ta có $y = x^3 - 3x^2 + m$ có $y' = 3x^2 - 6x$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y(0) = m \\ y(2) = m - 4 \end{cases}$.

Yêu cầu bài toán tương đương với: $y(0)y(2) \geq 0 \Leftrightarrow m(m - 4) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 4 \\ m \leq 0 \end{cases}$.

Do đó $m \in \{-2017; -2016; \dots; 0; 4; \dots; 2017\} \Rightarrow$ có $2018 + 2014 = 4032$ số nguyên thỏa mãn đầu bài.

Câu 4: Chọn B

Hàm số $g(x) = x^4 - mx^2 + m$ có tối đa là 3 cực trị và $g(x) = 0$ có tối đa là 4 nghiệm

Vậy hàm số $y = |x^4 - mx^2 + m|$ có 7 cực trị $\Leftrightarrow g(x) = 0$ có tối đa là 4 nghiệm phân biệt

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4m > 0 \\ m > 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 4$$

Câu 5: Chọn B

Xét $g(x) = f(x) - 2018$, ta có $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty \\ g(0) = f(0) - 2018 = d - 2018 > 0 \\ g(1) = f(1) - 2018 = a + b + c + d - 2018 < 0 \end{cases}$

Do đó đồ thị hàm số $y = g(x)$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt suy ra hàm số $y = g(x)$ có hai điểm cực trị.

Do vậy số điểm cực trị của hàm số $y = |g(x)| = 2 + 3 = 5$

Câu 6: Chọn D

Xét hàm số $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m$ có ba điểm cực trị là nghiệm của phương trình

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^3 - 12x^2 - 24x = 0 \Leftrightarrow 12(x^3 - x^2 - 12x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Phương trình $f(x) = 0$ có tối đa bốn nghiệm thực. Do đó hàm số $y = |f(x)|$ có 7 điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình $f(x) = 0$ có 4 nghiệm thực phân biệt.

$\Leftrightarrow 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 = -m$ có 4 nghiệm thực phân biệt.

Lập bảng biến thiên của hàm số $y = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2$, ta có giá trị cần tìm của m thỏa mãn là $-5 < -m < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 5 \Rightarrow m \in \{1; 2; 3; 4\}$.

Vậy có 4 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn.

Câu 7: Chọn B

Yêu cầu bài toán tương đương với $f(x) + m = 0 \Leftrightarrow -m = f(x)$ có tổng số nghiệm đơn và bội lẻ bằng 3 $\Leftrightarrow -3 < -m < 1 \Leftrightarrow -1 < m < 3$.

Câu 8: Chọn A

Hàm số $y = f(|x + m|)$ có 7 điểm cực trị $\Leftrightarrow y = f(x + m)$ có 3 điểm cực trị dương.

$$\text{Các điểm cực trị của hàm số } y = f(x + m) \text{ là } \begin{cases} x + m = -1 \\ x + m = 0 \\ x + m = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 - m \\ x = -m \\ x = 2 - m \end{cases}$$

$$\text{Vậy ta có điều kiện là } \begin{cases} -1 - m > 0 \\ -m > 0 \\ 2 - m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ m < 0 \\ m < 2 \end{cases} \Leftrightarrow m < -1$$

Câu 9: Chọn B

Ta có $y = \begin{cases} x^3 - mx + 5 & (x \geq 0) \\ -x^3 - mx + 5 & (x < 0) \end{cases} \Rightarrow y' = \begin{cases} 3x^2 - m & (x > 0) \\ -3x^2 - m & (x < 0) \end{cases}$ và hàm số không có đạo hàm tại $x = 0$

$$\text{Nếu } m = 0 \Rightarrow y' = \begin{cases} 3x^2 > 0 & (x > 0) \\ -3x^2 < 0 & (x < 0) \end{cases}$$

đổi dấu từ âm sang dương khi qua điểm $x = 0$ nên hàm số có duy nhất 1 điểm cực trị là $x = 0$

$$\text{Nếu } m > 0 \Rightarrow y' = \begin{cases} 3x^2 - m & (x > 0) \\ -3x^2 - m & (x < 0) \end{cases}; y' = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{m}{3}}$$

$$y' \text{ chỉ đổi dấu khi đi qua } x = \sqrt{\frac{m}{3}}. \text{ Nên hàm số có duy nhất 1 điểm cực trị là } x = \sqrt{\frac{m}{3}}$$

$$\text{Nếu } m < 0 \Rightarrow y' = \begin{cases} 3x^2 - m & (x > 0) \\ -3x^2 - m & (x < 0) \end{cases}; y' = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt{\frac{-m}{3}}$$

y' chỉ đổi dấu khi đi qua $x = -\sqrt{\frac{-m}{3}}$ nên hàm số có duy nhất 1 điểm cực trị là $x = -\sqrt{\frac{-m}{3}}$

Vậy với mọi m , hàm số có duy nhất 1 điểm cực trị.

Câu 10: Chọn D

Yêu cầu bài toán tương đương với hàm số $y = x^3 - (2m+1)x^2 + 3mx - 5$ có hai điểm cực trị dương, tức là phương trình $y' = f'(x) = 3x^2 - 2(2m+1)x + 3m = 0$ có hai nghiệm dương phân

$$\text{biệt} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = (2m+1)^2 - 9m > 0 \\ S = \frac{2(2m+1)}{3} > 0 \\ P = \frac{3m}{3} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ 0 < m < \frac{1}{4} \end{cases}$$

Câu 11: Chọn B

Yêu cầu bài toán tương đương với hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị dương, tức là phương trình $y' = f'(x) = 3x^2 - 2(2m-1)x + 2 - m = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = (2m-1)^2 - 3(2-m) > 0 \\ S = \frac{2(2m-1)}{3} > 0 \\ P = \frac{2-m}{3} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{5}{4} < m < 2.$$

Câu 12: Chọn C

Yêu cầu bài toán tương đương với hàm số $y = f(x) = x^3 - (2m+1)x^2 + 3mx - 5$ có đúng một điểm cực trị dương, tức là phương trình $y' = f'(x) = 3x^2 - 2(2m+1)x + 3m = 0$ có hai nghiệm thỏa mãn $x_1 \leq 0 < x_2 \Leftrightarrow m \leq 0$.

Câu 13: Chọn C

Ta có bảng biến thiên hàm số $y = f(|x|)$ như sau:

x	$-\infty$	-3	0	3	$+\infty$	
y'		$+$	0	$-$	0	$+$
y	$+\infty$					$+\infty$

$\swarrow$ $\searrow$ $f(0)$ $\swarrow$ $\searrow$
 1 1

Hàm số có 3 điểm cực trị.

Câu 14: Chọn B

Ta có $f'(x) = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x + 1 - m^2$ là một đa thức bậc ba có tối đa 3 nghiệm, vậy hàm số $y = f(|x|)$ có số điểm cực trị lớn hơn 5 khi và chỉ khi $f(x)$ có 3 điểm cực trị dương, tức là $f'(x) = 0$ có 3 nghiệm dương phân biệt.

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x + 1 - m^2 = 0$ có ba nghiệm dương phân biệt.

Xét hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x + 1 - m^2$ có

$$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6mx + 3(m^2 - 1) = m \Leftrightarrow \begin{cases} x = m - 1 \\ x = m + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{cd} = m - 1, y_{cd} = m^3 - m^2 - 3m + 3 \\ x_{ct} = m + 1, y_{ct} = m^3 - m^2 - 3m - 1 \end{cases}$$

Do đó phương trình $y = 0$ có 3 nghiệm dương phân biệt khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} x_{cd} > 0 \\ y(0) < 0 \\ y_{cd} \cdot y_{ct} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m - 1 > 0 \\ 1 - m^2 < 0 \\ (m^3 - m^2 - 3m + 3) \cdot (m^3 - m^2 - 3m - 1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{3} < m < 1 + \sqrt{2} \Leftrightarrow 3 < m^2 < 3 + 2\sqrt{2}.$$

Vì vậy $a = 3$, $b = 3$, $c = 2$. Nên $a + b + c = 8$.

Câu 15: Chọn B

Hàm số $y = |mx^3 - 3mx^2 + (3m - 2)x + 2 - m|$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi hàm số $y = mx^3 - 3mx^2 + (3m - 2)x + 2 - m$ có hai điểm cực trị và phương trình $mx^3 - 3mx^2 + (3m - 2)x + 2 - m = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(mx^2 - 2mx + m - 2) = 0$ có 3 nghiệm thực phân

$$\text{biệt} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' = m^2 - m(m - 2) > 0 \Leftrightarrow m > 0 \\ m - 2m + m - 2 \neq 0 \end{cases}$$

Vậy có 10 giá trị m thỏa mãn ycbt.

Câu 16: Chọn D

Hàm số $f(x)$ có 3 điểm cực trị là $x = -2; x = 0; x = 2$ nên hàm số $y = f(x) + m$ cũng có 3 điểm cực trị $x = -2; x = 0; x = 2$.

Vậy điều kiện để hàm số $y = |f(x) + m|$ có 7 điểm cực trị là phương trình $f(x) + m = 0 \Leftrightarrow f(x) = -m$ có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow -20 < -m < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 20$.

Vậy có 19 giá trị m thỏa mãn ycbt.

Câu 17: Chọn A

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } f'(x) &= (x^3 - 2x^2)(x^3 - 2x); f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0(\text{bội } 3) \\ x = 2 \\ x = \sqrt{2} \\ x = -\sqrt{2} \end{cases} \\ \Rightarrow f'(1 - 2018x) &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2018x = 0(\text{bội } 3) \\ 1 - 2018x = 2 \\ 1 - 2018x = \sqrt{2} \\ 1 - 2018x = -\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1/2018(\text{bội } 3) \\ x = -1/2018 \\ x = (1 - \sqrt{2})/2018 \\ x = (1 + \sqrt{2})/2018 \end{cases} \end{aligned}$$

Suy ra: Hàm số $f(1 - 2018x)$ có 4 điểm cực trị

Phương trình $f(1 - 2018x) = 0$ có nhiều nhất 5 nghiệm

Vậy hàm số $y = |f(1 - 2018x)|$ có nhiều nhất $4 + 5 = 9$ điểm cực trị.

Câu 18: Chọn C

Ghi chú: Hàm số $y = f(|x+m|+n)$ có tất cả $2a+1$ điểm cực trị, trong đó a là số điểm cực trị lớn hơn $-m$ của hàm số $y = f(x+m+n)$.

Ta có hàm số $y = f(x+1-3) = f(x-2)$ có các điểm cực trị là:

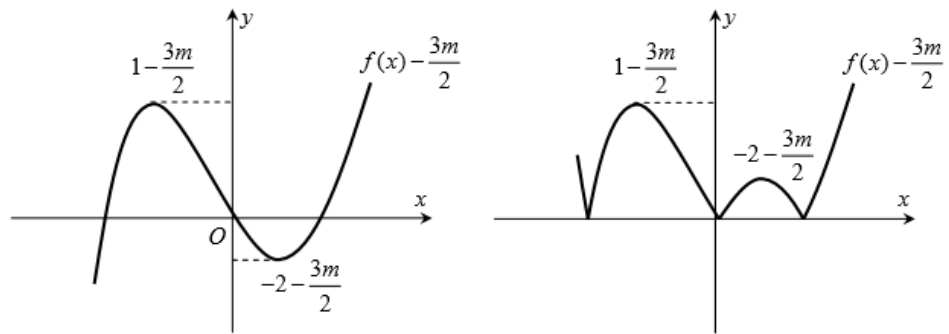
$$x-2=-2; x-2=0; x-2=1 \Leftrightarrow x=0; x=2; x=3$$

Hàm số này có 3 điểm cực trị lớn hơn -1 . Do đó hàm số $y = f(|x+1|-3)$ có tổng cộng $2.3+1=7$ điểm cực trị.

Câu 19: Chọn A

Hàm số $y = |2f(x) - 3m| = 2 \left| f(x) - \frac{3m}{2} \right|$ có cùng số điểm cực trị với hàm số

$$y = g(x) = \left| f(x) - \frac{3m}{2} \right|.$$



Thực hiện biến đổi đồ thị: $f(x) \xrightarrow[\text{một đoạn 3 đơn vị}]{\text{Tinh tiến lên trên}} f(x) - \frac{3m}{2} \xrightarrow[\text{lay đối xứng qua Ox}]{\text{lay đối xứng qua Ox}} \left| f(x) - \frac{3m}{2} \right|$.

Hàm số $\left(f(x) - \frac{3m}{2} \right)$ có hai điểm cực trị tương ứng với hai giá trị cực trị là $\begin{cases} 1 \rightarrow \left(-2 - \frac{3m}{2} \right) \\ 1 \rightarrow \left(1 - \frac{3m}{2} \right) \end{cases}$.

Để hàm số $y = g(x) = \left| f(x) - \frac{3m}{2} \right|$ có 5 điểm cực trị thì đồ thị hàm số $\left(f(x) - \frac{3m}{2} \right)$ phải cắt trục

$$\text{hoành tại 3 điểm phân biệt} \Rightarrow \begin{cases} \left(-2 - \frac{3m}{2} \right) < 0 \\ \left(1 - \frac{3m}{2} \right) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{4}{3} < m < \frac{2}{3} \Rightarrow m = \{1; 0\}.$$

Câu 20: Chọn B

Xét hàm số $g(x) = f(x^3 - 3x) + 2$ có $g'(x) = (3x^2 - 3)f'(x^3 - 3x)$.

$$\text{Phương trình đạo hàm } g'(x) = (3x^2 - 3)f'(x^3 - 3x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1. \\ f'(x^3 - 3x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3x = -2 \Leftrightarrow (x-1)^2(x-2) = 0 \\ x^3 - 3x = a \in (-2; 0) \\ x^3 - 3x = 2 \Leftrightarrow (x+1)^2(x-2) = 0 \\ x^3 - 3x = b > 2. \end{cases} \end{cases}$$

Suy ra hàm số $y = f(x^3 - 3x) + 2$ có 8 điểm cực trị có tối đa 17 điểm cực trị.

Câu 21: Chọn A

Ghi chú: Hàm số $y = |f(x)|$ có $m+n$ điểm cực trị

Trong đó m là số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$, n là số nghiệm đơn và nghiệm bội lẻ của phương trình $f(x) = 0$.

Vì phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ($a \neq 0$) có đúng hai nghiệm thực nên biểu thức có dạng:

$$u = ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - x_1)^2(x - x_2)$$

$$u' = a(x - x_1)^2 + 2a(x - x_1)(x - x_2) = (x - x_1)(ax - ax_1 + 2ax - 2ax_2)$$

Phương trình $u' = 0$ có hai nghiệm đơn nên ta suy ra hàm số $ax^3 + bx^2 + cx + d$ có hai điểm cực trị. Từ đó hàm số $y = |ax^3 + bx^2 + cx + d|$ có tất cả $2 + 1 = 3$ cực trị.

Câu 22: Chọn C

Trường hợp 1: Phương trình $x^2 + 2x + m = 0$ vô nghiệm.

Nếu $x^2 + 2x + m < 0 \forall x$ (vô lý)

Nếu $x^2 + 2x + m > 0 \forall x$

Khi đó $y = x^2 - 2x + m + 2x + 1 = x^2 + m + 1$. Hàm số này có 1 điểm cực trị tại $x = 0$. **Loại**

Trường hợp 2: Phương trình $x^2 + 2x + m = 0$ có nghiệm.

Nếu phương trình có nghiệm kép thì $x^2 + 2x + m$ có dạng $(x - x_0)^2 \geq 0 \forall x$. Lúc này hàm số cũng có 1 điểm cực trị tại $x = 0$. **Loại**

Nếu phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1 < x_2 \Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow 1 - m > 0 \Leftrightarrow m < 1$

$$y' = \frac{(2x - 2)(x^2 - 2x + m)}{|x^2 - 2x + m|} + 2$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} 2x - 2 + 2 = 0 \\ x^2 - 2x + m > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} -(2x - 2) + 2 = 0 \\ x^2 - 2x + m < 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 2x + m > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 2 \\ x^2 - 2x + m < 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 0 \\ m > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 2 \\ m < 0 \end{cases} \end{cases}$$

Khi $0 < m < 1$, rõ ràng không tồn tại số nguyên

Khi $m < 0$ ta có bảng xét dấu của y' như sau:

Vì $x_1 + x_2 = 2; x_1 x_2 = m < 0$ nên $x_1 < 2 < x_2$.

x	$-\infty$	x_1	2	x_2	$+\infty$		
y'	-		+	0	-		+

Lúc này hàm số có 3 điểm cực trị. Vậy $m \in \{-19; \dots; -1\}$. Ta có 19 giá trị m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 23: Chọn B

Ta có: $x^3 + (2m-1)x^2 + (2m^2-2m-9)x - 2m^2 + 9 = 0$ (1)

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2 + 2mx + 2m^2 - 9) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 + 2mx + 2m^2 - 9 = 0 \end{cases}$$

Ycbt $\Leftrightarrow$ (1) có 3 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 - (2m^2 - 9) > 0 \\ 1 + 2m + 2m^2 - 9 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < m < 3 \\ m \neq \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} \Rightarrow m \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}. \end{cases}$$

Vậy có 5 số nguyên m thỏa mãn.

Câu 24: Chọn D

Ycbt $\Leftrightarrow y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 4)x + 1$ có đúng một điểm cực trị dương

$$\Leftrightarrow y' = 3x^2 - 6mx + 3(m^2 - 4) = 0 \text{ có đúng một nghiệm dương}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = m - 2 \\ x = m + 2 \end{cases} \text{ có đúng một nghiệm dương} \Leftrightarrow m - 2 \leq 0 < m + 2 \Leftrightarrow -2 < m \leq 2 \Rightarrow m \in \{-1, 0, 1, 2\}.$$

Vậy có 4 số nguyên m thỏa mãn.

Câu 25: Chọn D

Ycbt $\Leftrightarrow y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 4)x + 1$ có đúng hai điểm cực trị dương

$$\Leftrightarrow y' = 3x^2 - 6mx + 3(m^2 - 4) = 0 \text{ có đúng hai nghiệm dương}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = m - 2 \\ x = m + 2 \end{cases} \text{ có đúng hai nghiệm dương} \Leftrightarrow m - 2 > 0 \Leftrightarrow m > 2 \Rightarrow m \in \{3, 4, \dots, 9\}.$$

Vậy có 7 số nguyên m thỏa mãn.

Câu 26: Chọn B

$$\text{Xét hàm số } g(x) = f^2(x) - 2f(x) + m + 4 \Rightarrow g'(x) = f'(x) \cdot (2f(x) - 2).$$

$$\text{Cho } g'(x) = f'(x) \cdot (2f(x) - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \Rightarrow \text{co_2_cuc_tri} \\ f(x) = 1 \Rightarrow \text{co_3_cuc_tri} \end{cases}$$

$\Rightarrow y = g(x)$ có 5 điểm cực trị.

Để hàm số $y = |g(x)|$ có 5 điểm cực trị thì phương trình $g(x) = f^2(x) - 2f(x) + m + 4$ vô nghiệm.

$$\Rightarrow \Delta' = 1 - m - 4 = -m - 3 \leq 0 \Leftrightarrow m \geq -3 \rightarrow -3 \leq m \leq 2012 \Rightarrow \text{có 2016 giá trị nguyên của } m \text{ thỏa mãn.}$$

Câu 27: Chọn B

$$\text{Xét hàm số } y = g(x) = 4f^2(x) + 8f(x) + m - 1 \Rightarrow g'(x) = 4f'(x) \cdot (2f(x) + 2).$$

$$\text{Phương trình đạo hàm } g'(x) = 4f'(x) \cdot (2f(x) + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \Rightarrow \text{co 3 diem cuc tri} \\ f(x) = -1 \Rightarrow \text{co 4 diem cuc tri} \end{cases}$$

Suy ra hàm số $y = g(x)$ có 7 điểm cực trị.

Để hàm số $y = |g(x)|$ có đúng 15 điểm cực trị thì pt $4f^2(x) + 8f(x) + m - 1$ phải có 8 nghiệm bội lẻ.

Dựa vào đồ thị ta thấy: phương trình $f(x) = a \in (-2; 4)$ luôn có 4 nghiệm phân biệt.

Đặt $f(x) = u$ thì phương trình $4u^2 + 8u + m - 1 = 0$ phải có 2 nghiệm phân biệt với $\forall u \in (-2; 4)$.

Mặt khác: $4u^2 + 8u + m - 1 = 0 \Leftrightarrow m - 1 = -4u^2 - 8u$, ta có bảng biến thiên như sau:

u	-2	-1	4
y'	-	0	+
y			

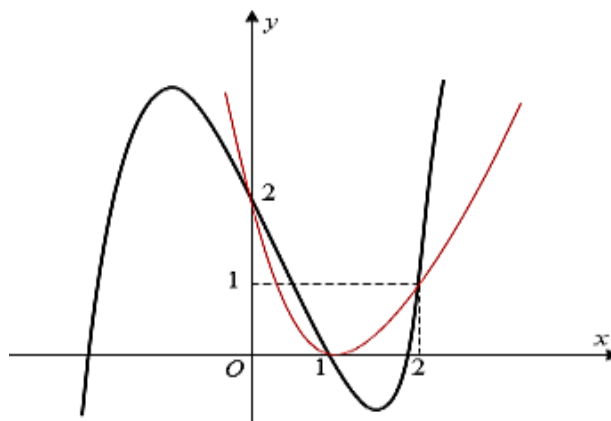
Từ bảng biến thiên $\Rightarrow 0 < m - 1 < 4 \Leftrightarrow 1 < m < 5 \Rightarrow m = \{2; 3; 4\}$.

Câu 28: Chọn C

Xét hàm số $g(x) = 4f(x) - 2x^3 + 7x^2 - 8x + 1$ có:

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 4f'(x) - 6x^2 + 14x - 8 = 0 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{7}{2}x + 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Đường cong $y = f'(x)$ cắt parabol $y = \frac{3}{2}x^2 - \frac{7}{2}x + 2$ tại ba điểm có hoành độ lần lượt là $x = 0; x = 1; x = 2$



Và $g'(x)$ đổi dấu khi đi qua các điểm $x = 0; x = 1; x = 2$ nên $g(x)$ có ba điểm cực trị.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	1	2	$+\infty$
y'	-	0	+	0	-
y	$+\infty$	$g(0)$	$g(1)$	$g(2)$	$+\infty$

Vậy phương trình $g(x) = 0$ có tối đa bốn nghiệm (đơn hoặc bội lẻ)

Vậy hàm số $y = |g(x)|$ có tối đa $3 + 4 = 7$ điểm cực trị

Câu 29: Chọn D

Hàm số $y = f(|x|)$ có đúng 5 điểm cực trị khi và chỉ khi hàm số $y = f(x)$ có đúng hai điểm cực trị dương $\Leftrightarrow g(x) = x^2 + (4m - 5)x + m^2 - 7m + 6 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn

$$x_1 \leq 0 < x_2 \neq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 < 0 < x_2 \neq 1 \\ x_1 = 0 < x_2 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a.g(0) < 0 \\ g(1) \neq 0 \\ g(0) = 0 \\ g(1) \neq 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 7m + 6 < 0 \\ m^2 - 3m + 2 \neq 0 \\ m^2 - 7m + 6 = 0 \\ m^2 - 3m + 2 \neq 0 \\ 5 - 4m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < m < 6 \\ m \neq 2 \end{cases}.$$

Vậy $m \in \{3, 4, 5\}$.

Câu 30: Chọn D

Xét hàm số $g(x) = (f(x))^2 + f(x) - 2$ có

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2f(x).f'(x) + f'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x)(2f(x) + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f(x) = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Quan sát đồ thị hàm số $f(x)$ hàm số có hai điểm cực trị $x = 0; x = 3$ do đó

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = 3$ và kẻ đường thẳng $y = -\frac{1}{2}$ cắt đồ thị hàm số $f(x)$ tại duy nhất một điểm

có hoành độ $x = a < 0$. Vậy $f(x) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = a$.

Vậy $g'(x)$ đổi dấu khi qua các điểm $x = a; x = 0; x = 3$ do đó $g(x)$ có ba điểm cực trị $x = a; x = 0; x = 3$.

Xét phương trình $g(x) = 0 \Leftrightarrow (f(x))^2 + f(x) - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 1 \\ f(x) = -2 \end{cases}$;

Phương trình $f(x) = 1$ có ba nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 với $0 < x_1 < 1 < x_2 < 3 < x_3$.

Phương trình $f(x) = -2$ có một nghiệm duy nhất $x_4 < a$.

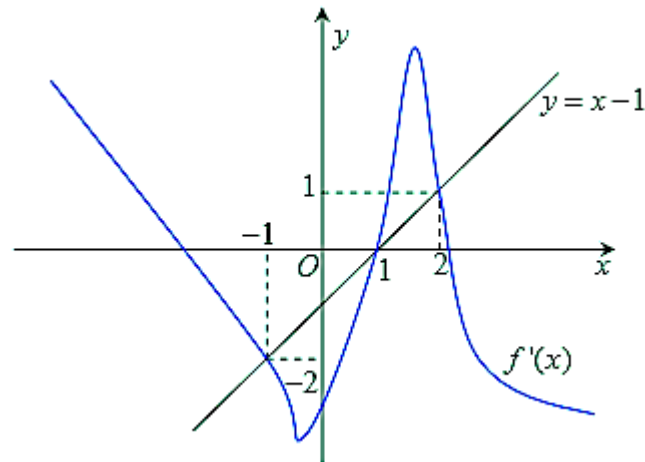
Vậy hàm số $y = |g(x)|$ có tất cả 7 điểm cực trị.

Câu 31: Chọn D

Xét hàm số $y = g(x) = 2f(x) - x^2 + 2x + 3 \Rightarrow g'(x) = 2f(x) - 2x + 2 = 2(f'(x) - x + 1)$.

Cho $g'(x) = 2f(x) - 2x + 2 = 2(f'(x) - x + 1) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x - 1$.

Ta có đồ thị:



Từ đồ thị ta thấy phương trình $f'(x) = x - 1$ có ba nghiệm phân biệt là $x = \pm 1; x = 2$.

Suy ra hàm số $y = g(x) = 2f(x) - x^2 + 2x + 3$ có ba điểm cực trị $\Rightarrow y = |2f(x) - x^2 + 2x + 3|$ có tối đa 7 điểm cực trị.

Câu 32: Chọn B

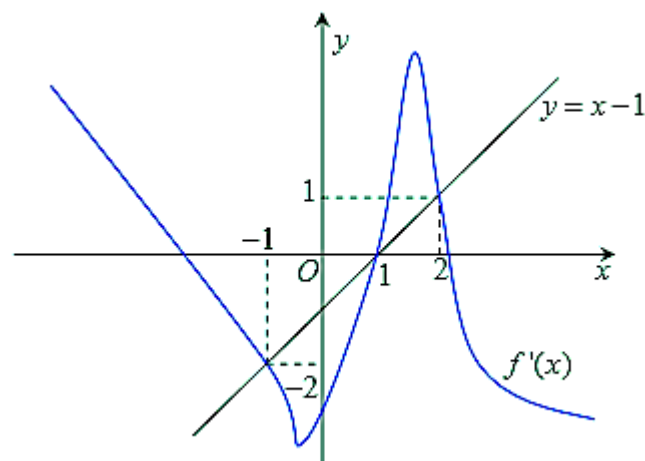
Xét hàm số $y = g(x) = 2f(x^2 - 2x) - x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 4x + 2021$ có:

$$g'(x) = 2(2x - 2)f'(x^2 - 2x) - 4x^3 + 12x^2 - 4x - 4 = 4(x - 1)(f'(x^2 - 2x) - (x^2 - 2x - 1)).$$

$$\text{Cho } g'(x) = 4(x - 1)(f'(x^2 - 2x) - (x^2 - 2x - 1)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ f'(x^2 - 2x) = x^2 - 2x - 1 \end{cases}$$

Xét phương trình $f'(x^2 - 2x) = x^2 - 2x - 1$. Đặt $x^2 - 2x = t \Rightarrow f'(t) = t - 1$.

Ta có đồ thị như sau:



Dựa vào đồ thị, ta thấy đạo hàm $f'(t)$ cắt đường thẳng $y = t - 1$ tại 3 điểm phân biệt

$$t = \pm 1; t = 2 \Rightarrow \begin{cases} t = x^2 - 2x = -1 \Rightarrow \text{có nghiệm kép} \\ t = x^2 - 2x = 1 \Rightarrow \text{có hai nghiệm phân biệt} \\ t = x^2 - 2x = 2 \Rightarrow \text{có hai nghiệm phân biệt} \end{cases}$$

Suy ra hàm số $y = g(x) = 2f(x^2 - 2x) - x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 4x + 2021$ có 5 điểm cực trị.

Suy ra hàm số $y = |2f(x^2 - 2x) - x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 4x + 2021|$ có tối đa 11 điểm cực trị.

Câu 33: Chọn D

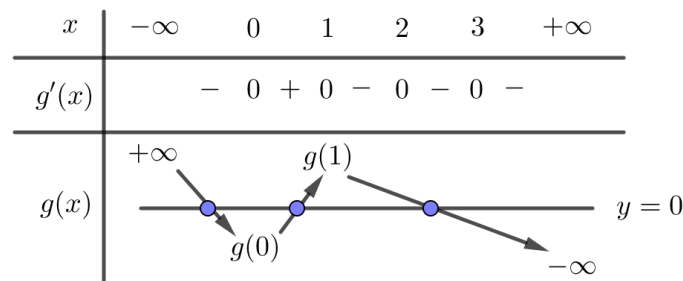
Xét $g(x) = 2f(x) - (x-1)^2$. Tìm số điểm cực trị của $g(x)$:

$$\text{Ta có } g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2f'(x) - 2(x-1) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \\ x=2 \\ x=3 \end{cases}$$

Kẻ đường thẳng $y = x-1$ cắt đồ thị $f'(x)$ tại bốn điểm phân biệt có hoành độ $x=0; x=1; x=2; x=3$ trong đó tại các điểm có hoành độ $x=2; x=3$ là các điểm tiếp xúc, do đó $g'(x)$ chỉ đổi dấu khi qua các điểm $x=0; x=1$. Vì vậy hàm số $g(x)$ có hai điểm cực trị $x=0; x=1$.

Ta tìm số nghiệm của phương trình $g(x) = 0$.

Bảng biến thiên:



Suy ra phương trình $g(x) = 0$ có tối đa ba nghiệm phân biệt.

+) Vậy hàm số $y = |g(x)|$ có tối đa $2+3=5$ điểm cực trị.

Câu 34: Chọn A

Đặt $t = f(x); g(t) = t^2 + t + m; y = |g(t)| = |t^2 + t + m|$.

Hàm số $g(t)$ có 1 cực trị tại $t = -\frac{1}{2}; f(x) = -\frac{1}{2}$ có nghiệm duy nhất vậy để hàm số ban đầu có

ít cực trị nhất khi và chỉ khi $t^2 + t + m$ không đổi dấu khi và chỉ khi $\Delta = 1 - 4m \leq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{1}{4}$;

Vậy giá trị nhỏ nhất cần tìm của m là $\frac{1}{4}$.

Câu 35: Chọn A

Ta có $y = f(x) = (x-m)^2 + 4m|x-m| - m^2 + 2$.

Mặt khác, hàm số $y = f(x)$ có cùng số điểm cực trị với hàm số $y = g(|x|) = x^2 + 4m|x| - m^2 + 2$

Có thể coi $y = f(x) = g(|x-m|)$.

Để hàm số $y = f(x) = g(|x-m|)$ có ba điểm cực trị thì hàm số $y = g(|x|)$ phải có ba điểm cực trị.

Khi đó, hàm số $g(x) = x^2 + 4mx - m^2 + 2$ phải có 1 cực trị dương.

Suy ra hàm số $g(x) = x^2 + 4mx - m^2 + 2$ đạt cực trị tại $x = -2m > 0 \Leftrightarrow m < 0$.

Suy ra $-21 < m < 0 \Rightarrow m = \{-20; \dots; -1\}$. Vậy có 20 giá trị thỏa mãn.

Câu 36: Chọn C

Hàm số $y = f(|x+a|)$ có hình dạng giống đồ thị hàm số $y = f(|x|)$. Tuy nhiên chỉ là tịnh tiến theo trục hoành Ox (theo chiều ngang), phụ thuộc vào giá trị của a .

Bài toán quy về tìm m để hàm số $y = f(x) = x^3 - 3mx^2 + 6mx + m - 1$ có hai điểm cực trị dương.

Xút đạo hàm $f'(x) = 3x^2 - 6mx + 6m = 0$ có 2 nghiệm dương

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 9m^2 - 18m > 0 \\ \frac{6m}{3} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 2 \Rightarrow 3 \leq m \leq 2021 \rightarrow \text{có 2019 giá trị thỏa mãn.}$$

Câu 37: Chọn C

Xét hàm số $y = g(x) = f(x^2 - x)$.

Ta có $y = f(x^2 - 2mx - |x - m| + m^2) = f((x - m)^2 - |x - m|) = g(|x - m|)$.

Mặt khác hàm số $y = g(|x - m|)$ và hàm số $y = g(|x|)$ có cùng số điểm cực trị.

Lại có, hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị dương $\Rightarrow$ hàm số $y = g(|x|) = f(x^2 - |x|)$ có 5 điểm cực trị. Suy ra hàm số $y = g(|x - m|)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 38: Chọn A

Số điểm cực trị của hàm số $f(|x - 4|) + 2018^{2019}$ bằng số cực trị của hàm số $f(|x - 4|)$.

Số điểm cực trị của hàm số $y = f(|x - 4|)$ bằng $2a + 12$, trong đó a là số điểm cực trị lớn hơn 4 của hàm số $y = f(x - 4)$.

Hàm số $y = f(x)$ có bốn điểm cực trị là $x = -2; x = -1; x = 3; x = 5$ nên hàm số $y = f(x - 4)$ có các điểm cực trị tương ứng là $x - 4 = -2; x - 4 = -1; x - 4 = 3; x - 4 = 5$
 $\Leftrightarrow x = 2; x = 3; x = 7; x = 9$.

Có hai điểm cực trị lớn hơn 4 là $x = 7; x = 9$.

Vậy hàm số $y = f(|x - 4|)$ có 5 điểm cực trị và $g(x)$ cũng có 5 điểm cực trị.

Câu 39: Chọn B

$$\text{Xét } g(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} + m \text{ có } g'(x) = \frac{\sqrt{x^2+1} - (x+1) \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{1-x}{\sqrt{(x^2+1)^2}} = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$m-1$	$m+\sqrt{2}$	$m+1$

Chủ đề 02: Cực trị của hàm số

Suy ra $g(x)$ có một điểm cực trị $x = 1$ và phương trình $g(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt khi và

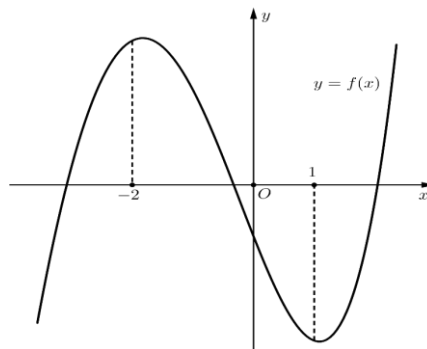
$$\text{chỉ khi } \begin{cases} m + \sqrt{2} > 0 \\ m - 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\sqrt{2} < m < 1.$$

Vậy hàm số $f(x) = |g(x)|$ có tối đa $1+2=3$ điểm cực trị.

Câu 40: Chọn D

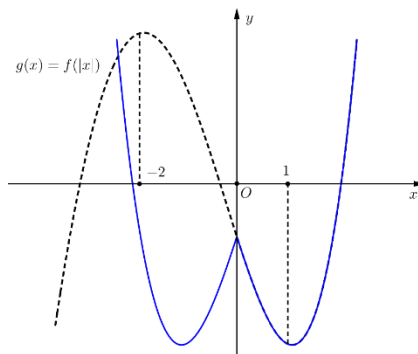
Cách 1:

$$\text{Ta có: } \begin{cases} a + b + c < -1 \\ 4a - 2b + c > 8 \\ c < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(1) < 0 \\ f(-2) > 0 \\ f(0) < 0 \end{cases}. \text{ Suy ra đồ thị hàm số } y = f(x) \text{ có dạng như sau:}$$

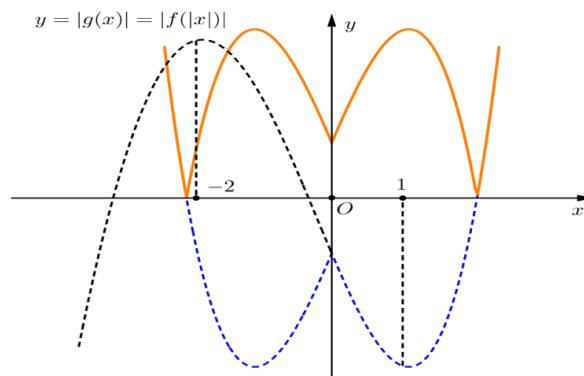


Ta sẽ dùng cách vẽ đồ thị hàm số $y = |f(|x|)|$ từ đồ thị hàm số $y = f(x)$. Bằng cách thực hiện từ trong ra ngoài:

Bước 1: Vẽ đồ thị hàm số $g(x) = f(|x|)$ bằng cách giữ nguyên phần bên phải trục tung của $y = f(x)$; lấy đối xứng qua trục tung phần bên trái trục tung của $y = f(x)$.



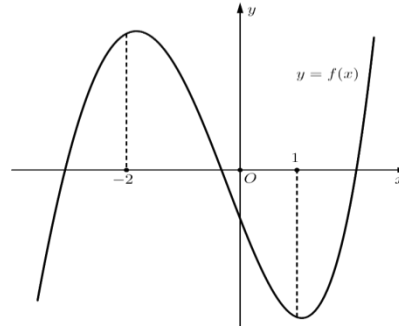
Bước 2: Vẽ đồ thị hàm số $y = |g(x)|$ bằng cách giữ nguyên phần trên trục hoành của $y = g(x)$; lấy đối xứng qua trục hoành phần bên dưới trục hoành của $y = g(x)$.



Từ đồ thị suy ra hàm số $y = |f(|x|)|$ có tất cả 5 điểm cực trị.

Cách 2:

Ta có: $\begin{cases} a+b+c < -1 \\ 4a-2b+c > 8 \\ c < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(1) < 0 \\ f(-2) > 0 \\ f(0) < 0 \end{cases}$. Suy ra đồ thị hàm số $y = f(x)$ có dạng như sau:



Hàm số này có 1 điểm cực trị dương và $f(x) = 0$ có một nghiệm dương.

Đặt $g(x) = f(|x|)$ hàm số này có $2 \cdot 1 + 1 = 3$ điểm cực trị và phương trình $g(x) = 0$

$\Leftrightarrow f(|x|) = 0$ có hai nghiệm (đơn hoặc bội lẻ). Do vậy hàm số $y = |g(x)| = |f(|x|)|$ có tất cả $3 + 2 = 5$ điểm cực trị.

Câu 41: Chọn A

Xét hàm số $y = g(x) = f(x^2 - 4x)$.

Ta có $y = f(x^2 - 8|x| + 12) = f(x^2 - 4|x| + 4 - 4|x| + 8) = f((|x| - 2)^2 - 4(|x| - 2)) = g(|x| - 2)$.

Mặt khác hàm số $y = g(x)$ có các điểm cực trị là $x = -1; x = 2; x = c > 2$.

$\Rightarrow$ hàm số $y = g(x - 2)$ có các điểm cực trị là $x = 1; x = 4; x = c + 2$ (có 3 cực trị dương).

Suy ra hàm số $y = g(|x| - 2) = f(x^2 - 8|x| + 12)$ có 7 điểm cực trị.

Câu 42: Chọn A

Hàm số $y = f(-|x + 2021m| - 2m + 1)$ có cùng số điểm cực trị với hàm số $y = f(-|x| - 2m + 1)$.

Thực hiện biến đổi đồ thị $f(x) \rightarrow f(x - 2m + 1) \rightarrow f(-|x| - 2m + 1)$.

Các điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ là $(x_1 = a < 0); (x_2 = -1); (x_3 = 3); (x_4 = b > 3)$.

Vậy các điểm cực trị của hàm số $y = f(-|x| - 2m + 1)$ là:

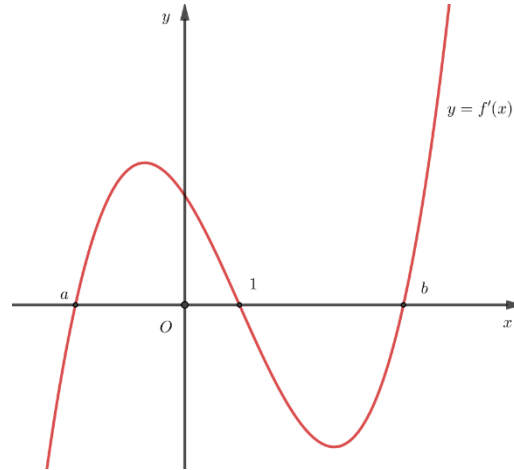
$(x_1 = a + 2m - 1); (x_2 = -1 + 2m - 1); (x_3 = 3 + 2m - 1); (x_4 = b + 2m - 1)$.

Để hàm số $y = f(-|x| - 2m + 1)$ có đúng 5 điểm cực trị thì hàm số $y = f(x - 2m + 1)$ có đúng 2 điểm cực trị âm.

Suy ra $\begin{cases} -1 + 2m - 1 < 0 \\ 3 + 2m - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq m < 1 \rightarrow m = \{-1; 0\}$

DẠNG 5**Cực trị chứa dấu giá trị tuyệt đối**

Câu 1: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị đạo hàm $y = f'(x)$ như hình vẽ. Gọi tập S là tập chứa tất cả các giá trị nguyên $m \in [-21; 21]$ để hàm số $f(|x^2 + 2mx - 1|)$ có đúng 7 điểm cực trị. Số phần tử của S là:



- A. 1. B. 0. C. 2. D. 3.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị đạo hàm $y = f'(x) = x(x-1)$. Số điểm cực trị của hàm số $y = f(|2x+1|-1)$ là:

- A. 4. B. 5. C. 3. D. 1.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$ và có biểu thức đạo hàm $y = f'(x) = x(x-2)$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = f(|2x+m|-m)$ có đúng ba điểm cực trị

- A. 3. B. 1. C. 2. D. 0.

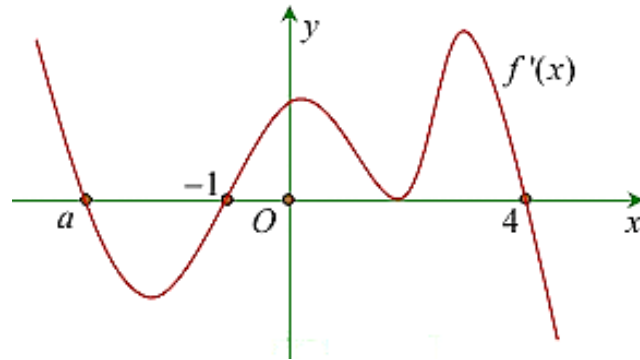
Câu 4: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có biểu thức đạo hàm $f'(x) = x^2 - mx - 6 + m$, với m là tham số. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-30; 30]$ để hàm số $f(|3x-2|+1)$ có đúng 5 điểm cực trị?

- A. 1. B. 3. C. 4. D. 2

Câu 5: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có biểu thức đạo hàm $f'(x) = x^2 - 2mx + 12 + m$, với m là tham số. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-30; 30]$ để hàm số $f(|2x-m^2|+m)$ có đúng 5 điểm cực trị?

- A. 27. B. 26. C. 25. D. 29

Câu 6: Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-30; 30]$ để hàm số $f(|x^3 - 3m^2x|)$ có đúng 11 điểm cực trị?



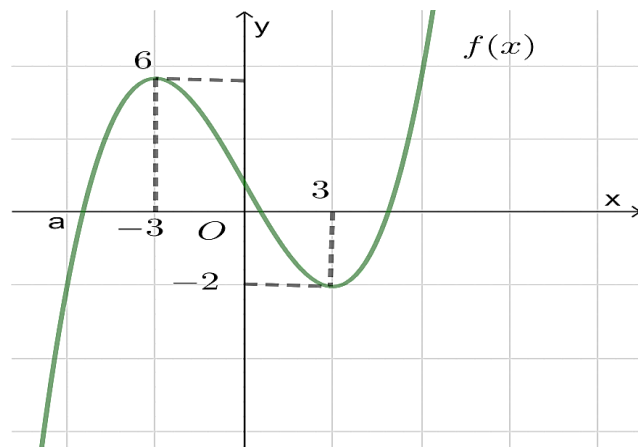
A. 29.

B. 23.

C. 21.

D. 22

Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x) = f(|f(x) - m|)$ có đúng 11 điểm cực trị?



A. 3.

B. 4.

C. 1.

D. 0.

Câu 8: Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} x^2 - 2(m-4)x - 1 & \text{neu } x \leq 1 \\ 4x^2 - 2(m-a)x + b & \text{neu } 1 < x < 3 \\ x^2 + nx + m - 9 & \text{neu } x \geq 3 \end{cases}$, với a và b là những số thực xác

định và hàm số liên tục trên toàn $\mathbb{R}$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số có đúng 3 điểm cực trị?

A. 2.

B. 1.

C. 3.

D. 4.

Câu 9: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} mx + n & \text{neu } x < -1 \\ x^2 + nx + m - 9 & \text{neu } x \geq -1 \end{cases}$, với hai tham số thực m và n . Hỏi có tất cả

bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-30; 30]$ để hàm số $f(x)$ có đúng 2 điểm cực trị?

A. 6.

B. 36.

C. 11.

D. 5

Câu 10: Cho hàm số $f(x)$ có biểu thức đạo hàm $f'(x) = 2x^2 - 3x + 1$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-30; 30]$ để hàm số $f(|x^2 - 4x + 3| + mx)$ có 9 điểm cực trị?

A. 3.

B. 1.

C. 2.

D. 31

Câu 11: Cho hàm số $y = |x - 1| + |x + 1| + |x - 2| - 2x + 1$. Hàm số đạt cực tiểu tại

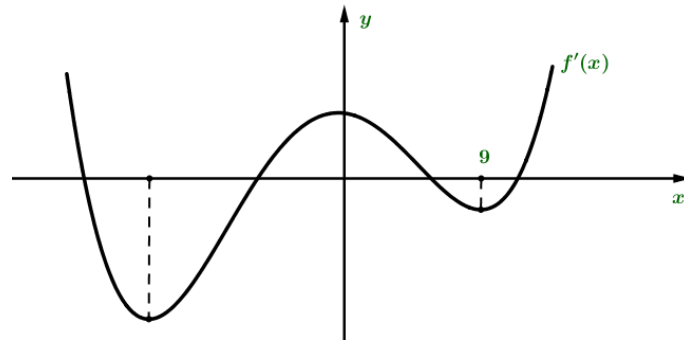
A. $x = 2$

B. $x = 1$

C. $x = -1$

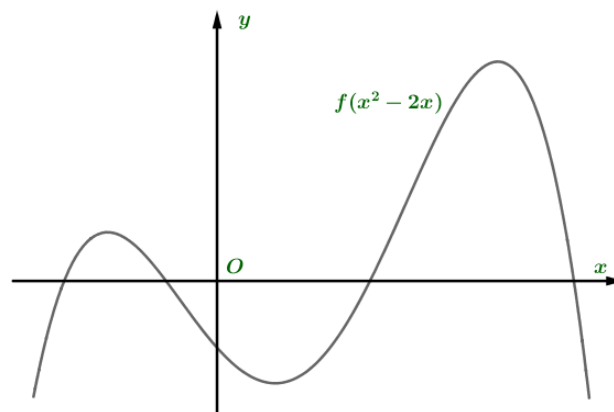
D. $x = 0$

- Câu 12:** Cho hàm số $y = |x-1| + |x-2| + |x-3| + |x-4| + |x-5| - m^2x + 1$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số có cực trị?
- A. 4 B. 1 C. 3 D. 5
- Câu 13:** Cho hàm số $f(x) = |x-1| + 3|x-2| + 5|x-3| + mx$; với m là tham số. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số có cực trị?
- A. 17. B. 15. C. 16. D. vô số.
- Câu 14:** Cho hàm số $f(x) = |x-1| + |x-2| + |x-3| + \dots + |x-n|$. với n là số nguyên dương không lớn hơn 2021. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị của tham số n để hàm số có cực trị?
- A. 1010. B. 1011. C. 1009. D. 2020.
- Câu 15:** Số điểm cực trị của hàm số $f(x) = |x^2 - 4x + 3| + |x+1|$ là:
- A. 0. B. 3. C. 2. D. 1.
- Câu 16:** Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = f(x) = |x^2 - 2mx + 1| + 4x$ có điểm cực đại với giá trị cực đại tương ứng nằm trong khoảng $(3;4)$ và đồng thời thỏa mãn $10m$ là số nguyên. Số phần tử của tập S là
- A. 5. B. 4. C. 2. D. 3.
- Câu 17:** Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị đạo hàm $y = f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $y = f(6|x| - x^2)$ có số điểm cực trị là.



- A. 9. B. 7. C. 13. D. 11

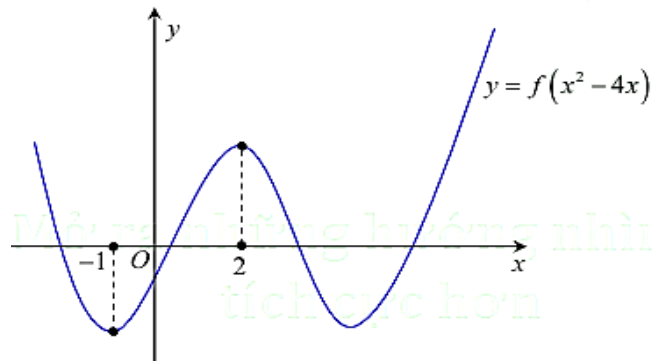
- Câu 18:** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết đồ thị hàm số $y = f(x^2 - x)$ như hình vẽ. Hỏi hàm số $y = f(x^2 - 2mx - |x-m| + m^2)$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị.



- A. 7. B. 3. C. 5. D. 9

Câu 19: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết đồ thị hàm số $y = f(x^2 - 4x)$ được cho như hình vẽ.

Hỏi hàm số $y = f(x^2 - 8|x| + 12)$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?



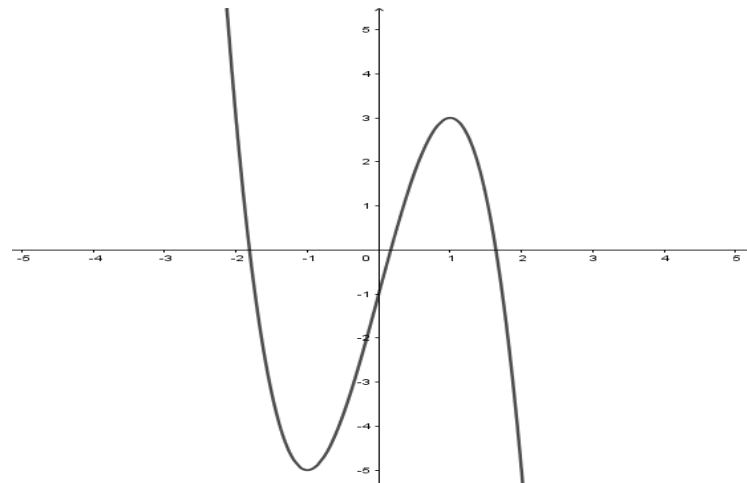
A. 3.

B. 5.

C. 9.

D. 7.

Câu 20: Cho hàm số $f(x)$ liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị đạo hàm $y = f'(x)$ như hình vẽ. Hỏi hàm số $f(|x| + |x - 1|)$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?



A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

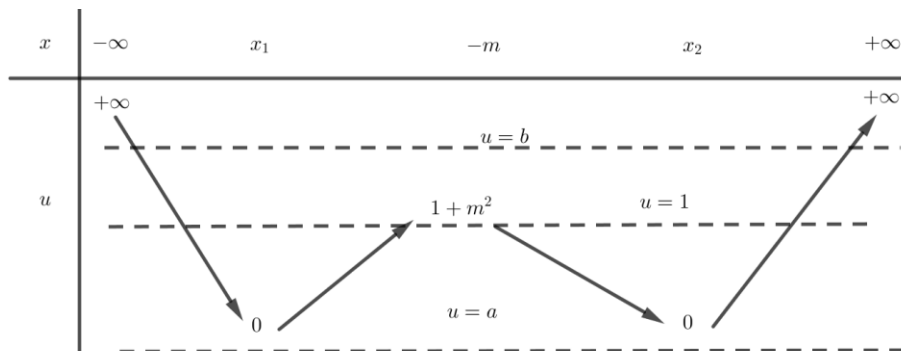
BẢNG ĐÁP ÁN

1. A	2. B	3. C	4.D	5.B	6.A	7. C	8. D	9.D	10.B
11.A	12.C	13.B	14.B	15.B	16.C	17.D	18.C	19.D	20.B

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT**Câu 1: Chọn A**

Hàm số $f(x)$ có ba điểm cực trị là: $x = a < 0; x = 1; x = b > 1$

Xét hàm số $f(|x^2 + 2mx - 1|) = f(u)$. Ta có bảng biến thiên của $u = |x^2 + 2mx - 1|$ như sau:



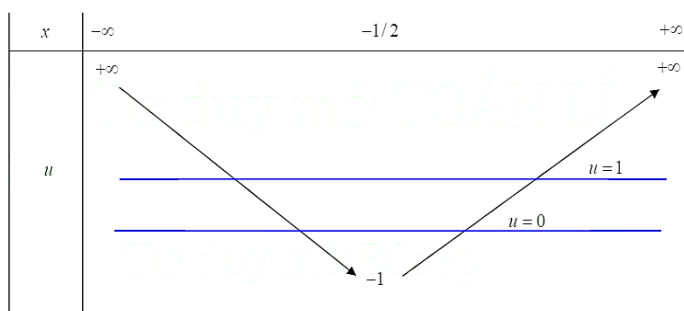
Do $\text{SDCT}\{u\} = 3$ nên để hàm số $f(u)$ có 7 điểm cực trị thì $\text{SNBL}\left\{\begin{matrix} u=a \\ u=b \\ u=1 \end{matrix}\right\} = 4 \Rightarrow 1 \geq 1+m^2$

$\Rightarrow m = 0$. Vậy có 1 giá trị của tham số m .

Câu 2: Chọn B

Hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại 2 điểm $x = 0; x = 1$.

Xét hàm số $y = f(|2x+1|-1) = f(u)$. Bảng biến thiên của $u = |2x+1|-1$ như sau:

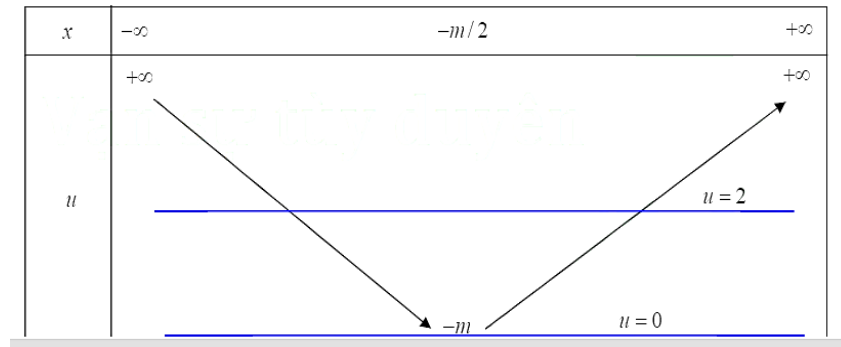


Ta có $\text{SDCT } f(u) = \text{SDCT}\{u\} + \text{SNBL}\left\{\begin{matrix} u=0 \\ u=1 \end{matrix}\right\} = 4+1=5$.

Câu 3: Chọn C

Hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại 2 điểm $x = 0; x = 2$.

Xét hàm số $y = f(|2x+m|-m) = f(u)$. Bảng biến thiên của $u = |2x+m|-m$ như sau:



Ta có SDCT $f(u) =$ SDCT $\{u\} +$ SNBL $\begin{cases} u=0 \\ u=2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow 3 = 1 + \text{SNBL} \begin{cases} u=1 \\ u=2 \end{cases} \Leftrightarrow \text{SNBL} \begin{cases} u=1 \\ u=2 \end{cases} = 2$$

Suy ra $0 \leq -m < 2$ hay $-2 < m \leq 0 \rightarrow m \in \{-1; 0\}$.

Câu 4: Chọn D

Nhận xét: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ khi đó $y = f(|ax + b|) + c$ luôn có cực trị tại điểm $x = -\frac{b}{a}$.

$$y = f(|3x - 2|) + 1 = \begin{cases} f(3x - 1) & \text{khi } x > \frac{2}{3} \\ f(-3x + 3) & \text{khi } x < \frac{2}{3} \end{cases}, \text{ tại } x = \frac{2}{3} \text{ là một điểm cực trị của hàm số.}$$

$$y' = \begin{cases} 3f'(3x - 1) & \text{khi } x > \frac{2}{3} \\ -3f'(-3x + 3) & \text{khi } x < \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow y' = \begin{cases} 3(3x - 1 - m) & \text{khi } x > \frac{2}{3} \\ -3(-3x + 3 - m) & \text{khi } x < \frac{2}{3} \end{cases}$$

Hàm số có đúng 5 điểm cực trị khi và chỉ khi $y' = 0$ có 4 nghiệm phân biệt khác $\frac{2}{3}$

Khi:

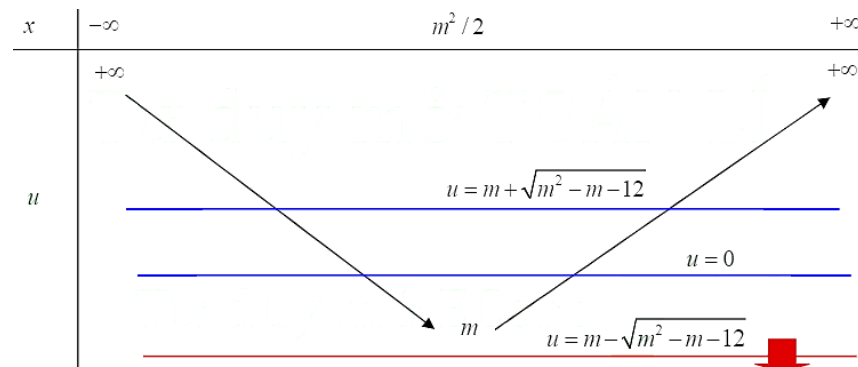
$$x > \frac{2}{3} \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1+m}{3} > \frac{2}{3} \\ x_2 = \frac{7-m}{3} > \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 < m < 5 \\ x_1 \neq x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 < m < 5 \\ \frac{1+m}{3} \neq \frac{7-m}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 < m < 5 \\ m \neq 3 \end{cases}$$

$$\text{Khi } x < \frac{2}{3} \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = \frac{3-m}{3} < \frac{2}{3} \\ x_4 = \frac{m-3}{3} < \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 < m < 5 \\ x_3 \neq x_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < m < 5 \\ m \neq 3 \end{cases}$$

Vậy $m \in (1; 5) \setminus \{3\}$ và $m \in \mathbb{Z}$ nên có 2 giá trị nguyên thỏa yêu cầu.

Câu 5: Xét hàm số $f \mid 2x - m^2 \mid + m = f u$

Bảng biến thiên của hàm số $u = \mid 2x - m^2 \mid + m$ như sau



Ta có số điểm cực trị của hàm số u là 1 điểm.

Nhận xét, nếu hàm số $f x$ có đúng 1 điểm cực trị thì cùng lắm hàm số $f u$ có 3 điểm cực trị.

Do đó, xét trường hợp $m^2 - m - 12 > 0 \Leftrightarrow m < -3 \vee m > 4$ thì hàm số $f x$ có 3 điểm cực

trị là $x = 0; x = m \pm \sqrt{m^2 - m - 12}$

Áp dụng công thức:

Số điểm cực trị $f u$ = số điểm cực trị u + số nghiệm bội lẻ của phương trình

$$\begin{cases} u = 0 \\ u = m - \sqrt{m^2 - m - 12} \\ u = m + \sqrt{m^2 - m - 12} \end{cases} \text{ suy ra } \begin{cases} m < 0 \\ m \neq -12 \end{cases} \text{ kết hợp với điều kiện } m < -3 \vee m > 4 \text{ suy ra}$$

$$\begin{cases} m < -3 \\ m \neq 12 \end{cases} \text{ và } \begin{cases} m \in [-30; 30] \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases} \text{ suy ra có 26 giá trị nguyên.}$$

Câu 6: Hàm số đạt cực trị tại $x = a < -1; x = -1; x = 4$

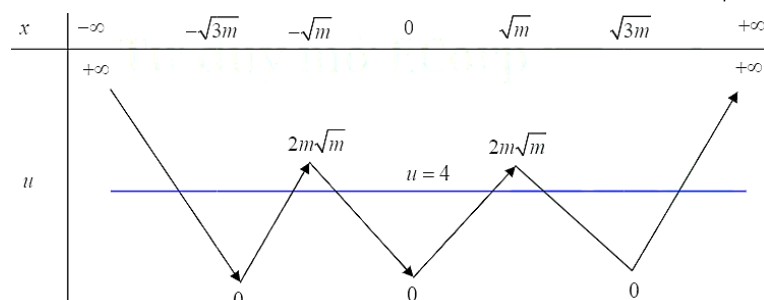
Xét hàm số $f \mid x^3 - 3mx \mid = f u$

Bảng biến thiên của hàm số $u = \mid x^3 - 3mx \mid \geq 0$ suy ra chỉ có phương trình

$u = \mid x^3 - 3mx \mid = 4$ cho ta nghiệm bội lẻ.

Nếu $m \leq 0$ suy ra số điểm cực trị u là 1, suy ra số nghiệm bội lẻ của phương trình $u = 4$ tối đa 2 nghiệm bội lẻ. Không thỏa yêu cầu.

Khi $m > 0$ số điểm cực trị u là 5, ta có bảng biến thiên của hàm số $u = \mid x^3 - 3mx \mid$



Áp dụng công thức:

Chủ đề 02: Cực trị của hàm số

Số điểm cực trị của hàm số $f(u)$ = Số nghiệm bội lẻ của phương trình $u = 4 + \text{số điểm cực trị của } u$.

Suy ra $\begin{cases} m > 0 \\ 2m\sqrt{m} > 4 \end{cases} \Leftrightarrow m > \sqrt[3]{4}$ kết hợp $\begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m \in [-30; 30] \end{cases}$ suy ra có 29 giá trị nguyên thỏa yêu cầu.

Câu 7: Chọn C

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -3 \end{cases}$.

Ta lại có: $g'(x) = f(|f(x) - m|) = \frac{f(x) - m}{|f(x) - m|} \cdot f'(|f(x) - m|)$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ |f(x) - m| = 0 \\ |f(x) - m| = 3 \\ |f(x) - m| = -3 \text{ (ptvn)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 3 \\ f(x) = m \quad (1) \\ f(x) = m + 3 \quad (2) \\ f(x) = m - 3 \quad (3) \end{cases}$$

Để hàm số $g(x) = f(|f(x) - m|)$ có đúng 11 điểm cực trị thì các phương trình (1);(2);(3) mỗi phương trình phải có 3 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2 < m < 6 \\ -2 < m + 3 < 6 \\ -2 < m - 3 < 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < m < 6 \\ -5 < m < 3 \\ 1 < m < 9 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < m < 3.$$

Vì m nguyên nên $m = 2$.

Câu 8: Chọn D

Tập xác định của hàm số đã cho là $D = \mathbb{R}$.

Khi đó:

$$+) \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) = -2m + 8; \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = f(3) = -6m + 32$$

$$+) \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2a + b - 2m + 4; \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 6a + b - 6m + 36$$

Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thì hàm số phải liên tục tại $x = 1; x = 3$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = f(3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b - 2m + 4 = -2m + 8 \\ 6a + b - 6m + 36 = -6m + 32 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = 4 \\ 6a + b = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 8 \end{cases}.$$

$$\text{Từ đó } y = f(x) = \begin{cases} x^2 - 2(m-4)x - 1 & \text{neu } \begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq 3 \end{cases} \\ 4x^2 - 2(m+2)x + 8 & \text{neu } 1 < x < 3 \end{cases}.$$

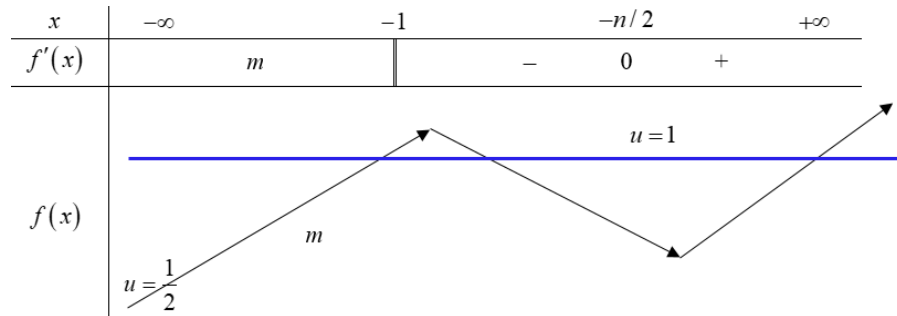
Đề hàm số có đúng 3 điểm cực trị thì hoành độ đỉnh của các parabol phải thỏa mãn điều kiện:

$$\begin{cases} m-4 < 1 \\ m-4 > 3 \\ 1 < \frac{m+2}{4} < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 5 \\ m > 7 \\ 2 < m < 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 < m < 5 \\ 7 < m < 10 \end{cases}$$

Vì m nguyên nên $m \in \{3; 4; 8; 9\}$.

Câu 9: Đạo hàm: $f'(x) = \begin{cases} m & \text{neu } x < -1 \\ 2x+n & \text{neu } x > -1 \end{cases}$.

Khi đó, ta có bảng biến thiên của $f(x)$ như sau:



Hàm số $f(x)$ phải liên tục và xác định tại $x = -1$. Suy ra $\begin{cases} m > 0 \\ f(-1) = -m + n = -n + m - 8 \\ -\frac{n}{2} > -1 \end{cases}$

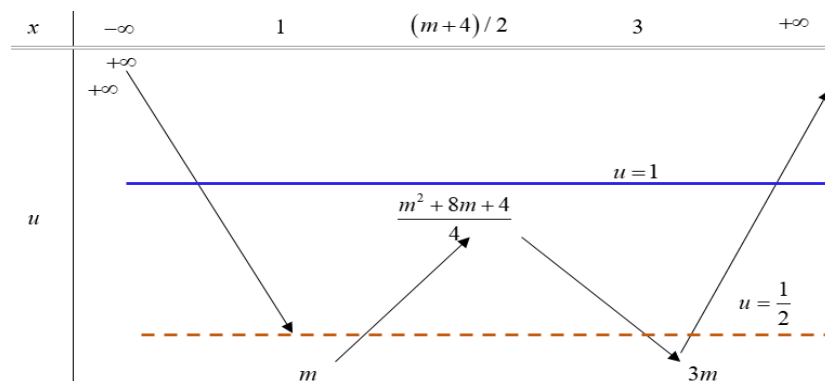
$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ n = m - 4 \\ -\frac{n}{2} = -\frac{m}{2} + 2 > -1 \end{cases} \Rightarrow 0 < m < 6 \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} 1 \leq m \leq 5.$$

Vậy có tất cả 5 giá trị tự nhiên m thỏa mãn bài toán.

Câu 10: Ta có: $\begin{cases} SDCT \{u\} = 1 \\ SNBL \left\{ \begin{cases} u=4 \\ u=2 \end{cases} \right\} \leq 4 \end{cases} \Rightarrow SDCT \{u\} + SNBL \left\{ \begin{cases} u=1 \\ u=\frac{1}{2} \end{cases} \right\} \leq 5 \quad \{\text{Không thỏa mãn}\}$

Như vậy, bất buộc u phải có 3 điểm cực trị. Khi đó phải có: $-2 < m < \sqrt{4^2 - 4 \cdot 3} = 2$ (*)

Khi đó, ta có bảng biến thiên của $u = |x^2 - 4x + 3|$ như sau:



$$\text{Suy ra } SDCT \{u\} = 3 \Rightarrow SNBL \left\{ \begin{array}{l} u = 1 \\ u = \frac{1}{2} \end{array} \right\} = 6$$

$$\text{Từ bảng biến thiên, suy ra: } \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} > m \\ \frac{1}{2} > 3m \\ \frac{1}{2} < \frac{m^2 + 8m + 4}{4} \\ 1 \geq \frac{m^2 + 8m + 4}{4} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -4 + \sqrt{14} < m \leq 0 \\ m < -4 - \sqrt{14} \end{array} \right. \quad (**)$$

Kết hợp (*) và (**), suy ra: $-4 + \sqrt{14} < m \leq 0 \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}, m \in [-30; 30]} m = \{0\}$.

Vậy có đúng 1 giá trị m nguyên thỏa mãn bài toán.

Câu 11: Chọn A

$$\text{Với } x < -1 \Leftrightarrow y = |x-1| + |x+1| + |x-2| - 2x + 1 = 1 - x - x - 1 + 2 - x - 2x + 1 = -5x + 3$$

Tương tự, ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	1	2	$+\infty$
$f(x)$	$-5x + 3$	$-3x + 5$	$-x + 3$	$x - 1$	
$f'(x)$	-5	-3	-1	1	
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	$+$	

Vậy hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$.

Câu 12: Chọn C

$$\text{Với } x < -1 \Leftrightarrow y = 1 - x + 2 - x + 3 - x + 4 - x + 5 - x - m^2x + 1 = (-5 - m^2)x + 16$$

Tương tự, ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	1	2	3	4	5	$+\infty$
$f(x)$	$(-5 - m^2)x + 16$	$(-3 - m^2)x + 14$	$(-1 - m^2)x + 10$	$(1 - m^2)x + 4$	$(3 - m^2)x - 4$	$(5 - m^2)x - 14$	
$f'(x)$	$-5 - m^2$	$-3 - m^2$	$-1 - m^2$	$1 - m^2$	$3 - m^2$	$5 - m^2$	
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$				

Để hàm số có cực trị thì ít nhất phải có 1 đoạn $f'(x)$ phải đổi dấu từ âm sang dương:

$$\Leftrightarrow 5 - m^2 \Leftrightarrow -\sqrt{5} \leq m \leq \sqrt{5} \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m \in \{0; \pm 1; 2\}$$

Thử lại $m = \pm 1$ thì $f(x)$ là hàm hằng (Loại)

Vậy có 3 giá trị của m thỏa mãn

Câu 13: Chọn B

Ta có bảng xét hàm và bảng biến thiên ghép làm một như sau:

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$
$f(x)$	$(-9+m)x+22$	$(-7+m)x+20$	$(-1+m)x+8$	$(9+m)x-22$	
$f'(x)$	$-9+m$	$-7+m$	$-1+m$	$9+m$	
$f''(x)$	$-$	$\neq 0$	$\neq 0$	$+$	

Để hàm số có cực trị thì đạo hàm phải đổi dấu ít nhất một lần. Mà ta lại có :

$-9+m < -7+m < -1+m < 9+m$. Suy ra số nhỏ nhất phải âm và số lớn nhất phải dương, đồng thời trên các khoảng $(1;2)$, $(2;3)$ đạo hàm phải khác 0. Tức là :

$$\Rightarrow \begin{cases} -9+m < 0 \\ 9+m > 0 \\ -7+m \neq 0 \\ -1+m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -9 < m < 9 \\ m \neq 7 \\ m \neq 1 \end{cases} \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} \text{ vậy có tất cả 15 giá trị } m \text{ nguyên thỏa mãn.}$$

Câu 14: Chọn B

Dạng bài toán này chúng ta xét một số giá trị cụ thể của số nguyên dương n rồi rút ra quy luật về những giá trị của tham số n để hàm số có cực trị như sau:

Trường hợp 1:

Xét $n=2$, ta có $y=f(x)=|x-1|+|x-2|$

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$f(x)$	$-2x+3$	1	$2x-3$	
$f'(x)$	-2	0	2	
$f''(x)$				

Hàm số không có cực trị.

Trường hợp 2:

Xét $n=3$, ta có $y=f(x)=|x-1|+|x-2|+|x-3|$

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$
$f(x)$	$-3x+6$	$-x+4$	x	$3x-6$	
$f'(x)$	-3	-1	1	3	
$f''(x)$					

Hàm số có cực trị.

Chủ đề 02: Cực trị của hàm số

Nhận xét thấy khi n là số nguyên dương lẻ thì hàm số $y = |x-1| + |x-2| + |x-3| + \dots + |x-n|$ có điểm cực trị. Khi n là số nguyên dương chẵn thì không tồn tại điểm cực trị.

Suy ra $1 \leq n \leq 2021$ và n lẻ nên có 1011 giá trị n nguyên dương thỏa mãn.

Câu 15: Chọn B

Những hàm trị tuyệt đối cụ thể luôn được tối ưu bằng bảng xét hàm như sau :

x	$-\infty$	-1	1	$5/2$	3	$+\infty$
$ x+1 $	$-x-1$		$x+1$		$x+1$	$x+1$
$ x^2+2x-3 $	x^2-4x+3		x^2-4x+3		$-x^2+4x-3$	x^2-4x+3
$f(x)$	x^2-5x+2		x^2-3x+4		$-x^2+5x-2$	x^2-3x+4
$f'(x)$	$2x-5$		$2x-3$		$-2x+5$	$2x-3$
$f''(x)$	$-$		$-$		$+ \quad 0 \quad -$	$+$

Suy ra hàm số có một điểm cực tiểu tại $x = 1$; $x = 3$ và một điểm cực đại tại $x = \frac{5}{2}$.

Câu 16: Chọn C

Xét phương trình $x^2 - 2mx + 1 = 0$ (*), có $\Delta' = m^2 - 1$.

Nếu $\Delta' = m^2 - 1 \leq 0$ thì hàm số $y = f(x) = x^2 - 2mx + 1 + 4x = x^2 - 2(m-2)x + 1$ không có điểm cực đại.

Nếu $\Delta' = m^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ m > 1 \end{cases}$ thì phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt là

$$x_1 = m - \sqrt{m^2 - 1} \text{ và } x_2 = m + \sqrt{m^2 - 1}.$$

Với $\begin{cases} x \leq x_1 \\ x \geq x_2 \end{cases}$ thì $y = f(x) = x^2 - 2mx + 1 + 4x = x^2 - 2(m-2)x + 1$ không có điểm cực đại.

Với $x_1 < x < x_2$ thì $y = -x^2 + 2mx - 1 + 4x = -x^2 + 2(m+2)x - 1$.

Hàm số này đạt cực đại tại $x = m+2$ và giá trị cực đại là $y_{CD} = m^2 + 4m + 3$.

Vậy điều kiện để hàm số có cực đại là

$$\begin{cases} x_1 < x = m+2 < x_2 \\ 3 < m^2 + 4m + 3 < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m - \sqrt{m^2 - 1} < m+2 < m + \sqrt{m^2 - 1} \\ 0 < m^2 + 4m < 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{m^2 - 1} > 2 \\ m^2 + 4m - 1 < 0 \\ m^2 + 4m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -\sqrt{5} \\ m > \sqrt{5} \\ -2 - \sqrt{5} < m < -2 + \sqrt{5} \\ m < -4 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 - \sqrt{5} < m < -4.$$

Do $10m$ là số nguyên nên có hai giá trị thỏa mãn là $m = -\frac{42}{10}$ và $m = -\frac{41}{10}$.

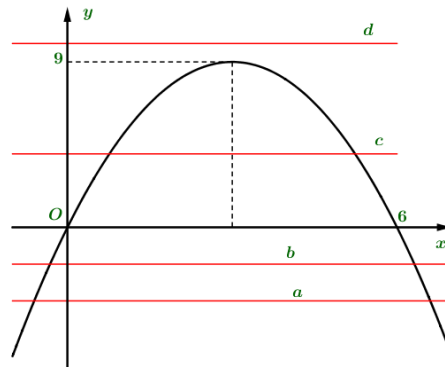
Câu 17: Chọn D

Từ đồ thị $f'(x)$, ta suy ra hàm số $y = f(x)$ có 4 điểm cực trị.

Đặt $g(x) = f(6x - x^2)$. Ta suy ra $y = g(|x|)$. Do đó số điểm cực trị của hàm y sẽ bằng số điểm cực trị dương của hàm số $g(x)$ cộng thêm 1.

$$\text{Ta có } g'(x) = (6 - 2x)f'(6x - x^2), \text{ cho } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ 6x - x^2 = a < 0 \\ 6x - x^2 = b < 0 \\ 6x - x^2 = c \quad (0 < c < 9) \\ 6x - x^2 = d > 9 \end{cases}$$

Dựa vào hình vẽ, ta nhận thấy phương trình $g'(x) = 0$ có tất cả là 5 nghiệm dương phân biệt.



Suy ra số điểm cực trị của $g(x)$ là 5. Do đó số điểm cực trị của $y = g(|x|)$ là 11.

Câu 18: Chọn C

Ta có $y = f(|x - m|^2 - |x - m|)$

Đặt $g(x) = f(x^2 - x)$. Suy ra $g(|x|) = f(x^2 - |x|)$. Suy ra $g(|x - m|) = f(|x - m|^2 - |x - m|)$

Ta biết số điểm cực trị của hàm $g(|x|)$ và $g(|x - m|)$ là như nhau.

Hàm số $g(x)$ có 2 điểm cực trị dương nên hàm $g(|x|)$ có 5 điểm cực trị.

Suy ra hàm $g(|x - m|)$ có tất cả là 5 điểm cực trị.

Câu 19: Chọn D

Ta có $y = f(x^2 - 8|x| + 12) = f(x^2 - 4|x| + 4 - 4|x| + 8) = f((|x| - 2)^2 - 4(|x| - 2)) = g(|x| - 2)$.

Ta thấy hàm số $y = g(x)$ có các điểm cực trị $x = -1, x = 2, x = c > 2$. Suy ra hàm số $y = g(x - 2)$ có các điểm cực trị là $x = 1, x = 4, x = c + 2$ (3 điểm cực trị dương).

Vậy hàm số $y = g(|x| - 2) = f(x^2 - 8|x| + 12)$ có 7 điểm cực trị.

Lí giải: $y = f(x^2 - 4x) \rightarrow g(|x| - 2)$, với $(|x| + \alpha)^2 - 4(|x| + \alpha) = x^2 - 8|x| + 12 \Rightarrow \alpha = -2$.

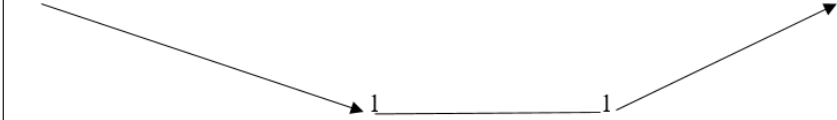
Câu 20: Chọn B

Hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại 3 điểm là $x = a < 0; x = b \in (0; 1); x = c > 1$

Xét hàm số $f(u) = f(|x| + |x - 1|)$ với $u = |x| + |x - 1|$

Ta có bảng khảo sát hàm số $u = |x| + |x - 1|$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$ x $	$-x$	0	x	x
$ x-1 $	$-x+1$	$-x+1$	0	$x-1$
u	$-2x+1$	1	$2x-1$	
u'	-2	0	2	
u'	$-$	0	$+$	
u				



Ta có: $(f(u))' = u' \cdot f'(u)$ nên số điểm cực trị của hàm số $f(u)$ là: số điểm cực trị của u cộng

với số nghiệm bội lẻ của phương trình $f'(u) = 0$ hay
$$\begin{cases} u = a \\ u = b \\ u = c \end{cases}$$

Hàm u không có điểm cực trị

$u = a$ vô nghiệm; $u = b$ vô nghiệm; $u = c$ có 2 nghiệm; Vậy: $f(u)$ có hai điểm cực trị.

DẠNG 6**Cực trị tại một điểm cho trước**

❖ **MỞ RỘNG:** Có thể áp dụng quy tắc thứ 2 để tìm cực trị của hàm số tại một điểm cho trước. Kiến thức này thuộc chương trình toán cao cấp của tác giả **Nguyễn Đình Trí**. Định lý được trình bày như sau:

- Giả sử hàm $f(x)$ có đạo hàm liên tục đến cấp n tại $x = a$
- Các đạo hàm $f'(a) = f''(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0, f^{(n)}(a) \neq 0$ thì:
 - Nếu n chẵn và $f^{(n)}(a) < 0$ thì $f(x)$ đạt cực đại tại a .
 - Nếu n chẵn và $f^{(n)}(a) > 0$ thì $f(x)$ đạt cực tiểu tại a .
 - Nếu n lẻ thì $f(x)$ không đạt cực trị tại a .
 - Đặc biệt, khi $n = 2$ thì có định lý trong SGK Toán 12.

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
y'		$+$	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	2	$+\infty$	-4	$+\infty$

Hàm số $y = |f(x)|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 4. B. 3. C. 2. D. 5.

Câu 2: Tập hợp các số thực m để hàm số $y = x^3 + (m+4)x^2 + (5m+2)x + m+6$ đạt cực tiểu tại $x = -2$ là

- A. $\emptyset$. B. $\mathbb{R}$. C. $\{2\}$. D. $\{-2\}$.

Câu 3: Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx$ đạt cực đại tại $x = 0$.

- A. $m = 1$. B. $m = 2$. C. $m = -2$. D. $m = 0$.

Câu 4: Tìm tập tất cả các giá trị của m để hàm số $y = x^3 + (3m-1)x^2 + m^2x - 3$ đạt cực tiểu tại $x = -1$.

- A. $\{5; 1\}$. B. $\{5\}$. C. $\emptyset$. D. $\{1\}$.

Câu 5: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - m + 1)x + 1$ đạt cực đại tại điểm $x = 1$?

- A. $m = 2$ hoặc $m = -1$. B. $m = 2$ hoặc $m = 1$.
C. $m = 1$. D. $m = 2$.

Câu 6: Tìm m để hàm số $y = x^3 - 2mx^2 + mx + 1$ đạt cực tiểu tại $x = 1$

- A. không tồn tại m . B. $m = \pm 1$. C. $m = 1$. D. $m \in \{1; 2\}$.

Câu 7: Cho hàm số $f(x)$ với bảng biến thiên dưới đây

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$				3				$+\infty$
			-2			-4			

Hỏi hàm số $y = |f(|x|)|$ có bao nhiêu cực trị?

- A. 3. B. 1. C. 7. D. 5.

Câu 8: Tìm m để hàm số $y = mx^4 + (m^2 - 1)x + 1$ đạt cực đại tại $x = 0$

- A. $m = 0$. B. $m = -1$. C. $m = 1$. D. $-1 < m < 1$

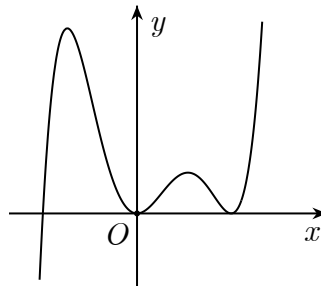
Câu 9: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y			3				3		
	$-\infty$			-1					$-\infty$

Giá trị cực đại của hàm số bằng

- A. -2 . B. -1 . C. 2 . D. 3 .

Câu 10: Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ là:



- A. 3. B. 4. C. 1. D. 2.

Câu 11: Tập hợp các số thực m để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + (m + 2)x - m$ đạt cực tiểu tại $x = 1$ là

- A. $\{1\}$. B. $\{-1\}$. C. $\emptyset$. D. $\mathbb{R}$.

Câu 12: Tìm các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 4)x + 3$ đạt cực đại tại $x = 3$

- A. $m = 1, m = 5$. B. $m = 5$. C. $m = 1$. D. $m = -1$.

Câu 13: Tìm m hàm số $y = x^3 + mx^2 - 3(m + 1)x + 2m$ đạt cực trị tại điểm $x = -1$

- A. $m = -1$. B. $m = 2$. C. $m = 0$. D. $m = 1$.

Câu 14: Tìm m để hàm số $y = mx^3 - (m^2 + 1)x^2 + 2x - 3$ đạt cực tiểu tại $x = 1$.

- A. $\frac{3}{2}$. B. $-\frac{3}{2}$. C. 0. D. -1.

Câu 15: Tìm tất cả tham số thực m để hàm số $y = (m-1)x^4 - (m^2 - 2)x^2 + 2019$ đạt cực tiểu tại $x = -1$

- A. $m = 0$. B. $m = -2$. C. $m = 1$. D. $m = 2$.

Câu 16: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^9 + (m-2)x^7 - (m^2 - 4)x^6 + 7$ đạt cực tiểu tại $x = 0$?

- A. 3. B. 4. C. Vô số. D. 5.

Câu 17: Cho hàm số $y = \frac{x^5}{5} - (2m-1)x^4 - \frac{m}{3}x^3 + 2019$. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$?

- A. Vô số. B. 1. C. 2. D. 0.

Câu 18: Cho hàm số $y = f(x)$ là một hàm đa thức có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x^2 - |x|)$ là

- A. 5. B. 3. C. 7. D. 1.

Câu 19: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc khoảng $(-2019; 2019)$ để hàm số

$$y = \frac{m-1}{5}x^5 + \frac{m+2}{4}x^4 + m+5 \text{ đạt cực đại tại } x = 0?$$

- A. 110. B. 2016. C. 100. D. 10.

Câu 20: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y = x^8 + (m-2)x^5 - (m^2 - 4)x^4 + 1$ đạt cực tiểu tại $x = 0$.

- A. 3. B. 5. C. 4. D. Vô số.

Câu 21: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^{2018} + (m-5)x^5 + (25-m^2)x^4 + 1$ đạt cực đại tại điểm $x = 0$.

- A. 4. B. 5. C. 9. D. 10.

Câu 22: Có bao nhiêu cặp số nguyên (a, b) thỏa mãn $a, b \in (-20, 20)$ để hàm số $y = x^8 + ax^7 + bx^6 + 1$ đạt cực tiểu tại điểm $x = 0$.

- A. 722. B. 742. C. 703. D. 685.

Câu 23: Có bao nhiêu nguyên của tham số m để hàm số $y = x^8 + (m-3)x^5 - (m^2 - 9)x^4 + 1$ đạt cực tiểu tại điểm $x = 0$.

- A. 7. B. Vô số. C. 6. D. 4.

Câu 24: Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y = x^6 - mx^5 + (10m - m^2)x^4 + 1$ đạt cực tiểu tại điểm $x = 0$.

- A. 9. B. 10. C. 11. D. 8.

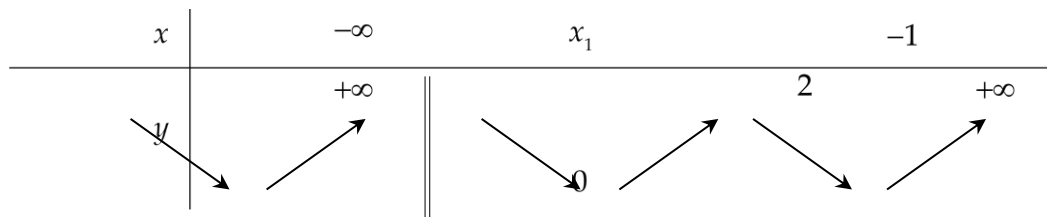
- Câu 25:** Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y = x^6 + (m-1)x^4 + (m^2-4)x^3 + 1$ đạt cực tiểu tại điểm $x = 0$.
- A. 4. B. 1. C. 2. D. 3.
- Câu 26:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^8 + (m-4)x^5 - (m^2-16)x^4 + 1$ đạt cực tiểu tại điểm $x = 0$.
- A. 7. B. Vô số. C. 6. D. 8.
- Câu 27:** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $|f(x+h) - f(x-h)| \leq h^2, \forall x \in \mathbb{R}, \forall h > 0$.
Đặt $g(x) = [x + f'(x)]^{2019} + [x + f'(x)]^{29-m} - (m^4 - 29m^2 + 100)\sin^2 x - 1$, m là tham số nguyên và $m < 27$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m sao cho hàm số $g(x)$ đạt cực tiểu tại $x = 0$. Tính tổng bình phương các phần tử của S .
- A. 108. B. 58. C. 100. D. 50.
- Câu 28:** Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y = x^9 + (m-2)x^7 - (m^2-4)x^6 + 7$ đạt cực tiểu tại điểm $x = 0$.
- A. 3. B. Vô số. C. 4. D. 5.
- Câu 29:** Cho hàm số $y = x^5 - mx^4 + (m^3 - 3m^2 - 4m + 12)x^3 + 1$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số đã cho đạt cực đại tại $x = 0$?
- A. 1. B. 3. C. 2. D. 4.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.A	2.A	3.D	4.B	5.D	6.C	7.C	8.B	9.D	10.C
11.C	12.B	13.C	14.A	15.D	16.A	17.B	18.A	19.B	20.C
21.D	22.B	23.C	24.B	25.B	26.D	27.C	28.A	29.C	

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT**Câu 1: Chọn A**

Từ bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$, suy ra bảng biến thiên của hàm số $y = |f(x)|$ là



Dựa vào bảng biến thiên, ta suy ra hàm số có 4 điểm cực trị.

Câu 2: Chọn A

Ta có $y' = 3x^2 + 2(m+4)x + 5m + 2$; $y'' = 6x + 2(m+4)$

Để hàm số đạt cực tiểu tại $x = -2$ thì $\begin{cases} y'(-2) = 0 \\ y''(-2) > 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 12 - 4(m+4) + 5m + 2 = 0 \\ -12 + 2m + 8 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m > 2 \end{cases}$$

Vậy không có giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 3: Chọn D

TXĐ: $D = \mathbb{R}$, $y' = 3x^2 - 6x + m$, $y'' = 6x - 6$.

Hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx$ đạt cực đại tại $x = 0 \Rightarrow y'(0) = 0 \Leftrightarrow m = 0$.

Với $m = 0$ ta có: $y''(0) = -6 < 0 \Rightarrow x = 0$ là điểm cực đại của đồ thị hàm số.

Vậy $m = 0$ là giá trị cần tìm.

Câu 4: Chọn B

Kiến thức cần nhớ: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp một trên $(a; b)$ chứa điểm x_0 và $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai khác 0 tại x_0 , khi đó:

Nếu $\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) > 0 \end{cases}$ thì hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm x_0 .

Nếu $\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) < 0 \end{cases}$ thì hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại điểm x_0 .

Áp dụng ta có $y' = 3x^2 + 2(3m-1)x + m^2$; $y'' = 6x + 2(3m-1)$.

$$\text{Xét phương trình } y'(-1) = 0 \Leftrightarrow 3(-1)^2 - 2(3m-1) + m^2 = 0 \Leftrightarrow m^2 - 6m + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 5 \end{cases}$$

Chủ đề 02: Cực trị của hàm số

Với $m = 1 \Rightarrow y'' = 6x + 4 \Rightarrow y''(-1) = -2 < 0$ nên hàm số đạt cực đại tại $x = -1$.

Với $m = 5 \Rightarrow y'' = 6x + 28 \Rightarrow y''(-1) = 22 > 0$ nên hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1$.

Vậy $m = 5$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 5: Chọn D

TXĐ $D = \mathbb{R}; y' = x^2 - 2mx + m^2 - m + 1$.

Hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - m + 1)x + 1$ đạt cực đại tại điểm $x = 1$

$$\Rightarrow y'(1) = 0 \Leftrightarrow 1^2 - 2m \cdot 1 + m^2 - m + 1 = 0 \Leftrightarrow m^2 - 3m + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 2 \end{cases}$$

Với $m = 1, y' = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2 \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}, y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

$\Rightarrow$ Hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - m + 1)x + 1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi $m = 1$.

Vậy $m = 1$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

$$\text{Với } m = 2, y' = x^2 - 4x + 3, y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$y'' = 2x - 4. \Rightarrow y''(1) = 2 \cdot 1 - 4 = -2 < 0.$$

$\Rightarrow$ Hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - m + 1)x + 1$ đạt cực đại tại điểm $x = 1$ khi $m = 2$.

Câu 6: Chọn C

$$\text{Để } x = 1 \text{ là điểm cực tiểu của hàm số} \Leftrightarrow \begin{cases} y'(1) = 0 \\ y''(1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - 4m + m = 0 \\ 6 - 4m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m < \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m = 1.$$

Thử lại với $m = 1$, ta có $y = x^3 - 2x^2 + x + 1; y' = 3x^2 - 4x + 1$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+
y						

Quan sát bảng biến thiên ta thấy $m = 1$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 7: Chọn C

Hàm số $y = f(|x|)$ trên $\mathbb{R}$ là hàm số chẵn nên đồ thị nhận trục Oy là trục đối xứng và gồm hai phần, phần 1 trùng với phần đồ thị hàm số $y = f(x)$ ứng với $x \geq 0$; phần 2 lấy đối xứng phần 1 qua trục tung.

Bảng biến thiên của hàm số $y = f(|x|)$.

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
			-4		3		-4		$+\infty$

Bảng biến thiên của hàm số $y = |f(|x|)|$

x	$-\infty$	x_1	-2	x_2	0	x_3	2	x_4	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$+$	0	$-$	$+$	0	$-$	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
		0	4	0	3	0	4	0	$+\infty$

Vậy hàm số $y = |f(|x|)|$ có 7 cực trị.

Câu 8: Chọn B

$$y' = 4mx^3 + m^2 - 1$$

Để hàm số đạt cực tại tại $x = 0$ thì $y'(0) = 0 \Leftrightarrow m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 1$

Với $m = 1 \Rightarrow y = x^4 + 1, y' = 4x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Khảo sát hàm số ta thấy, hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$ suy ra $m = 1$ không thỏa mãn.

Với $m = -1 \Rightarrow y = -x^4 + 1, y' = -4x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Khảo sát hàm số ta thấy, hàm số đạt cực đại tại $x = 0$.

Câu 9: Chọn D

Dựa vào bảng biến thiên, giá trị cực đại của hàm số bằng 3 tại $x = -2$ hoặc $x = 2$.

Câu 10: Chọn C

Hàm số xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Từ đồ thị ta thấy } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \\ x = 0 \\ x = x_2 \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	x_1	0	x_2	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$+$
y	$\searrow \quad \nearrow$				

Khi đó hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = x_1$ hay hàm số $y = f(x)$ có 1 điểm cực trị.

Câu 11: Chọn C

Ta có $y' = 3x^2 - 6mx + m + 2$ và $y'' = 6x - 6m$.

$$\text{Hàm số } y = x^3 - 3mx^2 + (m+2)x - m \text{ đạt cực tiểu tại } x = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} y'(1) = 0 \\ y''(1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - 6m + m + 2 = 0 \\ 6 - 6m > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m < 1 \end{cases} \Rightarrow \text{không có giá trị của } m \text{ thỏa mãn yêu cầu bài toán.}$$

Câu 12: Chọn B

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = x^2 - 2mx + m^2 - 4$ và $y'' = 2x - 2m$.

Hàm số đạt cực đại tại $x = 3$ suy ra $y'(3) = 0 \Leftrightarrow m^2 - 6m + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 5 \end{cases}$.

Thử lại:

Với $m = 1$ thì $y''(3) = 4 > 0$, suy ra $x = 3$ là điểm cực tiểu của hàm số.

Với $m = 5$ thì $y''(3) = -4 < 0$, suy ra $x = 3$ là điểm cực đại của hàm số.

Vậy $m = 5$ là giá trị cần tìm.

Câu 13: Chọn C

Ta có $y' = 3x^2 + 2mx - 3(m+1)$

Điều kiện cần: - Giả sử hàm số này đạt cực trị tại $x = -1 \Rightarrow y'(-1) = 0 \Leftrightarrow m = 0$

Điều kiện đủ: Thử lại $m = 0$ ta được $y = x^3 - 3x$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$		2		-2		$+\infty$

Hàm số đạt cực đại tại $x = -1$.

Câu 14: Chọn A

Hàm số đã cho xác định với $\forall x \in \mathbb{R}$.

Đạo hàm $y' = 3mx^2 - 2(m^2 + 1)x + 2$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1 \Rightarrow y'(1) = 0 \Leftrightarrow -2m^2 + 3m = 0 \Leftrightarrow m \in \left\{0; \frac{3}{2}\right\}$.

Thử lại:

Với $m = 0$ thì $y = -2x^2 + 2x - 3$ và $y' = -2x + 2 \Rightarrow$ Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$ (KTM)

Với $m = \frac{3}{2}$ thì $y' = \frac{9}{2}x^2 - \frac{13}{2}x + 2$; $y' = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{1; \frac{4}{9}\right\}$. Hàm số y là hàm số bậc ba có

$a = \frac{3}{2} > 0$ nên hàm số đạt cực đại tại $x = \frac{4}{9}$ và đạt cực tiểu tại $x = 1$ (Thỏa mãn).

$$\text{Vậy } m = \frac{3}{2}.$$

Câu 15: Chọn D

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$. Ta có: $y' = 4(m-1)x^3 - 2(m^2-2)x$

* Điều kiện cần:

Điều kiện cần để hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1$ là $f'(-1) = 0 \Leftrightarrow -4(m-1) + 2(m^2-2) = 0$

$$\Leftrightarrow 2m^2 - 4m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 2 \end{cases}.$$

* Điều kiện đủ:

Trường hợp 1: $m = 0$ hàm số trở thành $y = -x^4 + 2x^2 + 2019$

$$\text{Ta có: } y' = 0 \Leftrightarrow -4x^3 + 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
y			2020		2020			
	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$	2019	$\nearrow$	$\searrow$	$-\infty$

Từ bảng biến thiên ta có hàm số đạt cực đại tại $x = -1$ nên loại $m = 0$.

Trường hợp 2: $m = 2$ hàm số trở thành $y = x^4 - 2x^2 + 2019$.

$$\text{Ta có: } y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$				2019				$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1$. Chọn $m = 2$.

Vậy với $m = 2$ thì hàm số $y = (m-1)x^4 - (m^2-2)x^2 + 2019$ đạt cực tiểu tại $x = -1$.

Cách 2: Kiểm tra điều kiện đủ

- Với $m = 0$, hàm số trở thành $y = -x^4 + 2x^2 + 2019$.

$$y' = -4x^3 + 4x, \quad y'' = -12x^2 + 4.$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} y'(-1) = 0 \\ y''(-1) = -8 < 0 \end{cases}, \text{ suy ra hàm số đạt cực đại tại } x = -1 \text{ nên loại } m = 0.$$

Chủ đề 02: Cực trị của hàm số

- Với $m = 2$, hàm số trở thành $y = x^4 - 2x^2 + 2019$.

$$y' = 4x^3 - 4x, \quad y'' = 12x^2 - 4.$$

Ta có: $\begin{cases} y'(-1) = 0 \\ y''(-1) = 8 > 0 \end{cases}$, suy ra hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1$ nên chọn $m = 2$.

Kết luận: $m = 2$.

Câu 16: Chọn A

$$y' = 9x^8 + 7(m-2)x^6 - 6(m^2-4)x^5 \Rightarrow y'(0) = 0, \forall m \in \mathbb{R}.$$

$$y'' = 9.8x^7 + 7.6(m-2)x^5 - 6.5(m^2-4)x^4 \Rightarrow y''(0) = 0, \forall m \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Ta nhận thấy } y'''(0) = y^{(4)}(0) = y^{(5)}(0) = 0, \forall m \in \mathbb{R}$$

$$\text{Ta có } y^{(6)} = 9.8.7.6.5.4x^3 + 7.6.5.4.3.2(m-2)x - 6.5.4.3.2.1(m^2-4) \\ \Rightarrow y^{(6)}(0) = -6.5.4.3.2.1(m^2-4).$$

Trường hợp 1: $y^{(6)}(0) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -2 \end{cases}$ thì:

+ $m = 2 \Rightarrow y' = 9x^8 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên không đạt cực trị tại $x = 0$.

+ $m = -2 \Rightarrow y' = x^6(9x^2 - 28)$ không đổi dấu khi qua $x = 0$ nên không đạt cực trị tại $x = 0$.

Trường hợp 2: $y^{(6)}(0) \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 2$

Khi đó để hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$ thì cần thêm

$$y^{(6)}(0) > 0 \Leftrightarrow -6.5.4.3.2.1(m^2-4) > 0 \Leftrightarrow m^2-4 < 0 \Leftrightarrow -2 < m < 2 \Rightarrow m \in \{-1; 0; 1\}.$$

Vậy có 3 giá trị nguyên của tham số m .

Câu 17: Chọn B

$$\text{Ta có } y' = x^4 - 4(2m-1)x^3 - mx^2 = x^2[x^2 - 4(2m-1)x - m].$$

Dễ thấy $x = 0$ là một nghiệm của đạo hàm y' . Do đó hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$ khi và chỉ khi y' đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua nghiệm $x = 0$. Ta thấy dấu của y' là dấu của hàm số $g(x) = x^2 - 4(2m-1)x - m$. Hàm số $g(x)$ đổi dấu khi đi qua giá trị $x = 0$ khi $x = 0$ là nghiệm của $g(x)$. Khi đó $g(0) = 0 \Leftrightarrow m = 0$.

Thử lại, với $m = 0$ thì $g(x) = x^2 + 4x$ đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua giá trị $x = 0$.

Vậy có 1 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 18: Chọn A

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } g'(x) = x \left(2 - \frac{1}{|x|} \right) f'(x^2 - |x|) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - |x| = -1 \\ x^2 - |x| = 1 \\ x = 0 \text{ (l)} \\ 2 - \frac{1}{|x|} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ x = \pm \frac{1}{2} \end{cases}.$$

$g'(x)$ không xác định tại $x = 0$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	$-\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Vậy $g(x)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 19: Chọn B

Ta có $y' = (m-1)x^4 + (m+2)x^3$.

Trường hợp 1: $m = 1$. Khi đó $y = \frac{3}{4}x^4 + 6 \Rightarrow y' = 3x^3$.

Suy ra hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$ (loại).

Trường hợp 2: $m \neq 1$. Khi đó $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -\frac{m+2}{m-1} \end{cases}$.

Nhận thấy nếu $x_2 = x_1 = 0 \Rightarrow m = -2 \Rightarrow y' = -3x^4 \leq 0 \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ Hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$ nên hàm số không có cực trị (loại)

Vì vậy yêu cầu bài toán tương đương với $\begin{cases} m-1 > 0 \\ x_1 < x_2 \\ m-1 < 0 \\ x_1 > x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ -2 < m < 1 \\ m < 1 \\ m < -2 \\ m < -2 \\ m > 1 \end{cases} \Leftrightarrow m < -2$.

Suy ra số giá trị m nguyên thuộc khoảng $(-2019; 2019)$ là 2016.

Câu 20: Chọn C

Ta có $y'(0) = y''(0) = y^{(3)}(0) = 0, y^{(4)}(0) = -4!(m^2 - 4)$

Nếu $y^{(4)}(0) = 0 \Leftrightarrow m = \pm 2$. Kiểm tra trực tiếp thấy với $m = 2$ thì hàm số đã cho đạt cực tiểu tại $x = 0$. Với $m = -2$ thì hàm số đã cho không đạt cực tiểu tại $x = 0$.

Nếu $y^{(4)}(0) < 0$ thì hàm số đã cho đạt cực đại tại $x = 0$.

Nếu $y^{(4)}(0) > 0 \Leftrightarrow -2 < m < 2$ thì hàm số đã cho đạt cực tiểu tại $x = 0$.

Tóm lại có 4 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Cách 2: Có $y' = 8x^7 + 5(m-2)x^4 - 4(m^2-4)x^3 = x^3(8x^4 + 5(m-2)x - 4(m^2-4))$. Đặt

$g(x) = 8x^4 + 5(m-2)x - 4(m^2-4); g(0) = -4(m^2-4)$

Nếu $g(0) < 0$ thì tồn tại số $h > 0$ sao cho $g(x) < 0 \forall x \in (-h; h) \Rightarrow y'$ đổi dấu từ dương sang âm khi x đi qua $0 \Rightarrow$ Hàm số đã cho đạt cực đại tại 0 .

Nếu $g(0) > 0 \Leftrightarrow -2 < m < 2$ thì tồn tại số $h > 0$ sao cho $g(x) > 0 \forall x \in (-h; h) \Rightarrow y'$ đổi dấu từ âm sang dương khi x đi qua $0 \Rightarrow$ Hàm số đã cho đạt cực tiểu tại 0 .

Nếu $g(0) = 0 \Leftrightarrow m = \pm 2$. Kiểm tra trực tiếp thấy với $m = 2$ thì hàm số đã cho đạt cực tiểu tại $x = 0$. Với $m = -2$ thì hàm số đã cho không đạt cực tiểu tại $x = 0$.

Tóm lại có 4 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Cách 3: Ta có: $y' = 8x^7 + 5(m-2)x^4 - 4(m^2-4)x^3 = x^3 \left[\underbrace{8x^4 + 5(m-2)x - 4(m^2-4)}_{g'(x)} \right]$.

Ta xét các trường hợp sau

* Nếu $m^2 - 4 = 0 \Rightarrow m = \pm 2$.

Khi $m = 2 \Rightarrow y' = 8x^7 \Rightarrow x = 0$ là điểm cực tiểu.

Khi $m = -2 \Rightarrow y' = x^4(8x^4 - 20) \Rightarrow x = 0$ không là điểm cực tiểu.

* Nếu $m^2 - 4 \neq 0 \Rightarrow m \neq \pm 2$. Khi đó ta có

$$y' = x^2 [8x^5 + 5(m-2)x^2 - 4(m^2-4)x]$$

Số cực trị của hàm $y = x^8 + (m-2)x^5 - (m^2-4)x^4 + 1$ bằng số cực trị của hàm $g'(x)$

$$\begin{cases} g'(x) = 8x^5 + 5(m-2)x^2 - 4(m^2-4)x \\ g''(x) = 40x^4 + 10(m-2)x - 4(m^2-4) \end{cases}$$

Nếu $x = 0$ là điểm cực tiểu thì $g''(0) > 0$. Khi đó

$$-4(m^2-4) > 0 \Leftrightarrow m^2-4 < 0 \Rightarrow -2 < m < 2 \Rightarrow m = \{-1; 0; 1\}$$

Vậy có 4 giá trị nguyên của m .

Cách 4: Ta có: $y' = 8x^7 + 5(m-2)x^4 - 4(m^2-4)x^3 = x^3 \left[\underbrace{8x^4 + 5(m-2)x - 4(m^2-4)}_{g'(x)} \right]$.

$$Y_{\text{cvt}} \Leftrightarrow \begin{cases} 5(m-2) = -5(m^2-4) = 0 \\ -4(m^2-4) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ -2 < m < 2 \end{cases}$$

Vậy có 4 giá trị nguyên của m .

Nhận xét: Ta thấy rằng, hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$ khi $y'(0) = 0$ và y' đổi dấu từ $(-)$ sang $(+)$ khi qua $x = 0$ điều này tương đương số hạng bậc thấp nhất của y' phải bậc lẻ và dương.

Câu 21: Chọn D

Ta có $y'(0) = y''(0) = y^{(3)}(0) = 0, \forall m; y^{(4)}(0) = 4!(25 - m^2)$.

Nếu $y^{(4)}(0) > 0 \Leftrightarrow 25 - m^2 > 0 \Leftrightarrow -5 < m < 5$ hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$ (thỏa mãn).

Nếu $y^{(4)}(0) < 0$, hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ (loại).

Nếu $y^{(4)}(0) = 0 \Leftrightarrow 25 - m^2 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 5$.

Với $m = -5 \Rightarrow y' = 2018x^{2017} - 50x^4 = x^4(2018x^3 - 50)$ không đổi dấu khi đi qua $x = 0$ (loại).

Với $m = 5 \Rightarrow y' = 2018x^{2017}$ đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua $x = 0$ (thỏa mãn).

Vậy $-5 < m \leq 5 \Rightarrow m \in \{-4, \dots, 5\}$. Có 10 số nguyên thỏa mãn.

Câu 22: Chọn B

Ta có $y'(0) = y''(0) = y^{(3)}(0) = y^{(4)}(0) = y^{(5)}(0) = 0, \forall a, b. y^{(6)} = 6!b$.

Trường hợp 1: Nếu $y^{(6)}(0) > 0 \Leftrightarrow b > 0$ hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$ (thỏa mãn).

Vậy trường hợp này $a \in \{-19, \dots, 19\}$, có 39 cách chọn; $b \in \{1, \dots, 19\}$, có 19 cách chọn

$\Rightarrow$ Có $39 \cdot 19 = 741$ cặp.

Trường hợp 2: Nếu $y^{(6)}(0) < 0 \Leftrightarrow b < 0$ hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ (loại).

Trường hợp 3: Nếu $y^{(6)}(0) \Leftrightarrow b = 0$. Khi đó $y' = 8x^7 + 7ax^6 = x^6(8x + 7a)$ đổi dấu từ âm sang dương khi qua điểm $x = 0 \Leftrightarrow a = 0$.

Vậy trường hợp này có duy nhất 1 cặp $(a; b) = (0; 0)$.

Vậy có tất cả 742 cặp số nguyên thỏa mãn.

Câu 23: Chọn C

Ta có $f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0, f^{(4)}(0) = -4!(m^2 - 9)$.

Nếu $f^{(4)}(0) = -4!(m^2 - 9) > 0 \Leftrightarrow -3 < m < 3$ hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 0$ (thỏa mãn).

Nếu $f^{(4)}(0) < 0 \Leftrightarrow -4!(m^2 - 9) < 0 \Leftrightarrow m > 3 \vee m < -3$ hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 0$ (loại).

Nếu $f^{(4)}(0) = 0 \Leftrightarrow -4!(m^2 - 9) = 0 \Leftrightarrow m = 3 \vee m = -3$.

Với $m = 3 \Rightarrow f'(x) = 8x^7$ đổi dấu từ âm sang dương khi qua điểm $x = 0$ (thỏa mãn).

Với $m = -3 \Rightarrow f'(x) = 8x^7 - 30x^4 = 2x^4(4x^3 - 15)$ không đổi dấu khi đi qua điểm $x = 0$ (loại).

Vậy $-3 < m \leq 3 \Rightarrow m \in \{-2, \dots, 3\}$. Có 6 số nguyên thỏa mãn.

Câu 24: Chọn B

Ta có $y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0, \forall m; y^{(4)} = 4!(10m - m^2)$.

Nếu $y^{(4)}(0) > 0 \Leftrightarrow 4!(10m - m^2) > 0 \Leftrightarrow 0 < m < 10$ hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 0$.

Nếu $y^{(4)}(0) < 0 \Leftrightarrow 4!(10m - m^2) < 0 \Leftrightarrow m \in (-\infty; 0) \cup (10; +\infty)$ hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 0$ (loại).

Nếu $y^{(4)}(0) = 0 \Leftrightarrow 4!(10m - m^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 10 \end{cases}$.

Với $m = 0 \Rightarrow y' = 6x^5$. Ta có đạo hàm đổi dấu từ âm sang dương khi qua $x = 0$ (thỏa mãn).

Với $m = 10 \Rightarrow y' = 6x^5 - 50x^4 = 2x^4(3x - 25)$. Ta có đạo hàm không đổi khi qua $x = 0$ (loại).

Kết luận: Có 10 giá trị m nguyên thỏa mãn.

Câu 25: Chọn B

Ta có $y'(0) = y''(0) = 0, \forall m; y''' = 3!(m^2 - 4)$.

Nếu $y'''(0) \neq 0 \Leftrightarrow 3!(m^2 - 4) \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 2$.

Hàm số không đạt cực trị tại điểm $x = 0$ (loại) vì $n = 3$ lẻ.

Nếu $y'''(0) = 0 \Leftrightarrow 3!(m^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow m = \pm 2$.

Với $m = -2 \Rightarrow y' = 6x^5 - 12x^3 = 6x^3(x^2 - 2)$. Ta có đạo hàm đổi dấu từ dương sang âm khi qua $x = 0$ (loại).

Với $m = 2 \Rightarrow y' = 6x^5 + 4x^3 = 2x^3(3x^2 + 2)$. Ta có đạo hàm đổi dấu từ âm sang dương khi qua $x = 0$ (thỏa mãn). Vậy $m = 2$ thỏa mãn.

Câu 26: Chọn D

Ta có $y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0, \forall m; y^{(4)} = -4!(m^2 - 16)$.

Nếu $y^{(4)}(0) > 0 \Leftrightarrow -4!(m^2 - 16) > 0 \Leftrightarrow -4 < m < 4$ hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 0$.

Nếu $y^{(4)}(0) < 0 \Leftrightarrow -4!(m^2 - 16) < 0 \Leftrightarrow m \in (-\infty; -4) \cup (4; +\infty)$ hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 0$ (loại).

Nếu $y^{(4)}(0) = 0 \Leftrightarrow -4!(m^2 - 16) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -4 \\ m = 4 \end{cases}$.

Với $m = 4 \Rightarrow y' = 8x^7$. Ta có đạo hàm đổi dấu từ âm sang dương khi qua $x = 0$ (thỏa mãn).

Với $m = -4 \Rightarrow y' = 8x^7 - 40x^4 = 8x^4(x^3 - 5)$. Ta có đạo hàm không đổi khi qua $x = 0$ (loại).

Kết luận: Vậy $m \in \{-3; -2; \dots; 4\}$ hay có 8 giá trị m nguyên thỏa mãn.

Câu 27: Chọn C

Chú ý: Định nghĩa đạo hàm tại điểm x_0 : $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall h > 0, |f(x+h) - f(x-h)| \leq h^2 \Leftrightarrow \left| \frac{f(x+h) - f(x-h)}{h} \right| \leq h.$$

$$\text{Do đó } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{h} = 0 \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x-h)}{h} = 0$$

$$\Leftrightarrow f'(x) + f'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Suy ra } g(x) = x^{2019} + x^{29-m} - (m^4 - 29m^2 + 100)\sin^2 x - 1.$$

$$\text{Khi đó: } \begin{cases} g'(x) = 2019x^{2018} + (29-m)x^{28-m} - (m^4 - 29m^2 + 100)\sin 2x \\ g''(x) = 2019 \cdot 2018x^{2017} + (29-m)(28-m)x^{27-m} - (m^4 - 29m^2 + 100) \cdot 2\cos 2x \end{cases}$$

$$\text{Có } g'(0) = 0, g''(0) = -2(m^4 - 29m^2 + 100).$$

Trường hợp 1: $g''(0) < 0 \Rightarrow$ Hàm số $g(x)$ đạt cực đại tại $x = 0$.

$$\text{Trường hợp 2: } g''(0) > 0 \Leftrightarrow m^4 - 29m^2 + 100 < 0 \Leftrightarrow 4 < m^2 < 25 \Leftrightarrow \begin{cases} 2 < m < 5 \\ -5 < m < -2 \end{cases}.$$

Khi đó hàm số $g(x)$ đạt cực tiểu tại $x = 0$.

Trường hợp 3: $g''(0) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm 5 \\ m = \pm 2 \end{cases}$. Thay lại ta có với $m = \pm 5$, $g'(x)$ đổi dấu từ âm sang

dương khi đi qua $x = 0$. Khi đó hàm số $g(x)$ đạt cực tiểu tại $x = 0$.

Vậy $S = \{-5; -4; -3; 3; 4; 5\}$. Tổng bình phương các phần tử của S bằng 100.

Câu 28: Chọn A

Ta có $y' = 9x^8 + 7(m-2)x^6 - 6(m^2-4)x^5$

$y'(0) = y''(0) = \dots = y^{(5)}(0) = 0, \forall m \in \mathbb{R}, y^{(6)}(0) = -6!(m^2-4)$.

Trường hợp 1: $y^{(6)}(0) < 0 \Rightarrow y$ đạt cực đại tại $x = 0$.

Trường hợp 2: $y^{(6)}(0) > 0 \Leftrightarrow -2 < m < 2$. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$. Do đó $m = 0; \pm 1$ thỏa ycbt.

Trường hợp 3: $y^{(6)}(0) = 0 \Leftrightarrow m = \pm 2$. Thay $m = \pm 2$ vào y' , ta thấy y' không đổi dấu khi đi qua $x = 0$. Do đó y không đạt cực tiểu tại $x = 0$.

Vậy có 3 số nguyên m thỏa ycbt.

Câu 29: Chọn C

Ta có $y' = 5x^4 - 4mx^3 + 3(m^3 - 3m^2 - 4m + 12)x^2$

$y'(0) = y''(0) = 0, \forall m$ và $y^{(3)}(0) = 6(m^3 - 3m^2 - 4m + 12)$.

Trường hợp 1: $y^{(3)}(0) \neq 0$ thì hàm số đã cho không đạt cực trị tại $x = 0$.

Trường hợp 2: $y^{(3)}(0) = 0 \Leftrightarrow m \in \{\pm 2; 3\}$

Với $m = -2 \Rightarrow y' = 5x^4 + 8x^3 = x^3(5x + 8)$ đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua $x = 0$ nên hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$.

Với $m = 2 \Rightarrow y' = 5x^4 - 8x^3 = x^3(5x - 8)$ đổi dấu từ dương sang âm khi đi qua $x = 0$ nên hàm số đạt cực đại tại $x = 0$.

Với $m = 3 \Rightarrow y' = 5x^4 - 12x^3 = x^3(5x - 12)$ đổi dấu từ dương sang âm khi đi qua $x = 0$ nên hàm số đạt cực đại tại $x = 0$.

Vậy có 2 giá trị nguyên của m thỏa ycbt.

DẠNG 7**Cực trị thỏa mãn điều kiện cho trước**

Câu 1: Cho hàm số $y = 2x^3 + 3(m-1)x^2 + 6(m-2)x - 1$ với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số có điểm cực đại và điểm cực tiểu nằm trong khoảng $(-2; 3)$

- A. $m \in (-1; 4) \setminus \{3\}$. B. $m \in (3; 4)$. C. $m \in (1; 3)$. D. $m \in (-1; 4)$.

Câu 2: Với m là một tham số thực sao cho đồ thị hàm số $y = x^4 + 2mx^2 + 1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $m \geq 2$. B. $0 \leq m < 2$. C. $-2 \leq m < 0$. D. $m < -2$.

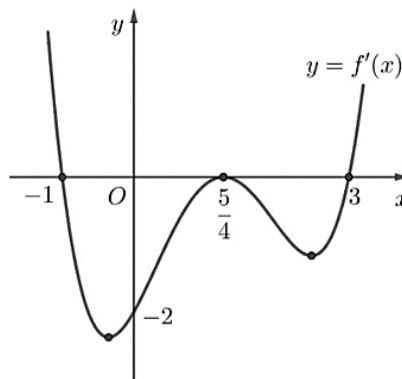
Câu 3: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = -\frac{x^3}{3} + mx^2 - 2mx + 1$ có hai điểm cực trị.

- A. $0 < m < 2$. B. $m > 2$. C. $m > 0$. D. $\begin{cases} m > 2 \\ m < 0 \end{cases}$.

Câu 4: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+1)(x^2-1)^3(x+2), \forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là:

- A. 3. B. 2. C. 1. D. 5.

Câu 5: Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số $f(x)$ là



- A. 3. B. 4. C. 2. D. 1.

Câu 6: Tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^4 + (m-2019)x^2 + 2018$ có ba điểm cực trị là

- A. $m < 2019$. B. $m \leq 2019$. C. $m < 2018$. D. $m \leq 1009$.

Câu 7: Tìm tập hợp các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 + (m^2 - 4)x^2 + 1 - m$ có một điểm cực trị

- A. $(-2; 2)$. B. $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.
C. $[-2; 2]$. D. $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$.

Câu 8: Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m$. Tất cả các giá trị thực của m để hàm số có 3 cực trị là

- A. $m > 0$. B. $m \geq 0$. C. $m < 0$. D. $m \leq 0$.

Câu 9: Số giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = mx^4 - (m-3)x^2 + m^2$ không có điểm cực đại là

- A. 2. B. vô số. C. 0. D. 4.

- Câu 10:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = m^2x^4 - (m^2 - 2019m)x^2 - 1$ có đúng một điểm cực trị.
A. 2019. **B.** 2020. **C.** 2018. **D.** 2017.
- Câu 11:** Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = \sin x - \cos^2 x$ trên $[0; 2\pi]$.
A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.
- Câu 12:** Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số $y = mx^3 - 2mx^2 + (m - 2)x + 1$ không có cực trị.
A. $m \in (-\infty; -6) \cup (0; +\infty)$. **B.** $m \in (-6; 0)$. **C.** $m \in [-6; 0)$. **D.** $m \in [-6; 0]$.
- Câu 13:** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm $y = \frac{1}{3}x^3 + (m + 3)x^2 + 4(m + 3)x + m^3 - m$ đạt cực trị tại x_1, x_2 thỏa mãn $-1 < x_1 < x_2$.
A. $-3 < m < 1$. **B.** $-\frac{7}{2} < m < -3$. **C.** $\begin{cases} m < -3 \\ m > 1 \end{cases}$. **D.** $-\frac{7}{2} < m < -2$.
- Câu 14:** Tập hợp tất cả các giá trị tham số thực m để đồ thị hàm số $y = x^3 + 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x + m^3$ có hai điểm cực trị nằm về hai phía trục hoành là $(a; b)$. Khi đó giá trị $a + 2b$ bằng
A. $\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{4}{3}$. **C.** 1. **D.** $\frac{2}{3}$.
- Câu 15:** Tìm tất cả giá trị của tham số m để hàm số $y = x^4 + 2(m - 2)x^2 + 3m - 2$ có ba điểm cực trị.
A. $m \in (2; +\infty)$. **B.** $m \in (-2; 2)$. **C.** $m \in (-\infty; 2)$. **D.** $m \in (0; 2)$.
- Câu 16:** Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 1$ (1). Tổng lập phương các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số (1) có ba điểm cực trị và đường tròn đi qua 3 điểm này có bán kính $R = 1$ bằng
A. $\frac{5 - \sqrt{5}}{2}$. **B.** $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$. **C.** $2 + \sqrt{5}$. **D.** $-1 + \sqrt{5}$.
- Câu 17:** Tìm số thực k để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2kx^2 + k$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác nhận điểm $G\left(0; \frac{1}{3}\right)$ làm trọng tâm.
A. $k = -1; k = \frac{1}{2}$. **B.** $k = 1; k = \frac{1}{3}$. **C.** $k = 1; k = \frac{1}{2}$. **D.** $k = \frac{1}{3}; k = \frac{1}{2}$.
- Câu 18:** Cho hàm số $y = x^4 - 2(m^2 - m + 1)x^2 + m - 1$. Tìm m để hàm số có ba điểm cực trị và khoảng cách giữa hai điểm cực tiểu là nhỏ nhất.
A. $m \geq 1$. **B.** $m \leq 1$. **C.** $m = 1$. **D.** $m = \frac{1}{2}$.
- Câu 19:** Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + m$ nhỏ hơn hoặc bằng $\sqrt{5}$.
A. 5. **B.** 2. **C.** 11. **D.** 4.

- Câu 20:** Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+2)x$ có cực trị và giá trị của hàm số tại các điểm cực đại, điểm cực tiểu nhận giá trị dương.
- A. $m > 2$. B. $m \in \left(2; \frac{2+2\sqrt{7}}{3}\right)$. C. $\frac{2-2\sqrt{7}}{3} < m < -1$. D. $m < -1$.
- Câu 21:** Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 3m - 2$. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị đều nằm trên các trục tọa độ?
- A. 2. B. 0. C. 3. D. 1.
- Câu 22:** Biết $m = m_0$; $m_0 \in \mathbb{R}$ là giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 + 2mx^2 + 1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông. Khẳng định nào sau đây đúng?
- A. $m_0 \in (0; 3)$. B. $m_0 \in [-5; -3)$. C. $m_0 \in (-3; 0]$. D. $m_0 \in (3; 7)$.
- Câu 23:** Cho hàm số $y = x^4 - 2(m^2 + m + 1)x^2 + m$ có đồ thị (C). Tìm m để đồ thị hàm số (C) có 3 điểm cực trị và khoảng cách giữa hai điểm cực tiểu nhỏ nhất.
- A. $m = \frac{1}{2}$. B. $m = -\frac{1}{2}$. C. $m = \sqrt{3}$. D. $m = 0$.
- Câu 24:** Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 12mx + 2019$ có 2 điểm cực trị x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 + 2x_1x_2 = -8$.
- A. $m = -1$. B. $m = 2$. C. $m = 1$. D. $m = -2$.
- Câu 25:** Gọi x_1, x_2 là hai điểm cực trị của hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}mx^2 - 4x - 10$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $S = (x_1^2 - 1)(x_2^2 - 1)$.
- A. 9. B. 4. C. 0. D. 8.
- Câu 26:** Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^3$ với m là tham số, gọi (C) là đồ thị của hàm số đã cho. Biết rằng, khi m thay đổi, điểm cực đại của đồ thị (C) luôn nằm trên một đường thẳng d cố định. Xác định hệ số góc k của đường thẳng d .
- A. $k = -3$. B. $k = \frac{1}{3}$. C. $k = 3$. D. $k = -\frac{1}{3}$.
- Câu 27:** Cho hàm số $y = x^3 - (2m+1)x^2 + (m+1)x + m - 1$. Có bao nhiêu giá trị của số tự nhiên $m < 20$ để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm về hai phía trục hoành?
- A. 18. B. 19. C. 21. D. 20.
- Câu 28:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3m^2$ có hai điểm cực trị là A, B mà $\triangle OAB$ có diện tích bằng 24.
- A. $m = 2$. B. $m = 1$. C. $m = \pm 2$. D. $m = \pm 1$.
- Câu 29:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - (m+1)x^2 + (m^2 - 2)x - m^2 + 3$ có hai điểm cực trị và hai điểm cực trị đó nằm về cùng một phía đối với trục hoành?
- A. 4. B. 1. C. 3. D. 2.

Câu 30: Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2mx^2 + (m-1)x + 2m^2 + 1$ (m là tham số). Xác định khoảng cách lớn nhất từ gốc tọa độ $O(0;0)$ đến đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số trên.

- A. $\frac{2}{9}$. B. $\sqrt{3}$. C. $2\sqrt{3}$. D. $\frac{\sqrt{10}}{3}$.

Câu 31: Các giá trị của m để đồ thị hàm số $y = \frac{1}{3}|x|^3 - mx^2 + (m+6)|x| + 2019$ có 5 điểm cực trị là

- A. $m < -2$. B. $-2 < m < 0$. C. $0 < m < 3$. D. $m > 3$.

Câu 32: Hỏi hàm số $y = |\sin 2x + x|$ có bao nhiêu điểm cực trị trên $(-\pi; \pi)$?

- A. 5. B. 3. C. 4. D. 7.

Câu 33: Cho hàm số $y = x^3 + 2(m-2)x^2 - 5x + 1$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số có hai điểm cực trị x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) thỏa mãn $|x_1| - |x_2| = -2$.

- A. $\frac{7}{2}$. B. -1 . C. $\frac{1}{2}$. D. 5.

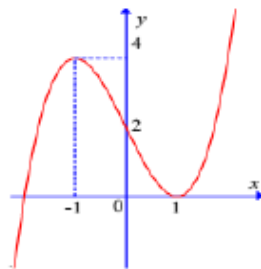
Câu 34: Xét các hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x^2 - x)(x^3 - 3x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số $y = |f(1 - 2019x)|$ có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 9. B. 7. C. 8. D. 6.

Câu 35: Cho hàm số $y = -x^3 + 3mx^2 - 3m - 1$ với m là tham số thực. Giá trị của m thuộc tập hợp nào để đồ thị hàm số đã cho có hai điểm cực trị đối xứng với nhau qua đường thẳng $d: x + 8y - 74 = 0$.

- A. $m \in (-1; 1]$. B. $m \in (-3; -1]$. C. $m \in (3; 5]$. D. $m \in (1; 3]$.

Câu 36: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ sau:



Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x - 2018) - 2019x + 1$ là

- A. 2. B. 1. C. 3. D. 4.

Câu 37: Cho hàm số $y = x^3 - 6mx + 4$ có đồ thị (C_m) . Gọi m_0 là giá trị của m để đường thẳng đi qua điểm cực đại, điểm cực tiểu của (C_m) cắt đường tròn tâm $I(1;0)$, bán kính $\sqrt{2}$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác IAB có diện tích lớn nhất. Chọn khẳng định đúng

- A. $m_0 \in (3; 4)$. B. $m_0 \in (1; 2)$. C. $m_0 \in (0; 1)$. D. $m_0 \in (2; 3)$.

Câu 38: Biết hai hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + 2x - 1$ và $g(x) = -x^3 + bx^2 - 3x + 1$ có chung ít nhất một điểm cực trị. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |a| + |b|$

- A. $\sqrt{30}$. B. $2\sqrt{6}$. C. $3 + \sqrt{6}$. D. $3\sqrt{3}$.

Câu 39: Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng đi qua điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx + 2$ cắt đường tròn tâm $I(1;1)$, bán kính $R = 1$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho diện tích tam giác IAB đạt giá trị lớn nhất?

A. $m = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$. B. $m = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{2}$. C. $m = \frac{2 \pm \sqrt{5}}{2}$. D. $m = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{3}$.

Câu 40: Tìm các giá trị của m để đường thẳng đi qua điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx + 2$ cắt đường tròn $(C): (x-1)^2 + y^2 = 2$ có tâm I tại hai điểm phân biệt A, B sao cho diện tích tam giác IAB đạt giá trị lớn nhất.

A. $m = \frac{3}{8}$. B. $\begin{cases} m = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ m = \frac{1-\sqrt{3}}{2} \end{cases}$. C. $m = \frac{8}{3}$. D. $\begin{cases} m = \frac{3}{2} \\ m = \frac{1}{2} \end{cases}$.

Câu 41: Cho hàm số $y = \frac{1}{3}(m-1)x^3 - (m-1)x^2 + 2mx + m + 3$, với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương nhỏ hơn 2019 của tham số m để hàm số trên không có cực trị?

A. 2018. B. 2019. C. 1. D. 3.

Câu 42: Biết m_0 là giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx - 1$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 sao cho $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 13$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $m_0 \in (-1;7)$. B. $m_0 \in (7;10)$. C. $m_0 \in (-7;-1)$. D. $m_0 \in (-15;-7)$.

Câu 43: Cho hàm số $y = x^3 + (1-2m)x^2 + (2-m)x + m + 2$. Tìm các giá trị của m để đồ thị hàm số có điểm cực đại, điểm cực tiểu, đồng thời hoành độ của điểm cực tiểu nhỏ hơn 1.

A. $\frac{5}{4} \leq m \leq \frac{7}{5}$. B. $\begin{cases} m < \frac{5}{4} \\ m > \frac{7}{5} \end{cases}$. C. $\begin{cases} m < -1 \\ \frac{5}{4} < m < \frac{7}{5} \end{cases}$. D. $\begin{cases} m \leq \frac{5}{4} \\ m \geq \frac{7}{5} \end{cases}$.

Câu 44: Cho hàm số $y = x^3 - 3mx + m - 1$ có đồ thị (C) , với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị (C) có hai điểm cực trị là A, B cùng với điểm $C(0;-1)$ tạo thành một tam giác có diện tích nhỏ hơn 10?

A. 7. B. 9. C. 12. D. 4.

Câu 45: Đồ thị hàm số $y = 2x^3 - 3(2m+1)x^2 + 6m(m+1)x + 1$ có hai điểm cực trị A và B . Điểm $M(2m^3; m)$ tạo với hai điểm A và B một tam giác có diện tích nhỏ nhất. Khi đó giá trị tham số m thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(-7;-3)$. B. $(-3;3)$. C. $(3;7)$. D. $(7;13)$.

Câu 46: Cho hàm số $y = x^3 + 2x^2 + (m-3)x + m$ (m là tham số), có đồ thị (C_m) . Tìm tất cả các giá trị thực của m để (C_m) có hai điểm cực trị và điểm $M(9;-5)$ nằm trên đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của (C_m) .

A. $m = -5$. B. $m = 3$. C. $m = 2$. D. $m = -1$.

Câu 47: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y = (3m+1)x + 3 + m$ vuông góc với đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 1$.

- A. $m = \frac{1}{6}$. B. $m = \frac{-1}{3}$. C. $m = \frac{1}{3}$. D. $m = \frac{-1}{6}$.

Câu 48: Cho hàm số $y = (m+1)x^4 - 2x^2 + 1$. Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số đã cho có ba điểm cực trị đều nhỏ hơn 1.

- A. $-1 < m < 0$. B. $m > -1$. C. $0 < m < 1$. D. $m > 0$.

Câu 49: Cho hàm số $y = (m-2)x^4 + (m-1)x^2 - 3$. Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số đã cho có đúng 1 điểm cực trị.

- A. $m \in [2; +\infty)$. B. $m \in (-\infty; 1] \cup (2; +\infty)$.
C. $m \in (-\infty; 1]$. D. $m \in (-\infty; 1] \cup [2; +\infty)$.

Câu 50: Tìm tập hợp các giá trị của tham số m để hoành độ các điểm cực đại và cực tiểu của đồ thị hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + 1$ đều thuộc khoảng $(-1; 1)$.

- A. $(-1; 1)$. B. $\left(-\frac{4}{5}; 0\right)$. C. $(-2; 0)$. D. $(-1; 0)$.

Câu 51: Tìm tập hợp các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2(m^2 - m + 1)x^2 + m - 1$ có 3 điểm cực trị, đồng thời hoành độ hai điểm cực tiểu $x_1; x_2$ thỏa điều kiện $|x_1 - x_2| \leq 2$.

- A. $\left[0; \frac{\sqrt{13}+1}{2}\right]$. B. $\left[\frac{1-\sqrt{13}}{2}; \frac{\sqrt{13}+1}{2}\right]$. C. $(0; 1]$. D. $[0; 1]$.

Câu 52: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2m^2x^2 + 2m$ có ba điểm cực trị A, B, C sao cho O, A, B, C là bốn đỉnh của một hình thoi.

- A. $m = -1$. B. $m = 1$. C. $m = 2$. D. $m = 3$.

Câu 53: Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 - 2m^2 + m^4$ có đồ thị (C) . Biết đồ thị (C) có ba điểm cực trị A, B, C và $ABDC$ là hình thoi trong đó $D(0; -3)$, A thuộc trục tung. Khi đó m thuộc khoảng nào?

- A. $m \in \left(\frac{9}{5}; 2\right)$. B. $m \in \left(-1; \frac{1}{2}\right)$. C. $m \in (2; 3)$. D. $m \in \left(\frac{1}{2}; \frac{9}{5}\right)$.

Câu 54: Gọi S là tập hợp các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + mx + m^2}{x-1}$ có hai điểm cực trị A, B . Khi $\angle AOB = 90^\circ$ thì tổng bình phương tất cả các phần tử của S bằng:

- A. $\frac{1}{16}$. B. 8. C. $\frac{1}{8}$. D. 16.

Câu 55: Cho hàm số $f(x) = x^4 - (2m+1)x^3 + (m+4)x^2 + (5m-6)x + 2m - 12$, với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-10; 10]$ để hàm số $y = |f(x)|$ có số điểm cực trị nhiều nhất?

- A. 15. B. 16. C. 13. D. 14.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.A	2.C	3.D	4.B	5.C	6.A	7.D	8.A	9.D	10.C
11.A	12.D	13.B	14.D	15.C	16.D	17.C	18.D	19.A	20.B
21.A	22.C	23.B	24.A	25.A	26.A	27.B	28.C	29.C	30.D
31.D	32.A	33.C	34.B	35.D	36.B	37.C	38.A	39.B	40.A
41.A	42.D	43.C	44.D	45.B	46.B	47.D	48.D	49.D	50.D
51.D	52.B	53.D	54.A	55.D					

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT**Câu 1: Chọn A**

Xét hàm số $y = 2x^3 + 3(m-1)x^2 + 6(m-2)x - 1$. Ta có $y' = 6x^2 + 6(m-1)x + 6(m-2)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 + (m-1)x + m-2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2-m \end{cases}.$$

Hàm số có 2 điểm cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 2-m \neq -1 \Leftrightarrow m \neq 3$.

Hàm số có điểm cực đại và điểm cực tiểu nằm trong khoảng $(-2; 3)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2 < -1 < 3 \\ -2 < 2-m < 3 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m < 4.$$

Kết hợp điều kiện $m \neq 3$, ta được $m \in (-1; 4) \setminus \{3\}$.

Câu 2: Chọn C**Cách 1:**

Hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông khi và chỉ khi $b^3 = -8a$.

. Áp dụng vào bài toán ta có: $(2m)^3 = -8 \Leftrightarrow m^3 = -1 \Leftrightarrow m = -1$.

Cách 2:

$$\text{Ta có: } y' = 4x^3 + 4mx. \quad y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + m = 0 \end{cases} \quad (1).$$

Để đồ thị hàm số đã cho có ba điểm cực trị thì phương trình (1) phải có hai nghiệm phân biệt

$$\text{khác } 0, \text{ nghĩa là } m < 0. \text{ Khi đó } y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 1 \\ x = \pm\sqrt{-m} \Rightarrow y = 1 - m^2 \end{cases}.$$

Gọi $A(0; 1)$, $B(-\sqrt{-m}; 1 - m^2)$ và $C(\sqrt{-m}; 1 - m^2)$ lần lượt ba điểm cực trị của đồ thị hàm số.

Theo tính chất của hàm số đã cho thì tam giác ABC luôn cân tại A , vậy tam giác ABC chỉ có thể vuông tại A . Ta có: $\overrightarrow{BA} = (\sqrt{-m}; m^2)$, $\overrightarrow{CA} = (-\sqrt{-m}; m^2)$.

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CA} = 0 \Leftrightarrow m + m^4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = -1 \end{cases}. \text{ So với điều kiện ta nhận } m = -1.$$

Câu 3: Chọn D

$$\text{Ta có: } y' = -x^2 + 2mx - 2m$$

Chủ đề 02: Cực trị của hàm số

Hàm số $y = -\frac{x^3}{3} + mx^2 - 2mx + 1$ có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' = m^2 - 2m > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m < 0 \end{cases}.$$

Câu 4: Chọn B

$$\text{Xét } f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2-1)^3(x+2) = 0 \Leftrightarrow (x+1)^4(x-1)^3(x+2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \\ x = -2 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-2	-1
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$			

Vậy hàm số có hai điểm cực trị.

Lưu ý: có thể dùng tính chất nghiệm bội chẵn, nghiệm bội lẻ để giải bài toán nhanh hơn.

Câu 5: Chọn C

Từ đồ thị $f'(x)$ ta có bảng xét dấu của đạo hàm $f'(x)$

x	$-\infty$	-1	$\frac{5}{4}$	3	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+

$$\text{Ta có } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{5}{4} \\ x = 3 \end{cases}.$$

Khi đi qua điểm $x = -1$, $f'(x)$ đổi dấu từ "+" sang "-" nên $x = -1$ điểm cực đại của $f(x)$.

Khi đi qua điểm $x = \frac{5}{4}$, $f'(x)$ không đổi dấu nên $x = \frac{5}{4}$ không là điểm cực trị của $f(x)$.

Khi đi qua điểm $x = 3$, $f'(x)$ đổi dấu từ "-" sang "+" nên $x = 3$ điểm cực tiểu của $f(x)$.

Do đó số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ là 2.

Câu 6: Chọn A

$$\text{Cách 1: Ta có } y' = 4x^3 + 2(m-2019)x = 2x(2x^2 + m - 2019) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = \frac{2019-m}{2} \quad (*) \end{cases}.$$

Hàm số đã cho có 3 cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ PT có 2 nghiệm phân biệt khác 0 $\Leftrightarrow m < 2019$.

Cách 2: Sử dụng công thức tính nhanh hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có 3 cực trị $\Leftrightarrow a.b < 0$. Do đó hàm số $y = x^4 + (m-2019)x^2 + 2018$ có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow 1.(m-2019) < 0 \Leftrightarrow m < 2019$.

Câu 7: Chọn D

Ta có $y' = 4x^3 + 2(m^2 - 4)x = 2x(x^2 + m^2 - 4)$

Hàm số đã cho là hàm số trùng phương nên có đúng một cực trị khi $y' = 0$ có một nghiệm.

Hay $2x(x^2 + m^2 - 4) = 0$ có đúng một nghiệm $\Leftrightarrow m^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -2 \\ m \geq 2 \end{cases}$.

Chú ý: Hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đúng một cực trị khi và chỉ khi $\begin{cases} ab \geq 0 \\ a^2 + b^2 > 0 \end{cases}$. (1)

Đặc biệt: Hàm số trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$) có đúng một cực trị khi và chỉ khi $ab \geq 0$. Hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có ba cực trị khi và chỉ khi $ab < 0$. (2)

Câu 8: Chọn A

TXĐ: $D = \mathbb{R}$; $y' = 4x^3 - 4mx = 4x(x^2 - m)$. $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = m(*) \end{cases}$.

Hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m$ có 3 điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình $y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (*) có 2 nghiệm phân biệt khác 0 $\Leftrightarrow m > 0$.

Câu 9: Chọn D

Trường hợp 1: $m = 0$ thì $y = 3x^2$. Hàm số không có điểm cực đại. Vậy $m = 0$.

Trường hợp 2: $m \neq 0$ Hàm số là hàm bậc bốn trùng phương

Ta có $y' = 4mx^3 - 2(m - 3)x = 2x(2mx^2 - m + 3)$

Để hàm số không có điểm cực đại thì $m > 0$ và $y' = 0$ có một nghiệm.

$y' = 0$ có một nghiệm $\Leftrightarrow 2mx^2 - m + 3 = 0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép $x = 0$

$\Leftrightarrow \frac{m-3}{2m} \leq 0 \Leftrightarrow 0 < m \leq 3$. Vì m nguyên nên $m = \{1; 2; 3\}$. Vậy m có 4 giá trị nguyên.

Câu 10: Chọn C

Xét $m = 0$ thì $y = 1$ đồ thị hàm số không có cực trị.

Xét $m \neq 0$

Để đồ thị hàm số có 1 cực trị $\Leftrightarrow m^2(-m^2 + 2019m) < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 2019$

Do m nguyên nên có 2018 giá trị của m .

Câu 11: Chọn A

Ta có $y' = \cos x + 2 \sin x \cdot \cos x$

$y' = 0 \Leftrightarrow \cos x(1 + 2 \sin x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{cases}$

Trên $[0; 2\pi]$, phương trình $y' = 0$ có 4 nghiệm đơn $x = \frac{\pi}{2}; x = \frac{3\pi}{2}; x = \frac{11\pi}{6}; x = \frac{7\pi}{6}$.

Suy ra trên $[0; 2\pi]$, hàm số đã cho có 4 điểm cực trị.

Câu 12: Chọn D

Ta có $y' = 3mx^2 - 4mx + m - 2$

- Nếu $m = 0$ thì $y' = -2$ nên hàm số không có cực trị.
- Nếu $m \neq 0$ thì $y' = 3mx^2 - 4mx + m - 2$ là tam thức bậc hai.

Hàm số không có cực trị $\Leftrightarrow \Delta = (2m)^2 - 3m(m-2) \leq 0 \Leftrightarrow m^2 + 6m \leq 0 \Leftrightarrow m \in [-6; 0]$.

Kết hợp các trường hợp ta có $m \in [-6; 0]$ thì hàm số không có cực trị.

Câu 13: Chọn B

Ta có $y' = x^2 + 2(m+3)x + 4(m+3)$

Đặt $t = x + 1 \Leftrightarrow x = t - 1$. Khi đó $y' = t^2 + 2(m+2)t + 2m + 7$

Hàm số đạt cực trị tại x_1, x_2 thỏa mãn $-1 < x_1 < x_2 \Leftrightarrow x^2 + 2(m+3)x + 4(m+3) = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $-1 < x_1 < x_2 \Leftrightarrow t^2 + 2(m+2)t + 2m + 7 = 0$ có hai nghiệm

phân biệt dương. Điều này tương đương với
$$\begin{cases} \Delta' = m^2 + 2m - 3 > 0 \\ S = -2(m+2) > 0 \\ P = 2m + 7 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -3 \\ m > 1 \\ m < -2 \\ m > -\frac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{7}{2} < m < -3$$

Cách 2

Ta có $y' = f(x) = x^2 + 2(m+3)x + 4(m+3)$

Hàm số đạt cực trị tại x_1, x_2 thỏa mãn $-1 < x_1 < x_2 \Leftrightarrow x^2 + 2(m+3)x + 4(m+3) = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $-1 < x_1 < x_2$. Điều này tương đương với

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ a.f(-1) > 0 \\ \frac{S}{2} > -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 2m - 3 > 0 \\ 1 - 2(m+3) + 4(m+3) > 0 \\ \frac{-2(m+3)}{2} > -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -3 \\ m > 1 \\ m > -\frac{7}{2} \\ m < -3 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{7}{2} < m < -3.$$

Câu 14: Chọn D

Ta có $y' = 3x^2 + 6mx + 3(m^2 - 1)$. Xét $3x^2 + 6mx + 3(m^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -m - 1 \\ x = -m + 1 \end{cases}$.

Hai nghiệm trên phân biệt với mọi m .

Đường thẳng qua 2 điểm cực trị của đồ thị là $y = -2x + m$.

Vậy nên các giá trị cực trị $y(-m-1) = 3m+2$, $y(-m+1) = 3m-2$.

Theo yêu cầu bài toán ta phải có $(3m+2)(3m-2) < 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{3} < m < \frac{2}{3}$. Vậy $a+2b = \frac{2}{3}$.

Câu 15: Chọn C

Ta có: $y = x^4 + 2(m-2)x^2 + 3m - 2$

$$y' = 4x^3 + 4(m-2)x = 4x(x^2 + m - 2); y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = 2 - m \end{cases} \quad (1)$$

y có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt
 $\Leftrightarrow$ phương trình có hai nghiệm phân biệt khác 0 $\Leftrightarrow 2 - m > 0 \Leftrightarrow m < 2$.

Câu 16: Chọn D

$$y' = 4x^3 - 4mx = 4x(x^2 - m); y' = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = \pm\sqrt{m} \text{ với } m > 0$$

Gọi $A(0;1), B(\sqrt{m}; -m^2 + 1), C(-\sqrt{m}; -m^2 + 1)$ là 3 điểm cực trị của hàm số; khi đó tam giác $\triangle ABC$ cân tại A, I là tâm đường tròn đi qua A, B, C nên $I \in Oy$, gọi $I(0;b)$

$$\text{Ta có: } IA = R = 1 \Leftrightarrow 1 - b = 1 \Leftrightarrow b = 0; IB = R = 1 \Leftrightarrow m + m^4 - 2m^2 + 1 = 1 \Leftrightarrow m^4 - 2m^2 + m = 0$$

$$\Leftrightarrow m(m-1)(m^2 + m - 1) = 0 \Leftrightarrow m_1 = 0; m_2 = 1; m_{3,4} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Kết hợp điều kiện $m > 0$ nên loại m_4 và m_1 . Ta có $m_2^3 + m_3^3 = -1 + \sqrt{5}$.

Câu 17: Chọn C

$$\text{Ta có: } y' = 4x^3 - 4kx = 4x(x^2 - k); y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = k \end{cases} \quad (1)$$

Đồ thị hàm số có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt và y' đổi dấu khi x đi qua 3 nghiệm đó $\Leftrightarrow PT(1)$ có hai nghiệm phân biệt khác không $\Leftrightarrow k > 0$. Khi đó ba điểm cực trị của đồ thị hàm số là

$$A(0;k), B(-\sqrt{k}; k - k^2), C(\sqrt{k}; k - k^2).$$

$$\text{Từ yêu cầu bài toán ta có: } y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{3} = \frac{k + (k - k^2) + (k - k^2)}{3}$$

$$\Leftrightarrow -2k^2 + 3k - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 \\ k = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Câu 18: Chọn D

$$y' = 4x^3 - 4(m^2 - m + 1)x = 4x(x^2 - m^2 + m - 1).$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - m^2 + m - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = m^2 - m + 1 \end{cases}$$

Hàm số có ba điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt hay phương trình $x^2 - m^2 + m - 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác không

$$\Leftrightarrow m^2 - m + 1 > 0 \Leftrightarrow \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \text{ luôn đúng } \forall m \in \mathbb{R}.$$

Khi đó phương trình $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt $x_1 = -\sqrt{m^2 - m + 1}, x_2 = \sqrt{m^2 - m + 1}, x_3 = 0$.

Bảng biến thiên.

x	$-\infty$	x_1	0	x_2	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$+$
y	$+\infty$	y_1	y_2	y_1	$+\infty$

Khi đó đồ thị hàm số có hai điểm cực tiểu là $B(-\sqrt{m^2 - m + 1}; y_1)$ và $C(\sqrt{m^2 - m + 1}; y_1)$.

Khoảng cách giữa hai điểm cực tiểu là $BC = 2\sqrt{m^2 - m + 1} = 2\sqrt{\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \geq \sqrt{3}$.

Dấu "=" xảy ra khi $m = \frac{1}{2}$.

Câu 19: Chọn A

Ta có $y' = 3x^2 - 3$; $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$

Hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A(1; m - 2)$, $B(-1; m + 2)$

Phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số là $y = -2x + m$

Theo giả thiết $d(O; AB) \leq \sqrt{5} \Leftrightarrow \frac{|-m|}{\sqrt{5}} \leq \sqrt{5} \Leftrightarrow |-m| \leq 5 \Leftrightarrow -5 \leq m \leq 5$.

Mà m nguyên dương nên có 5 giá trị.

Câu 20: Chọn B

Cách 1:

Ta có: $y' = x^2 - 2mx + m + 2$; $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + m + 2 = 0 \quad (1)$.

Để hàm số có hai điểm cực trị thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt.

$$\Delta' > 0 \Leftrightarrow m^2 - m - 2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ m > 2 \end{cases} (*)$$

Phương trình đường thẳng đi qua điểm CĐ, CT của hàm số là:

$$y = \left(-\frac{2}{3}m^2 + \frac{2}{3}m + \frac{4}{3}\right)x + \frac{1}{3}m(m + 2).$$

Gọi $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ là hai điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số, khi đó để hàm số có giá trị cực đại, và giá trị cực tiểu dương thì $y_1 + y_2 > 0$ và đồ thị hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m + 2)x$ cắt trục hoành tại 1 điểm duy nhất.

Theo định lý Vi-et ta có $x_1 + x_2 = 2m$

$$\text{Nên } y_1 + y_2 > 0 \Leftrightarrow \left(-\frac{2}{3}m^2 + \frac{2}{3}m + \frac{4}{3}\right)(x_1 + x_2) + \frac{2}{3}m(m + 2) > 0$$

$$\Leftrightarrow \left(-\frac{2}{3}m^2 + \frac{2}{3}m + \frac{4}{3}\right)(2m) + \frac{2}{3}m(m+2) > 0 \Leftrightarrow 2m(-2m^2 + 3m + 6) > 0$$

$$\Leftrightarrow m \in \left(-\infty; \frac{3-\sqrt{57}}{4}\right) \cup \left(0; \frac{3+\sqrt{57}}{4}\right) (**).$$

Để đồ thị hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+2)x$ cắt trục hoành tại 1 điểm duy nhất thì phương trình

$y = 0$ có 1 nghiệm đơn duy nhất, khi đó $\frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+2)x = 0(2)$ có 1 nghiệm đơn duy

nhất. Ta có: $\frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+2)x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 3mx + 3m+6) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 3mx + 3m+6 = 0(3) \end{cases}$

Để phương trình (1) có 1 nghiệm đơn duy nhất thì phương trình (3) vô nghiệm, khi đó điều

kiện là $\Delta = 9m^2 - 12m - 24 < 0 \Leftrightarrow \frac{2-2\sqrt{7}}{3} < m < \frac{2+2\sqrt{7}}{3} (***)$.

Kết hợp (*), (**), (***) ta được tập các giá trị của m thỏa mãn là $2 < m < \frac{2+2\sqrt{7}}{3}$.

Cách 2:

Ta có: $y' = x^2 - 2mx + m + 2$; $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + m + 2 = 0(1)$.

Để hàm số có hai điểm cực trị thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt, khi đó

$$\Delta' > 0 \Leftrightarrow m^2 - m - 2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ m > 2 \end{cases} (*)$$

Để hàm số có giá trị cực đại, cực tiểu dương thì đồ thị hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+2)x$ cắt trục hoành tại 1 điểm duy nhất và giá trị của hàm số tại điểm uốn luôn dương.

Để đồ thị hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+2)x$ cắt trục hoành tại 1 điểm duy nhất thì phương trình

$y = 0$ có nghiệm duy nhất, khi đó $\frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+2)x = 0(2)$ có 1 nghiệm đơn duy nhất.

Ta có: $\frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+2)x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 3mx + 3m+6) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 3mx + 3m+6 = 0(3) \end{cases}$$

Để phương trình (1) có nghiệm đơn duy nhất thì phương trình (3) vô nghiệm, khi đó điều kiện:

$$\Delta = 9m^2 - 12m - 24 < 0 \Leftrightarrow \frac{2-2\sqrt{7}}{3} < m < \frac{2+2\sqrt{7}}{3} (**).$$

Để giá trị của hàm số tại điểm uốn luôn dương: $y' = x^2 - 2mx + m + 2, y'' = 2x - 2m$

$$y'' = 0 \Leftrightarrow 2x - 2m = 0 \Leftrightarrow x = m. \text{ Ta có: } y(m) > 0 \Rightarrow \frac{m^3}{3} - m^3 + m(m+2) > 0$$

$$\Leftrightarrow m(-2m^2 + 3m + 6) > 0 \Leftrightarrow m \in \left(-\infty; \frac{3 - \sqrt{57}}{4}\right) \cup \left(0; \frac{3 + \sqrt{57}}{4}\right) (***)$$

Kết hợp (*), (**), (***) ta được tập các giá trị của m thỏa mãn là $2 < m < \frac{2 + 2\sqrt{7}}{3}$

Câu 21: Chọn A

Ta có $y = x^4 - 2mx^2 + 3m - 2 \Rightarrow y' = 4x^3 - 4mx$. Khi $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{m} \end{cases}$.

Với $m > 0$ thì đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị và các điểm cực trị là $A(0; 3m - 2)$, $B(\sqrt{m}; -m^2 + 3m - 2)$ và $C(-\sqrt{m}; -m^2 + 3m - 2)$.

Điểm A đã nằm trên trục tung, vậy để các điểm cực trị đều nằm trên các trục tọa độ thì hai điểm B và C phải nằm trên trục hoành, suy ra $-m^2 + 3m - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = 1 \end{cases}$.

Vậy có 2 giá trị của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 22: Chọn C

Cách 1.

Ta có $y' = 4x^3 + 4mx$. Xét phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 + 4mx = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = -m \end{cases}$.

Đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị khi và chỉ khi $m < 0$. Khi đó 3 điểm cực trị là $A(0; 1)$, $B(\sqrt{-m}; 1 - m^2)$, $C(-\sqrt{-m}; 1 - m^2)$.

Ta thấy $\triangle ABC$ cân tại A . Nên $\triangle ABC$ vuông khi và chỉ khi $\triangle ABC$ vuông cân tại A .

Do đó $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow m + m^4 = 0 \Leftrightarrow m(1 + m^3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = -1 \end{cases}$. Kết hợp $m < 0$ ta có $m = -1$.

Cách 2.

Gọi A, B, C là ba điểm cực trị của đồ thị hàm số.

$\triangle ABC$ vuông cân $\Rightarrow b^3 = -8a \Rightarrow (2m)^3 = -8 \Rightarrow m^3 = -1 \Rightarrow m = -1$.

Câu 23: Chọn B

Ta có: $y' = 4x^3 - 4(m^2 + m + 1)x = 4x[x^2 - (m^2 + m + 1)] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\sqrt{m^2 + m + 1} \\ x_2 = 0 \\ x_3 = \sqrt{m^2 + m + 1} \end{cases}$.

x	$-\infty$	x_1		x_2		x_3	$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	+
y	$+\infty$		y_{cr}		y_{CD}		y_{cr}

Khoảng cách giữa 2 điểm cực tiểu: $d = |x_3 - x_1| = 2\sqrt{m^2 + m + 1} = 2\sqrt{\left(m + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \geq \sqrt{3}$.

Dấu bằng xảy ra khi $m = -\frac{1}{2}$.

Câu 24: Chọn A

$$y' = 3x^2 - 6(m+1)x + 12m$$

;

$$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6(m+1)x + 12m = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2(m+1)x + 4m = 0 \quad (1).$$

Để hàm số có 2 cực trị $x_1, x_2 \Leftrightarrow$ Phương trình có 2 nghiệm phân biệt.

$$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow (m-1)^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq 1.$$

$$\text{Với điều kiện } m \neq 1 \text{ ta có } \begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m+1) \\ x_1 x_2 = 4m \end{cases}.$$

$$\text{Do đó } x_1 + x_2 + 2x_1 x_2 = -8 \Leftrightarrow 2m + 2 + 8m = -8 \Leftrightarrow m = -1.$$

Vậy $m = -1$ thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

Câu 25: Chọn A

$$\text{Ta có: } y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}mx^2 - 4x - 10 \Rightarrow y' = x^2 - mx - 4; y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - mx - 4 = 0.$$

$\Delta = m^2 + 16 > 0, \forall m$ nên phương trình $y' = 0$ luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

$$\text{Áp dụng định lý Viète: } \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = m \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = -4 \end{cases}.$$

$$S = (x_1^2 - 1)(x_2^2 - 1) = (x_1 x_2)^2 - [(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2] + 1 = 16 - (m^2 + 8) + 1 = 9 - m^2 \leq 9.$$

Câu 26: Chọn A

$$\text{Ta có: } y' = 3x^2 - 6mx + 3(m^2 - 1) = 3(x^2 - 2mx + m^2 - 1)$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + m^2 - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m - 1 \\ x = m + 1 \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$m-1$		$m+1$	$+\infty$	
y'		+	0	-	0	+
y	$-\infty$	$-3m+2$		$-3m-2$		$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy điểm cực đại của đồ thị (C) là điểm $M(m-1; -3m+2)$.

Nhận xét: $y_M = -3m+2 = -3(m-1) - 1 = -3x_M - 1 \Rightarrow M \in (d): y = -3x - 1, \forall m.$

Vậy: khi m thay đổi, điểm cực đại của đồ thị (C) luôn nằm trên một đường thẳng d cố định có phương trình: $y = -3x - 1$. Vậy đường thẳng d có hệ số góc $k = -3$.

Câu 27: Chọn B

$$\text{Ta có: } y = (x-1)(x^2 - 2mx + 1 - m).$$

Hàm số có hai điểm cực trị nằm về hai phía trục hoành khi và chỉ khi đồ thị y cắt trục hoành tại

ba điểm phân biệt. $\Leftrightarrow y = (x-1)(x^2 - 2mx + 1 - m) = 0$ có ba nghiệm phân biệt.

$\Leftrightarrow x^2 - 2mx + 1 - m = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + m - 1 > 0 \\ 2 - 3m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \\ m > \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \\ m \neq \frac{2}{3} \end{cases}.$$

Do $m \in \mathbb{N}, m < 20$ nên $1 \leq m < 20$. Vậy có 19 số tự nhiên thỏa mãn bài toán.

Câu 28: Chọn C

Xét $y' = 3x^2 - 6mx = 3x(x - 2m)$.

$$y' = 0 \Rightarrow 3x(x - 2m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2m \end{cases}.$$

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị $\Rightarrow m \neq 0$.

Tọa độ hai điểm cực trị là $A(0; 3m^2), B(2m; 3m^2 - 4m^3)$.

Phương trình đường thẳng $OA: x = 0$.

Ta có: $S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} OA \cdot d(B; OA) = \frac{1}{2} 3m^2 \cdot |2m| = 24 \Rightarrow m^2 |m| = 8 \Leftrightarrow m = \pm 2$.

Câu 29: Chọn C

Tập xác định của hàm số đã cho là $\mathbb{R}$.

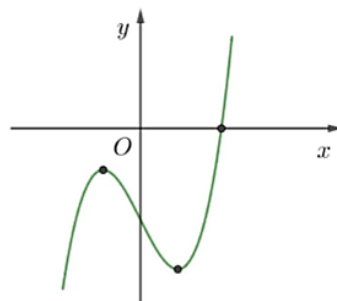
$y' = 3x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 2$ có $\Delta' = -2m^2 + 2m + 7$.

Để đồ thị hàm số $y = x^3 - (m+1)x^2 + (m^2 - 2)x - m^2 + 3$ có hai điểm cực trị thì y' đổi dấu hai lần, tức là y' có hai nghiệm phân biệt, tương đương

$$\Delta' > 0 \Leftrightarrow -2m^2 + 2m + 7 > 0 \Leftrightarrow \frac{1 - \sqrt{15}}{2} < m < \frac{1 + \sqrt{15}}{2}. \text{ Vì } m \in \mathbb{Z} \text{ nên được } m \in \{-1; 0; 1; 2\}.$$

Lúc này, hai nghiệm x_1, x_2 của y' lần lượt là hoành độ các điểm cực trị của hàm số.

Hai điểm cực trị đó nằm về cùng một phía đối với trục hoành khi và chỉ khi $f(x_1) \cdot f(x_2) > 0$, tương đương đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại đúng một điểm, tức là, phương trình $x^3 - (m+1)x^2 + (m^2 - 2)x - m^2 + 3 = 0$ có duy nhất một nghiệm thực.



Xét $m = -1$ thì phương trình là $x^3 - x + 2 = 0$: phương trình này có đúng một nghiệm thực nên chọn $m = -1$.

Xét $m = 0$ thì phương trình là $x^3 - x^2 - 2x + 3 = 0$: phương trình này có đúng một nghiệm thực nên chọn $m = 0$.

Xét $m = 1$ thì phương trình là $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$: phương trình này có ba nghiệm thực phân biệt nên không chọn $m = 1$.

Xét $m = 2$ thì phương trình là $x^3 - 3x^2 + 2x - 1 = 0$: phương trình này có đúng một nghiệm thực nên chọn $m = 2$. Đáp số: $m \in \{-1; 0; 2\}$.

Câu 30: Chọn D

Ta có $y' = x^2 - 4mx + m - 1$. Để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị thì phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' = 4m^2 - m + 1 > 0 \Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{R}$.

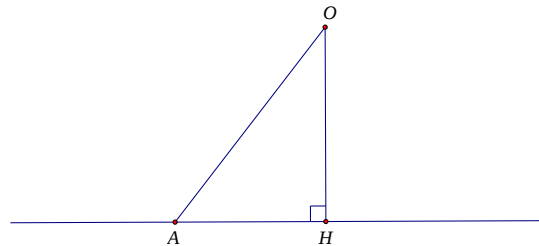
$$\text{Mà } y(x) = y'(x) \cdot \left(\frac{1}{3}x - \frac{2m}{3}\right) - \left(\frac{8}{3}m^2 - \frac{2}{3}m + \frac{2}{3}\right)x + \frac{8}{3}m^2 - \frac{2}{3}m + 1.$$

Suy ra đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là đường thẳng Δ :

$$y = -\left(\frac{8}{3}m^2 - \frac{2}{3}m + \frac{2}{3}\right)x + \frac{8}{3}m^2 - \frac{2}{3}m + 1.$$

Ta thấy đường thẳng Δ luôn qua điểm cố định $A\left(1; \frac{1}{3}\right)$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên Δ . Khi đó ta có $d(O; \Delta) = OH \leq OA$



Do đó khoảng cách lớn nhất khi $H \equiv A$ hay $\Delta \perp OA$.

Vậy khoảng cách lớn nhất là $OA = \frac{\sqrt{10}}{3}$.

Câu 31: Chọn D

Xét hàm số: $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+6)x + 2019$.

TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Ta có: $y' = x^2 - 2mx + (m+6)$.

Để đồ thị hàm số $y = \frac{1}{3}|x|^3 - mx^2 + (m+6)|x| + 2019$ có 5 điểm cực trị thì đồ thị hàm số

$y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+6)x + 2019$ có 2 điểm cực trị nằm bên phải trục tung

$\Rightarrow$ phương trình $y' = x^2 - 2mx + (m+6) = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m - 6 > 0 \\ 2m > 0 \\ m + 6 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 3.$$

Câu 32: Chọn A

Xét hàm số $f(x) = \sin 2x + x$ có $f'(x) = 2\cos 2x + 1$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\forall x \in (-\pi; \pi) \Rightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{\pi}{3} \\ x = \pm \frac{2\pi}{3} \end{cases}.$$

$$f\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{2\pi}{3} < 0; f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{3} < 0.$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3} > 0; f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2\pi}{3} > 0.$$

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\pi$	$-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	π
$f'(x)$		+	0	-	0	+	+
$f(x)$							

Từ bảng biến thiên ta thấy: trên $(-\pi; \pi)$ đồ thị hàm số $f(x) = \sin 2x + x$ có 4 điểm cực trị và cắt trục hoành tại duy nhất một điểm có hoành độ $x = 0$. Do đó hàm số $y = |\sin 2x + x|$ có 5 điểm cực trị trên $(-\pi; \pi)$.

Câu 33: Chọn C

Tính được: $y' = 3x^2 + 4(m-2)x - 5$.

Khi đó $\Delta' = 4(m-2)^2 + 15 > 0$ nên hàm số luôn có hai điểm cực trị x_1, x_2 ($x_1 < x_2$).

Nhận xét $a.c < 0$ nên $x_1 < 0 < x_2$

Suy ra: $|x_1| - |x_2| = -2 \Leftrightarrow -x_1 - x_2 = -2 \Leftrightarrow \frac{b}{a} = -2 \Leftrightarrow \frac{4(m-2)}{3} = -2 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$.

Câu 34: Chọn B

Nhận xét: Số cực trị của hàm số $y = |f(1-2019x)|$ bằng tổng số nghiệm của phương trình $f(1-2019x) = 0$ và số cực trị của hàm số $y = f(1-2019x)$.

Ta có $f'(x) = x^2(x-1)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$.

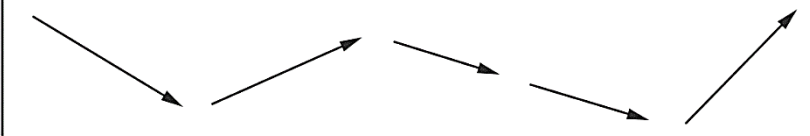
$[f(1-2019x)]' = -2019f'(1-2019x)$.

Do đó

$[f(1-2019x)]' = 0 \Leftrightarrow (1-2019x)^2(1-2019x-1)(1-2019x-\sqrt{3})(1-2019x+\sqrt{3}) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2019} \\ x = 0 \\ x = \frac{1-\sqrt{3}}{2019} \\ x = \frac{1+\sqrt{3}}{2019} \end{cases}$$

Bảng biến thiên của $y = f(1-2019x)$

x	$-\infty$	$\frac{1-\sqrt{3}}{2019}$	0	$\frac{1}{2019}$	$\frac{1+\sqrt{3}}{2019}$	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	$+$
y						

Do đó phương trình $f(1-2019x) = 0$ có tối đa 4 nghiệm và hàm số $y = f(1-2019x)$ có ba điểm cực trị.

Vậy hàm số $y = |f(1-2019x)|$ có tối đa 7 điểm cực trị.

Câu 35: Chọn D

$$y' = -3x^2 + 6mx; y' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2m.$$

Hàm số có CĐ, CT khi và chỉ khi PT $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m \neq 0$.

Khi đó 2 điểm cực trị là: $A(0; -3m-1); B(2m; 4m^3-3m-1) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (2m; 4m^3)$.

Trung điểm I của AB có tọa độ: $I(m; 2m^3-3m-1)$.

Đường thẳng $d: x+8y-74=0$ có một VTCP $\vec{u} = (8; -1)$.

$$\text{và } B \text{ đối xứng với } A \text{ qua } d \Leftrightarrow \begin{cases} I \in d \\ AB \perp d \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m+8(2m^3-3m-1)-74=0 \\ \overrightarrow{AB} \cdot \vec{u} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16m^3-23m-82=0 \\ 16m-4m^3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16m^3-23m-82=0 \\ m=0 \\ m=\pm 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m = 2. \text{ Suy ra } m \in (1; 3].$$

Câu 36: Chọn B

$$y = f(x-2018) - 2019x + 1 \Rightarrow y' = f'(x-2018) - 2019.$$

$$\text{Do đó } y' = 0 \Leftrightarrow f'(x-2018) = 2019.$$

Số nghiệm của phương trình bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f'(x)$ với đường thẳng $y = 2019$.

Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ta thấy chỉ có 1 nghiệm đơn. Vậy hàm số $y = f(x-2018) - 2019x + 1$ chỉ có 1 điểm cực trị.

Câu 37: Chọn C

Xét hàm số $y = x^3 - 6mx + 4$ có tập xác định $\mathbb{R}$. $y' = 3x^2 - 6m; y' = 0 \Leftrightarrow x^2 = 2m$.

Đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị $\Leftrightarrow y'$ đổi dấu 2 lần

$\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m > 0$. Ta có $y = \frac{1}{3}y'.x - 4mx + 4$.

Gọi $M(x_1; y_1), N(x_2; y_2)$ là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số.

$$\text{Ta có } \begin{cases} y'(x_1) = y'(x_2) = 0 \\ y_1 = y(x_1) = \frac{1}{3}y'(x_1).x_1 - 4mx_1 + 4 \\ y_2 = y(x_2) = \frac{1}{3}y'(x_2).x_2 - 4mx_2 + 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = -4mx_1 + 4 \\ y_2 = -4mx_2 + 4 \end{cases}.$$

Suy ra M, N thuộc đường thẳng d có phương trình $y = -4mx + 4$.

Vậy phương trình đường thẳng qua hai điểm cực trị của (C_m) là: $y = -4mx + 4$.

Gọi (T) là đường tròn có tâm $I(1;0)$ và bán kính $R = \sqrt{2}$.

Đường thẳng d cắt đường tròn tại hai điểm phân biệt A, B và tạo thành tam giác IAB

$$\Leftrightarrow 0 < d(I, d) < R \Leftrightarrow 0 < d(I, d) < \sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ \frac{|-4m+4|}{\sqrt{16m^2+1}} < \sqrt{2} \end{cases}.$$

Cách 1:

Do đường thẳng d luôn đi qua điểm $K(0;4)$, $IK = \sqrt{17} > R \Rightarrow K$ nằm ngoài đường tròn nên tồn tại hai điểm A, B là giao điểm của d với đường tròn để tam giác IAB vuông tại I .

$$\text{Do đó: } S_{IAB} = \frac{1}{2}IA \cdot IB \cdot \sin AIB \leq \frac{1}{2}IA \cdot IB.$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra } \Leftrightarrow IA \perp IB \Leftrightarrow d(I, d) = \frac{R}{\sqrt{2}} = 1.$$

$$\Leftrightarrow \frac{|-4m+4|}{\sqrt{16m^2+1}} = 1 \Leftrightarrow m = \frac{15}{32}.$$

Bình luận: Nếu đường thẳng d luôn đi qua điểm K cố định mà $IK < \frac{R}{\sqrt{2}}$ thì sẽ không có vị trí của đường thẳng d để tam giác IAB vuông tại I . Khi đó, nếu làm như trên sẽ bị sai. Trong

trường hợp đó thì ta phải đặt $d(I, d) = t$ ($0 < t \leq l$), với l là độ dài đoạn thẳng IK , rồi tính $S_{\Delta IAB} = f(t)$ và tìm giá trị lớn nhất của $f(t)$ trên nửa khoảng $(0; l]$.

Cách 2: Phương trình đường tròn là: $(x-1)^2 + y^2 = 2$ (C)

$$\text{Xét hệ } \begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = 2 \\ y = -4mx + 4 \end{cases} \Rightarrow (16m^2 + 1)x^2 - 2(16m+1)x + 15 = 0 \quad (1).$$

d cắt (C) tại hai điểm phân biệt $A, B \Leftrightarrow (1)$ có 2 nghiệm phân biệt a, b
 $\Leftrightarrow (16m+1)^2 - 15(16m+1) > 0$.

$$\text{Khi đó } A(a; -4ma+4), B(b; -4mb+4) \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{IA} = (a-1; -4ma+4) \\ \overrightarrow{IB} = (b-1; -4mb+4) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} = ab - (a+b) + 16[m^2ab - m(a+b) + 1] + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow ab - (a+b) + 16m^2ab - 16m(a+b) + 17 = 0 \quad \Leftrightarrow (16m^2 + 1)ab - (16m+1)(a+b) + 17 = 0$$

$$\Leftrightarrow 15 - \frac{2(16m+1)^2}{16m^2+1} + 17 = 0 \Leftrightarrow \frac{(16m+1)^2}{16m^2+1} = 16 \Leftrightarrow m = \frac{15}{32}.$$

Câu 38: Chọn A

Ta có $f'(x) = 3x^2 + 2ax + 2$. Hàm số $y = f(x)$ có cực trị khi: $a^2 - 6 > 0 \Leftrightarrow a < -\sqrt{6} \vee a > \sqrt{6}$ (1)

$g'(x) = -3x^2 + 2bx - 3$. Hàm số $y = g(x)$ có cực trị khi $b^2 - 9 > 0 \Leftrightarrow b < -3 \vee b > 3$ (2).

Giả sử x_0 là điểm cực trị của cả hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x_0^2 + 2ax_0 + 2 = 0 \\ -3x_0^2 + 2bx_0 - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b = \frac{1}{2x_0} \\ b = \frac{3}{2}\left(x_0 + \frac{1}{x_0}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{x_0} - \frac{3}{2}x_0 \\ b = \frac{3}{2}\left(x_0 + \frac{1}{x_0}\right) \end{cases}$$

$$P = |a| + |b| = \left| \frac{1}{x_0} + \frac{3}{2}x_0 \right| + \left| \frac{3}{2}\left(x_0 + \frac{1}{x_0}\right) \right| \geq \left| \frac{5}{2x_0} + 3x_0 \right|$$

$$\Rightarrow P^2 = \frac{25}{4x_0^2} + 9x_0^2 + 15 \geq 2\sqrt{\frac{25}{4x_0^2} \cdot 9x_0^2} + 15 = 30 \Rightarrow P \geq \sqrt{30}$$

Dấu “=” xảy ra khi:

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{x_0} + \frac{3}{2}x_0 \right) \left(x_0 + \frac{1}{x_0} \right) > 0 \\ \frac{25}{4x_0^2} = 9x_0^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{1}{x_0} + \frac{3}{2}x_0 \right) \left(x_0 + \frac{1}{x_0} \right) > 0 \\ x_0 = \pm \sqrt{\frac{5}{6}} \end{cases} \Rightarrow x_0 = \pm \sqrt{\frac{5}{6}}.$$

Với hai giá trị x_0 , ta tìm được hai cặp giá trị a, b thỏa và. Vậy $\min P = \sqrt{30}$.

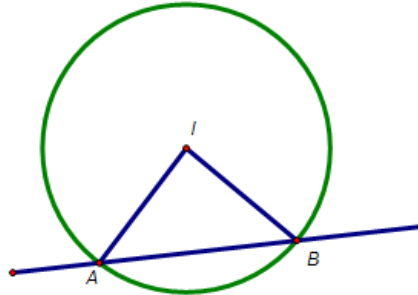
Câu 39: Chọn B

Ta có $y = x^3 - 3mx + 2 \Rightarrow y' = 3x^2 - 3m$. Hàm số $y = x^3 - 3mx + 2$ có 2 điểm cực trị

$\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 3x^2 - 3m = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m > 0$ (1)

Ta có $y = \frac{1}{3}x.y' - 2mx + 2$.

Suy ra phương trình đường thẳng Δ đi qua hai điểm cực đại và cực tiểu là $y = -2mx + 2 \Leftrightarrow 2mx + y - 2 = 0$



Đường thẳng Δ cắt đường tròn tâm $I(1;1)$, bán kính $R = 1$ tại hai điểm phân biệt A, B

$$\Leftrightarrow d(I; \Delta) < R \Leftrightarrow \frac{|2m-1|}{\sqrt{4m^2+1}} < 1 \Leftrightarrow |2m-1| < \sqrt{4m^2+1} \Leftrightarrow -4m < 0 \text{ luôn đúng do } m > 0$$

$$\text{Ta có } S_{IAB} = \frac{1}{2}.IA.IB.\sin AIB = \frac{1}{2}.\sin AIB \leq \frac{1}{2}$$

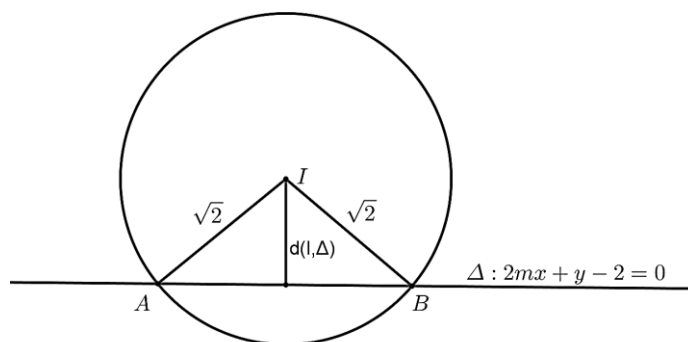
Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \sin AIB = 1 \Leftrightarrow AIB = 90^\circ$.

Khi đó tam giác IAB vuông cân tại I có $IA = 1$ nên

$$d(I; \Delta) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{|2m-1|}{\sqrt{4m^2+1}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow 4m^2 - 8m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{2} \text{ thỏa mãn đk (1)}$$

Vậy diện tích tam giác IAB đạt giá trị lớn nhất khi $m = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{2}$.

Câu 40: Chọn A



Ta có $y' = 3x^2 - 3m = 3(x^2 - m)$, $y' = 0 \Rightarrow x^2 = m$.

Suy ra hàm số có hai điểm cực trị khi và chỉ khi $m > 0$.

Ta có $y = y' \cdot \left(\frac{1}{3}x\right) - 2mx + 2$ nên đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là

$$\Delta: y = -2mx + 2 \text{ hay } \Delta: 2mx + y - 2 = 0.$$

Đường tròn (C) có tâm $I(1;0)$, bán kính $R = \sqrt{2}$.

Đường thẳng d cắt đường tròn (C) tại hai điểm phân biệt A, B khi

$$d(I, \Delta) = \frac{|2m-2|}{\sqrt{4m^2+1}} < \sqrt{2} \Leftrightarrow 4m^2 - 8m + 4 < 8m^2 + 2 \Leftrightarrow 4m^2 + 8m - 2 > 0.$$

Khi đó, diện tích tam giác IAB là $S_{\Delta IAB} = \frac{1}{2} IA \cdot IB \cdot \sin AIB$.

$$\text{Mà } \frac{1}{2} IA \cdot IB \cdot \sin AIB \leq \frac{1}{2} IA \cdot IB = \frac{1}{2} R^2 = 1.$$

Như thế diện tích tam giác IAB đạt giá trị lớn nhất khi $\sin AIB = 1 \Leftrightarrow AIB = 90^\circ$.

$$\text{Từ đó } d(I, \Delta) = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} \cdot R\sqrt{2} = 1 \Leftrightarrow \frac{|2m-2|}{\sqrt{4m^2+1}} = 1 \Leftrightarrow 4m^2 - 8m + 4 = 4m^2 + 1 \Leftrightarrow m = \frac{3}{8}.$$

Vậy giá trị m cần tìm là $m = \frac{3}{8}$.

Câu 41: Chọn A

Trường hợp 1: Với $m = 1 \Rightarrow y = 2x + 4$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên không có cực trị.

Trường hợp 2: Với $m \neq 1$ (*), khi đó ta có: $y' = (m-1)x^2 - 2(m-1)x + 2m$.

Hàm số không có cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép

$$\Leftrightarrow \Delta' = (m-1)^2 - 2m(m-1) \leq 0 \Leftrightarrow -m^2 + 1 \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 1 \\ m \leq -1 \end{cases}.$$

Kết hợp với điều kiện (*) ta có $\begin{cases} m > 1 \\ m \leq -1 \end{cases}$.

$$\text{Vậy } \begin{cases} m \geq 1 \\ m \leq -1 \\ m \in \mathbb{N}^*, m < 2019 \end{cases} \Rightarrow m \in \{1; 2; 3; \dots; 2018\} \Rightarrow \text{có 2018 giá trị của tham số thực } m.$$

Câu 42: Chọn D

Tập xác định $D = \mathbb{R}$. $y' = 3x^2 - 6x + m$.

Để hàm số có hai điểm cực trị thì phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' = 9 - 3m > 0 \Leftrightarrow m < 3. \text{ Hệ thức Vi-ét: } \begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 x_2 = \frac{m}{3} \end{cases}.$$

$$\text{Ta có } x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2 = 13 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 3x_1 x_2 = 13.$$

$$\text{Thay hệ thức Vi-ét vào, ta được } 4 - m = 13 \Leftrightarrow m = -9.$$

Câu 43: Chọn C

$$y' = 3x^2 + 2(1-2m)x + (2-m).$$

YCBT $\Leftrightarrow$ Phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 < x_2 < 1$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 4m^2 - m - 5 > 0 \\ (x_1 - 1)(x_2 - 1) > 0 \\ x_1 + x_2 < 2 \end{cases} \quad (1) \quad \text{Hệ thức Vi-ét: } \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-2(1-2m)}{3} \\ x_1 x_2 = \frac{2-m}{3} \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1; m > \frac{5}{4} \\ \frac{2-m}{3} - \frac{-2(1-2m)}{3} + 1 > 0 \\ \frac{-2(1-2m)}{3} - 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1; m > \frac{5}{4} \\ m < \frac{7}{5} \\ m < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ \frac{5}{4} < m < \frac{7}{5} \end{cases}$$

Câu 44: Chọn D

Ta có: $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3m = 0 \Leftrightarrow x^2 = m \quad (*)$

Đề đề thi (C) có 2 điểm cực trị thì (*) phải có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m > 0$.

Khi đó: $y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{m}$.

Đặt: $A(\sqrt{m}; -2m\sqrt{m} + m - 1)$ và $B(-\sqrt{m}; 2m\sqrt{m} + m - 1)$.

Và $\overline{CA} = (\sqrt{m}; -2m\sqrt{m} + m)$; $\overline{CB} = (-\sqrt{m}; 2m\sqrt{m} + m)$.

Ta lại có: $S_{ABC} = \frac{1}{2} \left| \sqrt{m} \cdot (2m\sqrt{m} + m) - (-\sqrt{m}) \cdot (-2m\sqrt{m} + m) \right| = m\sqrt{m}$.

Theo đề: $S_{ABC} < 10 \Leftrightarrow m\sqrt{m} < 10 \Leftrightarrow m^3 < 100 \Leftrightarrow m < \sqrt[3]{100}$

Kết hợp với điều kiện $m > 0$ ta được $0 < m < \sqrt[3]{100}$. Suy ra $m \in \{1; 2; 3; 4\}$.

Vậy: có 4 giá trị nguyên của tham số m thỏa yêu cầu.

Câu 45: Chọn B

$$y' = 6x^2 - 6(2m+1)x + 6m(m+1); y' = 0 \Leftrightarrow 6(x-m)(x-m-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ x = m+1 \end{cases}$$

Đồ thị hàm số luôn có hai điểm cực trị với $\forall m$.

Với $x = m \Rightarrow y = 2m^3 + 3m^2 + 1 \Rightarrow A(m; 2m^3 + 3m^2 + 1)$.

Với $x = m+1 \Rightarrow y = 2m^3 + 3m^2 \Rightarrow B(m+1; 2m^3 + 3m^2)$.

Có $\overline{AB} = (1; -1) \Rightarrow AB = \sqrt{2}$.

Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm A và B là: $x + y - 2m^3 - 3m^2 - m - 1 = 0$.

Diện tích tam giác MAB nhỏ nhất khi và chỉ khi $d(M, AB)$ nhỏ nhất.

$$d(M, AB) = \frac{|2m^3 + m - 2m^3 - 3m^2 - m - 1|}{\sqrt{2}} = \frac{|-3m^2 - 1|}{\sqrt{2}} = \frac{3m^2 + 1}{\sqrt{2}} \Rightarrow d(M, AB) \geq \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Dấu = xảy ra $m = 0$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $S_{MAB} = \frac{1}{2} d(M, AB) \cdot AB = \frac{1}{2}$, đạt khi $m = 0$.

Câu 46: Chọn B

Ta có $y' = 3x^2 + 4x + m - 3$.

(C_m) có hai điểm cực trị khi: phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$$\text{Hay: } \Delta' > 0 \Leftrightarrow 4 - 3(m - 3) > 0 \Leftrightarrow m < \frac{13}{3}.$$

$$\text{Ta có: } y = y' \cdot \left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{9}\right) + \left(\frac{2m}{3} - \frac{26}{9}\right)x + \frac{7m}{9} + \frac{2}{3}.$$

Nên phương trình đường thẳng d đi qua hai điểm cực trị của (C_m) là:

$$y = \left(\frac{2m}{3} - \frac{26}{9}\right)x + \frac{7m}{9} + \frac{2}{3}.$$

Đường thẳng d đi qua $M(9; -5)$ nên:

$$\left(\frac{2m}{3} - \frac{26}{9}\right) \cdot 9 + \frac{7m}{9} + \frac{2}{3} = -5 \Leftrightarrow m = 3.$$

Câu 47: Chọn D

$$\text{Ta có } y' = 3x^2 - 6x$$

$$\text{Ta có: } y = \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}\right)y' - 2x - 1.$$

Gọi Δ là đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho $\Rightarrow \Delta: y = -2x - 1$

$$d \text{ vuông góc với } \Delta \text{ nên: } (3m + 1) \cdot (-2) = -1 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{6}.$$

Câu 48: Chọn D

Trường hợp 1: Nếu $m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -1$ thì hàm số đã cho trở thành: $y = 2x^2 + 1$, hàm số này có một điểm cực trị, do đó ta loại trường hợp này.

Trường hợp 2: Nếu $m + 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1$

$$\text{Ta có } y' = 4(m + 1)x^3 - 4x = 4x[(m + 1)x^2 - 1].$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ (m + 1)x^2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = \frac{1}{m + 1} \end{cases} \quad (1).$$

Hàm số đã cho có ba điểm cực trị đều nhỏ hơn 1 khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt

$$\text{khác } 0 \text{ và nhỏ hơn } 1, \text{ hay: } 0 < \frac{1}{m + 1} < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{m + 1} > 0 \\ \frac{1}{m + 1} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{m + 1} > 0 \\ \frac{-m}{m + 1} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ m < -1 \Leftrightarrow m > 0 \\ m > 0 \end{cases}.$$

Câu 49: Chọn D

Trường hợp 1: Nếu $m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = 2$ thì hàm số đã cho trở thành $y = x^2 - 3$, có 1 điểm cực trị.

Trường hợp 2: Nếu $m - 2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 2$.

$$\text{Ta có } y' = 4(m - 2)x^3 + 2(m - 1)x = 2x[2(m - 2)x^2 + m - 1]$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2(m - 2)x^2 + m - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = \frac{1 - m}{2(m - 2)} \end{cases} \quad (1)$$

Chủ đề 02: Cực trị của hàm số

Hàm số đã cho có đúng 1 điểm cực trị khi phương trình $y' = 0$ có nghiệm duy nhất hay phương

trình (1) vô nghiệm hoặc có nghiệm kép $x = 0$, hay: $\frac{1-m}{2(m-2)} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m \leq 1 \end{cases}$.

Kết hợp với trường hợp 1 ta được: $m \in (-\infty; 1] \cup [2; +\infty)$.

Cần nhớ:

Hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đúng một cực trị khi và chỉ khi $\begin{cases} ab \geq 0 \\ a^2 + b^2 > 0 \end{cases}$. (1)

Hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có ba cực trị khi và chỉ khi $ab < 0$. (2)

Câu 50: Chọn D

Hàm số đã cho có ba cực trị $\Leftrightarrow ab < 0 \Leftrightarrow -2(m+1) < 0 \Leftrightarrow m > -1$.

$$y' = 4x^3 - 4(m+1)x = 4x(x^2 - m - 1).$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = m + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \in (-1; 1) \\ x = \pm\sqrt{m+1} \end{cases}.$$

Hoành độ các điểm cực đại và cực tiểu đều thuộc khoảng $(-1; 1)$ khi và chỉ khi $\pm\sqrt{m+1} \in (-1; 1)$

$$\Leftrightarrow \sqrt{m+1} < 1 \Leftrightarrow -1 < m < 0.$$

Kết hợp điều kiện hàm số có 3 cực trị ta được tập hợp các giá trị của m là $(-1; 0)$.

Câu 51: Chọn D

Hàm số đã cho có ba cực trị $\Leftrightarrow ab < 0 \Leftrightarrow -2(m^2 - m + 1) < 0 \Leftrightarrow m^2 - m + 1 > 0, \forall m \in \mathbb{R}..$

$$\text{Ta có } y' = 4x^3 - 4(m^2 - m + 1)x = 4x(x^2 - m^2 + m - 1).$$

$$\text{Phương trình } y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = m^2 - m + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{m^2 - m + 1} \end{cases}.$$

Nhận thấy $x = 0$ là điểm cực đại của hàm số nên suy ra $x_{1,2} = \pm\sqrt{m^2 - m + 1}$.

$$\text{Do đó } |x_1 - x_2| \leq 2 \Leftrightarrow 2\sqrt{m^2 - m + 1} \leq 2 \Leftrightarrow \sqrt{m^2 - m + 1} \leq 1 \Leftrightarrow m^2 - m \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 1.$$

Vậy tập hợp các giá trị của m cần tìm là $[0; 1]$.

Câu 52: Chọn B

$$\text{Ta có } y' = 4x^3 - 4m^2x = 4x(x^2 - m^2) = 0. \text{ Phương trình } y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm m \end{cases}.$$

Vậy với điều kiện $m \neq 0$ hàm số có 3 điểm cực trị là $A(0; 2m)$, $B(-m; -m^4 + 2m)$, $C(m; -m^4 + 2m)$.

$$\text{Ta có } \overrightarrow{OB} = (-m; -m^4 + 2m); \overrightarrow{CA} = (-m; m^4).$$

Vì tứ giác $ABOC$ có hai đường chéo AO và BC vuông góc và $AB = AC$ nên nó là hình bình

$$\text{hành khi và chỉ khi: } \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{CA} \Leftrightarrow -m^4 + 2m = m^4 \Leftrightarrow 2m(m^3 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 1 \end{cases}.$$

Câu 53: Chọn D

$$\text{Ta có } y' = 4x(x^2 - m) \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = m \end{cases}.$$

Với điều kiện $m > 0$ đồ thị hàm số có ba điểm cực trị là $A(0; m^4 - 2m^2)$; $B(-\sqrt{m}; m^4 - 3m^2)$; $C(\sqrt{m}; m^4 - 3m^2)$. Để $ABDC$ là hình thoi điều kiện là $BC \perp AD$ và trung điểm I của BC trùng với trung điểm J của AD . Do tính đối xứng ta luôn có $BC \perp AD$ nên chỉ cần $I \equiv J$ với $I(0; m^4 - 3m^2)$, $J\left(0; \frac{m^4 - 2m^2 - 3}{2}\right)$.

$$\text{Điều kiện: } m^4 - 2m^2 - 3 = 2m^4 - 6m^2 \Leftrightarrow m^4 - 4m^2 + 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow m \in \left(\frac{1}{2}; \frac{9}{5}\right).$$

Câu 54: Chọn A

$$y' = \frac{(2x + m)(x - 1) - x^2 - mx - m^2}{(x - 1)^2} = \frac{x^2 - 2x - (m + m^2)}{(x - 1)^2}.$$

Để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị A, B thì $y' = 0$ phải có hai nghiệm phân biệt khác 1
 $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 1 + m + m^2 > 0 \\ -1 - m - m^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{R}.$

Phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cực đại, cực tiểu là $y = \frac{(x^2 + mx + m^2)'}{(x - 1)'} = 2x + m.$

Gọi $x_A; x_B$ là hoành độ của A, B khi đó $x_A; x_B$ là nghiệm của phương trình $x^2 - 2x - (m + m^2) = 0.$

Theo định lý Viet ta có $x_A + x_B = 2$; $x_A \cdot x_B = -m^2 - m.$

$$y_A = 2x_A + m; y_B = 2x_B + m.$$

$$AOB = 90^\circ \Rightarrow x_A \cdot x_B + y_A \cdot y_B = 0 \Leftrightarrow x_A x_B + 4x_A x_B + 2m(x_A + x_B) + m^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 5(-m^2 - m) + 4m + m^2 = 0 \Leftrightarrow -4m^2 - m = 0 \Leftrightarrow m = 0; m = -\frac{1}{4}.$$

Tổng bình phương tất cả các phân tử của S bằng: $0^2 + \left(-\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}.$

Câu 55: Chọn D

Tập xác định của hàm số $y = f(x)$ là $\mathbb{R}$ và cũng là tập xác định của hàm số $y = |f(x)|.$

Ta có, hàm số $y = f(x)$ là hàm số bậc 4 nên nó có tối đa 3 điểm cực trị là x_1, x_2, x_3 và đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục hoành tại tối đa 4 điểm phân biệt có hoành độ là $x_4, x_5, x_6, x_7.$

Do đó, hàm số $y = |f(x)|$ có nhiều nhất là 7 điểm cực trị, chính là các điểm $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7.$

Vậy để hàm số $y = |f(x)|$ có nhiều điểm cực trị nhất thì đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt hay $f(x) = 0$ có 4 nghiệm phân biệt.

Ta có

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^4 - (2m+1)x^3 + (m+4)x^2 + (5m-6)x + 2m - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x-2)(x^2 - 2mx + 6 - m) = 0$$

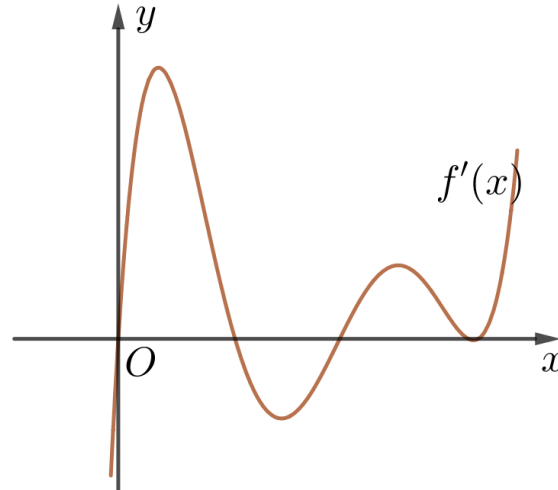
Suy ra $f(x) = 0$ có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $g(x) = x^2 - 2mx + 6 - m$ có hai nghiệm

$$\text{phân biệt khác } -1 \text{ và khác } 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 + m - 6 > 0 \\ g(-1) \neq 0 \\ g(2) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -3 \\ m > 2 \\ m \neq -7 \end{cases}.$$

Từ đó ta được $m \in \{-10; -9; -8; -6; -5; -4; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$. Có 14 số nguyên thỏa mãn.

DẠNG 8**Tìm cực trị của $f(u)$ khi biết $f(x)$ hoặc $f'(x)$**

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $y = f(x)$ có mấy điểm cực trị?



A. 3.

B. 2.

C. 4.

D. 1.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ. Hàm số $y = f(1-2x)$ đạt cực tiểu tại

x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow 1$	$\searrow -2$	$\nearrow 1$	$\searrow$

A. $x = -\frac{1}{2}$.B. $x = \frac{1}{2}$.C. $x = 1$.D. $x = 0$.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$	-2	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Hỏi hàm số $g(x) = f(x^2 - 2x)$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

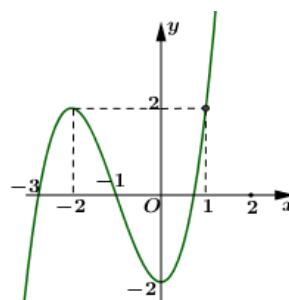
A. 4.

B. 1.

C. 3.

D. 2.

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới



Hỏi hàm số $y = e^{f(x)}$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 0

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Hỏi hàm số $y = f(x^2 - 2x)$ có bao nhiêu điểm cực tiểu

A. 1.

B. 4.

C. 3.

D. 2.

Câu 6: Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-1	0	2	4	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

Hàm số $f(x)$ có bao nhiêu điểm cực đại?

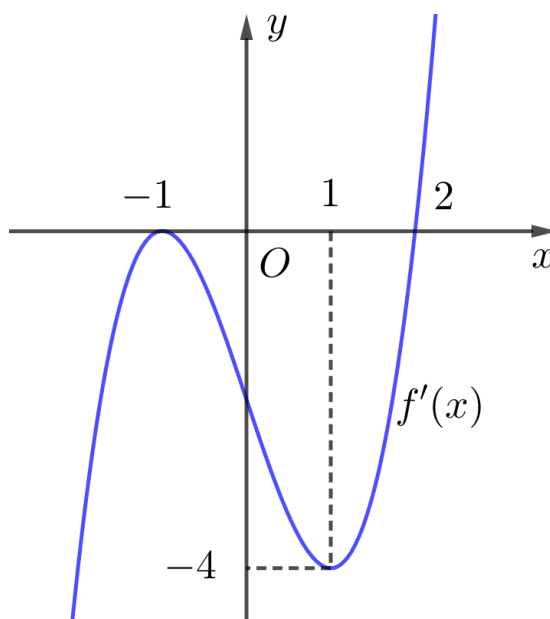
A. 4.

B. 2.

C. 3.

D. 1.

Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Tìm số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x^2 - 2x)$ trên khoảng $(0; +\infty)$.



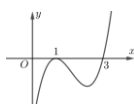
A. 3.

B. 2.

C. 4.

D. 1.

Câu 8: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ



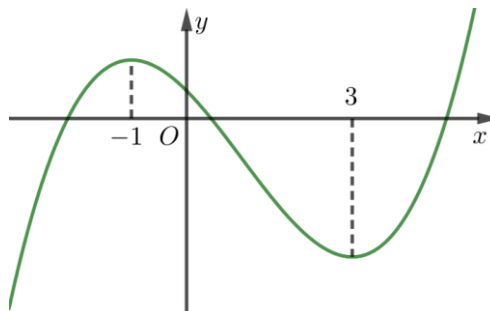
Khẳng định nào sau đây là khẳng định **đúng**?

- A. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại $x = 1$.
- B. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có một điểm cực đại.
- C. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = 3$.
- D. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị.

Câu 9: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+2)^4(x-3)^5(x+1)^3$. Số điểm cực trị của hàm số $f(|x|)$ là

- A. 1.
- B. 5.
- C. 3.
- D. 2.

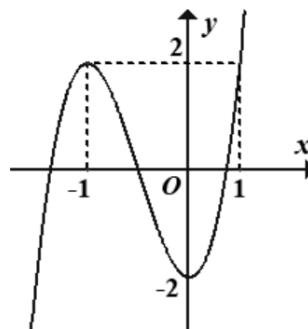
Câu 10: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ:



Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = f((x-1)^2 + m)$ có 3 điểm cực trị. Tổng các phần tử của S là:

- A. 2.
- B. 4.
- C. 8.
- D. 10.

Câu 11: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Hỏi hàm số $y = e^{f(x)}$ có bao nhiêu điểm cực trị?



- A. 1.
- B. 2.
- C. 3.
- D. 0.

Câu 12: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x+2)(x-3)$. Điểm cực đại của hàm số $g(x) = f(x^2 - 2x)$ là

- A. $x = 0$.
- B. $x = -1$.
- C. $x = 3$.
- D. $x = 1$.

Câu 13: Cho hàm số $f(x)$. Bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau:

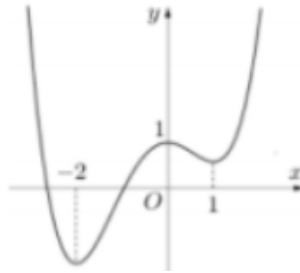
Chủ đề 01: Cơ bản về tính đơn điệu của hàm số

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y	$+\infty$	-3	2	-1	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x^2 - 2x)$ là :

- A. 7. B. 9. C. 3. D. 5.

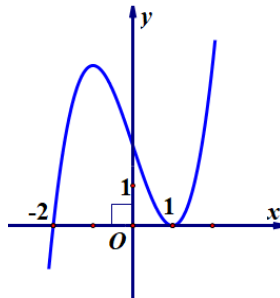
Câu 14: Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Số cực trị của hàm số $y = f(|x+1| - 3)$ là

- A. 3. B. 8. C. 7. D. 4.

Câu 15: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x^2 - 3)$ là

- A. 5. B. 4. C. 2. D. 3.

Câu 16: Cho hàm số bậc 4 có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$			3			$+\infty$	
		-1			-1			

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = x^4 [f(x-1)]^2$ là

- A. 7. B. 5. C. 9. D. 11.

Câu 17: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
f'		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$						$+\infty$

$\nearrow 4 \searrow -3 \nearrow$

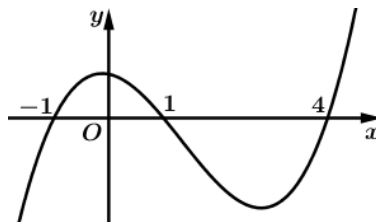
Điểm cực tiểu của hàm số $y = f(3x)$ là

- A. $y = -3$ B. $x = \frac{2}{3}$ C. $x = 2$ D. $x = -\frac{2}{3}$

Câu 18: Cho hàm số $y = f(x)$, có đạo hàm $f'(x) = (x+1)^2(x-3)$. Tìm số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(\sqrt{x^2 + 2x + 6})$

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 5.

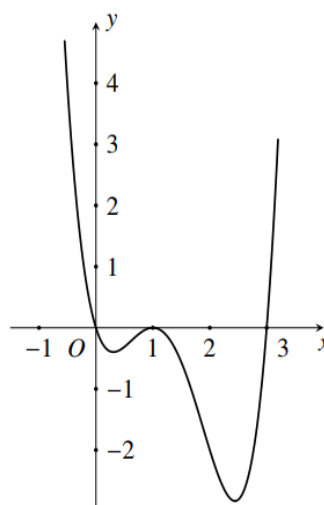
Câu 19: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình dưới đây:



Hàm số $y = f(x^2 + x)$ có bao nhiêu điểm cực đại?

- A. 1. B. 0. C. 3. D. 2.

Câu 20: Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm $y = f'(x)$ hình vẽ sau



Hỏi hàm số $y = f(x^2 - 2x)$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

- A. 1. B. 3. C. 2. D. 0.

Câu 21: Cho hàm số $f(x)$, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau:

Chủ đề 01: Cơ bản về tính đơn điệu của hàm số

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$		2	-1	$+\infty$
		-3			

Số điểm cực trị của hàm số $y = f(3x^2 - 6x + 2)$ là:

- A. 3. B. 5. C. 7. D. 9.

Câu 22: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = 4x^3 + 2x$ và $f(0) = 1$. Số điểm cực tiểu của hàm số $g(x) = f^3(x)$ là

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 23: Cho hàm số $f(x)$ bậc 4 có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$				
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$		-2		3		-2		$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = x^4 [f(x+1)]^2$ là

- A. 11. B. 9. C. 7. D. 5.

Câu 24: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)^2(x-2)$. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(\sqrt{x^2 + 2x + 5})$ là

- A. 3. B. 0. C. 1. D. 2.

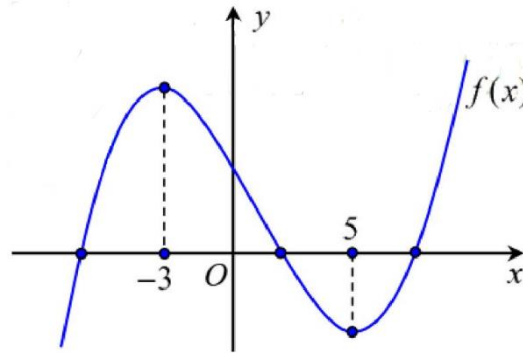
Câu 25: Cho hàm số trùng phương $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$				
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$		-1		1		-1		$+\infty$

Hỏi hàm số $y = g(x) = [f(x^2) - 1]^4$ có bao nhiêu cực trị?

- A. 3. B. 4. C. 5. D. 6.

Câu 26: Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ. Hỏi hàm số $y = f(2x^3 - 6x)$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?



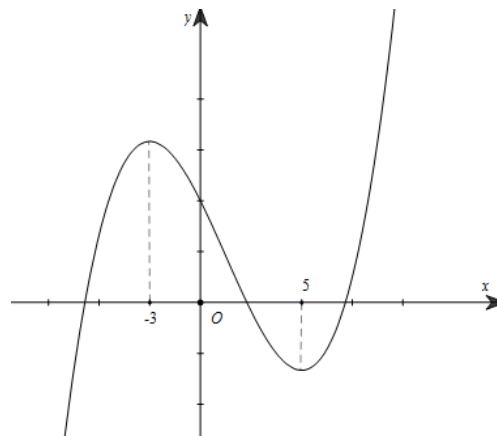
A. 5.

B. 7.

C. 6.

D. 8.

Câu 27: Cho đồ thị hàm số bậc ba $y = f(x)$ như hình vẽ. Hỏi hàm số $y = f(2x^3 - 6x)$ có tất cả bao nhiêu cực trị?



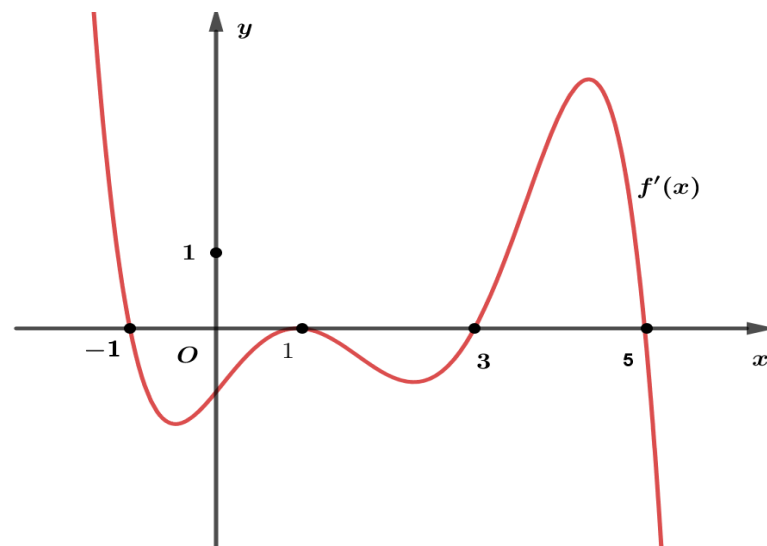
A. 5.

B. 7.

C. 6.

D. 8.

Câu 28: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi hàm số $y = f(6 - 2\sqrt{6x - x^2})$ có tất cả bao nhiêu cực đại?



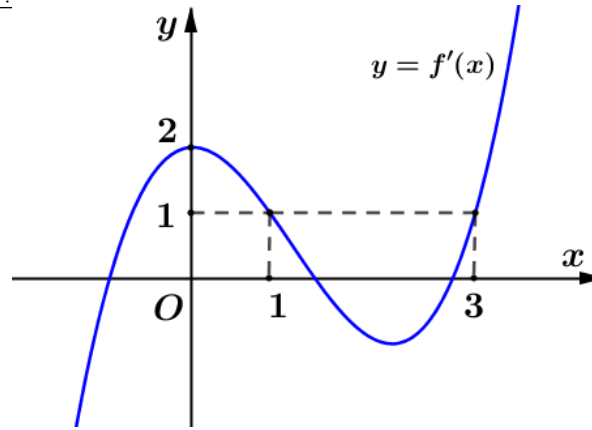
A. 1.

B. 5.

C. 3.

D. 7.

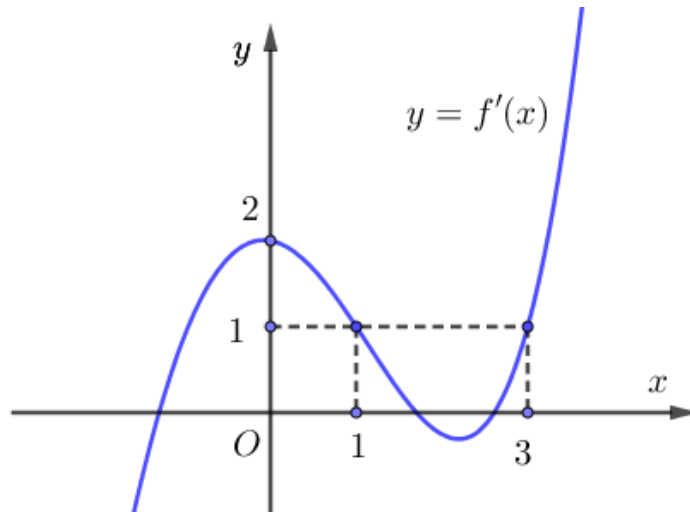
Câu 29: Cho hàm số $y = f(x)$. Biết rằng hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Số điểm cực trị của hàm số $y = 2021^{f(x)} + 2020^{f(x)}$ là

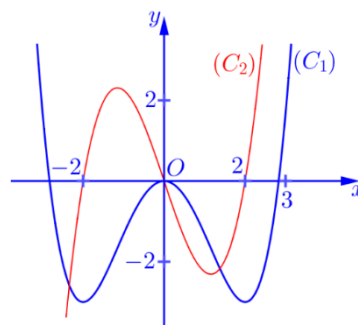
- A. 2 B. 5 C. 3 D. 4

Câu 30: Cho hàm số $y = f(x)$. Biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Số điểm cực trị của hàm số $y = 2021^{f(x)} + 2020^{f(x)}$ là



- A. 2. B. 5. C. 3. D. 4.

Câu 31: Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị (C_1) và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị (C_2) như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của đồ thị hàm số $g(x) = f[e^{-x} \cdot f(x)]$ trên khoảng $(-\infty; 3)$ là



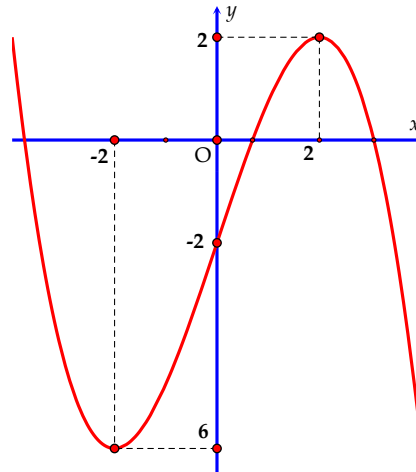
- A. 9. B. 6. C. 7. D. 8.

Câu 32: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x^2 + x - 2)(x - 3)^3(2^x - 8)$. Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ là

- A. 4. B. 2. C. 1. D. 3.

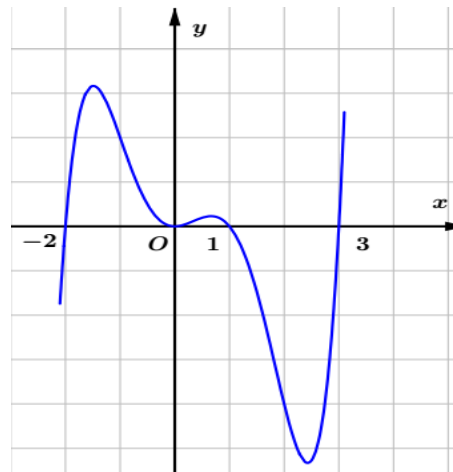
Câu 33: Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với $a \neq 0$ có đồ thị hàm số như hình bên. Điểm cực

đại của đồ thị hàm số $y = f(2-x) + 3$ là



- A. $(0; 5)$. B. $(0; 2)$. C. $(5; -6)$. D. $(5; 3)$.

Câu 34: Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ sau.



Hàm số $g(x) = f(x^2)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 4. B. 3. C. 5. D. 2.

Câu 35: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$ và bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ.

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	2018	-2018	$+\infty$	

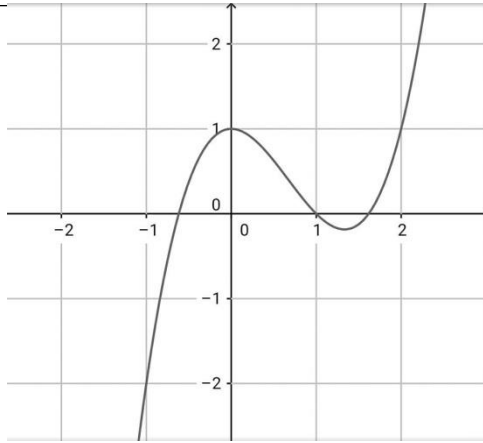
Xét hàm số $g(x) = |f(x-2017) + 2018|$ có bao nhiêu cực trị?

- A. 2. B. 3. C. 4. D. 5.

Câu 36: Cho hàm số $f(x)$ với đạo hàm $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số

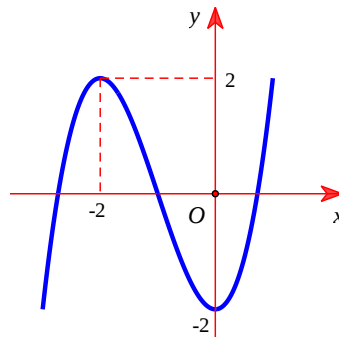
$$g(x) = f(x) - \frac{x^3}{3} + x^2 - x + 2 \text{ đạt cực đại tại điểm nào?}$$

Chủ đề 01: Cơ bản về tính đơn điệu của hàm số



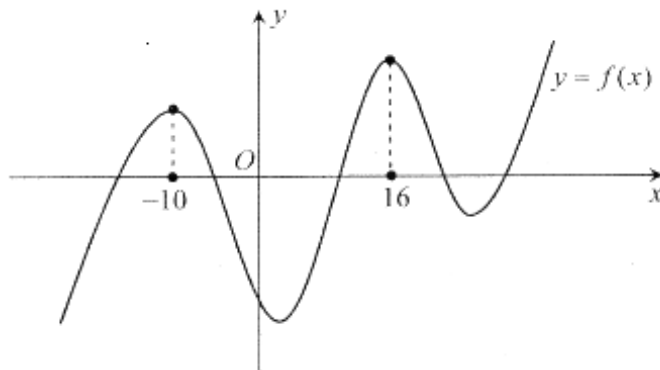
- A. $x = 2$. B. $x = -1$. C. $x = 1$. D. $x = 0$.

Câu 37: Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(-2x^2 + 4x)$ là



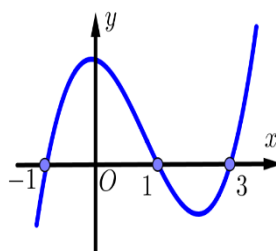
- A. 2. B. 5. C. 4. D. 3.

Câu 38: Cho hàm số $y = f(x)$ có tập xác định là $D = \mathbb{R}$ và có đạo hàm xác định trên $\mathbb{R}$, đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ bên dưới. Hỏi hàm số $y = f(x^3 - 12x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?



- A. 11. B. 10. C. 12. D. 9.

Câu 39: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Số điểm cực trị của hàm số $y = f(xe^x)$ bằng

A. 3.

B. 1.

C. 4.

D. 2.

Câu 40: Cho hàm số bậc bốn trùng phương $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	-1	1	-1	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $y = \frac{1}{x^4} [f(x) - 1]^4$.

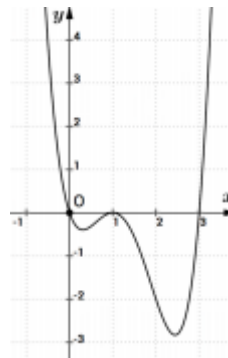
A. 6.

B. 7.

C. 5.

D. 4.

Câu 41: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ dưới đây:



Hỏi hàm số $y = f(x^2)$ có bao nhiêu điểm cực đại và bao nhiêu điểm cực tiểu?

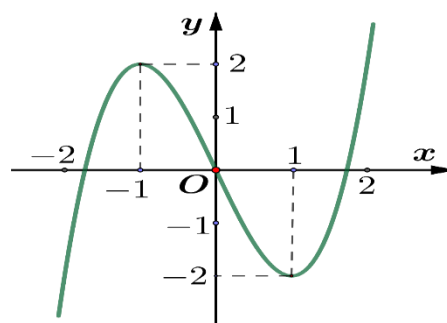
A. 2 điểm cực đại, 1 điểm cực tiểu.

B. 2 điểm cực tiểu, 1 điểm cực đại.

C. 2 điểm cực đại, 3 điểm cực tiểu.

D. 2 điểm cực tiểu, 3 điểm cực đại.

Câu 42: Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm số bậc ba, có đồ thị như hình vẽ bên dưới



Hàm số $g(x) = f(x^2 - 1)$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

A. 4.

B. 3.

C. 2.

D. 1.

Câu 43: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ có đạo hàm $y = f'(x) = x^2 - 4x - 5$. Số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = f(x^3 - 3x^2)$ là

A. 2.

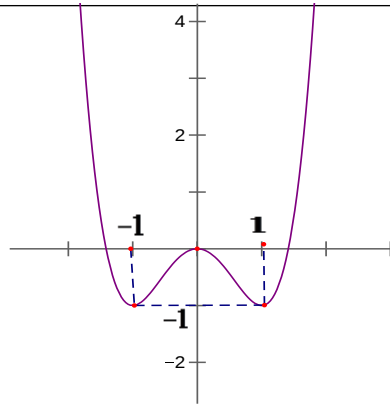
B. 7.

C. 6.

D. 4.

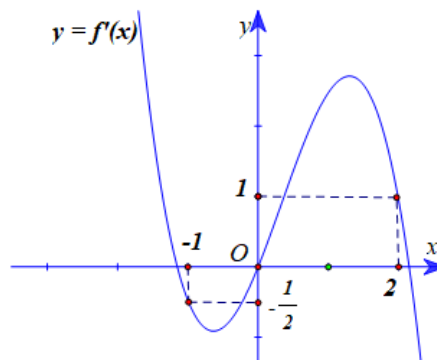
Câu 44: Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x^3 + f(x))$ là



- A. 11. B. 9. C. 8. D. 10.

Câu 45: Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ ($ae < 0$). Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Hàm số $y = |4f(x) - x^2|$ có bao nhiêu điểm cực tiểu



- A. 3. B. 5. C. 4. D. 2.

Câu 46: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và bảng biến thiên của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	0	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	0	-1	$-\sqrt{3}$	$+\infty$

Hỏi hàm số $g(x) = f(x^4) - 4x$ có mấy điểm cực tiểu?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 47: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	-3	2	-1	$+\infty$

Hỏi hàm số $g(x) = f\left(\left|\frac{\ln(x^2+1)-2}{2}\right|\right)$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

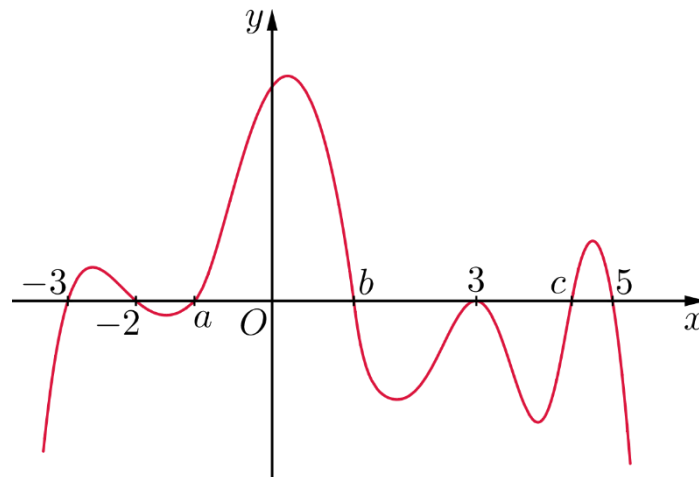
A. 9

B. 4

C. 7

D. 5

Câu 48: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ cắt trục hoành tại các điểm có hoành độ $-3; -2; a; b; 3; c; 5$ với $-\frac{4}{3} < a < -1; 1 < b < \frac{4}{3}; 4 < c < 5$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m để hàm số $y = f(2|x| + m - 3)$ có 7 điểm cực trị?



A. 3.

B. 2.

C. 4.

D. Vô số.

Câu 49: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x+2)(x-3)$. Điểm cực đại của hàm số $g(x) = f(x^2 - 2x)$ là

A. $x = 3$.B. $x = 0$.C. $x = 1$.D. $x = -1$.

Câu 50: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên của đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	-3	2	-1	$+\infty$

Hàm số $g(x) = f\left(\left|\frac{\ln(x^2+1)-2}{2}\right|\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

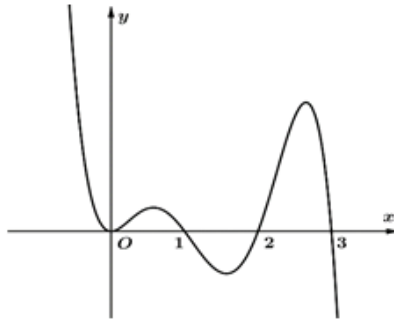
A. 5.

B. 9.

C. 11.

D. 7.

Câu 51: Cho hàm đa thức $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau



Có bao nhiêu giá trị của $m \in [0; 6]; 2m \in \mathbb{Z}$ để hàm số $g(x) = f(x^2 - 2|x-1| - 2x + m)$ có đúng 9 điểm cực trị?

A. 7.

B. 5.

C. 3.

D. 6.

Câu 52: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	1	5	-1	$+\infty$

Số điểm cực tiểu của hàm số $y = 2021^{f(x)} - 2020^{f(x)}$ là

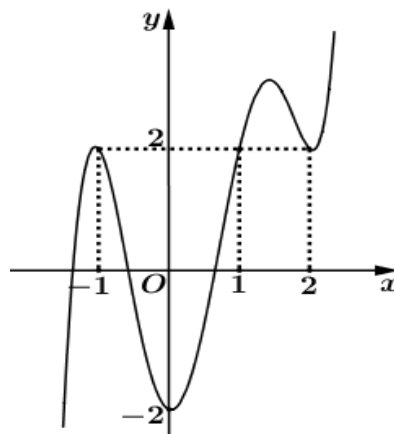
A. 1.

B. 3.

C. 2.

D. 4.

Câu 53: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $y = f'(x-1)$ như hình vẽ



Khi đó hàm số $y = e^{f(x) + 2x}$ đạt cực tiểu tại điểm x_0 . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

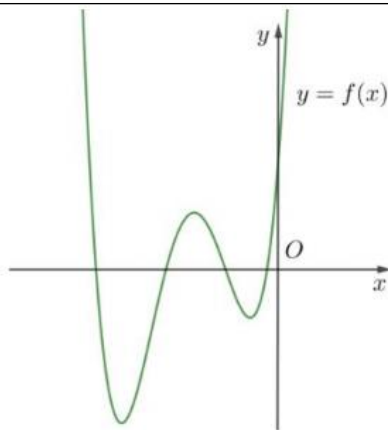
A. $x_0 \in (-1; 0)$.

B. $x_0 \in (-4; -2)$.

C. $x_0 \in (0; 1)$.

D. $x_0 \in (-2; -1)$.

Câu 54: Cho hàm số $F(x)$ có $F(0) = 0$. Biết $y = F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Số điểm cực trị của hàm số $G(x) = |F(x^6) - x^3|$ là

A. 4.

B. 5.

C. 6.

D. 3.

Câu 55: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-3	-1	1	2	3	$+\infty$	
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
y			2			2		
	$-\infty$			0		-3		$-\infty$

Số điểm cực đại của hàm số $g(x) = |f(|x^2 - 8x + 7| + x^2 - 3)|$ là

A. 6.

B. 8.

C. 7.

D. 9.

Câu 56: Cho hàm số $f(x)$ là hàm số bậc bốn thỏa mãn $f(0) = 0$. Hàm số $f'(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-3	-1	$+\infty$
$f'(x)$		-1		$+\infty$
	$-\infty$		$-\frac{61}{3}$	

Hàm số $g(x) = |f(x^3) - 3x|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3.

B. 5.

C. 4.

D. 2.

Câu 57: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = (x-2)^2(x^2 - x)$, $x \in \mathbb{R}$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $f\left(\frac{1}{2}x^2 - 6x + m\right)$ có 5 điểm cực trị. Tính tổng tất cả các phần tử của S.

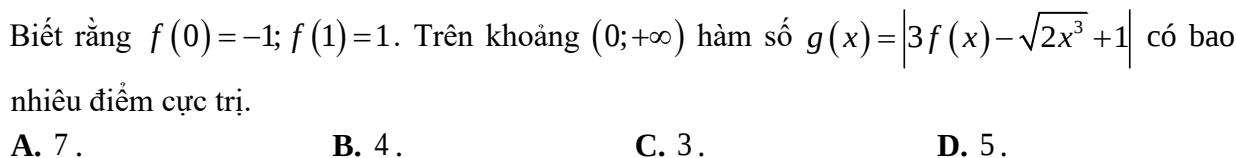
A. 154.

B. 17.

C. 213.

D. 153.

Câu 58: Cho hàm số đa thức $f(x)$ có đồ thị của đạo hàm $f'(x)$ trên khoảng $(0; +\infty)$ như hình vẽ bên



x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$
$f(x)$					

A. 7. **B. 8.** **C. 5.** **D. 9.**

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	0	$-$
y	$-\infty$	3	-2	3	$-\infty$

A. 7. **B. 8.** **C. 9.** **D. 5.**

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$			
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$		0		5		$-\infty$

Tư duy toán học 4.0 – Luyện thi Đại học 2022 | 16

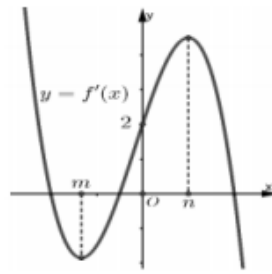
A. 3.

B. 2.

C. 1.

D. 4.

Câu 62: Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e, (a \neq 0)$ có đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ. Biết rằng $e > n$



Số điểm cực trị của hàm số $y = f'(f(x) - 2x)$ là

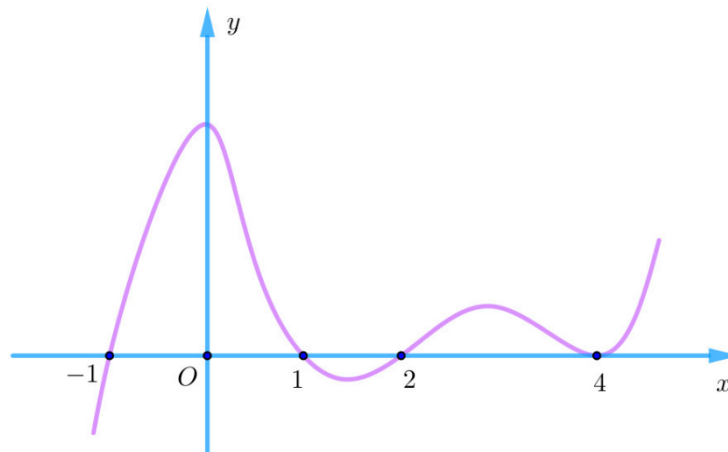
A. 7.

B. 6.

C. 10

D. 14.

Câu 63: Vậy số điểm cực trị của hàm số $y = f'(f(x) - 2x)$ là 7. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, đồ thị hàm số $y = f'(x)$ có đúng 4 điểm chung với trục hoành như hình vẽ bên dưới:



Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y = f(|x|^3 - 3|x| + m + 2021)$ có đúng 11 điểm cực trị?

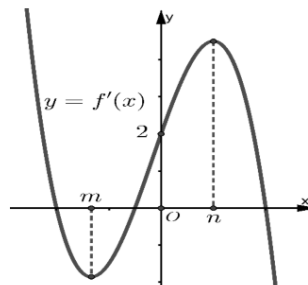
A. 0.

B. 2.

C. 5.

D. 1.

Câu 64: Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e, (a \neq 0)$ có đồ thị của đạo hàm $f'(x)$ như hình vẽ.



Biết rằng $e > n$. Số điểm cực trị của hàm số $y = f'(f(x) - 2x)$ bằng

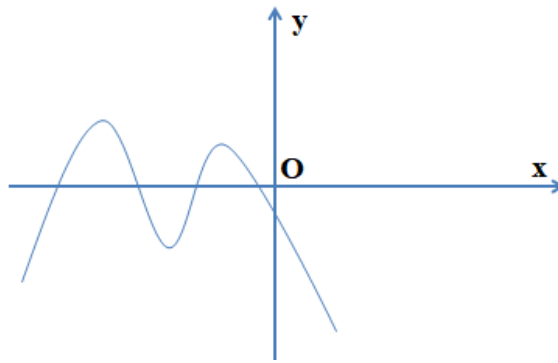
A. 7.

B. 10.

C. 14.

D. 6.

Câu 65: Cho hàm số $y = f(x)$ với $f(0) = 0$. Biết $y = f'(x)$ là một hàm số bậc bốn và có đồ thị là đường cong như hình dưới đây



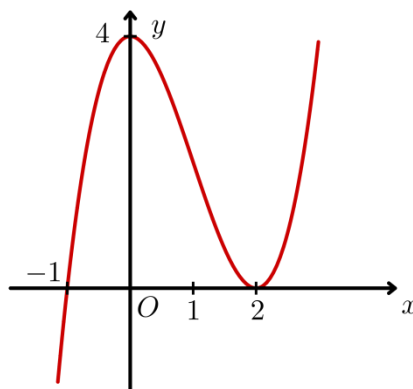
Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = |f(x^4) + x^2|$ là

- A. 3. B. 6. C. 5. D. 4.

Câu 66: Cho hàm số $f(x)$ có $f'(x) = (x^2 - 16)(x + 1)(x^2 - 4x + m - 4)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-2021; 2021]$ sao cho hàm số $g(x) = f(x^2)$ có 5 điểm cực trị?

- A. 2025. B. 2026. C. 2021. D. 4043.

Câu 67: Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + ax^3 + bx^2 + cx$ có đồ thị (C) của hàm $y = f'(x)$ như hình vẽ sau:



Đặt $g(x) = f(f'(x))$, $h(x) = f'(f(x))$. Tổng số điểm cực trị của $g(x)$ và $h(x)$ là:

- A. 12. B. 11. C. 8. D. 13.

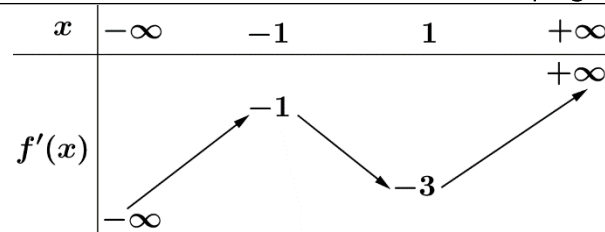
Câu 68: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và bảng biến thiên của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	0	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	0	-1	$-\sqrt{3}$	$+\infty$

Hỏi hàm số $g(x) = f(x^4) - 4x$ có mấy điểm cực tiểu?

- A. 3. B. 1. C. 4. D. 2.

Câu 69: Cho $y = f(x)$ là hàm số đa thức bậc bốn thỏa mãn $f(1) \leq 0$ và hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như sau



Hàm số $g(x) = \left| f(\sqrt{x^2+1}) + x^2 \right|$ có mấy điểm cực trị?

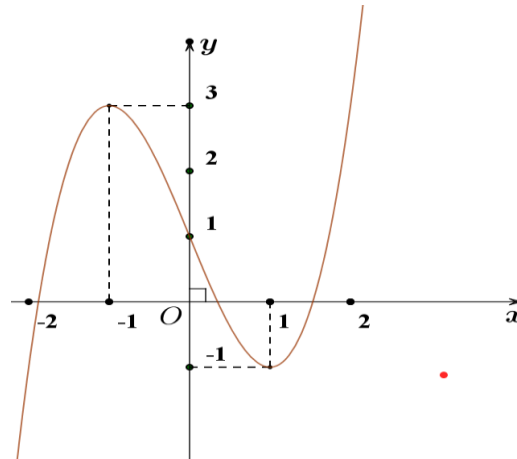
A. 1.

B. 3.

C. 5.

D. 2.

Câu 70: Cho hàm số $f(x)$. Biết $f'(x)$ là hàm bậc 3. Có đồ thị như hình vẽ sau



Có bao nhiêu giá trị nguyên $m \in [-10, 10]$ để hàm số $g(x) = f(x) + mx + 2021$ có đúng 1 cực trị?

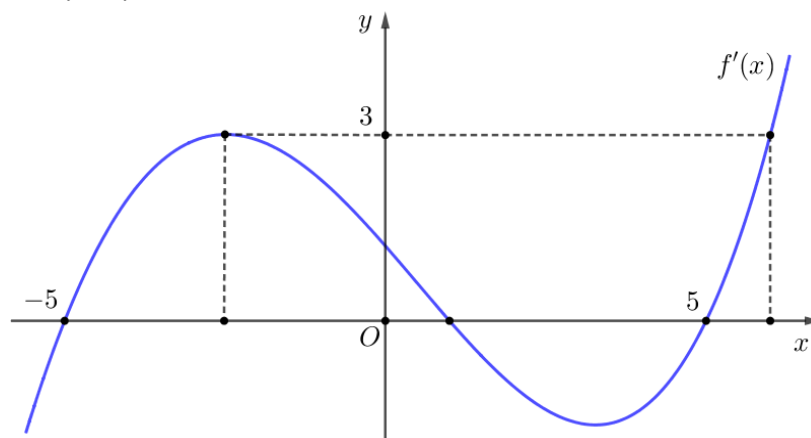
A. 20.

B. 16.

C. 15.

D. 18.

Câu 71: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Biết rằng $f(10) = 30$, $f(-6) = 30$, $f(5) = 30$. Hỏi đồ thị hàm số $y = f[f(x) - 3x + 9]$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?



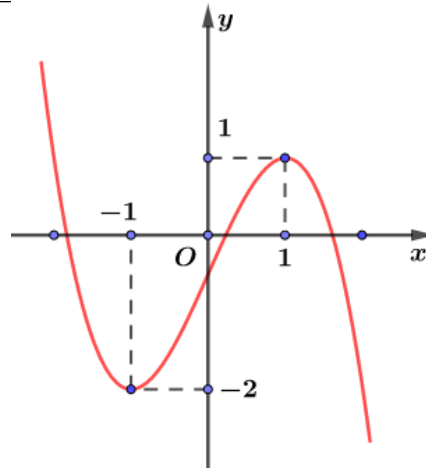
A. 7.

B. 9.

C. 5.

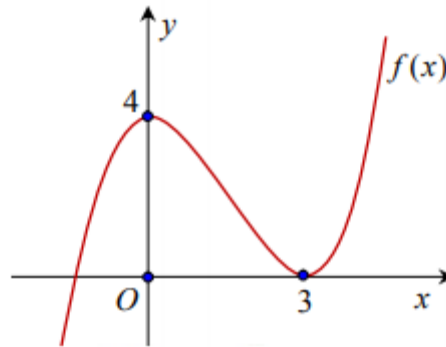
D. 3.

Câu 72: Cho hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ. Hỏi hàm số $y = f\left[e^{f(x)} - \frac{1}{2}f(x)^2 - f(x)\right]$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?



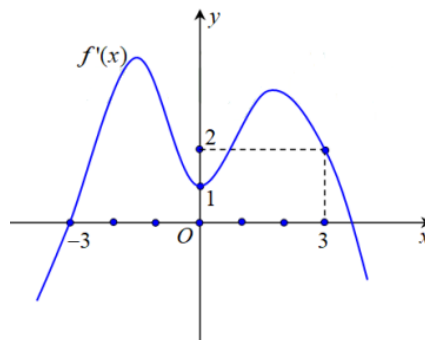
- A. 5. B. 6. C. 3. D. 9.

Câu 73: Cho đồ thị của hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ bên dưới. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $f(3f(x) - m)$ có đúng 6 điểm cực trị?



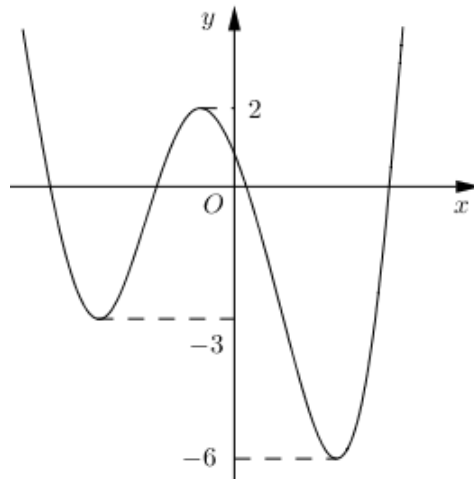
- A. 7. B. 4. C. 6. D. 5.

Câu 74: Cho đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới. Biết rằng hàm số $f'(x)$ đạt cực tiểu tại $x = 0$; có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ và hàm số $g(x) = [f(x)]^2 - \left(\frac{x^2 + 6x}{3}\right) \cdot f(x) + \left(\frac{x^2 + 6x}{6}\right)^2$ có đúng 5 điểm cực trị. Giá trị $\min\left(\min_{x \in (-\infty; 3]} f(x)\right)$ bằng



- A. 0. B. $\frac{9}{2}$. C. $\frac{11}{4}$. D. $-\frac{3}{2}$.

Câu 75: Cho $y = f(x)$ là hàm đa thức bậc 4 và có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-12; 12]$ để hàm số $g(x) = |2f(x-1) + m|$ có 5 điểm cực trị?



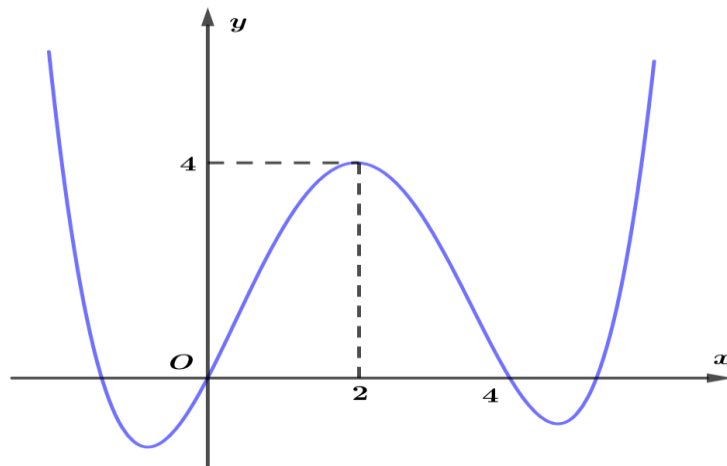
A. 12.

B. 14.

C. 15.

D. 13.

Câu 76: Cho hàm số bậc năm $y = f(x)$ có đồ thị $y = f'(x)$ như hình bên. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x^3 + 3x^2) - 2x^3 - 6x^2$ là



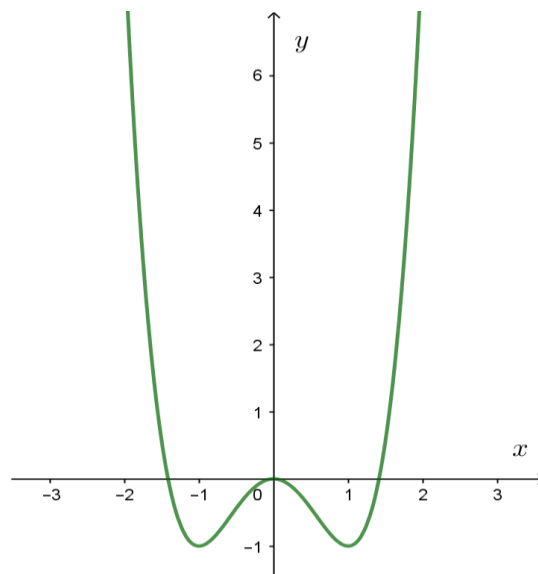
A. 7.

B. 10.

C. 5.

D. 11.

Câu 77: Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x^3 + f(x))$ là

A. 11.

B. 9.

C. 8.

D. 10.

Câu 78: Cho hàm số bậc bốn trùng phương $y = f(x)$ có bảng biến thiên sau

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	2	6	2	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = \frac{1}{x^2} (f(x) - 6)^4$ là

A. 2.

B. 4.

C. 5.

D. 3.

Câu 79: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có bảng biến thiên như hình vẽ:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	0	-1	0	1	0

Số điểm cực đại của hàm số $y = f(|f(x)|)$ là

A. 2.

B. 3.

C. 0.

D. 1.

Câu 80: Cho $f(x)$ là hàm số có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	-1	-3	-1	$+\infty$

Tìm số điểm cực tiểu của hàm số $g(x) = f(|x^3|) - 3|x|$.

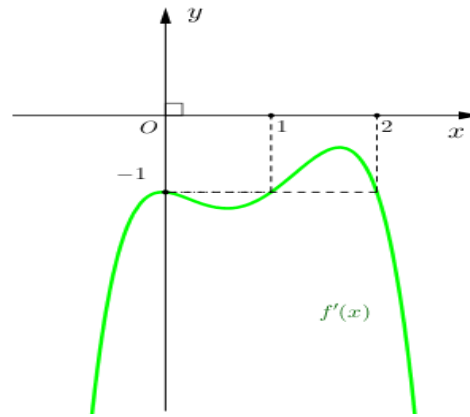
A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 0.

Câu 81: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ. Số điểm cực tiểu của hàm số $g(x) = f(x) + x$ là



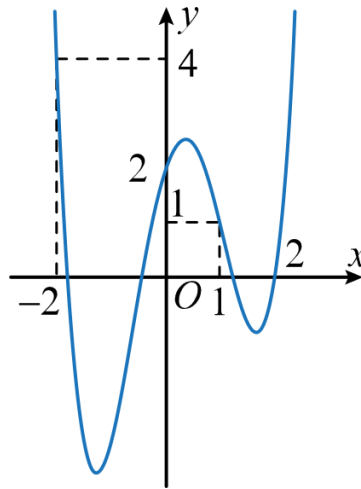
A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 0.

Câu 82: Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Số điểm cực đại của hàm số $g(x) = f(x^2 - 4x + 3) - 3(x - 2)^2 + \frac{1}{2}(x - 2)^4$ là

A. 7.

B. 3.

C. 4.

D. 5.

Câu 83: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+1)^4(x-m)^5(x+3)^3$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-5; 5]$ để hàm số $g(x) = f(|x|)$ có 3 điểm cực trị.

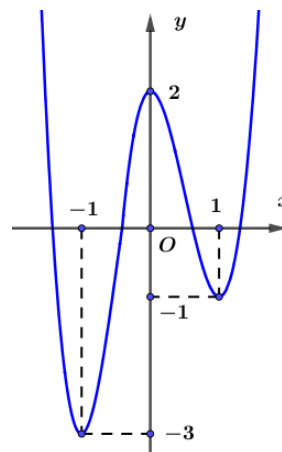
A. 3.

B. 5.

C. 6.

D. 4.

Câu 84: Cho hàm số bậc năm $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ dưới đây. Số điểm cực trị của hàm số $y = f(4x^2 - 4x) - \frac{8}{3}x^3 + 6x^2 - 4x + 1$ là



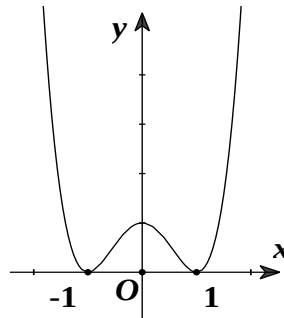
A. 4.

B. 5.

C. 9.

D. 7.

Câu 85: Vậy hàm số $y = f(4x^2 - 4x) - \frac{8}{3}x^3 + 6x^2 - 4x + 1$ có 5 điểm cực trị. Cho $f(x)$ là một hàm đa thức bậc năm thỏa mãn $f(0) = 0$. Hàm số $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên



Hàm số $g(x) = \left| f(\sin x) + \frac{1}{3}\sin^3 x - \sin^2 x \right|$ có bao nhiêu điểm cực trị trên khoảng $(0; 3\pi)$?

A. 15.

B. 11.

C. 9.

D. 13.

Câu 86: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên $f'(x)$ như hình vẽ:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$		2		$+\infty$
		-3		-1	

Hàm số $y = f(|e^{2x} - 2x - 2|)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

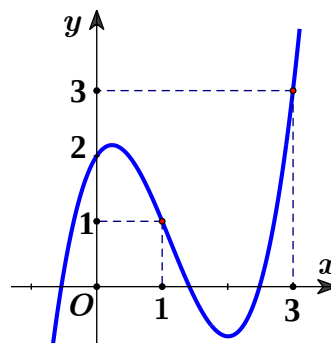
A. 9.

B. 7.

C. 11.

D. 5.

Câu 87: [Mức độ 4] Cho hàm số $f(x)$ có $f(0) = -1$. Biết $y = f'(x)$ là hàm số bậc ba có đồ thị là đường cong dưới đây.



Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = |f(x^4) - 6x^2|$ là

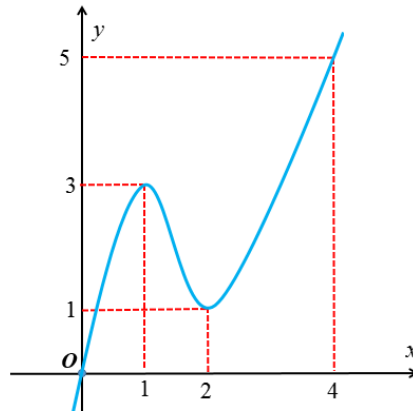
A. 3.

B. 6.

C. 5.

D. 4.

Câu 88: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(0) = 0; f(4) > 4$. Biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm số điểm cực tiểu của hàm số $g(x) = |f(x^2) - 2x|$.



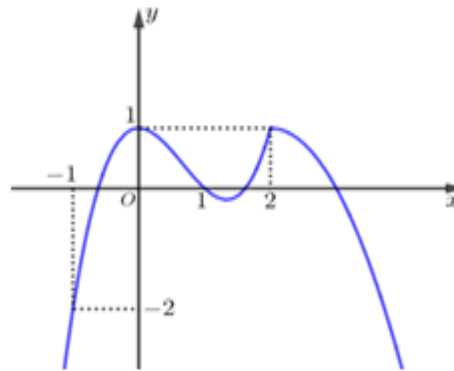
A. 2.

B. 1.

C. 3.

D. 0.

Câu 89: Cho hàm số $y = f(x)$ có $f(1) < 0$ và đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ.



Hàm số $g(x) = \left| f(x^2) - \frac{x^6}{3} + x^4 - x^2 \right|$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

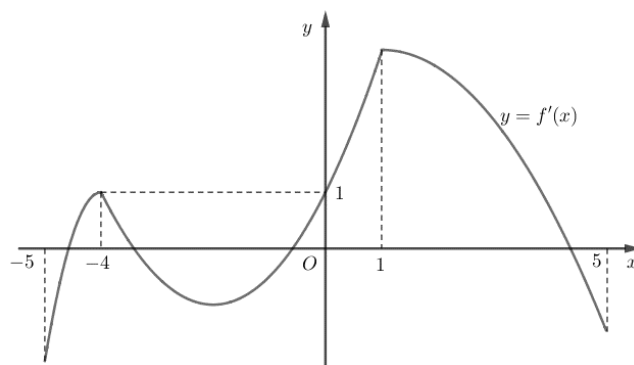
A. 3.

B. 2.

C. 4.

D. 5.

Câu 90: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Hàm số $y = f(x^2 + 4x) - x^2 - 4x$ có bao nhiêu điểm cực trị thuộc khoảng $(-5; 1)$?



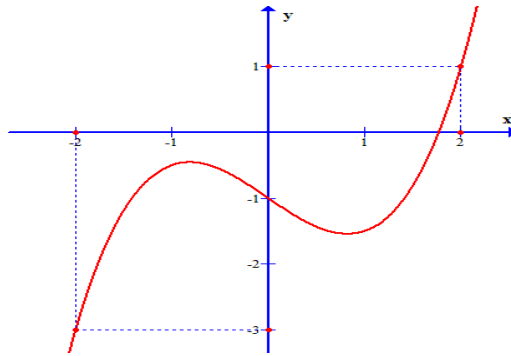
A. 5.

B. 4.

C. 6.

D. 3.

Câu 91: Cho $f(x)$ là hàm bậc bốn thỏa mãn $f(0) = 0$. Hàm số $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Hàm số $g(x) = \left| 2f(x^2 + x) - x^4 - 2x^3 + x^2 + 2x \right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 4. B. 5. C. 6. D. 7.

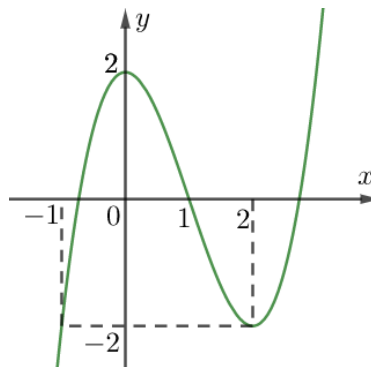
Câu 92: Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm số bậc bốn thỏa mãn $f(0) = 0$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	m	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	-1		$+\infty$

Hàm số $g(x) = \left| f(x^2) - x^2 \right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 1. B. 3. C. 5. D. 7

Câu 93: Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm số đa thức bậc bốn. Biết $f(0) = 0$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ có hình vẽ bên dưới.



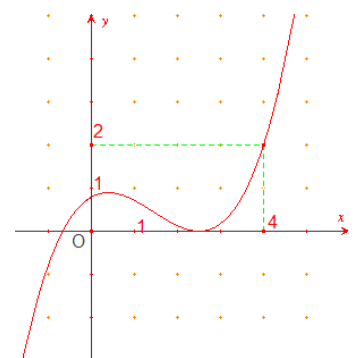
Hàm số $g(x) = \left| 5f(|2\sin x - 1| - 1) + 4 \right|$ có bao nhiêu điểm cực trị trên đoạn $[0; 3\pi]$?

- A. 16. B. 32. C. 17. D. 33.

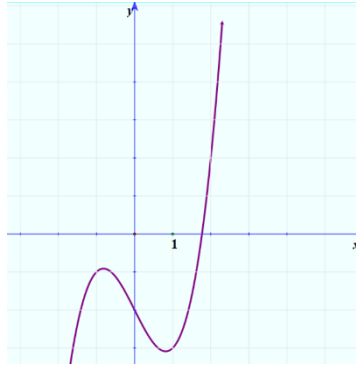
Câu 94: Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(0) = 0$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới

Tìm số điểm cực trị của hàm số $g(x) = \left| f(x^2) - \frac{2}{3}x^3 \right|$.

- A. 3. B. 7.
C. 6. D. 5.



Câu 95: Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có $f(0) = 2021$ và đồ thị của đạo hàm $f'(x)$ như hình bên dưới.



Hỏi hàm số $y = |f(x^2) - 2|x| - 2021|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

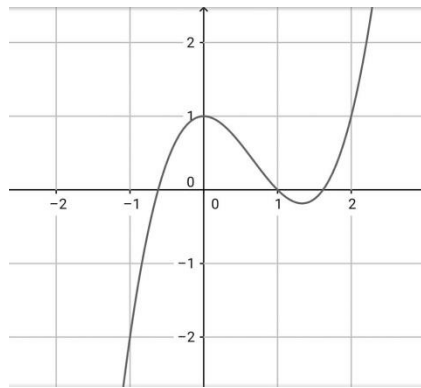
A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. 6.

Câu 96: Cho $f(x)$ là một hàm số bậc bốn thỏa mãn $f(1) = -\frac{5}{3}$. Hàm số $f'(x)$ có đồ thị như sau:



Hàm số $g(x) = \left| f(x) - \frac{x^3}{3} + x^2 - x + 2 \right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 5.

Câu 97: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(-3) = 0$ đồng thời có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $g(x) = \left| 2(x+1)^6 - 6(x+1)^2 - 3f(-x^4 - 4x^3 - 4x^2 - 2) \right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 7.

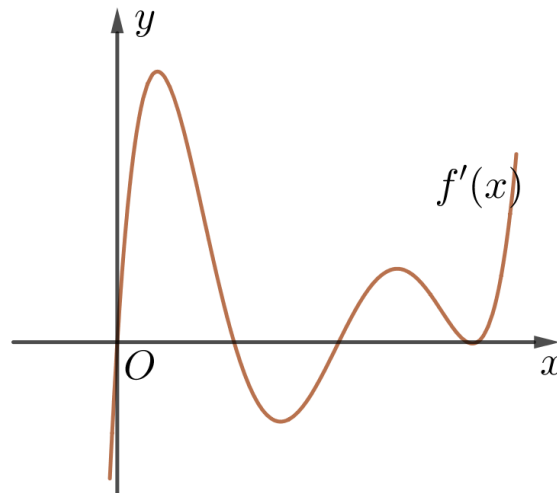
B. 6.

C. 3.

D. 5.

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $y = f(x)$ có mấy điểm cực trị?



A. 3.

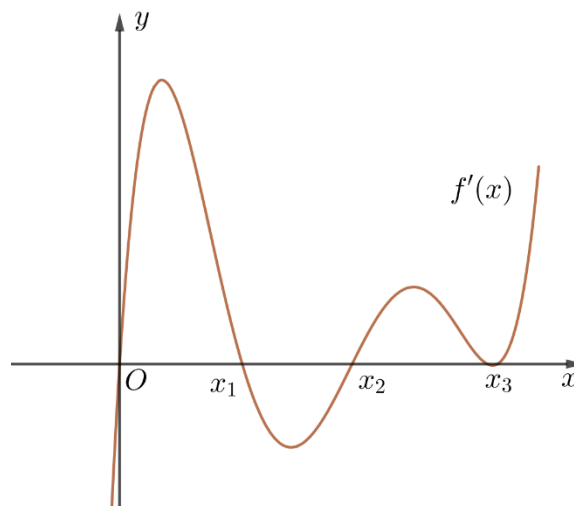
B. 2.

C. 4.

D. 1.

Lời giải

Chọn A



Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ suy ra $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = x_1 \\ x = x_2 \\ x = x_3 \end{cases}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	x_1	x_2	x_3	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$							

Suy ra hàm số $y = f(x)$ có 3 điểm cực trị

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ. Hàm số $y = f(1-2x)$ đạt cực tiểu tại

x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow 1$	$\searrow -2$	$\nearrow 1$	$\searrow$

A. $x = -\frac{1}{2}$.

B. $x = \frac{1}{2}$.

C. $x = 1$.

D. $x = 0$

Lời giải

Chọn B.

$$g'(x) = -2f'(1-2x) = 0 \Leftrightarrow -2f'(1-2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1-2x = -1 \\ 1-2x = 0 \\ 1-2x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{1}{2} \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$		$\nearrow$ CĐ	$\searrow$ CT	$\nearrow$ CĐ	$\searrow$

Ta xét dấu bằng cách thay số

Với $x = 2 \Rightarrow g'(2) = -2f'(-3) < 0$

Với $x = \frac{3}{4} \Rightarrow g'\left(\frac{3}{4}\right) = -2f'\left(-\frac{1}{2}\right) > 0$

Với $x = \frac{1}{4} \Rightarrow g'\left(\frac{1}{4}\right) = -2f'\left(\frac{1}{2}\right) < 0$

Với $x = -1 \Rightarrow g'(-1) = -2f'(3) > 0$

Vậy hàm số $y = f(1-2x)$ đạt cực tiểu tại $x = \frac{1}{2}$.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$	-2	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Hỏi hàm số $g(x) = f(x^2 - 2x)$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

A. 4.

B. 1.

C. 3.

D. 2.

Lời giải

Chọn B

Ta có $g'(x) = (2x-2)f'(x^2-2x)$.

$$\text{Suy ra: } g'(x) = 0 \Leftrightarrow (2x-2)f'(x^2-2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-2=0 \\ f'(x^2-2x)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x^2-2x=3 \\ x^2-2x=-2 \\ x^2-2x=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=3 \\ x=-1 \\ x=1 \pm \sqrt{2} \end{cases}.$$

$$\text{Xét } g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow (2x-2)f'(x^2-2x) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-2 \geq 0 \\ f'(x^2-2x) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ -2 \leq x^2-2x \leq 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-2 \leq 0 \\ f'(x^2-2x) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x^2-2x \geq 3 \\ x^2-2x \leq -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2-2x+2 \geq 0 \\ x^2-2x-3 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ -1 \leq x \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x^2-2x-3 \geq 0 \\ x^2-2x+2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq 3 \\ x \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 3 \\ x \leq -1 \end{cases}.$$

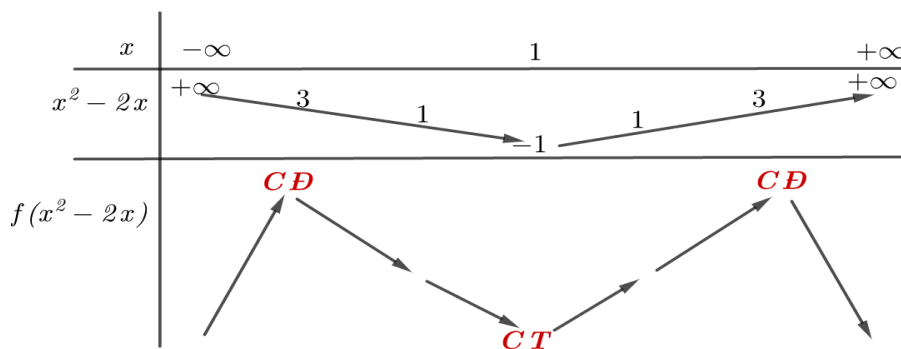
Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	$1 - \sqrt{2}$	1	$1 + \sqrt{2}$	3	$+\infty$				
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$											

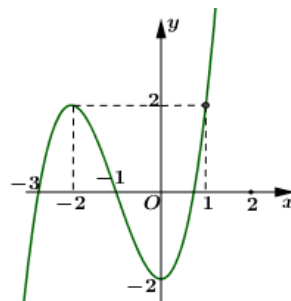
Từ bảng biến thiên suy ra hàm số $g(x) = f(x^2 - 2x)$ có 1 điểm cực tiểu.

Cách khác:

Từ BBT hàm $f(x^2 - 2x)$ được mô tả ở dưới ta suy ra hàm có 1 điểm cực tiểu.



Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới



Hỏi hàm số $y = e^{f(x)}$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 0

Lời giải

Chọn C

Ta có $y' = (e^{f(x)})' = f'(x) \cdot e^{f(x)}$.

Xét phương trình $f'(x) \cdot e^{f(x)} = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 0, (e^{f(x)} > 0, \forall x)$

Suy ra $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -3, x = -1, x = a, (0 < a < 1)$.

Các nghiệm này là các nghiệm đơn. Do vậy hàm số $y = e^{f(x)}$ có 3 điểm cực trị.

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau biến thiên như sau:

Chủ đề 01: Cơ bản về tính đơn điệu của hàm số

x	$-\infty$	-2	1	3	$+\infty$		
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$

Hỏi hàm số $y = f(x^2 - 2x)$ có bao nhiêu điểm cực tiểu

A. 1.

B. 4.

C. 3.

D. 2.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $g(x) = f(x^2 - 2x)$:

$$g'(x) = (2x - 2)f'(x^2 - 2x)$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2 = 0 \\ x^2 - 2x = -2 \\ x^2 - 2x = 1 \\ x^2 - 2x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 1 + \sqrt{2} \\ x = 1 - \sqrt{2} \\ x = 3 \\ x = -1 \end{cases} \text{ đều là các nghiệm bội lẻ.}$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-1	$1 - \sqrt{2}$	$1 + \sqrt{2}$	1	3	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

Suy ra hàm số có hai điểm cực tiểu.

Câu 6: Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-1	0	2	4	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

Hàm số $f(x)$ có bao nhiêu điểm cực đại?

A. 4.

B. 2.

C. 3.

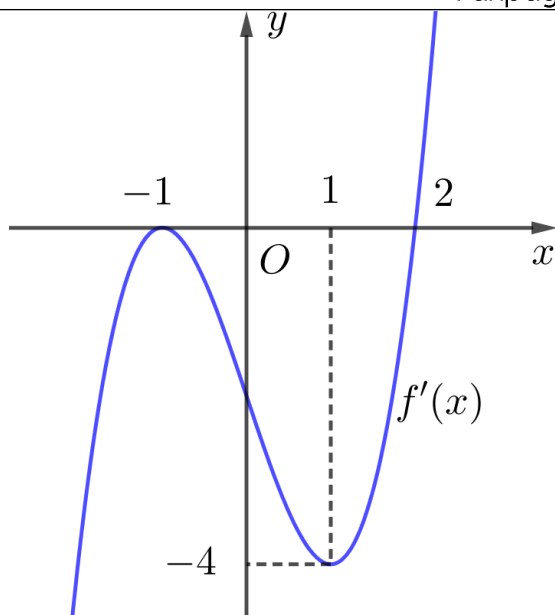
D. 1.

Lời giải

Chọn B

Dựa vào bảng xét dấu đạo hàm $f'(x)$ ta thấy đạo hàm $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm 2 lần nên hàm số $f(x)$ có 2 điểm cực đại.

Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Tìm số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x^2 - 2x)$ trên khoảng $(0; +\infty)$.



A. 3.

B. 2.

C. 4.

D. 1.

Lời giải**Chọn B**Ta có $g(x) = f(x^2 - 2x) \Rightarrow g'(x) = (2x - 2) \cdot f'(x^2 - 2x)$.

$$\text{Suy ra } g'(x) = 0 \Leftrightarrow (2x - 2) \cdot f'(x^2 - 2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ f'(x^2 - 2x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - 2x = -1 \\ x^2 - 2x = 2 \end{cases}$$

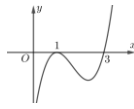
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - 2x + 1 = 0 \\ x^2 - 2x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 1 \\ x = 1 \pm \sqrt{3} \end{cases}.$$

Nhận xét: $f'(x^2 - 2x) = 0 \Rightarrow x^2 - 2x = -1$ là nghiệm kép.

Bảng biến thiên

x	0	1	$1 + \sqrt{3}$	$+\infty$	
$g'(x)$	+	0	-	0	+
$g(x)$					

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số $g(x) = f(x^2 - 2x)$ có 2 điểm cực trị trên khoảng $(0; +\infty)$ **Câu 8:** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ



Khẳng định nào sau đây là khẳng định **đúng**?

- A. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại $x = 1$.
- B. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có một điểm cực đại.
- C. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = 3$.
- D. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào đồ thị, ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	0	+
$f(x)$				

Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 3$.

Câu 9: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+2)^4(x-3)^5(x+1)^3$. Số điểm cực trị của hàm số $f(|x|)$ là

- A. 1.
- B. 5.
- C. 3.
- D. 2.

Lời giải

Chọn C

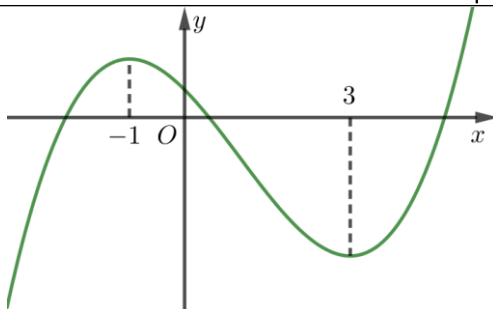
Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-2	-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		+ 0	+ 0	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$		$f(-1)$		$f(3)$		$+\infty$

x	$-\infty$		-3	0	3		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	+	
$f(x)$	$+\infty$		$f(3)$	$f(0)$	$f(3)$		$+\infty$

Vậy hàm số $f(|x|)$ có 3 điểm cực trị.

Câu 10: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ:



Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = f((x-1)^2 + m)$ có 3 điểm cực trị. Tổng các phần tử của S là:

A. 2.

B. 4.

C. 8.

D. 10.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = 2(x-1)f'((x-1)^2 + m)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ f'((x-1)^2 + m) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ (x-1)^2 + m = -1 \\ (x-1)^2 + m = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ (x-1)^2 = -1-m(1) \\ (x-1)^2 = 3-m(2) \end{cases}$$

+) Nếu $-1-m=0 \Leftrightarrow m=-1$ khi đó phương trình (2) $\Leftrightarrow (x-1)^2 = 4$ có hai nghiệm phân biệt khác 1 nên $m=-1$ thỏa mãn.

+) Nếu $3-m=0 \Leftrightarrow m=3$ khi đó phương trình (1) $\Leftrightarrow (x-1)^2 = -4$ vô nghiệm. Do đó, $m=3$ không thỏa mãn.

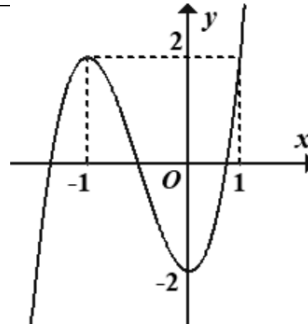
+) Để hàm số $y = f((x-1)^2 + m)$ có 3 điểm cực trị thì phương (1) có hai nghiệm phân biệt và (2) vô nghiệm; hoặc (1) vô nghiệm và (2) có hai nghiệm phân biệt.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1-m > 0 \\ 3-m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ m > 3 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m < 3.$$

Vậy $-1 \leq m < 3 \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m \in \{-1; 0; 1; 2\}$. Chọn A.

Câu 11: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.

Hỏi hàm số $y = e^{f(x)}$ có bao nhiêu điểm cực trị?



A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 0.

Lời giải

Chọn C

Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ suy ra $f'(x) = 0$ có 3 nghiệm đơn.

Đặt $g(x) = e^{f(x)} \Rightarrow g'(x) = f'(x)e^{f(x)}$.

Vì $e^{f(x)} > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow g'(x) = 0$ có 3 nghiệm đơn chính là 3 nghiệm của $f'(x) = 0$.

Do đó hàm số $y = e^{f(x)}$ có 3 điểm cực trị.

Câu 12: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x+2)(x-3)$. Điểm cực đại của hàm số $g(x) = f(x^2 - 2x)$ là

A. $x = 0$.

B. $x = -1$.

C. $x = 3$.

D. $x = 1$.

Lời giải

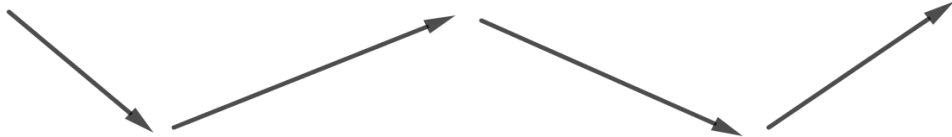
Chọn D

Theo giả thiết: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \\ x = 3 \end{cases}$

Ta có $g'(x) = (2x-2)f'(x^2-2x)$, có $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-2=0 \\ f'(x^2-2x)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-2=0 \\ x^2-2x=0 \\ x^2-2x=-2 \text{ (vn)} \\ x^2-2x=3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=0 \\ x=2 \\ x=-1 \\ x=3 \end{cases}$

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$

x	$-\infty$	-1	0	1	2	3	$+\infty$				
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$											

Dựa vào BBT, hàm số $g(x)$ đạt cực đại tại $x=1$.

Câu 13: Cho hàm số $f(x)$. Bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y	$+\infty$	-3	2	-1	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x^2 - 2x)$ là :

A. 7.

B. 9.

C. 3.

D. 5.

Lời giải

Chọn A

Ta có : $y' = (2x-2)f'(x^2-2x)$.

$$y' = 0 \Rightarrow (2x-2)f'(x^2-2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ f'(x^2-2x)=0 \end{cases}$$

Từ bảng biến thiên của hàm số $y = f'(x)$

x	$-\infty$	a	-1	b	0	c	1	d	$+\infty$
y	$+\infty$				2				$+\infty$
			-3				-1		

$y = 0$

$$\text{Ta có } f'(x^2-2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x = a \in (-\infty; -1) \\ x^2-2x = b \in (-1; 0) \\ x^2-2x = c \in (0; 1) \\ x^2-2x = d \in (1; +\infty) \end{cases} (*)$$

Nhận xét phương trình $x^2 - 2x = m \Leftrightarrow x^2 - 2x - m = 0$:

+) Có 2 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi: $1+m > 0 \Leftrightarrow m > -1$.

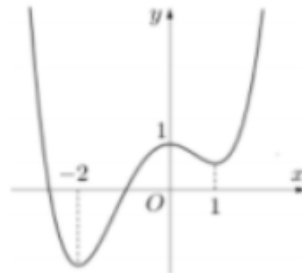
+) Có nghiệm kép khi và chỉ khi: $1+m = 0 \Leftrightarrow m = -1$ khi đó nghiệm kép $x=1$.

+) Có nghiệm $x=1$ khi và chỉ khi: $-1-m = 0 \Leftrightarrow m = -1$.

Suy ra (*) có 6 nghiệm phân biệt và khác $x=1$. Do đó $y' = 0$ có 7 nghiệm đơn.

Vậy: $y = f(x^2 - 2x)$ có 7 điểm cực trị.

Câu 14: Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Số cực trị của hàm số $y = f(|x+1| - 3)$ là

A. 3.

B. 8.

C. 7.

D. 4.

Lời giải

Chọn C

Xét $g(x) = f(|x+1| - 3)$. Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $g'(x) = (|x+1| - 3)' f'(|x+1| - 3) = \frac{x+1}{|x+1|} f'(|x+1| - 3) = \frac{1}{|x+1|} h(x)$

Với $h(x) = (x+1) \cdot f'(|x+1| - 3)$

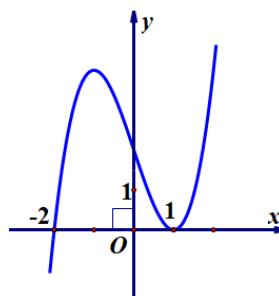
$$h(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ f'(|x+1| - 3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ |x+1| - 3 = -2 \\ |x+1| - 3 = 0 \\ |x+1| - 3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \\ x = -2 \\ x = 2 \\ x = -4 \\ x = 3 \\ x = -5 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ bảng xét dấu $g'(x)$

x	$-\infty$	-5	-4	-2	-1	0	2	3	$+\infty$			
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Vậy hàm số $y = g(x)$ có 7 cực trị.

Câu 15: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x^2 - 3)$ là

A. 5.

B. 4.

C. 2.

D. 3.

Lời giải**Chọn D**

Đặt $g(x) = f(x^2 - 3)$ ta có $g'(x) = 2x \cdot f'(x^2 - 3)$.

$$\text{Từ đồ thị của } y = f'(x) \text{ ta có } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ x^2 - 3 = 1 \\ x^2 - 3 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 2 \\ x = \pm 1 \end{cases}.$$

Cũng từ đồ thị ta thấy $x = \pm 2$ là nghiệm kép của phương trình, nên ta có $x = 0, x = \pm 1$ là các nghiệm đơn của $g'(x) = 0$. Vậy hàm số $y = g(x) = f(x^2 - 3)$ có tất cả là 3 cực trị.

Câu 16: Cho hàm số bậc 4 có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$			3			$+\infty$	

$\swarrow$ $\nearrow$ $\searrow$ $\nearrow$
 -1 -1

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = x^4 [f(x-1)]^2$ là

A. 7.

B. 5.

C. 9.

D. 11.

Lời giải**Chọn C**

Cách 1. Từ giả thiết đề bài đã cho ta thấy rằng hàm số $f(x)$ có dạng $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$.

Sử dụng giả thiết ta được

$$f(x) = 4x^4 - 8x^2 + 3 \Rightarrow f'(x-1) = 16(x-1)^3 - 16(x-1) = 16x(x-1)(x-2)$$

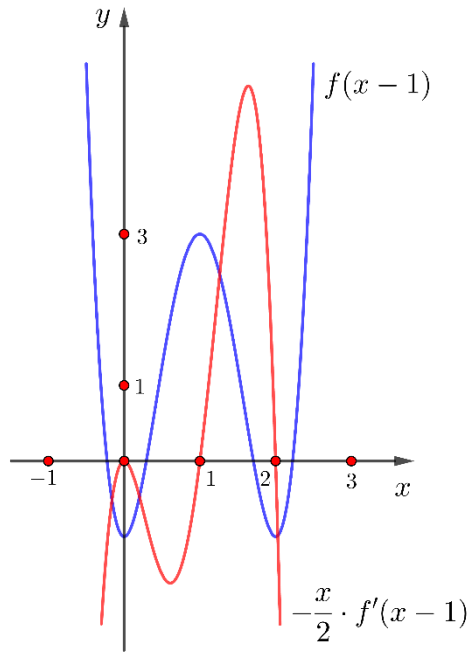
Ta có

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 [f(x-1)]^2 + 2x^4 \cdot f(x-1) \cdot f'(x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f(x-1) = 0 \\ 2f(x-1) + x \cdot f'(x-1) = 0 \quad (*) \end{cases}$$

Xét phương trình $(*) \Leftrightarrow f(x-1) = -\frac{x}{2} \cdot f'(x-1)$, ta có $-\frac{x}{2} \cdot f'(x-1) = -8x^2(x-1)(x-2)$.

Biểu diễn hai hàm số $f(x-1)$ và $-\frac{x}{2} \cdot f'(x-1)$ trên cùng một đồ thị đồ thị ta có



Như vậy phương trình (*) có 4 nghiệm phân biệt.

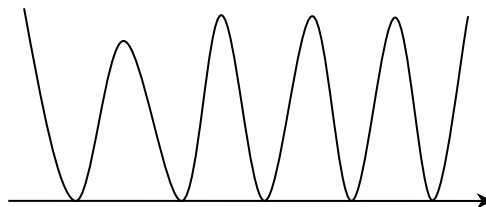
$$\text{Xét phương trình } f(x-1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 = \frac{3}{2} \\ (x-1)^2 = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{\sqrt{6}}{2} + 1 \\ x = \frac{5}{4} \\ x = \frac{3}{4} \end{cases}.$$

Thay 4 nghiệm này vào phương trình (*) thì ta thấy rằng các nghiệm của phương trình này không phải là nghiệm của phương trình (*).

Vậy hàm số đã cho có tất cả 9 điểm cực trị.

Cách 2.

Từ bảng biến thiên, ta nhận thấy rằng phương trình $f(x-1)=0$ có 4 nghiệm phân biệt khác 0, suy ra phương trình $g(x)=x^4[f(x-1)]^2=0$ có tất cả 5 nghiệm bội chẵn, khi đó đồ thị hàm số $g(x)$ sẽ có dạng như sau



Như vậy hàm $g(x)$ có 9 điểm cực trị.

Câu 17: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$						$+\infty$

Điểm cực tiểu của hàm số $y = f(3x)$ là

- A. $y = -3$ B. $x = \frac{2}{3}$ C. $x = 2$ D. $x = -\frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có:

$$y' = 3f'(3x)$$

Từ BBT của hàm số $y = f(x)$ ta có:

$$y' = 0 \Leftrightarrow f'(3x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = -1 \\ 3x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{3} \\ x = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$y' > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x < -1 \\ 3x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -\frac{1}{3} \\ x > \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$y' < 0 \Leftrightarrow -1 < 3x < 2 \Leftrightarrow -\frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}$$

Do đó, điểm cực tiểu của hàm số là $x = \frac{2}{3}$.

Câu 18: Cho hàm số $y = f(x)$, có đạo hàm $f'(x) = (x+1)^2(x-3)$. Tìm số điểm cực trị của hàm số

$$g(x) = f\left(\sqrt{x^2 + 2x + 6}\right)$$

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 5.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ x-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=3 \end{cases}.$$

Bảng xét dấu

Chủ đề 01: Cơ bản về tính đơn điệu của hàm số

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	

Xét hàm số $g(x) = f(\sqrt{x^2 + 2x + 6})$ có $g'(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2 + 2x + 6}} f'(\sqrt{x^2 + 2x + 6})$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ f'(\sqrt{x^2 + 2x + 6}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ \sqrt{x^2 + 2x + 6} = 3 \end{cases}$$

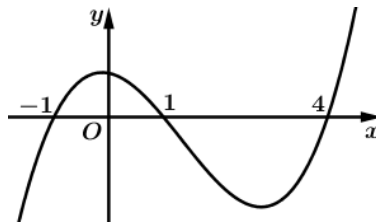
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x^2 + 2x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -3 \\ x = 1 \end{cases}$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(\sqrt{x^2 + 2x + 6})$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Từ bảng biến thiên. Ta thấy hàm số $g(x)$ có 3 điểm cực trị.

Câu 19: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình dưới đây:



Hàm số $y = f(x^2 + x)$ có bao nhiêu điểm cực đại?

A. 1.

B. 0.

C. 3.

D. 2.

Lời giải

Chọn D

Bảng xét dấu của $f'(x)$:

x	$-\infty$		-1		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Đặt $g(x) = f(x^2 + x)$, ta có $g'(x) = (2x+1)f'(x^2 + x)$,

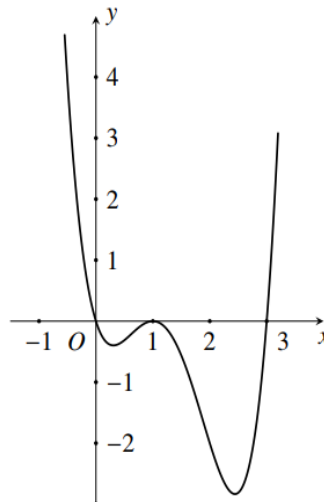
$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1=0 \\ x^2 + x = -1 \\ x^2 + x = 1 \\ x^2 + x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

Đặt $a = \frac{-1-\sqrt{17}}{2}$, $b = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$, $c = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $d = \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$; Ta có bảng xét dấu của $g'(x)$

x	$-\infty$	a	b	$-\frac{1}{2}$	c	d	$+\infty$	
$g'(x)$		-	0	+	0	-	0	+

Từ bảng xét dấu của $g'(x)$ ta có hàm số $g(x) = f(x^2 + x)$ có 2 điểm cực đại.

Câu 20: Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm $y = f'(x)$ hình vẽ sau



Hỏi hàm số $y = f(x^2 - 2x)$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

A. 1.

B. 3.

C. 2.

D. 0.

Lời giải

Chọn B

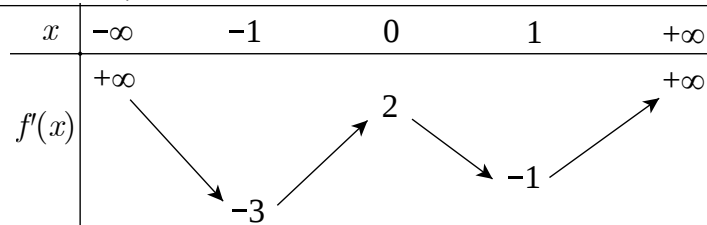
Ta có: $y' = (2x - 2)f'(x^2 - 2x)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow (2x - 2)f'(x^2 - 2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2 = 0 \\ f'(x^2 - 2x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - 2x = 0 \\ x^2 - 2x = 1 \\ x^2 - 2x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 0 \\ x = 2 \\ x = 1 \pm \sqrt{2} \\ x = 3 \\ x = -1 \end{cases}.$$

Dựa vào đồ thị ta suy ra $y' = 0$ có đúng 5 nghiệm bội lẻ là: $x = -1; x = 0; x = 1; x = 2; x = 3$ nên hàm số $y = f(x^2 - 2x)$ có 5 điểm cực trị.

Từ giả thiết đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và hàm số $y = f(x^2 - 2x)$ có 5 điểm cực trị suy ra hàm số $y = f(x^2 - 2x)$ có 3 điểm cực tiểu

Câu 21: Cho hàm số $f(x)$, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau:



Số điểm cực trị của hàm số $y = f(3x^2 - 6x + 2)$ là:

A. 3.

B. 5.

C. 7.

D. 9.

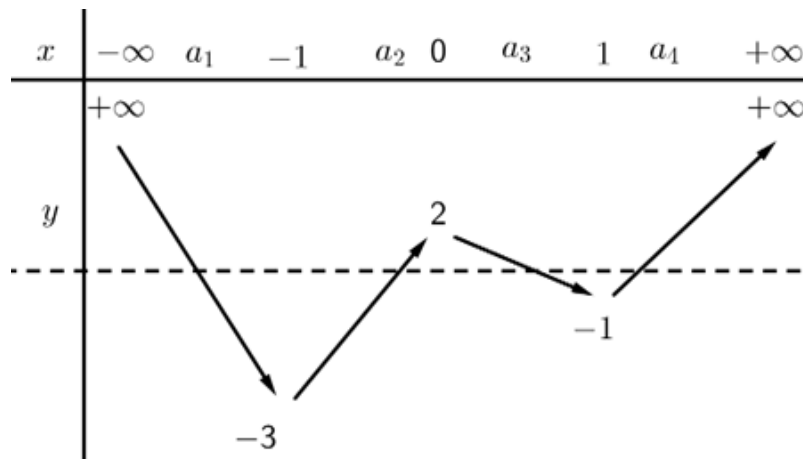
Lời giải

Chọn C

Ta có: $y' = (6x - 6) f'(3x^2 - 6x + 2)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow (6x - 6) f'(3x^2 - 6x + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ f'(3x^2 - 6x + 2) = 0 \quad (1) \end{cases}$$

BBT:



$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 6x + 2 = a_1 \in (-\infty; -1): (vn) \\ 3x^2 - 6x + 2 = a_2 \in (-1; 0) \quad (2n_0) \\ 3x^2 - 6x + 2 = a_3 \in (0; 1) \quad (2n_0) \\ 3x^2 - 6x + 2 = a_4 \in (1; +\infty) \quad (2n_0) \end{cases}$$

Vì phương trình $y' = 0$ có 7 nghiệm đơn phân biệt nên hàm số $y = f(3x^2 - 6x + 2)$ có 7 cực trị.

Câu 22: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = 4x^3 + 2x$ và $f(0) = 1$. Số điểm cực tiểu của hàm số $g(x) = f^3(x)$ là

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn B

Từ $f'(x) = 4x^3 + 2x \Rightarrow f(x) = x^4 + x^2 + C$. Do $f(0) = 1 \Rightarrow C = 1 \Rightarrow f(x) = x^4 + x^2 + 1$.

Ta có $g(x) = f^3(x) \Rightarrow g'(x) = 3f^2(x) \cdot f'(x) = 3(x^4 + x^2 + 1)^2 \cdot 2x(2x^2 + 1)$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 + x^2 + 1 = 0 \\ x = 0 \\ 2x^2 + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$$

Đạo hàm đổi dấu từ dương sang âm tại $x = 0$ nên hàm số có đúng 1 điểm cực tiểu.

Câu 23: Cho hàm số $f(x)$ bậc 4 có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$				
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$		-2	3		-2		$+\infty$	

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = x^4 [f(x+1)]^2$ là

A. 11.

B. 9.

C. 7.

D. 5.

Lời giải

Chọn B

Ta chọn hàm bậc bốn $y = f(x) = 5x^4 - 10x^2 + 3$ có bảng biến thiên như đề cho.

Ta có $g'(x) = 4x^3 [f(x+1)]^2 + x^4 \cdot 2 \cdot f(x+1) f'(x+1) = 0$

$$\Leftrightarrow 2x^3 \cdot f(x+1) \cdot [2f(x+1) + x f'(x+1)] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = 0 & (1) \\ f(x+1) = 0 & (2) \\ 2f(x+1) + x f'(x+1) = 0 & (3) \end{cases}$$

+ Phương trình có nghiệm bội $x = 0$.

+ Từ bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$, ta có phương trình $f(x) = 0$ có 4 nghiệm phân biệt $x \neq 1 \Rightarrow$ Phương trình: $f(x+1) = 0$ có 4 nghiệm phân biệt $x \neq 0$.

+ Giải: Đặt $x+1 = t \Rightarrow x = t-1$, phương trình trở thành:

$$\begin{aligned} 2f(t) + (t-1) \cdot f'(t) &= 0 \Leftrightarrow 2(5t^4 - 10t^2 + 3) + (t-1)(20t^3 - 20t) = 0 \\ &\Leftrightarrow 30t^4 - 20t^3 - 40t^2 + 20t + 6 = 0 \quad (3') \end{aligned}$$

Bấm MTCT thấy phương trình có 4 nghiệm phân biệt $t \neq 1$.

$\Rightarrow$ Phương trình có 4 nghiệm phân biệt $x \neq 0$.

Ngoài ra, nghiệm của phương trình không phải là nghiệm của phương trình vì những giá trị x thỏa mãn $f(x+1) = 0$ không thỏa mãn phương trình.

Do đó phương trình $g'(x) = 0$ có 9 nghiệm phân biệt nên hàm số $g(x) = x^4 [f(x+1)]^2$ có 9 điểm cực trị.

Câu 24: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)^2(x-2)$. Số điểm cực trị của hàm số

$$g(x) = f(\sqrt{x^2 + 2x + 5}) \text{ là}$$

A. 3.

B. 0.

C. 1.

D. 2.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2(x-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}.$$

$$g'(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+5}} f'(\sqrt{x^2+2x+5}).$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+5}} f'(\sqrt{x^2+2x+5}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ f'(\sqrt{x^2+2x+5}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+2x+5} = 1 \text{ (VN)} \\ \sqrt{x^2+2x+5} = 2 \Leftrightarrow x^2+2x+1 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \end{cases} \end{cases}.$$

Bảng xét dấu $g'(x)$:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$

Suy ra: Đáp án C

Câu 25: Cho hàm số trùng phương $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	-1	1	-1	$+\infty$

Hỏi hàm số $y = g(x) = [f(x^2) - 1]^4$ có bao nhiêu cực trị?

A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. 6.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $g'(x) = 4.2x.f'(x^2)[f(x^2) - 1]^3$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(x^2) = 0 \\ f(x^2) = 1 \end{cases}$

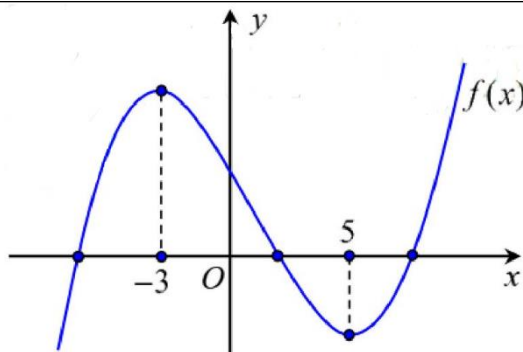
$$f'(x^2) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = -1 \text{ (VN)} \\ x^2 = 0 \\ x^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

$$f(x^2) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = a < -1 \text{ (VN)} \\ x^2 = 0 \\ x^2 = b > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \sqrt{b} \\ x = -\sqrt{b} \end{cases}$$

Do đó các cực trị của hàm số $y = g(x)$ là $x = 0, x = 1, x = -1, x = \sqrt{b}, x = -\sqrt{b}$

Vậy hàm số có 5 cực trị.

Câu 26: Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ. Hỏi hàm số $y = f(2x^3 - 6x)$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?



A. 5.

B. 7.

C. 6.

D. 8.

Lời giải**Chọn C**

Dựa vào đồ thị hàm số đã cho, ta thấy hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại các điểm $x = -3, x = 5$.

$$\text{Do đó: } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 5 \end{cases}.$$

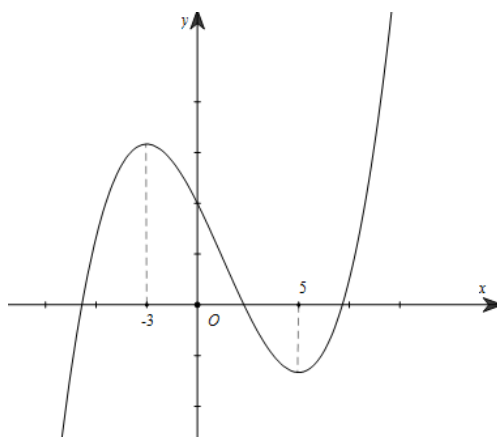
Đặt $g(x) = f(2x^3 - 6x)$. Ta có $g'(x) = (6x^2 - 6)f'(2x^3 - 6x)$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 6x^2 - 6 = 0 \\ f'(2x^3 - 6x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \\ 2x^3 - 6x = -3 \\ 2x^3 - 6x = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \\ x \approx 1,38 \\ x \approx -1,94 \\ x \approx 0,56 \\ x \approx 2,05 \end{cases}.$$

Các nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$ đều là các nghiệm đơn phân biệt nên $g'(x)$ đổi dấu qua các nghiệm đó.

Vậy hàm số $y = f(2x^3 - 6x)$ có tất cả 6 điểm cực trị.

Câu 27: Cho đồ thị hàm số bậc ba $y = f(x)$ như hình vẽ. Hỏi hàm số $y = f(2x^3 - 6x)$ có tất cả bao nhiêu cực trị?



A. 5.

B. 7.

C. 6.

D. 8.

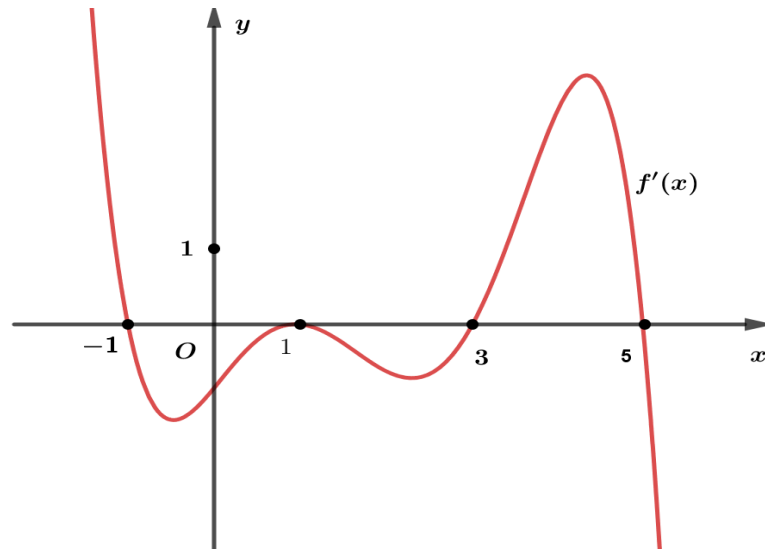
Lời giải**Chọn C**

Hàm số $y = f(2x^3 - 6x)$ có $y' = (6x^2 - 6)f'(2x^3 - 6x)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 6x^2 - 6 = 0 \\ 2x^3 - 6x = -3 \Leftrightarrow \\ 2x^3 - 6x = 5 \end{cases} \begin{cases} x = \pm 1 \\ x \approx -1,942 \\ x \approx 1,384 \\ x \approx 0,558 \\ x \approx 2,054 \end{cases}$$

Ta thấy $y' = 0$ có 6 nghiệm đơn nên hàm số đã cho có 6 cực trị.

Câu 28: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi hàm số $y = f(x) = 6 - 2\sqrt{6x - x^2}$ có tất cả bao nhiêu cực đại?



A. 1.

B. 5.

C. 3.

D. 7.

Lời giải

Chọn C

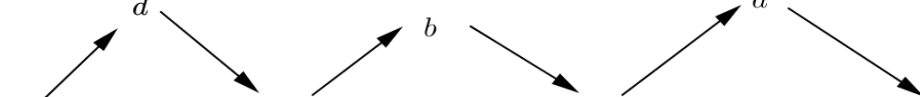
Đặt $t(x) = 6 - 2\sqrt{6x - x^2}$, $x \in [0; 6]$

Ta có: $\forall x \in (0; 6)$, $t'(x) = \frac{2x-6}{\sqrt{6x-x^2}} \Rightarrow t'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3 \Rightarrow t_{CT} = t(3) = 0$

Từ đồ thị có BBT cho $y = f(t)$:

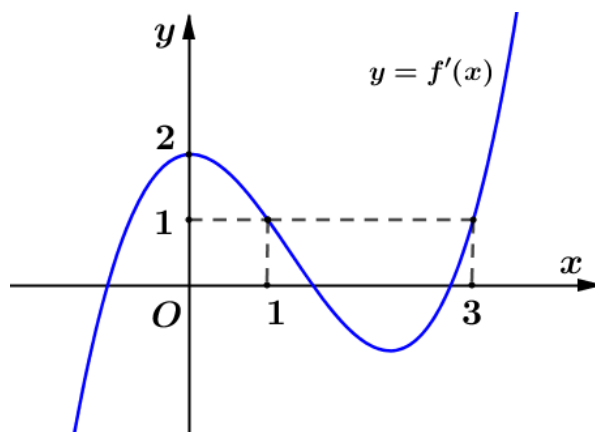
t	$-\infty$	-1	0	3	5	$+\infty$	
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	$-$
$y = f(t)$							

BBT ghép cho hàm $y = g(x) = f(6 - 2\sqrt{6x - x^2}) = f(t)$

x	0	3				6	
t	6	5	3	0	3	5	6
$y = f(t)$							

Từ BBT ta có hàm số $y = f(6 - 2\sqrt{6x - x^2})$ có 3 cực đại.

Câu 29: Cho hàm số $y = f(x)$. Biết rằng hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Số điểm cực trị của hàm số $y = 2021^{f(x)} + 2020^{f(x)}$ là

A. 2

B. 5

C. 3

D. 4

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y' = f'(x)(2021^{f(x)} \ln 2021 + 2020^{f(x)} \ln 2020)$

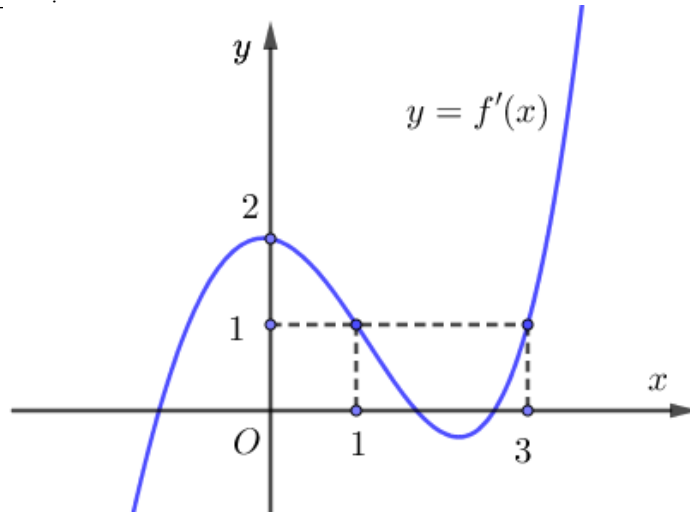
Do $2021^{f(x)} \ln 2021 + 2020^{f(x)} \ln 2020 > 0, \forall x$ nên $y' = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \in (-\infty; 0) \\ x = x_2 \in (1; 3) \\ x = x_3 \in (1; 3), x_1 < x_2 \end{cases}$

Bảng biến thiên của hàm số $y = 2021^{f(x)} + 2020^{f(x)}$

x	$-\infty$	x_1	x_2	x_3	$+\infty$		
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$							

Dựa vào bảng biến thiên hàm số $y = 2021^{f(x)} + 2020^{f(x)}$ có 3 điểm cực trị.

Câu 30: Cho hàm số $y = f(x)$. Biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Số điểm cực trị của hàm số $y = 2021^{f(x)} + 2020^{f(x)}$ là



A. 2.

B. 5.

C. 3.

D. 4.

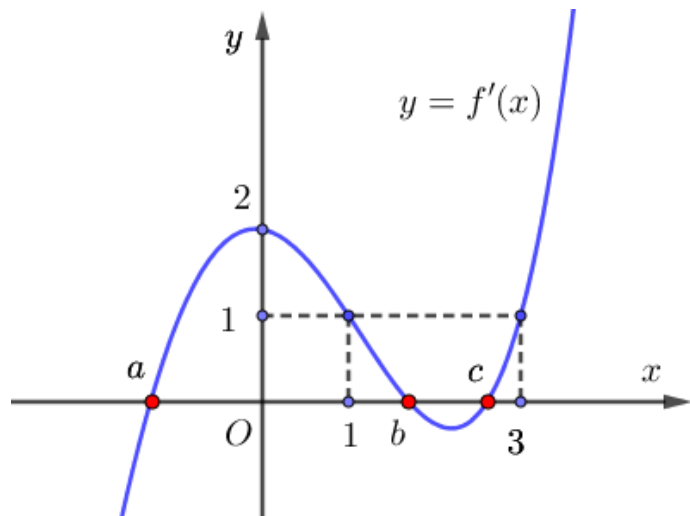
Lời giải

Chọn C

Ta có $y' = f'(x) \cdot 2021^{f(x)} \cdot \ln 2021 + f'(x) \cdot 2020^{f(x)} \cdot \ln 2020$.

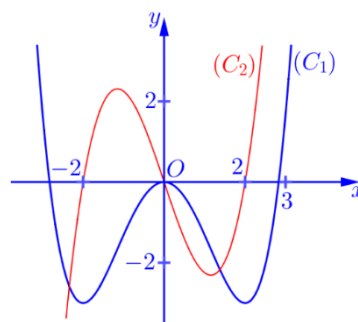
$= f'(x) \cdot [2021^{f(x)} \cdot \ln 2021 + 2020^{f(x)} \cdot \ln 2020]$.

Do $2021^{f(x)} \cdot \ln 2021 + 2020^{f(x)} \cdot \ln 2020 > 0, \forall x \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = a \\ x_2 = b \\ x_3 = c \end{cases}$



Vậy hàm số $y = 2021^{f(x)} + 2020^{f(x)}$ có ba điểm cực trị.

Câu 31: Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị (C_1) và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị (C_2) như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của đồ thị hàm số $g(x) = f[e^{-x} \cdot f(x)]$ trên khoảng $(-\infty; 3)$ là



A. 9.

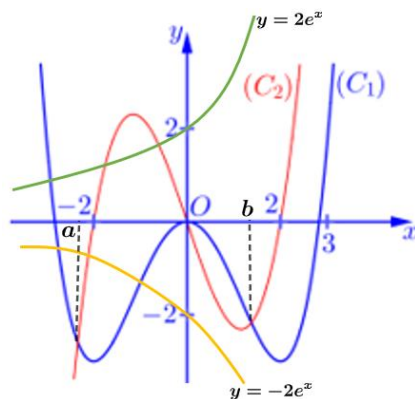
B. 6.

C. 7.

D. 8.

Lời giải**Chọn D**

Ta có $g'(x) = e^{-x} \cdot [f'(x) - f(x)] \cdot f'(e^{-x} - f(x))$.



$$\text{Xét } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) - f(x) = 0 \\ f(e^{-x} \cdot f(x)) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = f(x) \\ f(e^{-x} \cdot f(x)) = 0 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ x = 0 \\ x = b \\ e^{-x} \cdot f(x) = -2 \\ e^{-x} \cdot f(x) = 0 \\ e^{-x} \cdot f(x) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ x = 0 \\ x = b \\ f(x) = 2e^{-x} \\ f(x) = 0 \\ f(x) = 2e^x \end{cases}$$

Từ đồ thị ta suy ra được:

Phương trình $f(x) = -2e^x$ có nghiệm đơn.

Phương trình $f(x) = 0$ có 2 nghiệm đơn và 1 nghiệm bội chẵn ($x = 0$).

Phương trình $f(x) = 2e^x$ có 1 nghiệm đơn.

Vậy $g'(x) = 0$ có 8 nghiệm đơn nên hàm số $g(x)$ có 8 điểm cực trị.

Câu 32: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x^2 + x - 2)(x - 3)^3(2^x - 8)$. Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ là

A. 4.

B. 2.

C. 1.

D. 3.

Lời giải**Chọn B**

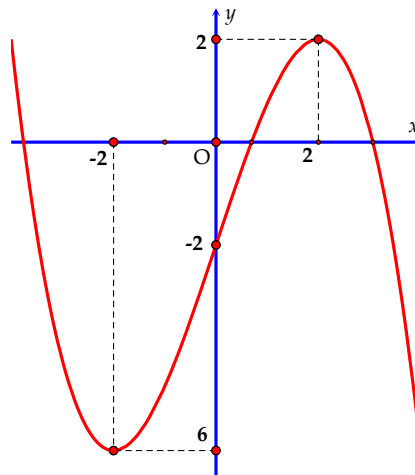
Ta có bảng xét dấu cho $f'(x)$ như sau:

Chủ đề 01: Cơ bản về tính đơn điệu của hàm số

x	$-\infty$		-2		1		3		$+\infty$
$x^2 + x - 2$		+	0	-	0	+		+	
$(x - 3)^3$		-		-		-	0	+	
$2^x - 8$		-		-		-	0	+	
$f'(x)$		+	0	-	0	+	0	+	

Dựa vào bảng xét dấu trên ta thấy rằng $y = f(x)$ có 2 điểm cực trị.

Câu 33: Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với $a \neq 0$ có đồ thị hàm số như hình bên. Điểm cực đại của đồ thị hàm số $y = f(2-x) + 3$ là



A. $(0; 5)$.

B. $(0; 2)$.

C. $(5; -6)$.

D. $(5; 3)$.

Lời giải

Chọn A

Dựa vào đồ thị hàm số đã cho ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$ và $f'(x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -2 \\ x > 2 \end{cases}$.

Ta có $y' = -f'(2-x)$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2-x = -2 \\ 2-x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$.

Giả sử $y' > 0 \Leftrightarrow -f'(2-x) > 0 \Leftrightarrow f'(2-x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2-x < 2 \\ 2-x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 4 \\ x < 0 \end{cases}$.

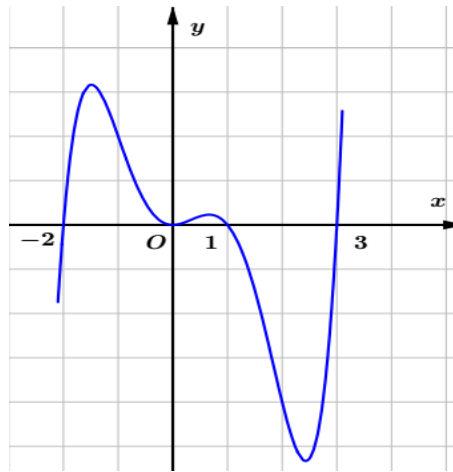
Do đó ta có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	0	4	$+\infty$		
y'	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$y(0)$		$y(4)$		$+\infty$

Vậy hàm số $y = f(2-x) + 3$ đạt cực trị tại $x = 0$ khi $y(0) = f(2) + 3 = 2 + 3 = 5$.

Vậy tọa độ điểm cực đại là $(0; 5)$.

Câu 34: Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ sau.



Hàm số $g(x) = f(x^2)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 4.

B. 3.

C. 5.

D. 2.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Có } g'(x) = [f(x^2)]' = 2xf'(x^2)$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(x^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$$

Bảng xét dấu $g'(x)$

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	0	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$2x$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f'(x^2)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Từ bảng xét dấu của $g'(x)$ suy ra hàm số có 5 điểm cực trị.

Câu 35: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$ và bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ.

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	2018	-2018	$+\infty$	

Xét hàm số $g(x) = |f(x-2017) + 2018|$ có bao nhiêu cực trị?

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 5.

Lời giải

Chọn B

Đồ thị hàm số $u(x) = f(x - 2017) + 2018$ có được từ đồ thị $f(x)$ bằng cách tịnh tiến đồ thị $f(x)$ sang phải 2017 đơn vị và lên trên 2018 đơn vị. Suy ra bảng biến thiên của $u(x)$.

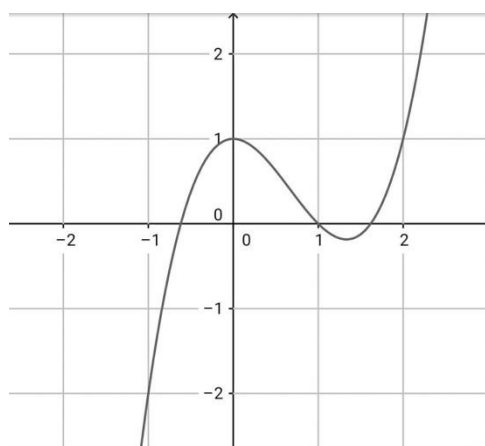
x	$-\infty$	2016		2020		$+\infty$
$u'(x)$		+	0	-	0	+
$u(x)$	$-\infty$	↗ 4036		↘ 0		↗ $+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra đồ thị hàm số $u(x) = f(x - 2017) + 2018$ ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x) = |u(x)|$ như hình vẽ bên dưới

x	$-\infty$	x_1	2016		2020		$+\infty$						
$u'(x)$		-	0	+	0	-	0	+					
$ u(x) $	$+\infty$	↘		0	↗		4036	↘		0	↗		$+\infty$

Từ BBT của hàm số $g(x) = |u(x)|$ ta thấy hàm số có 3 điểm cực trị.

Câu 36: Cho hàm số $f(x)$ với đạo hàm $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $g(x) = f(x) - \frac{x^3}{3} + x^2 - x + 2$ đạt cực đại tại điểm nào?



A. $x = 2$.

B. $x = -1$.

C. $x = 1$.

D. $x = 0$.

Lời giải

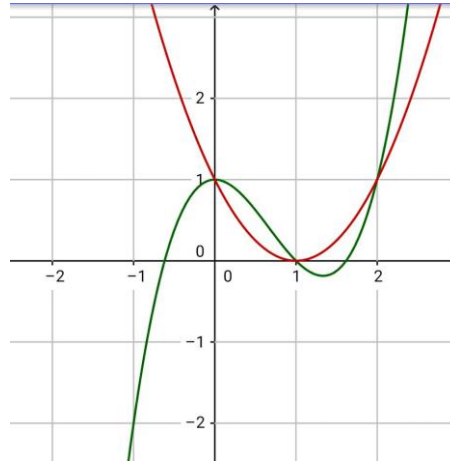
Chọn C

Ta có $g'(x) = f'(x) - (x - 1)^2$

Do đó $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = (x - 1)^2$

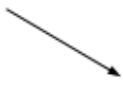
Đây là phương trình hoành độ giao điểm của các đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và $y = x^2 - 2x + 1$.

Vẽ đồ thị của các hàm số $y = f'(x); y = x^2 - 2x + 1$ trên cùng một hệ trục tọa độ như hình vẽ sau:



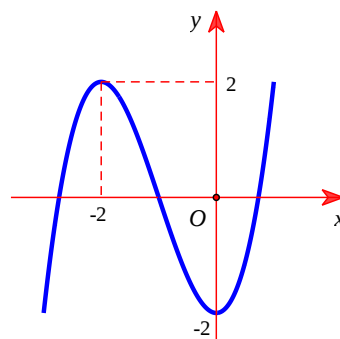
$$\text{Suy ra } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}.$$

BBT của hàm số $y = g(x)$ như sau:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	
$g(x)$									

Dựa vào BBT ta thấy hàm số $y = g(x)$ có điểm cực đại $x = 1$.

Câu 37: Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(-2x^2 + 4x)$ là



A. 2.

B. 5.

C. 4.

D. 3.

Lời giải

Chọn B

Ta có $g'(x) = (-4x + 4) \cdot f'(-2x^2 + 4x)$

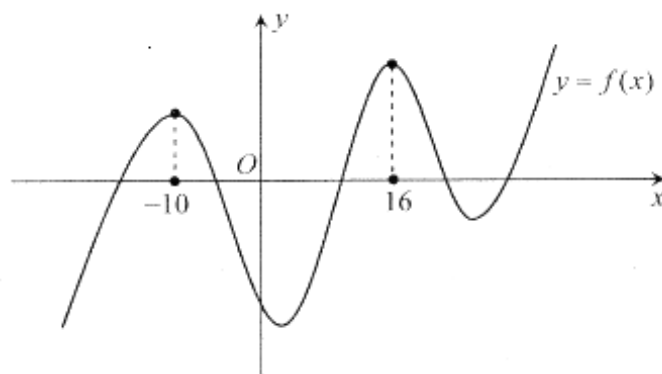
$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -4x + 4 = 0 \\ f'(-2x^2 + 4x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ f'(-2x^2 + 4x) = 0 \end{cases}$$

$$\text{Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } f'(-2x^2 + 4x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2x^2 + 4x = -2 \\ -2x^2 + 4x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \pm \sqrt{2} \\ x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Phương trình $g'(x) = 0$ có 5 nghiệm bội lẻ nên hàm số $g(x)$ có 5 điểm cực trị

Câu 38: Cho hàm số $y = f(x)$ có tập xác định là $D = \mathbb{R}$ và có đạo hàm xác định trên $\mathbb{R}$, đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ bên dưới. Hỏi hàm số $y = f(x^3 - 12x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?



A. 11.

B. 10.

C. 12.

D. 9.

Lời giải

Chọn B

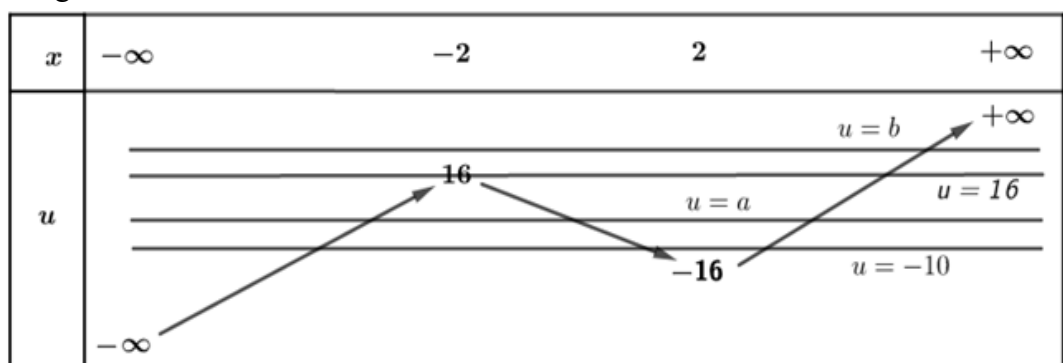
Hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại các điểm $x = -10$; $x = a \in (0; 16)$; $x = 16$; $x = b > 16$

Xét hàm số $g(x) = f(u) = f(x^3 - 12x)$ với $u = x^3 - 12x$

Công thức đếm nhanh SĐCT của một hàm hợp:

$$\text{SĐCT} \{f(u)\} = \text{SĐCT} \{u\} + \text{SNBL} \left\{ \begin{array}{l} u = b \\ u = 16 \\ u = a \\ u = -10 \end{array} \right\}$$

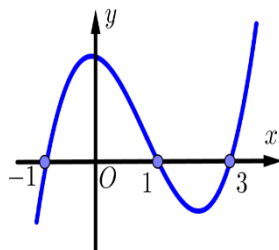
Ta có bảng biến thiên của $u = x^3 - 12x$



Suy ra: $\text{SDCT}\{u\} = 2$ và có: $\text{SNBL}\left\{\begin{matrix} u=b \\ u=16 \\ u=a \\ u=-10 \end{matrix}\right\} = 8$

Suy ra: $\text{SDCT}\{f(u)\} = \text{SDCT}\{u\} + \text{SNBL}\left\{\begin{matrix} u=b \\ u=16 \\ u=a \\ u=-10 \end{matrix}\right\} = 2 + 8 = 10.$

Câu 39: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Số điểm cực trị của hàm số $y = f(xe^x)$ bằng

A. 3.

B. 1.

C. 4.

D. 2.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = (f(xe^x))' = (xe^x)' \cdot f'(xe^x) = e^x \cdot (x+1) \cdot f'(xe^x).$

Cho $y' = 0 \Leftrightarrow e^x \cdot (x+1) \cdot f'(xe^x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ xe^x = -1(VN) \\ xe^x = 1 \\ xe^x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0,567... \\ x = 1,049... \end{cases}$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	$0,567\dots$	$1,049\dots$	$+\infty$			
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y								

Vậy hàm số $y = f(xe^x)$ có 3 điểm cực trị.

Câu 40: Cho hàm số bậc bốn trùng phương $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$							$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $y = \frac{1}{x^4} [f(x) - 1]^4.$

A. 6.

B. 7.

C. 5.

D. 4.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } y = \frac{1}{x^4} [f(x) - 1]^4 = \left[\frac{f(x) - 1}{x} \right]^4.$$

$$\text{Đặt } f(x) = ax^4 + bx^2 + c.$$

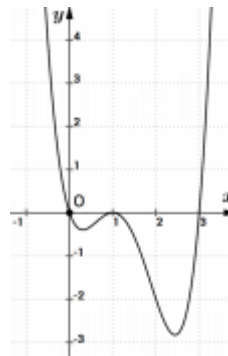
$$\text{Dựa vào bảng biến thiên, ta có hệ } \begin{cases} c = 1 \\ a + b + c = -1 \\ 4a + 2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -4 \\ c = 1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = 2x^4 - 4x^2 + 1.$$

$$\text{Khi đó } y = \left[\frac{f(x) - 1}{x} \right]^4 = \left(\frac{2x^4 - 4x^2}{x} \right)^4 = (2x^3 - 4x)^4.$$

$$\text{Suy ra } y' = 8(3x^2 - 2) \cdot (2x^3 - 4x)^3 \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{\sqrt{6}}{3} \\ x = 0 \\ x = \pm \sqrt{2} \end{cases}.$$

Các nghiệm trên đều là các nghiệm bội lẻ nên hàm số đã cho có 5 điểm cực trị.

Câu 41: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ dưới đây:



Hỏi hàm số $y = f(x^2)$ có bao nhiêu điểm cực đại và bao nhiêu điểm cực tiểu?

A. 2 điểm cực đại, 1 điểm cực tiểu.

B. 2 điểm cực tiểu, 1 điểm cực đại.

C. 2 điểm cực đại, 3 điểm cực tiểu.

D. 2 điểm cực tiểu, 3 điểm cực đại.

Lời giải

Chọn B

Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$, ta thấy:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 3 \end{cases}.$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 0) \cup (3; +\infty)$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (0; 1) \cup (1; 3).$$

$$\text{Ta có } y' = (f(x^2))' = 2x \cdot f'(x^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ f'(x^2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\pm 1 \\ x=\pm\sqrt{3} \end{cases}.$$

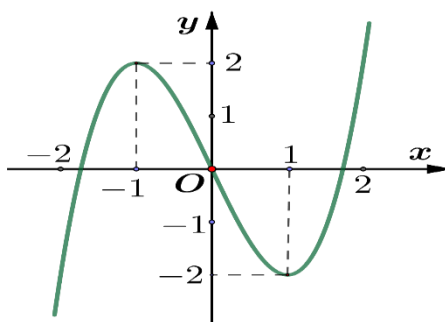
$$f'(x^2) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 < 0 \\ x^2 > 3 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty; -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; +\infty).$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	0	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$f'(x^2)$	+	0	-	0	-	0	+
$2xf'(x^2)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x^2)$							

Vậy hàm số $y = f(x^2)$ có 2 điểm cực tiểu và 1 điểm cực đại.

Câu 42: Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm số bậc ba, có đồ thị như hình vẽ bên dưới



Hàm số $g(x) = f(x^2 - 1)$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

A. 4.

B. 3.

C. 2.

D. 1.

Lời giải

Chọn C

Đạo hàm $g'(x) = 2xf'(x^2 - 1)$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ f'(x^2-1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x^2-1=-1 \\ x^2-1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\pm\sqrt{2} \end{cases}.$$

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+	0	-

Ta có bảng xét dấu :

Từ BXD ta thấy hàm số $y = g(x)$ đạt cực tiểu tại 2 điểm $x = -\sqrt{2}; x = \sqrt{2}$.

Câu 43: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ có đạo hàm $y' = f'(x) = x^2 - 4x - 5$. Số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = f(x^3 - 3x^2)$ là

A. 2.

B. 7.

C. 6.

D. 4.

Lời giải

Chọn D

Giải phương trình $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \\ x = 5 \end{cases}$, trong đó $x = -1$ là nghiệm bội chẵn.

Xét hàm số $y = f(x^3 - 3x^2) \Rightarrow y' = (3x^2 - 6x) f'(x^3 - 3x^2)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 6x = 0 \\ f'(x^3 - 3x^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \\ x^3 - 3x^2 = -1 & 1. \\ x^3 - 3x^2 = 1 & 2. \\ x^3 - 3x^2 = 5 & 3. \end{cases}$$

Xét hàm số $y = x^3 - 3x^2$, ta có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$		0		-4		$+\infty$

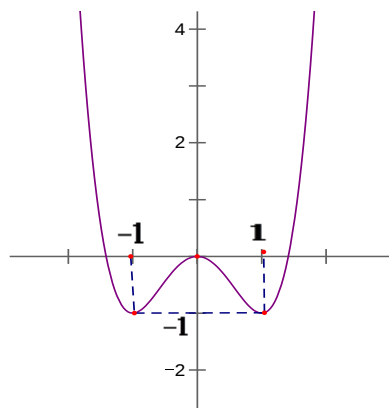
Từ bảng biến thiên của hàm số $y = x^3 - 3x^2$ suy ra phương trình 2 ; 3 có nghiệm duy nhất.

Và vì $x = -1$ là nghiệm kép của phương trình $f'(x) = 0$ nên các nghiệm ở phương trình 1 đều là nghiệm bội chẵn.

Suy ra đồ thị hàm số $y = f(x^3 - 3x^2)$ có 4 điểm cực trị.

Câu 44: Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x^3 + f(x))$ là



A. 11.

B. 9.

C. 8.

D. 10.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $g'(x) = [3x^2 + f'(x)] f'(x^3 + f(x))$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow [3x^2 + f'(x)] f'(x^3 + f(x)) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + f'(x) = 0 & (1) \\ f'(x^3 + f(x)) = 0 & (2) \end{cases}$$

+) Xét phương trình (1)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 4ax^2 + 3x + 2b = 0 & (3) \end{cases}$$

Vì hàm số $y = f(x)$ có 3 điểm cực trị nên $ab < 0 \Rightarrow \Delta_{(3)} = 9 - 32ab > 0 \Rightarrow (3)$ có 2 nghiệm phân biệt khác 0.

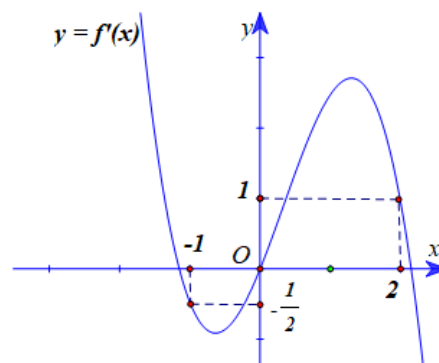
$$+) \text{ Xét phương trình (2): } f'(x^3 + f(x)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + f(x) = -1 & (2a) \\ x^3 + f(x) = 0 & (2b) \\ x^3 + f(x) = 1 & (2c) \end{cases}$$

Xét hàm số $h(x) = x^3 + f(x)$; hàm số $h(x)$ có 3 điểm cực trị và hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ với $h(0) = 0 + f(0) = 0$, do đó:

Phương trình (2a) có 2 nghiệm, (2b) có 2 nghiệm khác 0 và 1 nghiệm kép $x = 0$, (2c) có 2 nghiệm.)

Vậy hàm số $y = g(x)$ có 9 điểm cực trị.

Câu 45: Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ ($ae < 0$). Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Hàm số $y = |4f(x) - x^2|$ có bao nhiêu điểm cực tiểu



A. 3.

B. 5.

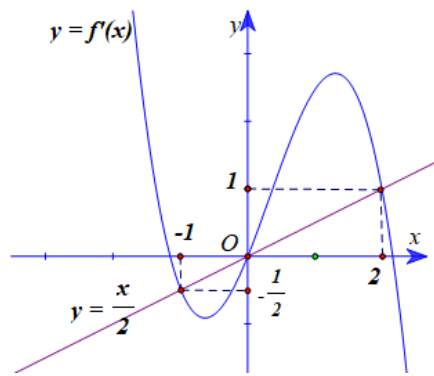
C. 4.

D. 2.

Lời giải

Chọn A

Đặt $g(x) = 4f(x) - x^2$. Ta có $g'(x) = 4f'(x) - 2x = 2(2f'(x) - x)$.



Ta có $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{x}{2}$. Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và đường thẳng $y = \frac{x}{2}$ suy ra

$$f'(x) = \frac{x}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 2 \end{cases}.$$

Theo hình vẽ ta có $a < 0$, mà $ae < 0 \Rightarrow e > 0$ suy ra $g(0) = 4f(0) = 4e > 0$.

Bảng biến thiên của $y = |g(x)|$ như sau:

x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-	0	-
$g(x)$	$-\infty$	$g(-1)$	$g(0)$	$g(2)$	$-\infty$
$ g(x) $	$+\infty$	0	$g(0)$	0	$+\infty$

Dựa vào đồ thị $y = |g(x)|$ suy ra hàm số $y = |4f(x) - x^2|$ có 3 điểm cực tiểu.

Câu 46: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và bảng biến thiên của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	0	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	0	-1	$-\sqrt{3}$	$+\infty$

Hỏi hàm số $g(x) = f(x^4) - 4x$ có mấy điểm cực tiểu?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có $g'(x) = 4x^3 f'(x^4) - 4 \Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 f'(x^4) = 1 (*)$.

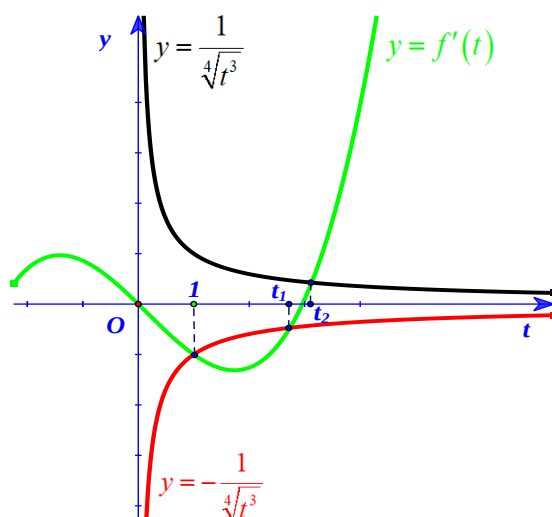
Nhận thấy $x=0$ không là nghiệm của phương trình (*) nên chia 2 vế cho x^3 , ta được

$$f'(x^4) = \frac{1}{x^3}$$

$$\text{Đặt } t = x^4; (t > 0) \Rightarrow x^3 = \begin{cases} \sqrt[4]{t^3}, & x > 0 \\ -\sqrt[4]{t^3}, & x < 0 \end{cases}. \text{ Khi đó ta có } \begin{cases} f'(t) = \frac{1}{\sqrt[4]{t^3}}, & (\text{khi } x > 0) \\ f'(t) = -\frac{1}{\sqrt[4]{t^3}}, & (\text{khi } x < 0) \end{cases} \quad (*)$$

Số nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$ tương ứng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f'(t)$ và hai đồ thị hàm số $y = \pm \frac{1}{\sqrt[4]{t^3}}$ khi $t > 0$.

Dựa vào bảng biến thiên của $f'(x)$, ta vẽ mô phỏng đồ thị hàm số $y = f'(t)$ và vẽ đồ thị hàm số $y = \frac{1}{\sqrt[4]{t^3}}$, $y = -\frac{1}{\sqrt[4]{t^3}}$ khi $t > 0$ như sau:



$$\text{Khi đó } (*) \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=t_1, t_1 > 1 \\ t=t_2, t_2 > t_1 > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^4=1, x < 0 \\ x^4=t_1, x < 0 \\ x^4=t_2, x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=-\sqrt[4]{t_1} \\ x=\sqrt[4]{t_2} \end{cases}$$

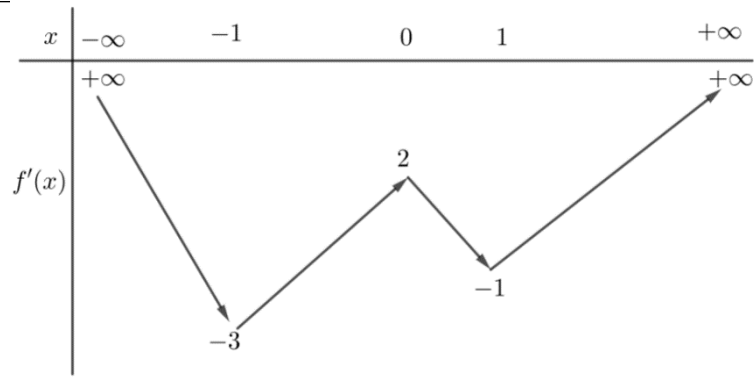
Để thấy $x > \sqrt[4]{t_2}$ thì $g'(x) = f'(x^4) - \frac{1}{x^3} > 0$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-\sqrt[4]{t_1}$	-1	$\sqrt[4]{t_2}$	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+	0	+

Vậy hàm số đã cho có 2 điểm cực tiểu.

Câu 47: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau



Hỏi hàm số $g(x) = f\left(\left|\frac{\ln(x^2+1)-2}{2}\right|\right)$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

A. 9

B. 4

C. 7

D. 5

Lời giải

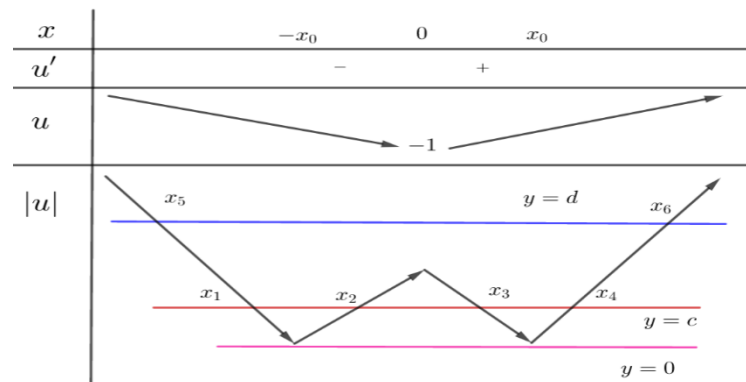
Chọn D

Đặt $u = \frac{\ln(x^2+1)-2}{2} \Rightarrow u' = \frac{x}{x^2+1}; u' = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Dựa theo bảng biến thiên đề bài ta có

$$f'(|u|) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |u| = a \in (-\infty; -1) \\ |u| = b \in (-1; 0) \\ |u| = c \in (0; 1) \\ |u| = d > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |u| = c \in (0; 1) & (1) \\ |u| = d > 1 & (2) \end{cases}$$

Với $|x_0| = \sqrt{e^2 - 1}$ thì $|u|$ có 3 cực trị, trong đó 1 cực đại, 2 cực tiểu. Bảng biến thiên mới theo biến u là

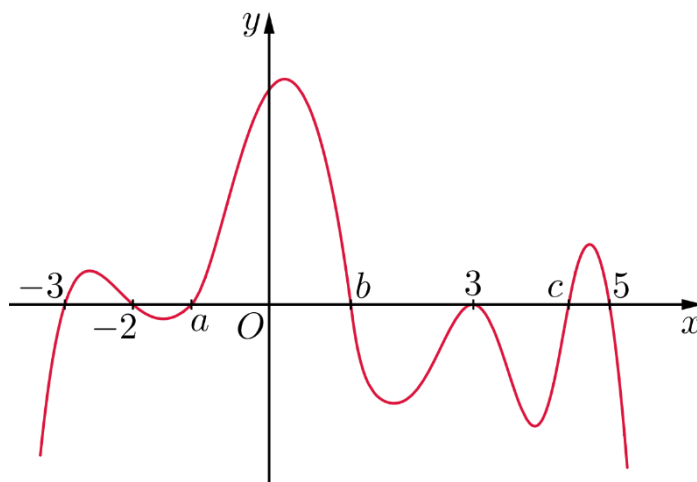


Hai phương trình lần lượt có 4 và 2 nghiệm như sau

$$\text{Giải } |u| = c \in (0; 1) \Rightarrow \begin{cases} x_1 < -x_0 \\ x_2 \in (-x_0; 0) \\ x_3 \in (0; x_0) \\ x_4 \in (x_0; +\infty) \end{cases} \text{ và giải } |u| = d > 1 \Rightarrow \begin{cases} x_5 < x_1 \\ x_6 > x_4 \end{cases}$$

Chú ý c là điểm cực đại và d là điểm cực tiểu nên từ thu được 2 cực tiểu, từ thu được 1 cực tiểu. Kết luận tổng cộng 5 điểm cực tiểu.

Câu 48: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ cắt trục hoành tại các điểm có hoành độ $-3; -2; a; b; 3; c; 5$ với $-\frac{4}{3} < a < -1; 1 < b < \frac{4}{3}; 4 < c < 5$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m để hàm số $y = f(2|x| + m - 3)$ có 7 điểm cực trị?



A. 3.

B. 2.

C. 4.

D. Vô số.

Lời giải**Chọn A**Xét hàm số $h(x) = f(2x + m - 3)$ Ta có: $h'(x) = 2f'(2x + m - 3) = 0 \Leftrightarrow f'(2x + m - 3) = 0$ Từ đồ thị của hàm số $f'(x)$ suy ra $f'(2x + m - 3) = 0 \Leftrightarrow 2x + m - 3 = k \Leftrightarrow x = \frac{k + 3 - m}{2}$ với $k \in \{-3; -2; a; b; 3; c; 5\}$ ($-\frac{4}{3} < a < -1; 1 < b < \frac{4}{3}; 4 < c < 5$)

Hàm số $y = f(2|x| + m - 3)$ có 7 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ hàm số $h(x) = f(2x + m - 3)$ có 3 cực trị có hoành độ dương, mà 3 là nghiệm bội chẵn của $f'(x)$ nên hàm số $h(x) = f(2x + m - 3)$ có 3 cực trị có hoành độ dương $\Leftrightarrow$ phương trình $h'(x) = 0$ có 3 nghiệm dương phân biệt khác $\frac{6-m}{2}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a+3-m}{2} < 0 \\ \frac{b+3-m}{2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+3-m < 0 \\ b+3-m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > a+3 \\ m < b+3 \end{cases} \Leftrightarrow a+3 < m < b+3$$

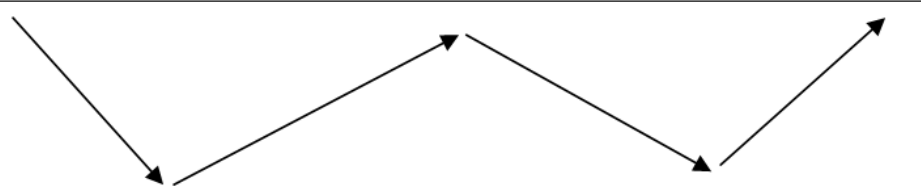
Do $-\frac{4}{3} < a < -1$ và $1 < b < \frac{4}{3}$ nên $-1+3 \leq m \leq 1+3$ hay $2 \leq m \leq 4$ Vậy có 3 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán là 2; 3; 4.

Câu 49: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x+2)(x-3)$. Điểm cực đại của hàm số $g(x) = f(x^2 - 2x)$ là

A. $x = 3$.B. $x = 0$.C. $x = 1$.D. $x = -1$.**Lời giải****Chọn C**Ta có: $g'(x) = (2x - 2)f'(x^2 - 2x)$;

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2 = 0 \\ f'(x^2 - 2x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ (x^2 - 2x)^2 = 0 \\ x^2 - 2x = -2 \quad (\text{v« nghiÖm}) \\ x^2 - 2x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 0 \text{ (kĐp)} \\ x = 2 \text{ (kĐp)} \\ x = -1 \\ x = 3 \end{cases}.$$

Bảng xét dấu của $f(x)$:

x	$-\infty$	-1	0	1	2	3	$+\infty$			
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$										

Vậy điểm cực đại của hàm số là $x = 1$.

Câu 50: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên của đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	-3	2	-1	$+\infty$

Hàm số $g(x) = f\left(\left|\frac{\ln(x^2 + 1) - 2}{2}\right|\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 5.

B. 9.

C. 11.

D. 7.

Lời giải

Chọn B

Xét $t(x) = \frac{\ln(x^2 + 1) - 2}{2}$, ta có bảng giá trị của $|t(x)|$

x	$-\infty$	x_1	0	x_2	$+\infty$
$ t(x) $	$+\infty$	0	1	0	$+\infty$

Ta có $g(x) = f\left(\left|\frac{\ln(x^2 + 1) - 2}{2}\right|\right) = f(|t(x)|)$

Hàm số không có đạo hàm tại hai điểm $x = \pm\sqrt{e^2 - 1}$.

Tại mọi điểm $x \neq \pm\sqrt{e^2 - 1}$, ta có:

$$g'(x) = f'(|t(x)|) \cdot (|t(x)|)' = \begin{cases} \frac{f'(|t(x)|) \cdot x}{x^2 + 1} & \text{khi } x \in (-\infty; -\sqrt{e^2 - 1}) \cup (\sqrt{e^2 - 1}; +\infty) \\ -\frac{f'(|t(x)|) \cdot x}{x^2 + 1} & \text{khi } x \in (-\sqrt{e^2 - 1}; \sqrt{e^2 - 1}) \end{cases} \quad (*)$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ |t(x)| = t_1 & (t_1 < -1) \quad (1) \\ |t(x)| = t_2 & (-1 < t_2 < 0) \quad (2) \\ |t(x)| = t_3 & (0 < t_3 < 1) \quad (3) \\ |t(x)| = t_4 & (t_4 > 1) \quad (4) \end{cases}$$

Dựa vào bảng giá trị hàm $|t|$, suy ra:

+) Phương trình (1), (2) vô nghiệm.

+) Phương trình (3) có 4 nghiệm phân biệt khác 0.

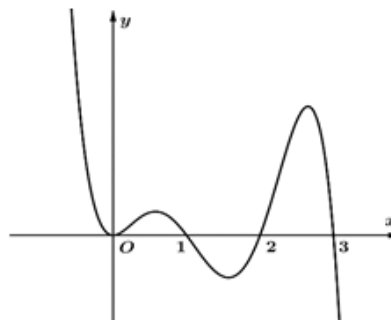
+) Phương trình (4) có 2 nghiệm phân biệt khác 0 và khác các nghiệm của phương trình (3).

$\Rightarrow g'(x) = 0$ có 7 nghiệm và qua các nghiệm này $g'(x)$ đều đổi dấu.

Từ (*), ta thấy $g'(x)$ cũng đổi dấu khi x đi qua 2 điểm $-\sqrt{e^2 - 1}, \sqrt{e^2 - 1}$.

Vậy hàm số $g(x)$ có 9 cực trị.

Câu 51: Cho hàm đa thức $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau



Có bao nhiêu giá trị của $m \in [0; 6]; 2m \in \mathbb{Z}$ để hàm số $g(x) = f(x^2 - 2|x - 1| - 2x + m)$ có đúng 9 điểm cực trị?

A. 7.

B. 5.

C. 3.

D. 6.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } g'(x) = \frac{2(x-1)(|x-1|-1)}{|x-1|} f'(x^2 - 2|x-1| - 2x + m)$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 0 \\ x = 2 \\ f'(x^2 - 2|x-1| - 2x + m) = 0 \end{cases}$$

Dựa vào đồ thị hàm số

$$f'(x) \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \\ x=2 \\ x=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2|x-1| - 2x + m = 1 \\ x^2 - 2|x-1| - 2x + m = 2 \\ x^2 - 2|x-1| - 2x + m = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2|x-1| - 2x = 1 - m \\ x^2 - 2|x-1| - 2x = 2 - m \\ x^2 - 2|x-1| - 2x = 3 - m \end{cases}$$

Xét hàm số $h(x) = x^2 - 2|x-1| - 2x$. Ta có

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		-	0	+		-	0	+	
y	$+\infty$				-1				$+\infty$

$\swarrow$ $\nearrow$ $\searrow$ $\nearrow$
 -2 -2

Đồ thị hàm số có 9 cực trị thì

TH1: $-2 < 2 - m < -1 \Leftrightarrow 3 < m < 4$

TH2: $1 - m \geq -1 \Leftrightarrow m \leq 2$.

Vậy có ba giá trị của m .

Câu 52: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên R và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$				5				$+\infty$

$\swarrow$ $\nearrow$ $\searrow$ $\nearrow$
 1 -1

Số điểm cực tiểu của hàm số $y = 2021^{f(x)} - 2020^{f(x)}$ là

A. 1.

B. 3.

C. 2.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $y = g(x) = 2021^{f(x)} - 2020^{f(x)}$

Ta có: $g'(x) = f'(x)(2021^{f(x)} \ln 2021 - 2020^{f(x)} \ln 2020)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = \pm 2 \\ \log 2021^{f(x)} \ln 2021 - 2020^{f(x)} \ln 2020 = 0(*) \end{cases}$$

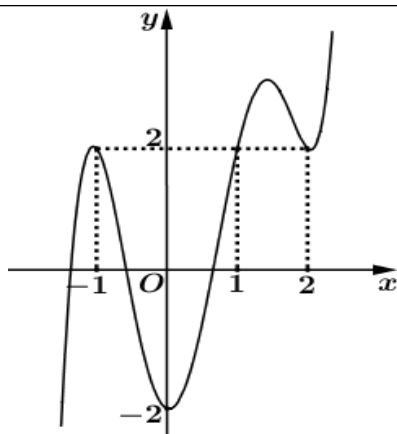
$$\text{Ta có: } (*) \Leftrightarrow \left(\frac{2021}{2020}\right)^{f(x)} = \log_{2021} 2020 \Leftrightarrow f(x) = \log_{\frac{2021}{2020}} (\log_{2021} 2020) \Rightarrow \begin{cases} x = a \in (0; 2) \\ x = b \in (2; +\infty) \end{cases}$$

x	$-\infty$		-2		0		a		2		b		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	0	+	0	-	0	+	
y	$+\infty$				$f(0)$				$f(2)$				$+\infty$

$\swarrow$ $\nearrow$ $\searrow$ $\nearrow$ $\searrow$ $\nearrow$
 $f(-2)$ $f(a)$ $f(b)$

Vậy, từ bảng xét dấu ta thấy số điểm cực tiểu của hàm số $y = g(x)$ là 3.

Câu 53: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $y = f'(x-1)$ như hình vẽ



Khi đó hàm số $y = e^{f(x)+2x}$ đạt cực tiểu tại điểm x_0 . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $x_0 \in (-1; 0)$. B. $x_0 \in (-4; -2)$. C. $x_0 \in (0; 1)$. D. $x_0 \in (-2; -1)$.

Lời giải

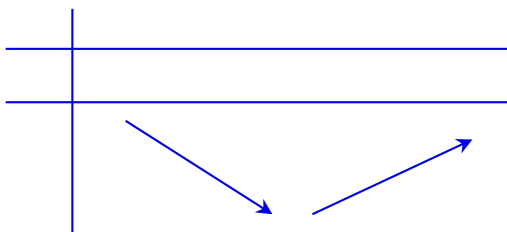
Chọn A

Ta có: $y' = e^{f(x)+2x} \cdot f'(x) + 2$

$$y' = 0 \Leftrightarrow f'(x) + 2 = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -2$$

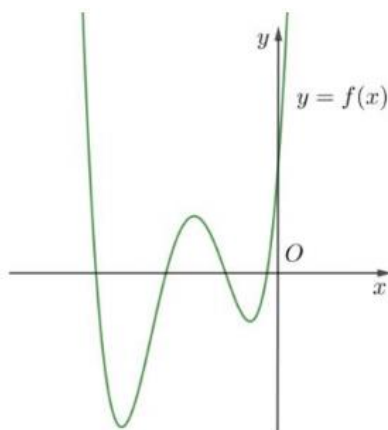
Đồ thị $y = f'(x) - 1$ dời sang phải 1 đơn vị theo trục Ox ta được đồ thị $y = f'(x)$. Khi đó đường thẳng $y = 2$ cắt đồ thị $y = f'(x)$ tại 2 điểm có hoành độ là 1 và a với $-1 < a < 0$ nên phương trình $y' = 0$ có 2 nghiệm là 1 và $-1 < a < 0$

Bảng biến thiên



Vậy hàm số đạt tiểu tại điểm $x_0 = a \in (-1; 0)$.

Câu 54: Cho hàm số $F(x)$ có $F(0) = 0$. Biết $y = F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Số điểm cực trị của hàm số $G(x) = |F(x^6) - x^3|$ là

A. 4.

B. 5.

C. 6.

D. 3.

Lời giải

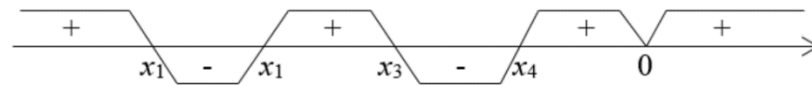
Chọn D

♦ Xét $g(x) = F(x^6) - x^3 \Rightarrow g'(x) = 6x^5 F'(x^6) - 3x^2 = 3x^2 [2x^3 f(x^6) - 1]$.

♦ Xét hàm số

$$h(x) = 2x^3 f(x^6) - 1 \Rightarrow h'(x) = 6x^2 f(x^6) + 12x^8 \cdot f'(x^6) = 3x^2 [2f(x^6) + 4x^6 \cdot f'(x^6)].$$

Từ đồ thị của $y = f(x)$ suy ra dấu của $f'(x)$



nên $\begin{cases} f(x^6) > 0 \\ f'(x^6) > 0 \end{cases} \Rightarrow h'(x) > 0 \quad \forall x$ nên hàm số $y = h(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ và vì

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} h(x) = \pm\infty$ nên phương trình $h(x) = 0$ có 1 nghiệm duy nhất x_0 và $y = h(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi qua x_0 . Suy ra $g'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi qua x_0 nên x_0 là điểm cực tiểu.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$			
$G(x)$			

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số $y = G(x)$ có 3 cực trị.

Câu 55: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-3	-1	1	2	3	$+\infty$	
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
y			2			2		

Diagram illustrating the intervals of x and the corresponding values of y for the function $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$. The intervals of x are marked by the critical points $-3, -1, 1, 2, 3$. The corresponding values of y are marked by the function values at these points: $y(-3) = 2, y(-1) = 0, y(1) = -3, y(2) = 2, y(3) = -\infty$. The intervals of x are labeled with the signs of y' : $+$ for $x < -3$, 0 for $x = -3$, $-$ for $-3 < x < -1$, 0 for $x = -1$, $+$ for $-1 < x < 1$, 0 for $x = 1$, $-$ for $1 < x < 2$, 0 for $x = 2$, $+$ for $2 < x < 3$, 0 for $x = 3$, and $-$ for $x > 3$.

Số điểm cực đại của hàm số $g(x) = \left| f(|x^2 - 8x + 7| + x^2 - 3) \right|$ là

A. 6.

B. 8.

C. 7.

D. 9.

Lời giải

Chọn C

♦ Đặt $u(x) = |x^2 - 8x + 7| + x^2 - 3$, ta có $u(x) = \begin{cases} 2x^2 - 8x + 4 & \text{khi } x \leq 1 \vee x \geq 7 \\ 8x - 10 & \text{khi } 1 < x < 7 \end{cases}$.

$$\Rightarrow u'(x) = \begin{cases} 4x - 8 & \text{khi } x < 1 \vee x > 7 \\ 8 & \text{khi } 1 < x < 7 \end{cases}.$$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		7		$+\infty$
$u'(x)$		-		+		+	
$u(x)$	$+\infty$						$+\infty$

$\swarrow$ $\searrow$ $\nearrow$ $\nwarrow$
 $+\infty$ -2 $+\infty$

♦ Đặt $h(x) = f(u(x))$, ta có $h'(x) = u'(x) \cdot f'(u(x))$.

Ta có: $u'(x)$ chỉ đổi dấu qua $x=1$.

$$f'(u(x)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u(x) = 3 \\ u(x) = 2 \\ u(x) = 1 \\ u(x) = -1 \\ u(x) = -3 \end{cases}.$$

Từ bảng biến thiên của $u(x)$ ta có

$u(x) = 3$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_8 .

$u(x) = 2$ có hai nghiệm phân biệt x_2, x_7 .

$u(x) = 1$ có hai nghiệm phân biệt x_3, x_6 .

$u(x) = -1$ có hai nghiệm x_4, x_5 .

$u(x) = -3$ vô nghiệm

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	x_1	x_2	x_3	x_4	1	x_5	x_6	x_7	x_8	$+\infty$		
$h'(x)$	-	0	+	0	-	0	+		-	0	+	0	-
$h(x)$													

Từ bảng, dễ dàng suy ra hàm số $g(x) = |f(|x^2 - 8x + 7| + x^2 - 3)| = |h(x)|$ có 7 điểm cực đại.

Câu 56: Cho hàm số $f(x)$ là hàm số bậc bốn thoả mãn $f(0) = 0$. Hàm số $f'(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-3	-1	$+\infty$
$f'(x)$				

$\swarrow$ $\searrow$ $\nearrow$ $\nwarrow$
 $-\infty$ -1 $-\frac{61}{3}$ $+\infty$

Hàm số $g(x) = |f(x^3) - 3x|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3.

B. 5.

C. 4.

D. 2.

Lời giải

Chọn A

Bảng biến thiên hàm số $f(x)$

x	$-\infty$	-3	-1	x_0	$+\infty$
$f'(x)$		$-$		0	$+$
$f(x)$	$+\infty$				$+\infty$

$$\text{Đặt } h(x) = f(x^3) - 3x \Rightarrow h'(x) = 3x^2 f'(x^3) - 3 = 0 \Leftrightarrow f'(x^3) = \frac{1}{x^2}$$

$$\text{Đặt } t = x^3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{t} \text{ thế vào phương trình trên ta được } f'(t) = \frac{1}{\sqrt[3]{t^2}} \quad (1)$$

$$\text{Xét hàm số } y = \frac{1}{\sqrt[3]{t^2}} \Rightarrow y' = -\frac{2}{3\sqrt[3]{t^5}}, \lim_{t \rightarrow \pm\infty} y = 0.$$

Bảng biến thiên của hàm số $y = \frac{1}{\sqrt[3]{t^2}}$

t	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	$+$		$-$
y	0	$+\infty$	0

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình (1) có một nghiệm $t = a > 0$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	$\sqrt[3]{a}$	$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$
$h(x)$	$+\infty$	0	$f(a) - 3\sqrt[3]{a}$	$+\infty$
$g(x) = h(x) $	$+\infty$	0	$3\sqrt[3]{a} - f(a)$	$+\infty$

Vậy hàm số $g(x)$ có 3 cực trị.

Câu 57: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = (x-2)^2(x^2-x), x \in \mathbb{R}$. Góit S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $f\left(\frac{1}{2}x^2 - 6x + m\right)$ có 5 điểm cực trị. Tính tổng tất cả các phần tử của S.

A. 154.

B. 17.

C. 213.

D. 153.

Lời giải**Chọn D**

Ta có. Với $x = 2$ là nghiệm kép, $x = 0, x = 1$ là nghiệm đơn. Đó đó hàm số $f(x)$ có hai điểm cực trị là $x = 0, x = 1$.

$$\text{Đặt } g(x) = f\left(\frac{1}{2}x^2 - 6x + m\right) \Rightarrow g'(x) = (x-6)f'\left(\frac{1}{2}x^2 - 6x + m\right).$$

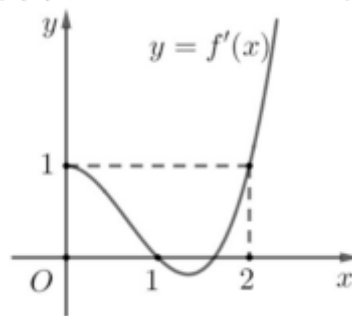
$$\text{Khi đó } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ \frac{1}{2}x^2 - 6x + m = 2 \\ \frac{1}{2}x^2 - 6x + m = 0(1) \\ \frac{1}{2}x^2 - 6x + m = 1(2) \end{cases}$$

Để hàm số có 5 điểm cực trị thì (1) & (2) có hai nghiệm phân biệt không trùng nhau và khác 6

$$\text{Suy ra } \begin{cases} \Delta_1 > 0 \\ \Delta_2 > 0 \\ \frac{1}{2} \cdot 6^2 - 6 \cdot 6 + m \neq 0 \\ \frac{1}{2} \cdot 6^2 - 6 \cdot 6 + m \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9 - \frac{m}{2} > 0 \\ 9 - \left(\frac{m-1}{2}\right) > 0 \\ m \neq 18, m \neq 19 \end{cases} \Leftrightarrow m < 18 \Rightarrow m \in \{1, 2, \dots, 17\}.$$

Vậy Tổng các giá trị của m là $1 + 2 + \dots + 17 = 153$.

Câu 58: Cho hàm số đa thức $f(x)$ có đồ thị của đạo hàm $f'(x)$ trên khoảng $(0; +\infty)$ như hình vẽ bên



Biết rằng $f(0) = -1$; $f(1) = 1$. Trên khoảng $(0; +\infty)$ hàm số $g(x) = \left| 3f(x) - \sqrt{2x^3} + 1 \right|$ có bao nhiêu điểm cực trị.

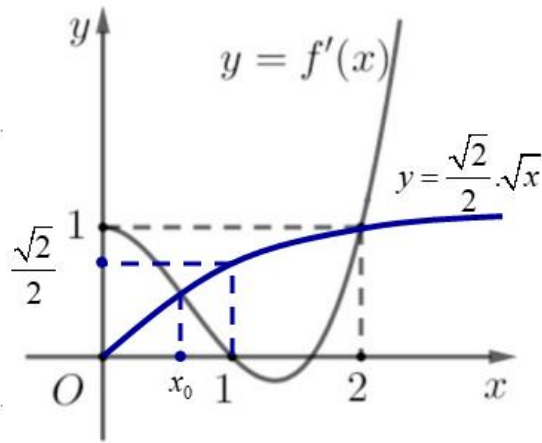
A. 7.

B. 4.

C. 3.

D. 5.

Lời giải**Chọn D**



Xét hàm số $y = h(x) = 3f(x) - \sqrt{2x^3} + 1$ ta có: $h'(x) = 3f'(x) - \frac{6x^2}{2\sqrt{2x^3}} = 3\left(f'(x) - \sqrt{\frac{x}{2}}\right)$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = \sqrt{\frac{x}{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 \in (0; 1) \\ x = 2 \end{cases}$$

Bảng xét dấu:

x	0	x_0	1	2	$+\infty$	
$h'(x)$		+	0	-	0	+
$h(x)$	-2	$h(x_0)$	$h(1)$	$h(2)$	$+\infty$	

Ta thấy hàm số $y = h(x)$ có 2 điểm cực trị.

Ta có $f(0) = -1 \Rightarrow h(0) = -2$; $f(1) = 1 \Rightarrow h(1) = 4 - \sqrt{2} > 0 \Rightarrow h(x_0) > 0$.

Dựa vào đồ thị bên trên ta có

$$\int_0^{x_0} |h'(x)| dx < \int_{x_0}^2 |h'(x)| dx \Rightarrow h(x_0) - h(0) < -[h(2) - h(x_0)] \Leftrightarrow h(0) > h(2) \Rightarrow h(2) < 0.$$

Khi đó đồ thị hàm số $y = h(x)$ cắt trục hoành tại 3 điểm.

Vậy hàm số $g(x) = |h(x)|$ có 5 điểm cực trị.

Câu 59: Cho hàm số bậc bốn $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$	3	-1	3	$-\infty$		

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = x^2 [f(x-1)]^4$ là

A. 7.

B. 8.

C. 5.

D. 9.

Lời giải

Chọn D

Ta có hàm số $g(x)$ liên tục và có đạo hàm là

$$g'(x) = 2x [f(x-1)]^4 + 4x^2 \cdot f'(x-1) \cdot [f(x-1)]^3 = 2x [f(x-1)]^3 \cdot (f(x-1) + 2xf'(x-1))$$

$$\text{Cho } g(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 = 0 \\ f(x-1) = 0 \\ f(x-1) + 2xf'(x-1) = 0 \end{cases}.$$

Với phương trình $f(x-1) = 0$.

Vì $f(x)$ là hàm bậc bốn và có bảng biến thiên như trên ta thấy phương trình $f(x-1) = 0$ có bốn nghiệm đơn phân biệt x_2, x_3, x_4, x_5 khác x_1 .

Với phương trình $f(x-1) + 2xf'(x-1) = 0$

Ta thấy phương trình không nhận các số x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 làm nghiệm.

Gọi $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$, vì $f'(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt $-1; 0; 1$ và $f(0) = -1, f(1) = 3$ nên $c = -1, a = -4, b = 8$, suy ra $f(x) = -4x^4 + 8x^2 - 1$.

Đặt $t = x - 1$, phương trình $f(x-1) + 2xf'(x-1) = 0$ trở thành $f(t) + 2(t+1)f'(t) = 0$

$$\Leftrightarrow -4t^4 + 8t^2 - 1 + 2(t+1)(-16t^3 + 16t) = 0 \Leftrightarrow -36t^4 - 32t^3 + 40t^2 + 32t - 1 = 0.$$

Xét hàm số $h(t) = -36t^4 - 32t^3 + 40t^2 + 32t - 1$ có $h'(t) = -144t^3 - 96t^2 + 80t + 32$, cho

$$h'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -1; t = -\frac{1}{3}; t = \frac{2}{3}.$$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$+\infty$		
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$	3	$-\frac{175}{27}$	$\frac{581}{27}$	$-\infty$		

Do đó phương trình $h(t) = 0$ có 4 nghiệm đơn phân biệt hay phương trình $f(x-1) + 2xf'(x-1) = 0$ có 4 nghiệm đơn phân biệt x_6, x_7, x_8, x_9 . Hay hàm số $g(x)$ có 9 điểm

cực trị là $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9$.

Câu 60: Cho hàm số bậc bốn $f(x)$ có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	0	$-$
y	$-\infty$	3	-2	3	$-\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = x^2 [f(x+1)]^4$ là

A. 7.

B. 8.

C. 9.

D. 5.

Lời giải

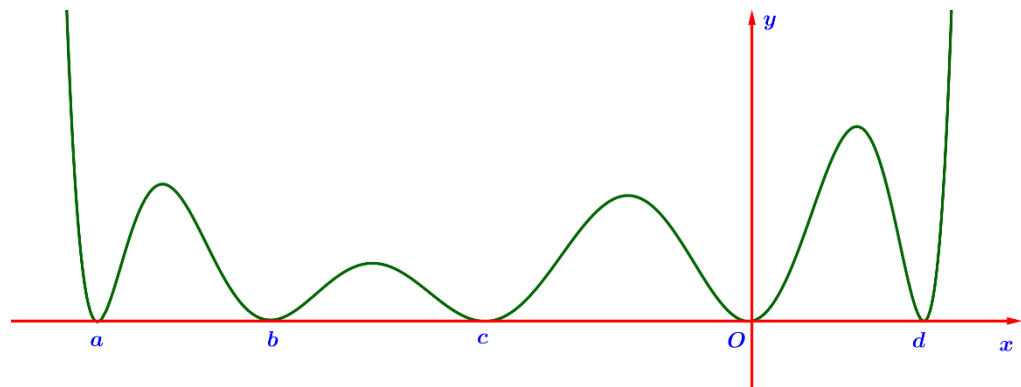
Chọn C

Nhận xét $\begin{cases} g(x) \geq 0, \forall x \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = +\infty \end{cases}$,

$$\text{Cho } g(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \\ [f(x+1)]^4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f(x+1) = 0 \end{cases}$$

Nhận thấy: Tịnh tiến đồ thị $f(x)$ sang trái 1 đơn vị ta thu được đồ thị của $f(x+1)$

$$\text{Do đó } f(x+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a, a < -2 \\ x = b, -2 < b < -1 \\ x = c, -1 < c < 0 \\ x = d, d > 0 \end{cases}$$



Vì thế $g(x) = 0$ có 5 nghiệm phân biệt

Hay đồ thị $g(x)$ có 5 điểm tiếp xúc với trục hoành

Vậy hàm số $g(x)$ có 9 cực trị.

Câu 61: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$-$
$g(x)$	$+\infty$	2	1	$-\infty$

Số điểm cực đại của hàm số $g(x) = [f(2x^2 + x)]^2$ là

A. 3.

B. 2.

C. 1.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $g(x) = [f(2x^2 + x)]^2$; $g'(x) = 2f(2x^2 + x) \cdot f'(2x^2 + x) \cdot 4x + 1$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 1 = 0 \\ f(2x^2 + x) = 0 \\ f'(2x^2 + x) = 0 \end{cases}$$

$$4x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{4}.$$

$$\text{Từ bảng biến thiên ta có: } f'(2x^2 + x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + x = -2 \text{ VN} \\ 2x^2 + x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Dựa vào bảng biến thiên ta có phương trình $f(x) = 0$ chỉ có 1 nghiệm $x_0 > 1$. Khi đó

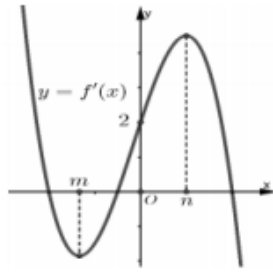
$$f(2x^2 + x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + x = x_0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \in (-\infty; -1) \\ x = x_2 \in \left(\frac{1}{2}; +\infty\right) \end{cases}.$$

Do $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$ nên ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	x_1	-1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	x_2	$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$+\infty$						$+\infty$

Từ bảng biến thiên của hàm số $y = g(x)$ ta có số điểm cực đại của hàm số $g(x) = [f(2x^2 + x)]^2$ là 2.

Câu 62: Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, ($a \neq 0$) có đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ. Biết rằng $e > n$



Số điểm cực trị của hàm số $y = f'(f(x) - 2x)$ là

A. 7.

B. 6.

C. 10

D. 14.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Xét } y = f'(f(x) - 2x) \Rightarrow y' = (f'(x) - 2) \cdot f''(f(x) - 2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 2 \\ f''(f(x) - 2x) = 0 \end{cases}$$

Với $f'(x) = 2$. Đường thẳng $y = 2$ cắt đồ thị $f'(x)$ tại 3 điểm phân biệt.

$$\text{Với } f''(f(x) - 2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) - 2x = m, (m < 0) & (1) \\ f(x) - 2x = n, (n < e) & (2) \end{cases}$$

$$\text{Đặt } h(x) = f(x) - 2x \Rightarrow h'(x) = f'(x) - 2 = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 2.$$

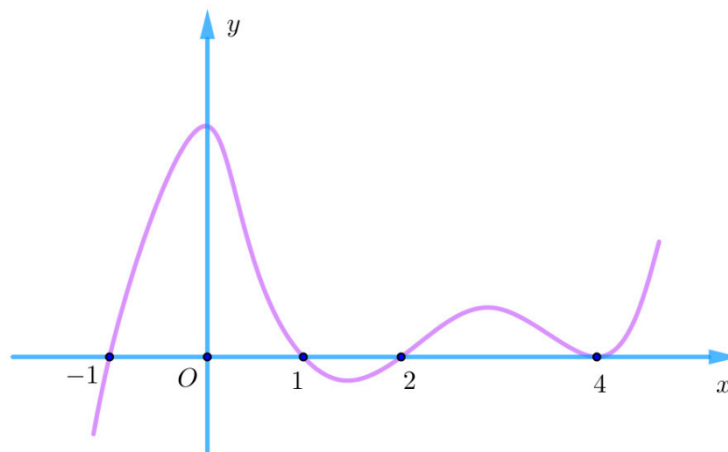
Bảng biến thiên của $h(x)$:

x	$-\infty$	x_1	0	x_2	$+\infty$
$h'(x)$		0	0	0	
$h(x)$					

$h(0) = e > n > m$

Vậy các phương trình (1) và (2) cho 4 nghiệm phân biệt.

Câu 63: Vậy số điểm cực trị của hàm số $y = f'(f(x) - 2x)$ là 7. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, đồ thị hàm số $y = f'(x)$ có đúng 4 điểm chung với trục hoành như hình vẽ bên dưới:



Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y = f(|x|^3 - 3|x| + m + 2021)$ có đúng 11 điểm cực trị?

A. 0.

B. 2.

C. 5.

D. 1.

Lời giải**Chọn D**

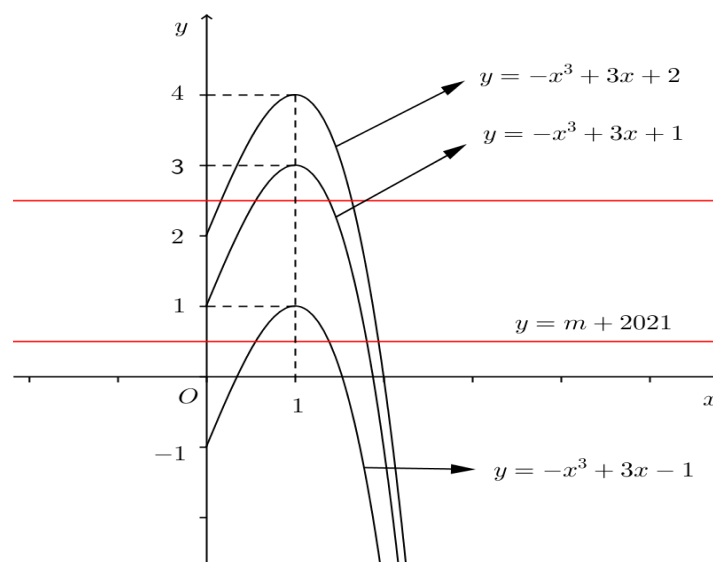
Xét $x > 0$: Hàm số có dạng $y = f(x^3 - 3x + m + 2021)$

$$y' = (3x^2 - 3)f'(x^3 - 3x + m + 2021)$$

Do nghiệm của phương trình $x^3 - 3x + m + 2021 = 4$ là các nghiệm bội bậc chẵn của phương trình $y' = 0$ nên ta có:

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 3 = 0 \\ f'(x^3 - 3x + m + 2021) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ (do } x > 0) \\ x^3 - 3x + m + 2021 = -1 \\ x^3 - 3x + m + 2021 = 1 \\ x^3 - 3x + m + 2021 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ (do } x > 0) \\ m + 2021 = -x^3 + 3x - 1 \\ m + 2021 = -x^3 + 3x + 1 \\ m + 2021 = -x^3 + 3x + 2 \end{cases}$$

Vẽ đồ thị ba hàm số $y = -x^3 + 3x - 1$; $y = -x^3 + 3x + 1$; $y = -x^3 + 3x + 2$ với $x > 0$ trên cùng một hệ trục.



Hàm số $y = f(|x|^3 - 3|x| + m + 2021)$ có đúng 11 điểm cực trị

$\Leftrightarrow$ Hàm số $y = f(x^3 - 3x + m + 2021)$ có đúng 5 điểm cực trị dương

$\Leftrightarrow$ Phương trình $f'(x^3 - 3x + m + 2021) = 0$ có đúng 4 nghiệm bội lẻ dương khác 1

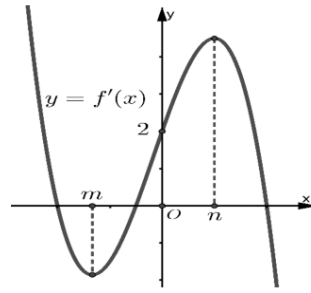
$\Leftrightarrow$ Đường thẳng $y = m + 2021$ cắt đồ thị ba hàm số $y = -x^3 + 3x - 1$; $y = -x^3 + 3x + 1$; $y = -x^3 + 3x + 2$ tại 4 điểm phân biệt có hoành độ dương khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m + 2021 < 1 \\ 2 < m + 2021 < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2022 < m < -2020 \\ -2019 < m < -2018 \end{cases}$$

Do m nguyên nên $m = -2021$.

Vậy chỉ có 1 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 64: Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, ($a \neq 0$) có đồ thị của đạo hàm $f'(x)$ như hình vẽ.



Biết rằng $e > n$. Số điểm cực trị của hàm số $y = f'(f(x) - 2x)$ bằng

A. 7.

B. 10.

C. 14.

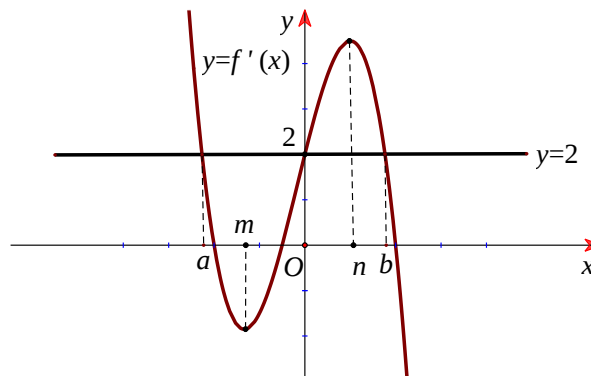
D. 6.

Lời giải

Chọn A

$$g(x) = f'(f(x) - 2x) \Rightarrow g'(x) = [f'(x) - 2] \cdot f''(f(x) - 2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 2 \\ f''(f(x) - 2x) = 0 \end{cases}$$

$$+ f'(x) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a < m \\ x = 0 \\ x = b > n \end{cases},$$



$$+ \text{Từ đồ thị hàm số } y = f'(x) \text{ ta suy ra } f''(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ x = n \end{cases}$$

$$\text{Do đó } f''(f(x) - 2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) - 2x = m, (1) \\ f(x) - 2x = n, (2) \end{cases}$$

Lập BBT cho hàm số $h(x) = f(x) - 2x$, với $h'(x) = f'(x) - 2$.

Ta có $h(0) = f(0) = e$, $e > n > m$

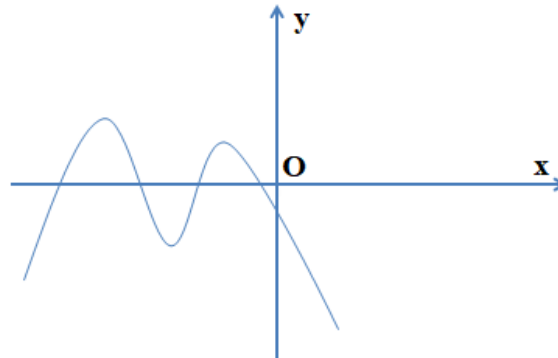
x	$-\infty$	a	0	b	$+\infty$
$h'(x)$	+	0	-	0	-
$h(x)$					

Do đó phương trình (1) và (2) có 4 nghiệm đơn.

Suy ra phương trình $g'(x) = 0$ có 7 nghiệm đơn

nên hàm số $g(x) = f'(f(x) - 2x)$ có 7 cực trị.

Câu 65: Cho hàm số $y = f(x)$ với $f(0) = 0$. Biết $y = f'(x)$ là một hàm số bậc bốn và có đồ thị là đường cong như hình dưới đây



Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = |f(x^4) + x^2|$ là

A. 3.

B. 6.

C. 5.

D. 4.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $h(x) = f(x^4) + x^2 \Rightarrow h'(x) = 2x(2x^2 \cdot f'(x^4) + 1)$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2x^2 f'(x^4) + 1 = 0 \quad (1) \end{cases}$$

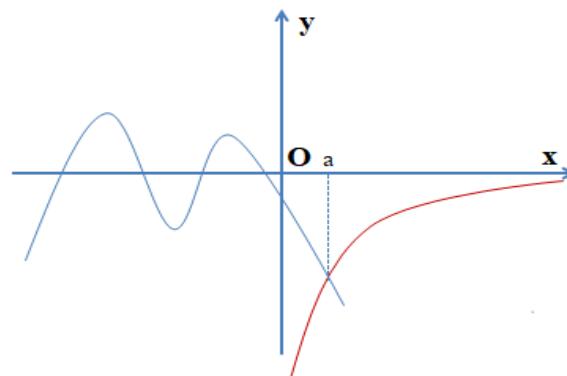
Giải phương trình (1)

Đặt $x^4 = t (t \geq 0)$, ta có phương trình $2\sqrt{t}f'(t) + 1 = 0 \Leftrightarrow f'(t) = -\frac{1}{2\sqrt{t}} \quad (2)$

Số nghiệm của phương trình (2) chính là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f'(t)$ và đồ thị

hàm số $y = -\frac{1}{2\sqrt{t}}$

Ta có các đồ thị như sau



Căn cứ đồ thị, suy ra phương trình (2) có nghiệm duy nhất $t = a > 0 \Rightarrow x^4 = a \Leftrightarrow x = \pm \sqrt[4]{a}$

Căn cứ đồ thị hàm số $y = f'(t) \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} (f'(t)) = -\infty \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} (2\sqrt{t}f'(t) + 1) = -\infty$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y = h(x)$ và $y = g(x)$ như sau:

x	$-\infty$	$-\sqrt[4]{a}$	0	$\sqrt[4]{a}$	$+\infty$
$h'(x)$	+	0	-	0	-
$h(x)$					
$g(x)$					

- Câu 66:** Cho hàm số $f(x)$ có $f'(x) = (x^2 - 16)(x + 1)(x^2 - 4x + m - 4)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-2021; 2021]$ sao cho hàm số $g(x) = f(x^2)$ có 5 điểm cực trị?
- A. 2025. B. 2026. C. 2021. D. 4043.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $g'(x) = 2x \cdot f'(x^2) = 2x(x^4 - 16)(x^2 + 1)(x^4 - 4x^2 + m - 4)$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^4 - 16 = 0 \\ x^4 - 4x^2 + m - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \\ x = -2 \\ x^4 - 4x^2 + m - 4 = 0 (*) \end{cases}.$$

TH1: Phương trình có nghiệm $x = 0 \Rightarrow m - 4 = 0 \Rightarrow m = 4$.

Thay $m = 4$ vào phương trình ta có: $x^4 - 4x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$.

Khi đó $g'(x) = 0$ có 3 nghiệm bội chẵn nên hàm số $g(x)$ không thể có 5 điểm cực trị nên $m = 4$ loại.

TH2: Phương trình có nghiệm $x = \pm 2 \Rightarrow m - 4 = 0 \Rightarrow m = 4$.

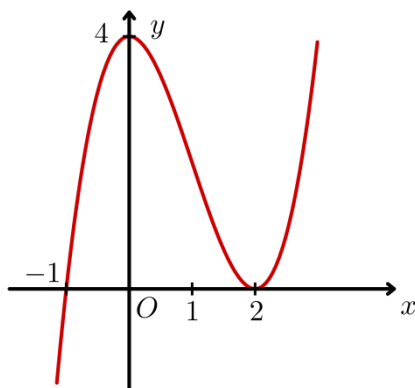
TH3: Phương trình có 2 nghiệm đơn phân biệt, khác 0 và khác ± 2 hay

$t^2 - 4t + m - 4 = 0$ phải có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow m - 4 < 0 \Leftrightarrow m < 4$.

Khi đó $g'(x) = 0$ có 5 nghiệm phân biệt nên hàm số $g(x)$ có 5 điểm cực trị.

Kết hợp điều kiện m thuộc $[-2021; 2021]$ suy ra $-2021 \leq m < 4, m \in \mathbb{Z}$ nên có 2025 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu.

Câu 67: Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + ax^3 + bx^2 + cx$ có đồ thị (C) của hàm $y = f'(x)$ như hình vẽ sau:



Đặt $g(x) = f(f'(x))$, $h(x) = f'(f(x))$. Tổng số điểm cực trị của $g(x)$ và $h(x)$ là:

A. 12.

B. 11.

C. 8.

D. 13.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + ax^3 + bx^2 + cx \Rightarrow f'(x) = x^3 + 3ax^2 + 2bx + c$

$$\text{Ta lại có: } \begin{cases} f'(0) = 4 \\ f'(-1) = 0 \\ f'(2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 4 \\ -1 + 3a - 2b + 4 = 0 \\ 8 + 12a + 4b + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 4 \\ 3a - 2b = -3 \\ 12a + 4b = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \\ c = 4 \end{cases}$$

hay $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + 4x$, $f'(x) = x^3 - 3x^2 + 4 \rightarrow f''(x) = 3x^2 - 6x$

$$f''(x) = 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Tìm số cực trị của hàm số: $g(x) = f(f'(x))$

$$\text{Ta có: } g'(x) = f''(x) \cdot f'(f'(x)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f''(x) = 0 \\ f'(f'(x)) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \\ f'(x) = -1 \\ f'(x) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \\ x = x_1 \\ x = x_2 \\ x = x_3 \\ x = x_4 \end{cases}$$

với x_1 là nghiệm của phương trình $f'(x) = -1$

và x_2, x_3, x_4 là ba nghiệm của phương trình $f'(x) = 2$, $x_1 < x_2 < 0 < x_3 < 2 < x_4$

Bảng xét dấu $y = g'(x)$

x	$-\infty$	x_1	x_2	0	x_3	2	x_4	$+\infty$	
$g'(x)$	-	0	+	0	+	0	-	0	+

nhìn vào bảng trên, hàm số $g(x) = f(f'(x))$ có 3 cực trị

Tìm số cực trị của hàm số $h(x) = f'(f(x))$

BBT của hàm số $y = f(x)$

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$		$-\frac{11}{4}$		4		$+\infty$

Ta có: $h'(x) = f'(x) \cdot f''(f(x)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f(x) = 0 \\ f(x) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \\ x = x_1 \\ x = x_2 \\ x = x_3 \\ x = x_4 \end{cases}$

Với x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $f(x) = 0$, x_3, x_4 là nghiệm của phương trình $f(x) = 2$ và $x_3 < x_1 < -1 < x_2 < x_4 < 2$

Bảng xét dấu $y = h'(x)$

x	$-\infty$	x_3	x_1	-1	x_2	x_4	2	$+\infty$	
$h'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$

nhìn vào bảng trên, hàm số $h(x) = f'(f(x))$ có 5 cực trị

Vậy tổng có 8 cực trị.

Câu 68: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và bảng biến thiên của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	0	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	0	-1	$-\sqrt{3}$	$+\infty$

Hỏi hàm số $g(x) = f(x^4) - 4x$ có mấy điểm cực tiểu?

A. 3.

B. 1.

C. 4.

D. 2.

Lời giải

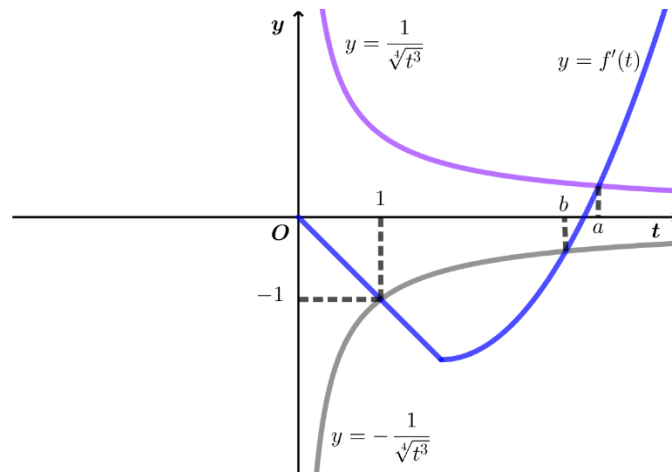
Có $g'(x) = 4x^3 f'(x^4) - 4$.

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 f'(x^4) - 4 = 0 \Leftrightarrow f'(x^4) = \frac{1}{x^3} \quad (x \neq 0) \quad (1).$

Đặt $t = x^4 > 0 \Rightarrow x = \pm \sqrt[4]{t}$ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} f'(t) = \frac{1}{\sqrt[4]{t^3}} & (2) \\ f'(t) = -\frac{1}{\sqrt[4]{t^3}} & (3) \end{cases}$$

Mô phỏng bằng đồ thị



Dựa vào đồ thị ta có:

(2) có nghiệm $t = a \Rightarrow x = \sqrt[4]{a}$

(3) có nghiệm $\begin{cases} t = 1 \Rightarrow x = -1 \\ t = b \Rightarrow x = -\sqrt[4]{b} \end{cases}$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-\sqrt[4]{b}$	-1	$\sqrt[4]{a}$	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$g(x)$					

Vậy hàm số $g(x)$ có 2 điểm cực tiểu.

Câu 69: Cho $y = f(x)$ là hàm số đa thức bậc bốn thỏa mãn $f(1) \leq 0$ và hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	-1	-3	$+\infty$

Hàm số $g(x) = \left| f(\sqrt{x^2+1}) + x^2 \right|$ có mấy điểm cực trị?

A. 1.

B. 3.

C. 5.

D. 2.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f''(x) = a(x^2 - 1) \Rightarrow f'(x) = \frac{a}{3}x^3 - ax + C$

$$\begin{cases} f'(-1) = -1 \\ f'(1) = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{2}{3} \\ C = -\frac{2}{9} \end{cases} \Rightarrow f'(x) = -\frac{2}{9}x^3 - \frac{2}{3}x - \frac{2}{9}$$

Xét hàm số $u = \sqrt{x^2 + 1}$ có $u' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}, u' = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$+\infty$
u'		$-$	0	$+$	
u	$+\infty$				$+\infty$

↘ 1 ↗

Xét hàm số $h(u) = f(u) + u^2 - 1$ có $h'(u) = u'f'(u) + 2u.u' = u'[f'(u) + 2u]$

$$h'(u) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u' = 0 \\ f'(u) = -2u \end{cases}$$

$$u' = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$f'(u) = -2u \Leftrightarrow u = a \in (1; 2) \Rightarrow \sqrt{x^2 + 1} = a$ có 2 nghiệm trái dấu x_1, x_2

Do $f(1) \leq 0$ nên ta có bảng biến thiên

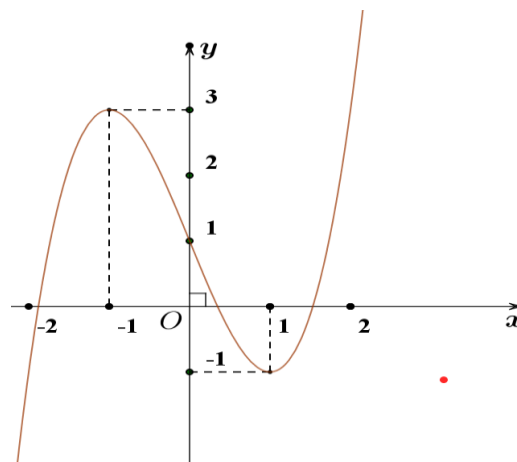
x	$-\infty$		x_1		0		x_2		$+\infty$
$h'(u)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(u)$	$+\infty$								$+\infty$

↘ 1 ↗

$y = 0$

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy hàm số đã cho có 5 điểm cực trị.

Câu 70: Cho hàm số $f(x)$. Biết $f'(x)$ là hàm bậc 3. Có đồ thị như hình vẽ sau



Có bao nhiêu giá trị nguyên $m \in [-10, 10]$ để hàm số $g(x) = f(x) + mx + 2021$ có đúng 1 cực trị?

A. 20.

B. 16.

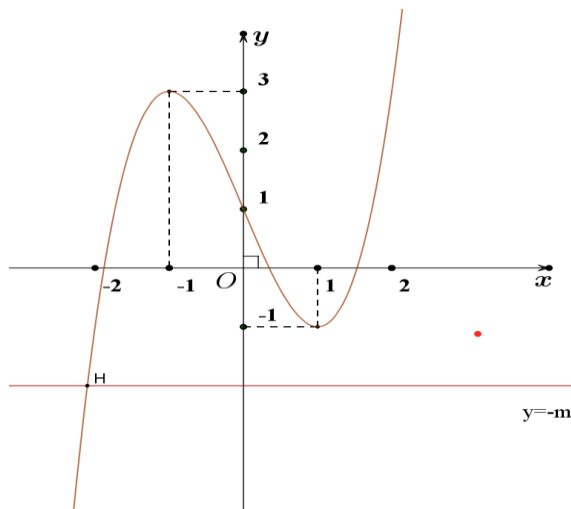
C. 15.

D. 18.

Lời giải**Chọn D**

Ta có $g'(x) = f'(x) + m \Leftrightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow g'(x) = -m$ (1)

Số nghiệm của (1) là số giao điểm của 2 đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và đường $d: y = -m$



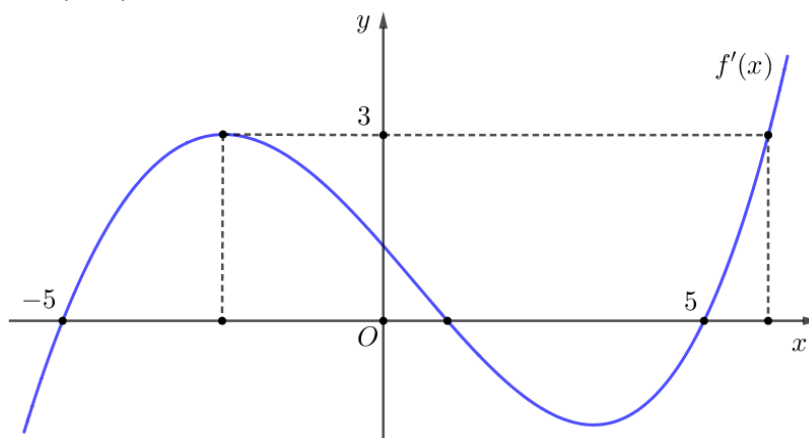
Dựa vào đồ thị trên. Để $g(x)$ có đúng 1 cực trị thì điều kiện là

$$\begin{cases} m \in [-10, 10] \\ m < -1 \\ m > 3 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, -10, -9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2\}$$

Số giá trị của m là 16.

----- HẾT -----

Câu 71: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Biết rằng $f(10) = 30$, $f(-6) = 30$, $f(5) = 30$. Hỏi đồ thị hàm số $y = f[f(x) - 3x + 9]$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?



A. 7.

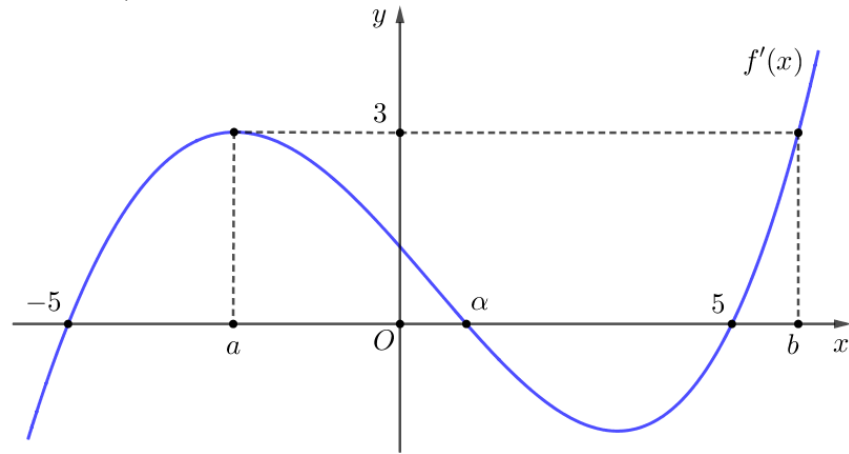
B. 9.

C. 5.

D. 3.

Lời giải**Chọn A**

Chủ đề 01: Cơ bản về tính đơn điệu của hàm số



Ta có: $y' = [f'(x) - 3] f'[f(x) - 3x + 9] = 0$

Trường hợp 1: $f'(x) - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \text{ (nghieãm keùp)} \\ x = b \end{cases}$.

Trường hợp 2: $f'[f(x) - 3x + 9] = 0 \Leftrightarrow f'(u) = 0$

Với $u = f(x) - 3x + 9 \Rightarrow u' = f'(x) - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \text{ (nghieãm keùp)} \\ x = b \end{cases}$.

Từ điều kiện suy ra $1 = f(5) < f(6)$

Bảng biến thiên của u :

x	$-\infty$	-6	-5	a	5	b	10	$+\infty$
u'		$-$		0	$-$	0	$+$	
u			28		-5		9	

$u(b) = f(b) - 9$

$f'(u) = 0 \Leftrightarrow u \in \{-5; 1; 5\}$

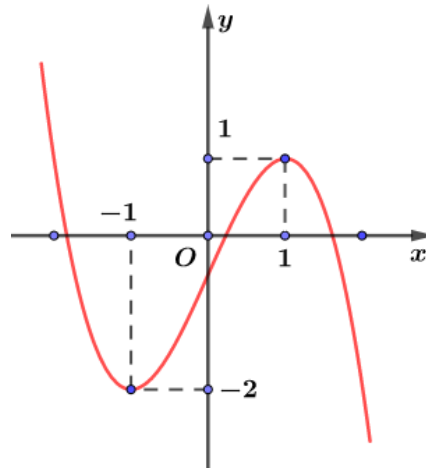
$u = -5$ có hai nghiệm bội lẻ.

$u = 1$ có hai nghiệm bội lẻ.

$u = 5$ có hai nghiệm bội lẻ.

Vậy có tất cả 7 điểm cực trị.

Câu 72: Cho hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ. Hỏi hàm số $y = f\left(e^{f(x)} - \frac{1}{2} f(x)^2 - f(x)\right)$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?



A. 5.

B. 6.

C. 3.

D. 9.

Lời giải

Chọn B

$$y' = f' \left[e^{f(x)} - \frac{1}{2} f(x)^2 - f(x) \right] \cdot f'(x) \cdot [e^{f(x)} - f(x) - 1]$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ e^{f(x)} - f(x) - 1 = 0 \quad (1) \\ f' \left[e^{f(x)} - \frac{1}{2} f(x)^2 - f(x) \right] = 0 \quad (2) \end{cases}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

Đặt $t = f(x)$.

$$\text{Giải 1: } e^t - t - 1 = 0.$$

$$\text{Xét } h(t) = e^t - t - 1 \Rightarrow h'(t) = e^t - 1.$$

$$h'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0.$$

BBT:

t	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(t)$	-	0	+
$h(t)$		0	

Do đó $h(t) \geq 0 \forall t \Rightarrow h(t)$ tiếp xúc với trục Ox. Pt 1 có nghiệm kép, nghiệm này không là cực trị.

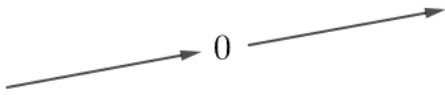
$$\text{Giải 2: } \begin{cases} e^t - \frac{1}{2}t^2 - t = 1 & (3) \\ e^t - \frac{1}{2}t^2 - t = -1 & (4) \end{cases}$$

$$\text{Giải 3: } e^t - \frac{1}{2}t^2 - t - 1 = 0.$$

$$\text{Xét } k(t) = e^t - \frac{1}{2}t^2 - t - 1 \Rightarrow k'(t) = e^t - t - 1 \geq 0 \forall t.$$

$$\Rightarrow k'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$$

BBT:

t	$-\infty$	0	$+\infty$
$k'(t)$	+	0	+
$k(t)$			

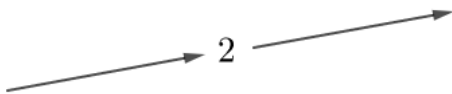
Pt 3 có nghiệm $t = 0 \Rightarrow f(x) = 0$. Pt 3 có 3 nghiệm phân biệt $x_1 < -1, x_2 \in (0; 1), x_3 > 1$.

Giải 4 : $e^t - \frac{1}{2}t^2 - t + 1 = 0$.

$$\text{Xét } l(t) = e^t - \frac{1}{2}t^2 - t + 1 \Rightarrow l'(t) = e^t - t - 1 \geq 0 \forall t.$$

$$\Rightarrow l'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0.$$

BBT:

t	$-\infty$	0	$+\infty$
$l'(t)$	+	0	+
$l(t)$			

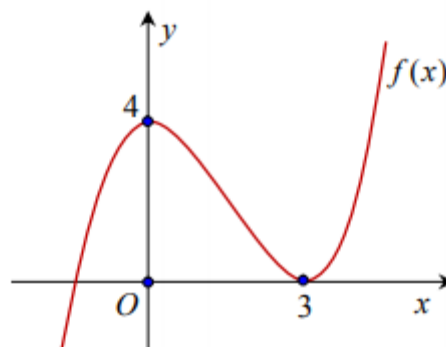
Nhận xét: $l(t) = e^t - \frac{1}{2}t^2 - t + 1$ có $l(-2) = l(-3) < 0 \Rightarrow l(t) = 0$ có 1 nghiệm

$t = t_1 \in (-3; -2) \Rightarrow f(x) = t_1$ có 1 nghiệm Pt 4 có 1 nghiệm.

Vậy $g'(x) = 0$ có 6 nghiệm phân biệt.

Do vậy hàm số có 6 cực trị.

Câu 73: Cho đồ thị của hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ bên dưới. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $f(3f(x) - m)$ có đúng 6 điểm cực trị?



A. 7.

B. 4.

C. 6.

D. 5.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Đặt } g(x) = f(3f(x) - m).$$

$$\text{Ta có } g'(x) = 3f'(x) \cdot f'(3f(x) - m)$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 3f'(x) \cdot f'(3f(x) - m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f'(3f(x) - m) = 0 \end{cases}$$

$$\text{Từ đồ thị ta thấy } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{Do } f'(3f(x) - m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3f(x) - m = 0 \\ 3f(x) - m = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = \frac{m}{3} \\ f(x) = \frac{m}{3} + 1 \end{cases}$$

Từ (1) và dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$ điều kiện để hàm số $f(3f(x) - m)$ có đúng 6 điểm cực trị là số nghiệm của phương trình $f(x) = \frac{m}{3}$ và phương trình $f(x) = \frac{m}{3} + 1$ cùng với 2 nghiệm ở (1) thỏa mãn $g'(x)$ đảo dấu 6 lần. Khi đó xảy ra các trường hợp sau:

$$\text{TH1: } \begin{cases} 0 < \frac{m}{3} < 4 \\ \frac{m}{3} + 1 \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m < 12 \\ m \geq 9 \end{cases} \Leftrightarrow 9 \leq m < 12. \text{ Do } m \text{ nguyên nên } m \in \{9; 10; 11\}.$$

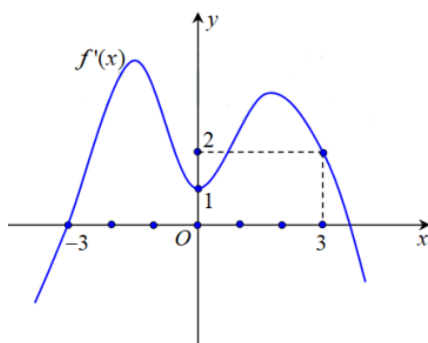
$$\text{TH2: } \begin{cases} \frac{m}{3} \leq 0 \\ 0 < \frac{m}{3} + 1 < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ m < 9 \\ m > -3 \end{cases} \Leftrightarrow -3 < m \leq 0. \text{ Do } m \text{ nguyên nên } m \in \{-2; -1; 0\}.$$

Vậy có 6 giá trị của m .

Câu 74: Cho đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới. Biết rằng hàm số $f'(x)$ đạt cực tiểu tại

$x = 0$; có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ và hàm số $g(x) = [f(x)]^2 - \left(\frac{x^2 + 6x}{3}\right) \cdot f(x) + \left(\frac{x^2 + 6x}{6}\right)^2$ có đúng 5

điểm cực trị. Giá trị $\min\left(\min_{x \in (-\infty; 3]} f(x)\right)$ bằng



A. 0.

B. $\frac{9}{2}$.

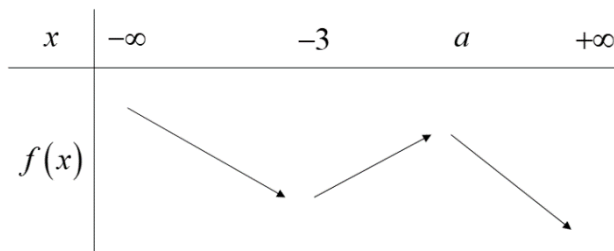
C. $\frac{11}{4}$.

D. $-\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Từ đồ thị $f'(x)$ suy ra bảng biến thiên của $f(x)$ với $a > 3$



Ta có: $g(x) = \left(f(x) - \frac{x^2 + 6x}{6} \right)^2 \Rightarrow g'(x) = \left(f'(x) - \frac{x}{3} - 1 \right) \cdot \left(f(x) - \frac{x^2 + 6x}{6} \right).$

Cho $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = \frac{x}{3} + 1 \\ f(x) = \frac{x^2 + 6x}{6} \end{cases}.$

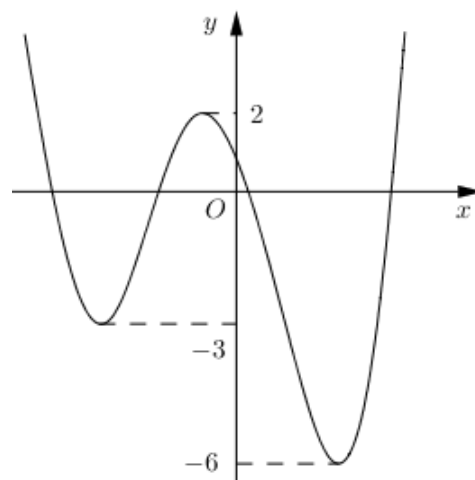
Xét $f'(x) = \frac{x}{3} + 1$ có 3 nghiệm lần lượt là $\begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \\ x = -3 \end{cases}.$

Nhận xét: Hàm số $y = f(x)$ và $y = \frac{x^2 + 6x}{6}$ đều đạt cực tiểu tại $x = -3$.

Để hàm số $g(x)$ có 5 điểm cực tiểu thì phương trình $f(x) = \frac{x^2 + 6x}{6}$ phải có nghiệm kép $x = -3$.

Nên $f(x) = f(-3) = \frac{-3}{2}.$

Câu 75: Cho $y = f(x)$ là hàm đa thức bậc 4 và có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-12; 12]$ để hàm số $g(x) = |2f(x-1) + m|$ có 5 điểm cực trị?



A. 12.

B. 14.

C. 15.

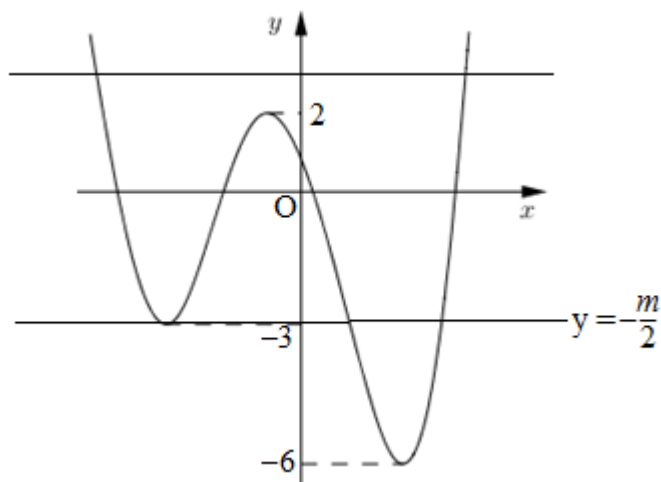
D. 13.

Lời giải

Chọn C

Nhận xét: Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x-1)$ bằng số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ trên tập xác định $\mathbb{R}$

Dựa vào đồ thị, hàm số $y = f(x)$ có 3 điểm cực trị



Để hàm số $g(x)$ có 5 điểm cực trị

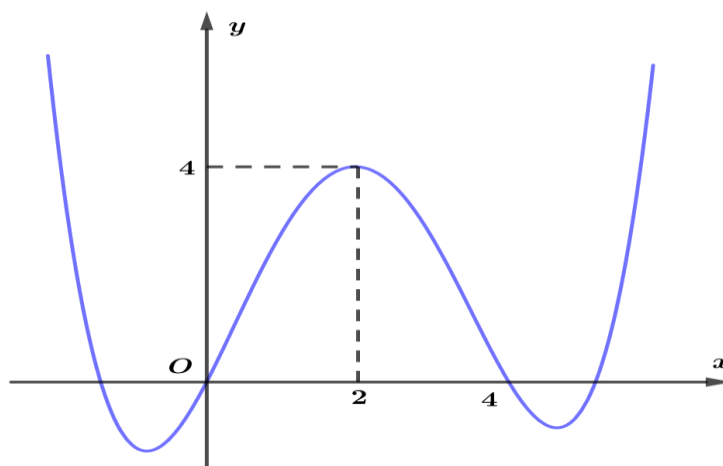
$\Leftrightarrow 2f(x) + m = 0 \Leftrightarrow f(x) = -\frac{m}{2}$ có 2 nghiệm phân biệt hoặc 3 nghiệm trong đó có 1 nghiệm bội chẵn và 2 nghiệm đơn

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{m}{2} \geq 2 \\ -6 < -\frac{m}{2} \leq -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -4 \\ 6 \leq m < 12 \end{cases}$$

Mà m là giá trị nguyên thuộc $[-12; 12]$ nên $m \in \{-12; -11; \dots; -4; 6; 7; \dots; 11\}$

Vậy có 15 giá trị nguyên m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 76: Cho hàm số bậc năm $y = f(x)$ có đồ thị $y = f'(x)$ như hình bên. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x^3 + 3x^2) - 2x^3 - 6x^2$ là



A. 7.

B. 10.

C. 5.

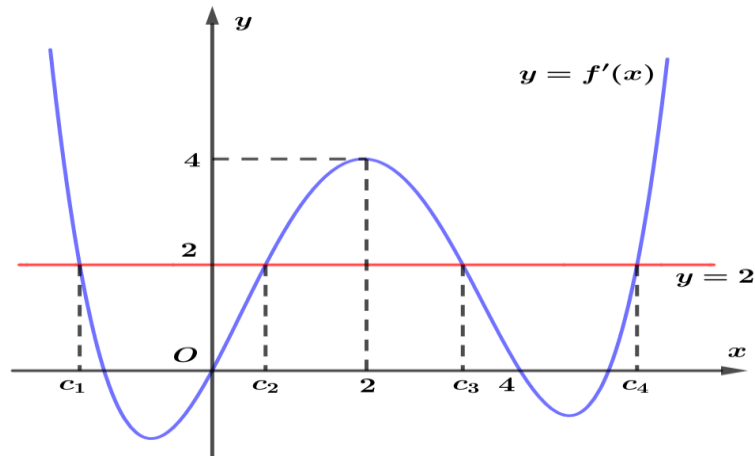
D. 11.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $g(x) = f(x^3 + 3x^2) - 2x^3 - 6x^2$

Ta có $g'(x) = (3x^2 + 6x)f'(x^3 + 3x^2) - 6x^2 - 12x = 3x(x+2)[f'(x^3 + 3x^2) - 2]$.



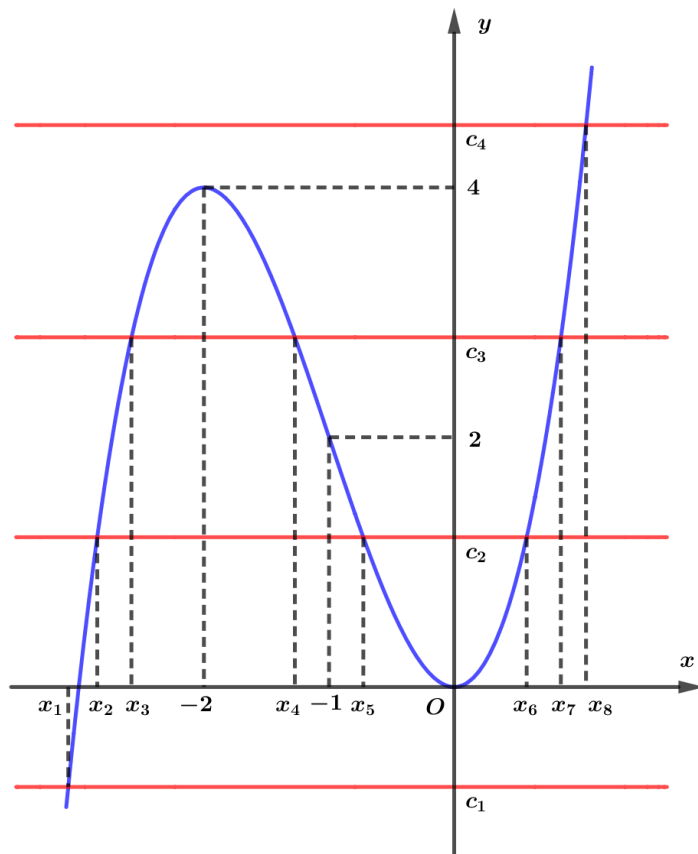
$$\text{Cho } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \\ f'(x^3 + 3x^2) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \\ x^3 + 3x^2 = c_1 \ (c_1 < 0) \quad (1) \\ x^3 + 3x^2 = c_2 \ (0 < c_2 < 2) \quad (2) \\ x^3 + 3x^2 = c_3 \ (2 < c_3 < 4) \quad (3) \\ x^3 + 3x^2 = c_4 \ (c_4 > 4) \quad (4) \end{cases}$$

Xét hàm số $h(x) = x^3 + 3x^2$, ta có $h'(x) = 3x^2 + 6x$.

Bảng biến thiên $h(x)$:

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$	
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	$-\infty$	4	0	$+\infty$	

Vẽ đồ thị của các hàm số $y = h(x)$, $y = c_1$, $y = c_2$, $y = c_3$, $y = c_4$ trên cùng một mặt phẳng tọa độ ta được



$$(1) \Leftrightarrow x = x_1; (2) \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_2 \\ x = x_5 \\ x = x_6 \end{cases}; (3) \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_3 \\ x = x_4 \\ x = x_7 \end{cases}; (4) \Leftrightarrow x = x_8$$

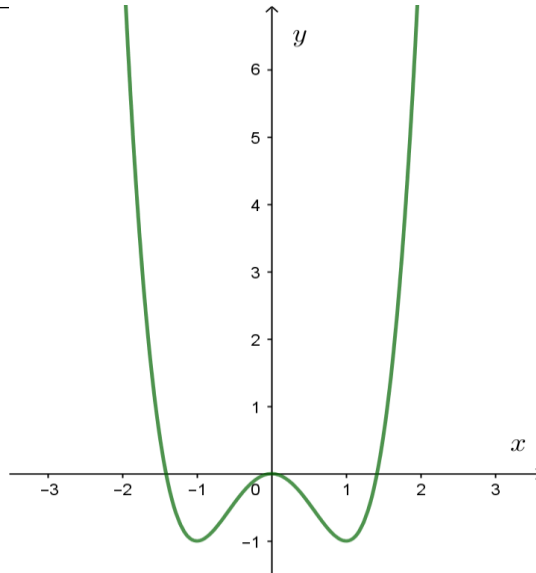
Trong đó $x_1 < x_2 < x_3 < -2 < x_4 < x_5 < 0 < x_6 < x_7 < x_8$.

Bảng xét dấu $g'(x)$:

x	$-\infty$	x_1	x_2	x_3	-2	x_4	x_5	0	x_6	x_7	x_8	$+\infty$		
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Từ bảng xét dấu ta kết luận được hàm số $g(x)$ có 10 điểm cực trị.

Câu 77: Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x^3 + f(x))$ là

A. 11.

B. 9.

C. 8.

D. 10.

Lời giải

Chọn B

Từ đồ thị ta thấy hàm số trên có phương trình là $y = x^4 - 2x^2$. Vậy ta có:

$$f(x) = x^4 - 2x^2 \text{ và } f'(x) = 4x^3 - 4x$$

$$g'(x) = (f(x^3 + f(x)))' = (x^3 + f(x))' f'(x^3 + f(x)) = (3x^2 + f'(x)) f'(x^3 + f(x)).$$

$$\text{Suy ra } g'(x) = (3x^2 + f'(x)) f'(x^3 + f(x)) = (3x^2 + 4x^3 - 4x) f'(x^3 + x^4 - 2x^2).$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow (3x^2 + 4x^3 - 4x) f'(x^3 + x^4 - 2x^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3 + 3x^2 - 4x = 0 \\ x^4 + x^3 - 2x^2 = 1 \\ x^4 + x^3 - 2x^2 = -1 \\ x^4 + x^3 - 2x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3 + 3x^2 - 4x = 0 \\ x^4 + x^3 - 2x^2 - 1 = 0 \\ x^4 + x^3 - 2x^2 + 1 = 0 \\ x^4 + x^3 - 2x^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x \approx 0,6930 \\ x \approx -1,4430 \\ x \approx 1,21195 \\ x \approx -2,0754 \\ x \approx -0,6710 \\ x \approx -1,9051 \\ x = 1 \\ x = -2 \end{cases}.$$

Phương trình $g'(x) = 0$ có đúng 8 nghiệm đơn và 1 nghiệm bội lẻ $x = 0$.

Vậy hàm số $g(x)$ có 9 điểm cực trị.

Câu 78: Cho hàm số bậc bốn trùng phương $y = f(x)$ có bảng biến thiên sau

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	2	6	2	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = \frac{1}{x^2} (f(x) - 6)^4$ là

A. 2.

B. 4.

C. 5.

D. 3.

Lời giải**Chọn B**

Theo giả thiết ta có $f(x) = ax^4 + bx^2 + c \Rightarrow f'(x) = 4ax^3 + 2bx$.

Từ bảng biến thiên ta có hàm số $f(x)$ đi qua $A(-2; 2), B(0; 6), C(2; 2)$ và có ba điểm cực trị

$$\Rightarrow \begin{cases} 16a + 4b + c = 2 \\ c = 6 \\ 32a + 4b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ b = -2 \\ c = 6 \end{cases}. \text{ Vậy } f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 6, f'(x) = x^3 - 4x$$

Ta có Hàm số $g(x) = \frac{1}{x^2} (f(x) - 6)^4$ xác định trên $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$$g'(x) = -\frac{2}{x^3} (f(x) - 6)^4 + \frac{1}{x^2} \cdot 4(f(x) - 6)^3 \cdot f'(x)$$

$$\Rightarrow g'(x) = \frac{(f(x) - 6)^3}{x^3} (4x \cdot f'(x) - 2f(x) + 12)$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) - 6 = 0 & (1) \\ 4xf'(x) - 2f(x) + 12 = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\text{Ta có } (1) \Leftrightarrow \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 6 = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 2\sqrt{2} \end{cases}.$$

$$(2) \Leftrightarrow 4x \cdot (x^3 - 4x) - 2\left(\frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 6\right) + 12 = 0 \Leftrightarrow \frac{7}{2}x^4 - 12x^2 = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm \frac{2\sqrt{42}}{7} \end{cases}.$$

$$\text{Vì } x \neq 0 \text{ nên có } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 2\sqrt{2} \\ x = \pm \frac{2\sqrt{42}}{7} \end{cases} \text{ và các nghiệm đó đều là nghiệm bội lẻ.}$$

Do đó hàm số $g(x)$ có 4 điểm cực trị.

Câu 79: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có bảng biến thiên như hình vẽ:

Chủ đề 01: Cơ bản về tính đơn điệu của hàm số

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$					

Số điểm cực đại của hàm số $y = f(|f(x)|)$ là

A. 2.

B. 3.

C. 0.

D. 1.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Đặt } g(x) = f(|f(x)|) \Rightarrow g'(x) = f'(|f(x)|) \cdot \frac{f'(x) \cdot f(x)}{|f(x)|}$$

Do đó $g'(x)$ không xác định khi $f(x) = 0$ hay $x = 0$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f'(|f(x)|) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ |f(x)| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ f(x) = \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

Từ bảng biến thiên của $f(x)$ ta có: $|f(x)| \in [0; 1], \forall x \in \mathbb{R}$. Suy ra $f'(|f(x)|) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Ta có bảng xét dấu $g'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$-$		$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	$+$	0	$-$

Từ bảng biến thiên suy ra số điểm cực đại của hàm số $y = f(|f(x)|)$ là 2..

Câu 80: Cho $f(x)$ là hàm số có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$					

Tìm số điểm cực tiểu của hàm số $g(x) = f(|x^3|) - 3|x|$.

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 0.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $h(x) = f(x^3) - 3x$.

$$h'(x) = 3x^2 \cdot f'(x^3) - 3.$$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 \cdot f'(x^3) - 3 = 0.$$

$$\text{Để thấy } x = 0 \text{ không là nghiệm của nên } (1) \Leftrightarrow f'(x^3) = \frac{1}{x^2}.$$

$$\text{Đặt } t = x^3 \text{ thì } (2) \text{ trở thành } f'(t) = \frac{1}{\sqrt[3]{t^2}} \quad (t \neq 0).$$

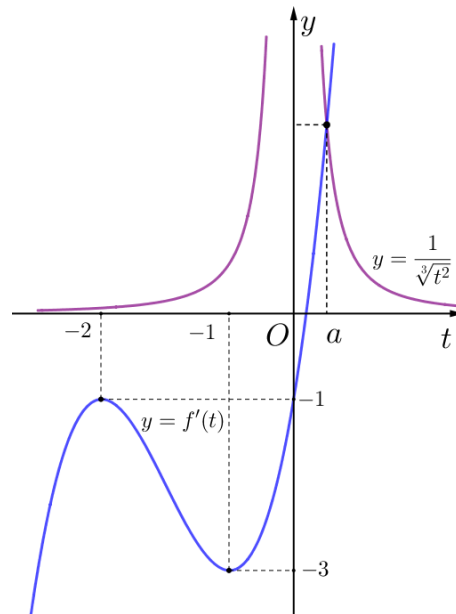
$$\text{Xét hàm số } y = \frac{1}{\sqrt[3]{t^2}}$$

$$+ t > 0 \text{ thì } y = t^{-\frac{2}{3}} \text{ là hàm số lũy thừa, } y' = -\frac{2}{3} t^{-\frac{5}{3}} < 0 \text{ nên } y \text{ nghịch biến trên } (0; +\infty) \text{ và đồ}$$

thị của y nhận hai trục tọa độ làm hai tiệm cận.

+ $y(t) = y(-t)$ nên y là hàm số chẵn. Do đó đồ thị của y nhận Oy làm trục đối xứng.

Vẽ đồ thị của $f'(t)$ và $y = \frac{1}{\sqrt[3]{t^2}}$ trên cùng hệ trục tọa độ ta có:



Từ đồ thị ta có $(3) \Leftrightarrow t = a > 0$. Suy ra $x = \sqrt[3]{a} > 0$

Bảng biến thiên của $h(x)$:

x	$-\infty$	0	$\sqrt[3]{a}$	$+\infty$
$h'(x)$	$-$	$-$	0	$+$
$h(x)$	$+\infty$	$h(0)$	$h(\sqrt[3]{a})$	$+\infty$

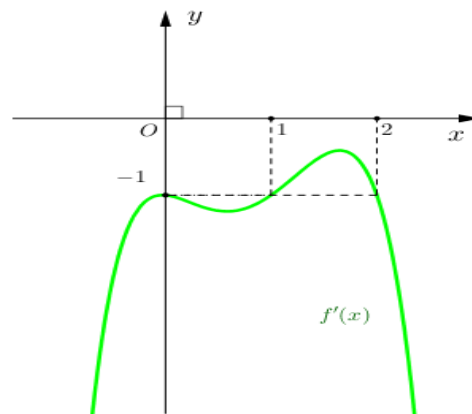
Ta thấy hàm số $g(x) = h(|x|)$ là hàm số chẵn nên đồ thị của $g(x)$ nhận Oy làm trục đối xứng.

Do đó ta có bảng biến thiên của $g(x)$ như sau:

x	$-\infty$	$-\sqrt[3]{a}$	0	$\sqrt[3]{a}$	$+\infty$	
$g'(x)$	$-$	0	$+$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$+\infty$		$g(0)$		$+\infty$	
		$g(\sqrt[3]{a})$		$g(\sqrt[3]{a})$		

Vậy hàm số $g(x)$ có hai điểm cực tiểu và một điểm cực đại.

Câu 81: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ. Số điểm cực tiểu của hàm số $g(x) = f(x) + x$ là



A. 1.

B. 2.

C. 3.

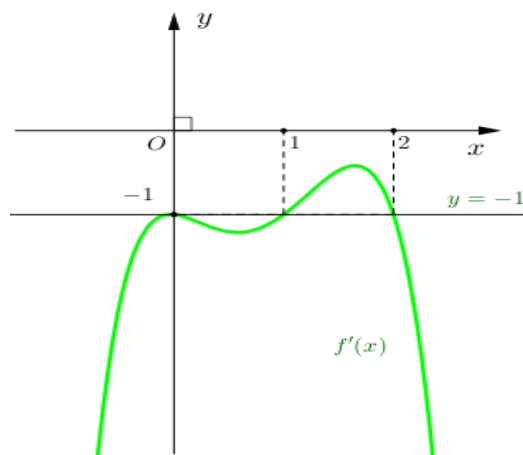
D. 0.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $g'(x) = f'(x) + 1; g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -1 (*)$.

Phương trình chính là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $f'(x)$ và đường thẳng $y = -1$.



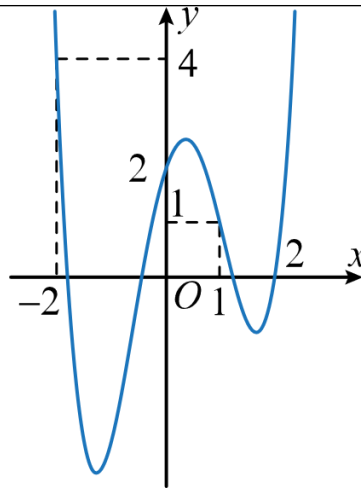
Dựa vào đồ thị, ta thấy có nghiệm $x = 0$, $x = 1$ và $x = 2$.

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$:

x	$-\infty$	0		1		2		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	-	0	+	0	-
$g(x)$								

Dựa vào BBT, hàm số $g(x) = f(x) + x$ có một điểm cực tiểu $x = 1$.

Câu 82: Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Số điểm cực đại của hàm số $g(x) = f(x^2 - 4x + 3) - 3(x-2)^2 + \frac{1}{2}(x-2)^4$ là

A. 7.

B. 3.

C. 4.

D. 5.

Lời giải

Chọn B

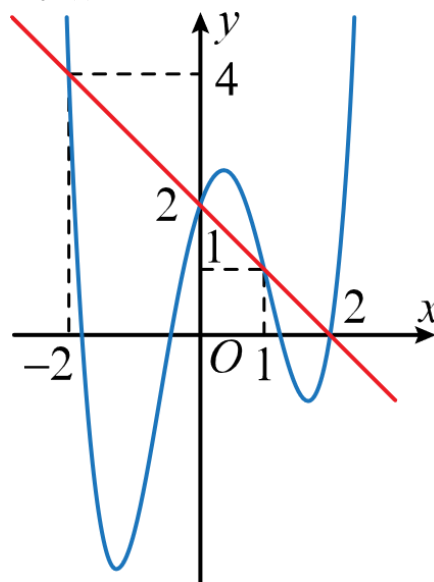
Ta có:

$$g'(x) = (2x-4)f'(x^2-4x+3) - 6(x-2) + 2(x-2)^3 = (2x-4) \left[f'(x^2-4x+3) - 3 + (x-2)^2 \right]$$

$$\text{Ta có: } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-4=0 \\ f'(x^2-4x+3) - 3 + (x-2)^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ f'(x^2-4x+3) = 2 - (x^2-4x+3) \quad (*) \end{cases}$$

Đặt $x^2 - 4x + 3 = t$, ta có: $(*) \Leftrightarrow f'(t) = 2 - t$.



Từ đồ thị hàm số $y = f'(t)$ và $y = 2 - t$ ta có:

$$f'(t) = 2 - t \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \\ t = 0 \\ t = 1 \\ t = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 3 = -2 \\ x^2 - 4x + 3 = 0 \\ x^2 - 4x + 3 = 1 \\ x^2 - 4x + 3 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \\ x = 2 \pm \sqrt{2} \\ x = 2 \pm \sqrt{3} \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên hàm số $y = g(x)$ như sau:

Chủ đề 01: Cơ bản về tính đơn điệu của hàm số

x	$-\infty$	$2-\sqrt{3}$	$2-\sqrt{2}$	1	2	3	$2+\sqrt{2}$	$2+\sqrt{3}$	$+\infty$		
$g'(x)$	-	0	+	0	-	0	+	0	-	0	+
$g(x)$											

Vậy hàm số $y = g(x)$ có 3 điểm cực đại.

Câu 83: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+1)^4(x-m)^5(x+3)^3$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-5; 5]$ để hàm số $g(x) = f(|x|)$ có 3 điểm cực trị.

A. 3.

B. 5.

C. 6.

D. 4.

Lời giải

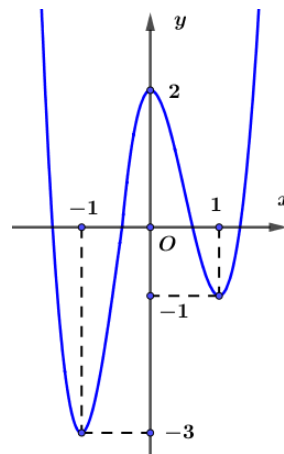
Chọn B

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \text{ (bội chẵn)} \\ x = m \text{ (bội lẻ)} \\ x = -3 \text{ (bội lẻ)} \end{cases}. \text{ Vậy hàm số } y = f(x) \text{ đạt cực trị tại } x = -3 < 0; x = m.$$

Để hàm số $g(x) = f(|x|)$ có 3 điểm cực trị thì hàm số $y = f(x)$ phải có đúng 1 cực trị dương, nghĩa là $m > 0$.

Vì $m \in [-5; 5]$ nên $m \in \{1; 2; 3; 4; 5\}$. Vậy có 5 giá trị.

Câu 84: Cho hàm số bậc năm $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ dưới đây. Số điểm cực trị của hàm số $y = f(4x^2 - 4x) - \frac{8}{3}x^3 + 6x^2 - 4x + 1$ là



A. 4.

B. 5.

C. 9.

D. 7.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } y' = 4(2x-1)f'(4x^2-4x) - 4(2x-1)(x-1)$$

$$\Rightarrow y' = 4(2x-1)[f'(4x^2-4x) - (x-1)].$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow y' = 4(2x-1)[f'(4x^2-4x) - (x-1)] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ f'(4x^2-4x) = x-1 \end{cases}$$

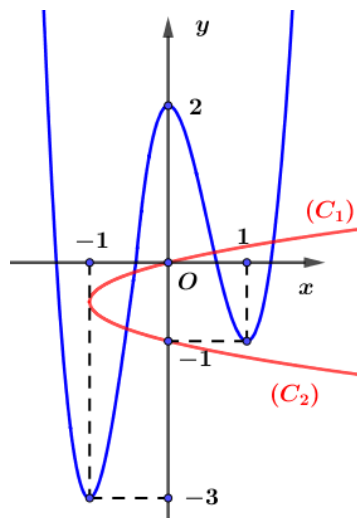
$$\text{Xét phương trình: } f'(4x^2-4x) = x-1 \quad (1)$$

Đặt $t = 4x^2 - 4x \Rightarrow 4x^2 - 4x - t = 0 \quad \Delta' = 4 + 4t \geq 0 \Leftrightarrow t \geq -1$.

$$\text{Khi đó: } 4x^2 - 4x - t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1 - \sqrt{1+t}}{2} \\ x = \frac{1 + \sqrt{1+t}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-1 = \frac{-1 - \sqrt{1+t}}{2} \\ x-1 = \frac{-1 + \sqrt{1+t}}{2} \end{cases}$$

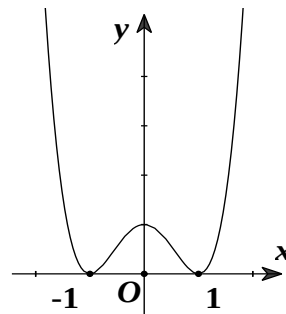
$$\text{Phương trình (1) trở thành: } \begin{cases} f'(t) = \frac{-1 - \sqrt{1+t}}{2} \\ f'(t) = \frac{-1 + \sqrt{1+t}}{2} \end{cases}$$

Vẽ đồ thị 3 hàm số $y = f'(x)$, $y = \frac{-1 - \sqrt{1+x}}{2} (C_1)$, $y = \frac{-1 + \sqrt{1+x}}{2} (C_2)$ trên cùng hệ trục tọa độ ta thấy đồ thị (C_1) cắt đồ thị $y = f'(x)$ tại 3 điểm, đồ thị (C_2) cắt đồ thị $y = f'(x)$ tại 1 điểm.



Với mỗi nhánh, mỗi giao điểm t sẽ tương ứng với một giá trị duy nhất của x khác $\frac{1}{2}$.

Câu 85: Vậy hàm số $y = f(4x^2 - 4x) - \frac{8}{3}x^3 + 6x^2 - 4x + 1$ có 5 điểm cực trị. Cho $f(x)$ là một hàm đa thức bậc năm thỏa mãn $f(0) = 0$. Hàm số $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên



Hàm số $g(x) = \left| f(\sin x) + \frac{1}{3} \sin^3 x - \sin^2 x \right|$ có bao nhiêu điểm cực trị trên khoảng $(0; 3\pi)$?

A. 15.

B. 11.

C. 9.

D. 13.

Lời giải

Chọn D

Do $f(x)$ là một hàm đa thức bậc năm nên $f'(x)$ là một hàm đa thức bậc bốn.

Chủ đề 01: Cơ bản về tính đơn điệu của hàm số

Dựa vào đồ thị hình vẽ ta nhận thấy $f'(x)$ có dạng $f'(x) = ax^4 + bx^2 + c$, đồ thị đi qua các điểm $A(0;1), B(1;0)$ và có điểm cực tiểu $x_{CT} = 1$. Từ đó ta có:

$$\begin{cases} f'(0) = 1 \\ f'(1) = 0 \\ f''(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 1 \\ a + b + c = 0 \\ 4a + 2b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 1 \\ a = 1 \\ b = -2 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = x^4 - 2x^2 + 1$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{2x^3}{3} + x + c$$

$$\text{Do } f(0) = 0 \Rightarrow c = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{2x^3}{3} + x.$$

$$\text{Xét hàm số } g(x) = \left| f(\sin x) + \frac{1}{3}\sin^3 x - \sin^2 x \right|, \text{ ta đặt } h(x) = f(\sin x) + \frac{1}{3}\sin^3 x - \sin^2 x$$

Tìm số cực trị của hàm số $y = h(x)$.

$$h'(x) = \cos x \cdot f'(\sin x) + \sin^2 x \cdot \cos x - 2\sin x \cdot \cos x$$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ f'(\sin x) = -\sin^2 x + 2\sin x \end{cases}$$

$$+ \text{) Với } \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy phương trình $\cos x = 0$ có 3 nghiệm đơn thuộc khoảng $(0; 3\pi)$. (1)

$$+ \text{) Với } f'(\sin x) = -\sin^2 x + 2\sin x$$

$$\text{Đặt } t = \sin x, t \in [-1; 1] \Rightarrow f'(t) = -t^2 + 2t$$

Xét phương trình hoành độ giao điểm:

$$-t^2 + 2t = t^4 - 2t^2 + 1 \Leftrightarrow t^4 - t^2 - 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \alpha \ (\alpha \approx 1,3864) \ (l) \\ t = \beta \ (\beta \approx 0,4257) \ (n) \end{cases}$$

Với $t = \beta \in (0; 1)$ thì $\sin x = \beta$, khi đó $f'(\sin x) = -\sin^2 x + 2\sin x$ có 4 nghiệm đơn thuộc khoảng $(0; 3\pi)$. (2)

Từ (1), (2) suy ra hàm số $y = h(x)$ có 7 cực trị trên khoảng $(0; 3\pi)$

Tìm số nghiệm của phương trình $h(x) = 0$.

$$t = \sin x \Rightarrow f(t) + \frac{1}{3}t^3 - t^2 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{5}t^5 - \frac{2}{3}t^3 + t + \frac{1}{3}t^3 - t^2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ \frac{1}{5}t^4 - \frac{1}{3}t^2 - t + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = a \ (a \approx 1,69) \ (l) \\ t = b \ (b \approx 0,86) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \sin x = b \ (b \approx 0,86) \end{cases}$$

+ $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ phương trình $h(x) = 0$ có 2 nghiệm thuộc khoảng $(0; 3\pi)$. (3)

+ $\sin x = b \ (b \approx 0,86) \Rightarrow$ phương trình $h(x) = 0$ có 4 nghiệm thuộc khoảng $(0; 3\pi)$. (4)

Từ (3), (4), suy ra $h(x) = 0$ có 6 nghiệm đơn trên khoảng $(0; 3\pi)$

Câu 86: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên $f'(x)$ như hình vẽ:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	-3	2	-1	$+\infty$

Hàm số $y = f(|e^{2x} - 2x - 2|)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 9.

B. 7.

C. 11.

D. 5.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $f'(x) = 0$ tại $x_1; x_2; x_3; x_4$ trong đó $x_1 < -1 < x_2 < 0 < x_3 < 1 < x_4$

Xét hàm số $y = f(|e^{2x} - 2x - 2|)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$

$$y' = \frac{2(e^{2x} - 1)(e^{2x} - 2x - 2)}{|e^{2x} - 2x - 2|} f'(|e^{2x} - 2x - 2|)$$

Với $e^{2x} - 2x - 2 \neq 0$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} e^{2x} - 1 = 0 \\ f'(|e^{2x} - 2x - 2|) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ |e^{2x} - 2x - 2| = x_3 \\ |e^{2x} - 2x - 2| = x_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ e^{2x} - 2x - 2 = x_3 & (1) \\ e^{2x} - 2x - 2 = x_4 & (2) \\ e^{2x} - 2x - 2 = -x_3 & (3) \\ e^{2x} - 2x - 2 = -x_4 & (4) \end{cases}$$

Xét hàm số $g(x) = e^{2x} - 2x - 2$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

$$g'(x) = 2e^{2x} - 2$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Ta có bảng biến thiên của hàm số

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$+\infty$	-1	$+\infty$

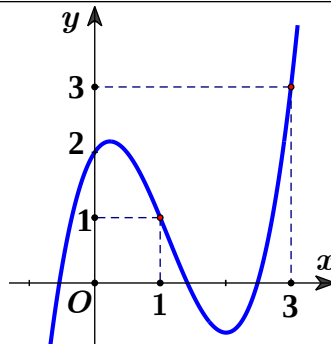
Dựa vào bảng biến thiên của hàm số ta có: phương trình, có hai nghiệm phân biệt khác 0, phương trình vô nghiệm vì vậy phương trình $y' = 0$ có 7 nghiệm phân biệt.

Mặt khác hàm số đạt cực trị tại các điểm thỏa mãn: $e^{2x} - 2x - 2 = 0$ (5).

Dựa vào bảng biến thiên hàm $g(x)$ suy ra phương trình (5) có hai nghiệm phân biệt khác 7 nghiệm của phương trình $y' = 0$.

Vậy hàm số đã cho có 9 điểm cực trị.

Câu 87: [Mức độ 4] Cho hàm số $f(x)$ có $f(0) = -1$. Biết $y = f'(x)$ là hàm số bậc ba có đồ thị là đường cong dưới đây.



Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = |f(x^4) - 6x^2|$ là

A. 3.

B. 6.

C. 5.

D. 4.

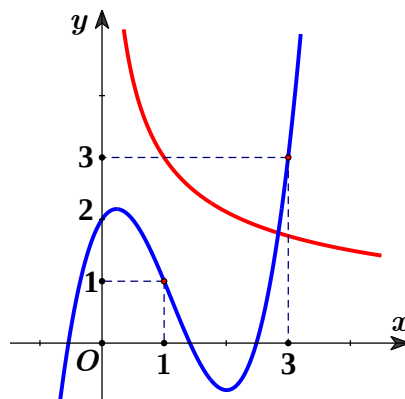
Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $h(x) = f(x^4) - 6x^2$ có $h'(x) = 4x^3 f'(x^4) - 12x = 4x[x^2 f'(x^4) - 3]$.

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x[x^2 f'(x^4) - 3] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(x^4) = \frac{3}{x^2} \quad (x \neq 0) \end{cases} \quad (1)$$

Xét phương trình (1): đặt $t = x^4$ thì phương trình có dạng $f'(t) = \frac{3}{\sqrt{t}}$ với $t > 0$ (2).



Dựa vào đồ thị, phương trình (2) có một nghiệm duy nhất $a > 0$.

Khi đó ta được $x = \pm \sqrt[4]{a}$.

Bảng biến thiên của hàm số $h(x) = f(x^4) - 6x^2$

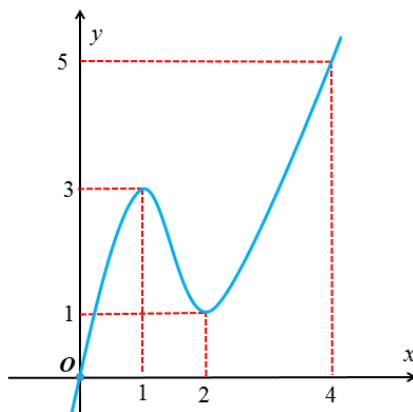
x	$-\infty$	$-\sqrt[4]{a}$	0	$\sqrt[4]{a}$	$+\infty$		
h'		$-$	0	$+$	$-$	0	$+$
$h(x)$	$+\infty$			-1			$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = |f(x^4) - 6x^2|$ bằng số điểm cực trị của hàm số

$h(x) = f(x^4) - 6x^2$ cộng với số nghiệm đơn hoặc nghiệm bội lẻ của phương trình $h(x) = 0$.

Do đó hàm số $g(x)$ có 5 cực trị.

Câu 88: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(0) = 0; f(4) > 4$. Biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm số điểm cực tiểu của hàm số $g(x) = |f(x^2) - 2x|$.



A. 2.

B. 1.

C. 3.

D. 0.

Lời giải**Chọn A**

$$\text{Đặt } h(x) = f(x^2) - 2x \Rightarrow h'(x) = 2x \cdot f'(x^2) - 2.$$

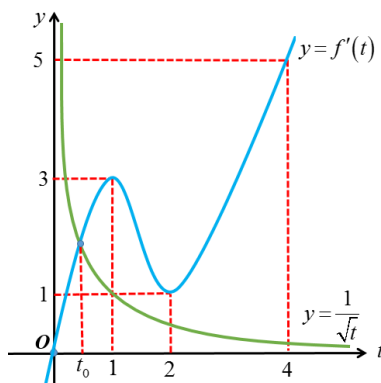
Vì $x^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên từ đồ thị ta thấy $f'(x^2) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Với $x \leq 0$ ta luôn có $h'(x) = 2x \cdot f'(x^2) - 2 < 0$.

Với $x > 0$, ta có $h'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x^2) = \frac{1}{x} \quad (*)$.

Đặt $t = x^2$, phương trình $(*)$ trở thành $f'(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} (t > 0)$.

Xét sự tương giao giữa hai đồ thị hàm số $y = f'(t)$ và $y = \frac{1}{\sqrt{t}}$ ở hình vẽ dưới đây:



Ta có $f'(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \Leftrightarrow t = t_0 \in (0; 1)$. Khi đó $h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{t_0}$.

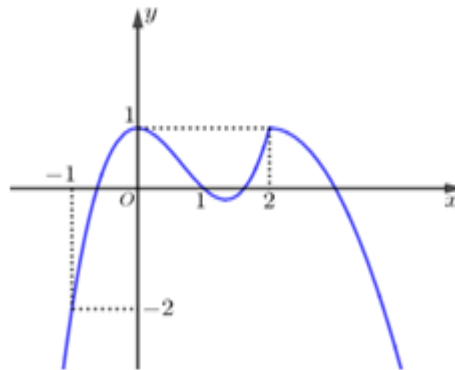
Mặt khác $h(0) = f(0) = 0$ và $h(2) = f(4) - 4 > 0$ nên ta có bảng biến thiên của hàm $y = h(x)$

x	$-\infty$	0	$\sqrt{t_0}$	2	$+\infty$		
$h'(x)$		$-$	$-$	0	$+$	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	0	$h(\sqrt{t_0})$	$h(2)$	$+\infty$		

Chủ đề 01: Cơ bản về tính đơn điệu của hàm số

Từ bảng biến thiên ta có hàm số $y = h(x)$ có một điểm cực trị và đồ thị hàm số $y = h(x)$ cắt Ox tại hai điểm phân biệt $\Rightarrow$ Hàm số $y = g(x) = |h(x)|$ có ba điểm cực trị trong đó có hai điểm cực tiểu.

Câu 89: Cho hàm số $y = f(x)$ có $f(1) < 0$ và đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ.



Hàm số $g(x) = \left| f(x^2) - \frac{x^6}{3} + x^4 - x^2 \right|$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

A. 3.

B. 2.

C. 4.

D. 5.

Lời giải

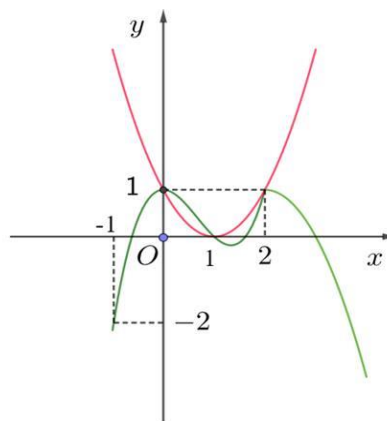
Chọn B

Ta có: $h(x) = f(x^2) - \frac{x^6}{3} + x^4 - x^2 \Rightarrow h'(x) = 2x \left[f'(x^2) - (x^4 - 2x^2 + 1) \right]$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{f'(x^2) - (x^4 - 2x^2 + 1)}_{k(x)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(x^2) = (x^2)^2 - 2x^2 + 1 (*) \end{cases}$$

Đặt $t = x^2 (t \geq 0)$, phương trình $(*)$ trở thành $f'(t) = t^2 - 2t + 1 (**)$.

Vẽ thêm đồ thị hàm số $x^2 - 2x + 1$ trên đồ thị $f'(x)$ đề cho.



$$\text{Dựa vào đồ thị, } (**) \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 1 \\ t = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \\ x^2 = 1 \\ x^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ (bội ba)} \\ x = \pm 1 \\ x = \pm \sqrt{2} \end{cases}.$$

Theo đồ thị ta thấy qua điểm $t = 2$, đồ thị màu đỏ vẫn nằm trên đường màu xanh hay nói cách khác, dấu của biểu thức không bị đổi qua điểm này.

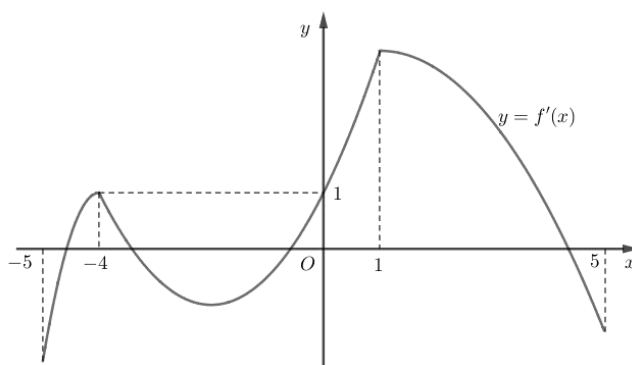
Vì vậy trong bảng biến thiên có thể bỏ qua xét tại hai điểm này.

Còn $x = 0$ trở thành nghiệm bội lẻ của phương trình $h'(x) = 0$, do đó ta vẫn xét.

Theo đó ta lập bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$				
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$h(x)$			$f(1)-\frac{1}{3}$	$f(0)$	$f(1)-\frac{1}{3}$				
$g(x)$			$f(1)-\frac{1}{3}$	$f(0)$	$f(1)-\frac{1}{3}$				

Câu 90: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Hàm số $y = f(x^2 + 4x) - x^2 - 4x$ có bao nhiêu điểm cực trị thuộc khoảng $(-5; 1)$?



A. 5.

B. 4.

C. 6.

D. 3.

Lời giải

Chọn A

Đặt $g(x) = f(x^2 + 4x) - x^2 - 4x$

$$\Rightarrow g'(x) = (2x + 4)f'(x^2 + 4x) - (2x + 4) = (2x + 4)[f'(x^2 + 4x) - 1].$$

$$\text{Ta có } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 4 = 0 \\ x^2 + 4x = -4 & (1) \\ x^2 + 4x = 0 & (2) \\ x^2 + 4x = a \in (1; 5) & (3) \end{cases}.$$

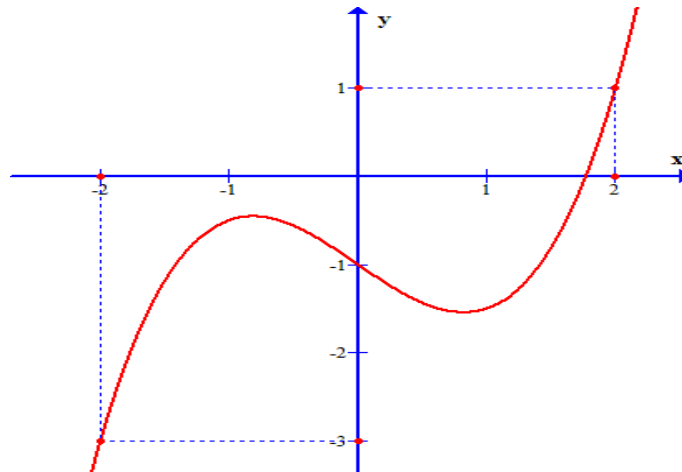
Xét phương trình $x^2 + 4x = a \in (1; 5)$, ta có BBT của hàm số $y = x^2 + 4x$ trên $(-5; 1)$ như sau:

x	-5	-4	-2	0	1
y'		$-$	0	$+$	
y	5	0	-4	0	5

Suy ra có nghiệm kép $x = -2$, có 2 nghiệm phân biệt $x = -4; x = 0$, có 2 nghiệm phân biệt $x = x_1; x = x_2$ khác $-2; 0; -4$. Do đó phương trình $g'(x) = 0$ có 5 nghiệm trong đó có $x = -2$ là nghiệm bội ba, các nghiệm $x = -4; x = 0; x = x_1; x = x_2$ là các nghiệm đơn.

Vậy $g(x)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 91: Cho $f(x)$ là hàm bậc bốn thỏa mãn $f(0) = 0$. Hàm số $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Hàm số $g(x) = \left| 2f(x^2 + x) - x^4 - 2x^3 + x^2 + 2x \right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 4.

B. 5.

C. 6.

D. 7.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Gọi } h(x) = 2f(x^2 + x) - x^4 - 2x^3 + x^2 + 2x = 2f(x^2 + x) - (x^2 + x)^2 + 2(x^2 + x).$$

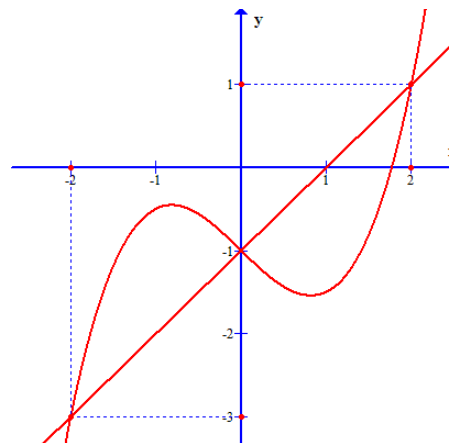
$$\Rightarrow h'(x) = 2(2x+1)f'(x^2 + x) - 2(2x+1)(x^2 + x) + 2(2x+1).$$

$$\Rightarrow h'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1=0 \\ f'(x^2 + x) - (x^2 + x) + 1 = 0 \end{cases} \quad (*)$$

Đặt $t = x^2 + x$. Khi đó phương trình trở thành $f'(t) - t + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow f'(t) = t - 1$$

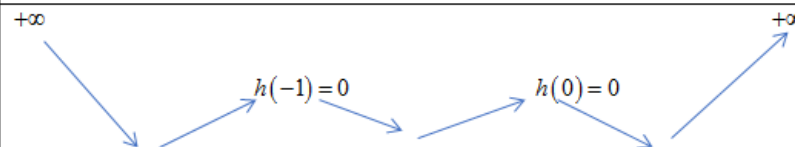
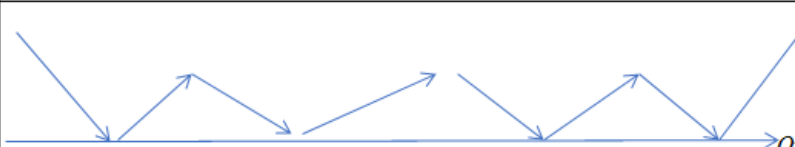
Ta vẽ đồ thị hai hàm số $y = f'(t)$ và $y = t - 1$ trên cùng một hệ trục tọa độ



Dựa vào đồ thị ta thấy $f'(t) > t - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < t < 0 \\ t > 2 \end{cases}$.

$$\text{Khi đó: } \begin{cases} -2 < x^2 + x < 0 \\ x^2 + x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 0 \\ x < -2 \vee 1 < x \end{cases}.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	1	$+\infty$	
$2x+1$	$-$	$ $	$-$	$ $	$+$	$ $	$+$	
$f'(t)-t+1$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	
$h'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$							$+\infty$
$g(x)$								Ox

Vậy hàm số $g(x) = |h(x)|$ có 7 điểm cực trị.

Câu 92: Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm số bậc bốn thỏa mãn $f(0) = 0$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	m	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	-1	$+\infty$	$+\infty$

Hàm số $g(x) = |f(x^2) - x^2|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 1.

B. 3.

C. 5.

D. 7

Lời giải

Chọn C

Đặt $h(x) = f(x^2) - x^2 \Rightarrow h(0) = 0$.

Ta có $h'(x) = 2xf'(x^2) - 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(x^2) = 1 \end{cases}$

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $t = f'(x)$ ta có phương trình $f'(x) = 1$ có duy nhất một nghiệm và nghiệm đó dương. Gọi x_0 là nghiệm của phương trình $f'(x) = 1$.

Suy ra $f'(x^2) = 1 \Leftrightarrow x^2 = x_0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{x_0}$.

Ta có $y = f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \Rightarrow f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty \Rightarrow a > 0$.

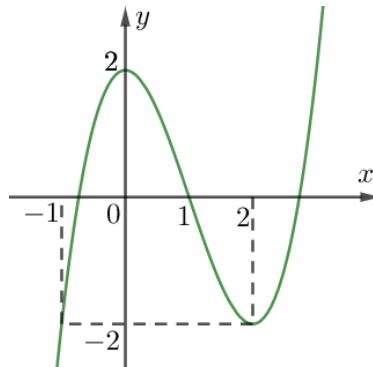
Khi đó $h(x) = f(x^2) - x^2$ là hàm bậc 8 và $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = +\infty$

Lập bảng biến thiên của $h(x)$ ta có

x	$-\infty$	$-\sqrt{x_0}$	0	$\sqrt{x_0}$	$+\infty$
$h'(x)$	-	0	+	0	-
$h(x)$	$+\infty$		0		$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có hàm số $g(x) = |h(x)|$ có 5 điểm cực trị.

Câu 93: Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm số đa thức bậc bốn. Biết $f(0) = 0$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ có hình vẽ bên dưới.



Hàm số $g(x) = |5f(|2\sin x - 1| - 1) + 4|$ có bao nhiêu điểm cực trị trên đoạn $[0; 3\pi]$?

A. 16.

B. 32.

C. 17.

D. 33.

Lời giải

Chọn D

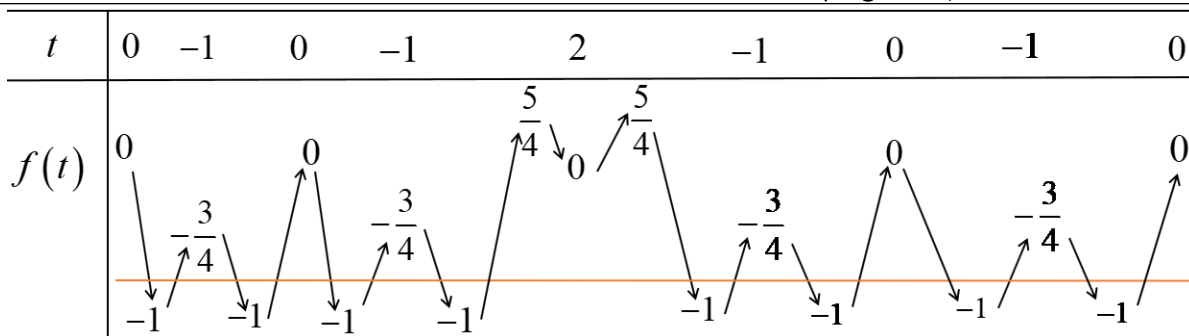
Ta có $f''(x) = ax(x-2) \Rightarrow f'(x) = a\left(\frac{x^3}{3} - x^2\right) + c$ qua $(0; 2), (-1; -2)$.

Nên $\begin{cases} c = 2 \\ a = 3 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = x^3 - 3x^2 + 2 \Leftrightarrow f(x) = \frac{x^4}{4} - x^3 + 2x$.

x	$-\infty$	-1	$1 - \sqrt{3}$	0	1	2	$1 + \sqrt{3}$	$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$-\frac{3}{4}$	-1	0	$\frac{5}{4}$	0	-1	$+\infty$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{13\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{2}$	$\frac{17\pi}{6}$	3π
$2\sin x - 1$	-1		1		-3		1		-1
$ 2\sin x - 1 - 1$	$0 \rightarrow -1$	$\rightarrow 0$	$\rightarrow -1$	$\rightarrow 2$	$\rightarrow -1$	$\rightarrow 0$	$\rightarrow -1$	$\rightarrow 0$	

Bảng biến thiên của hàm số $y = f(t)$ với $t = |2\sin x - 1| - 1$

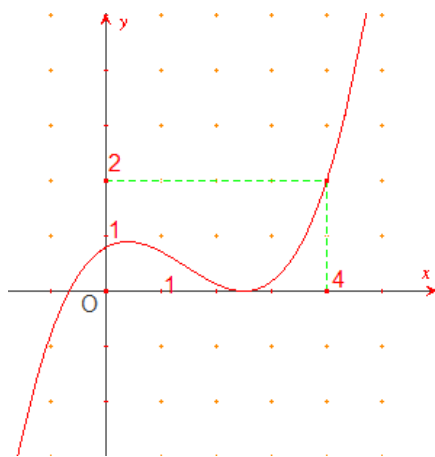


Suy ra phương trình có $f(|2\sin x - 1| - 1) = -\frac{4}{5}$ có 16 nghiệm trên đoạn $[0; 3\pi]$ và hàm số

$h(x) = 5f(|2\sin x - 1| - 1) + 4$ có 17 điểm cực trị trên đoạn $[0; 3\pi]$.

Vậy hàm số $g(x) = |5f(|2\sin x - 1| - 1) + 4|$ có $16 + 17 = 33$ điểm cực trị trên đoạn $[0; 3\pi]$.

Câu 94: Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(0) = 0$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới



Tìm số điểm cực trị của hàm số $g(x) = \left| f(x^2) - \frac{2}{3}x^3 \right|$.

A. 3.

B. 7.

C. 6.

D. 5.

Lời giải

Chọn D

Đặt $h(x) = f(x^2) - \frac{2}{3}x^3$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Ta có: $h'(x) = f'(x^2) \cdot 2x - 2x^2 = 2x[f'(x^2) - x]$.

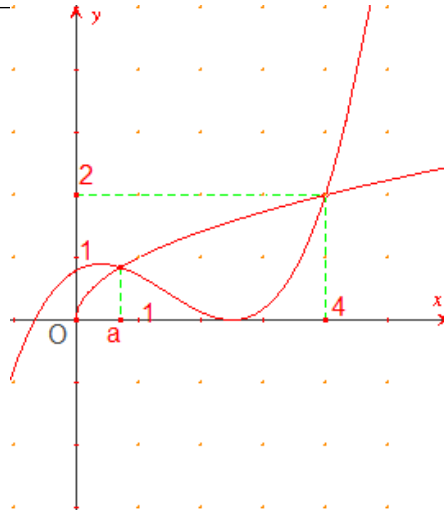
$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(x^2) - x = 0 (*) \end{cases}$$

+ Nếu $x < 0$ thì $x^2 > 0$. Ta có: $f'(x^2) \geq 0$; $-x > 0$. Suy ra $(*)$ vô nghiệm.

+ Nếu $x \geq 0$ thì $(*) \Leftrightarrow f'(t) = \sqrt{t}$

Xét đồ thị hàm số $y = f'(t)$; $y = \sqrt{t}$

Chủ đề 01: Cơ bản về tính đơn điệu của hàm số



Ta thấy: $f'(t) = \sqrt{t}$ có 2 nghiệm dương phân biệt là a và 4 .

Suy ra (*) có 2 nghiệm dương phân biệt $\sqrt{a}$; 2 .

Do đó $h'(x)$ có 3 nghiệm phân biệt là $0; \sqrt{a}$; 2 .

Ta có: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} h(x) = +\infty$, $h(0) = f(0) - 0 = 0$.

Nhìn vào lưới ô vuông và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ta thấy: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f'(x)$, trục Ox , Oy và đường thẳng $x = 4$ nhỏ hơn 4. Do đó ta có:

$$\int_0^4 f'(x)dx < 4 \Leftrightarrow f(4) - f(0) < 4 \Leftrightarrow f(4) < 4.$$

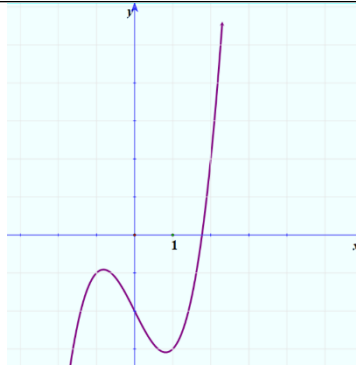
Suy ra $h(2) = f(4) - \frac{16}{3} < 0$.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y = h(x)$ như sau:

x	$-\infty$	0	a	2	$+\infty$			
$h'(x)$	-	0	+	0	-	0	+	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\searrow$	$h(2) < 0$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy $y = h(x)$ có 3 điểm cực trị và phương trình $h(x) = 0$ có 2 nghiệmbội lẻ nên hàm số $g(x) = |h(x)|$ có 5 điểm cực trị.

Câu 95: Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có $f(0) = 2021$ và đồ thị của đạo hàm $f'(x)$ như hình bên dưới.



Hỏi hàm số $y = |f(x^2) - 2|x| - 2021|$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. 6.

Lời giải

Chọn C

Đặt $g(x) = f(x^2) - 2x - 2021$ với $x > 0$

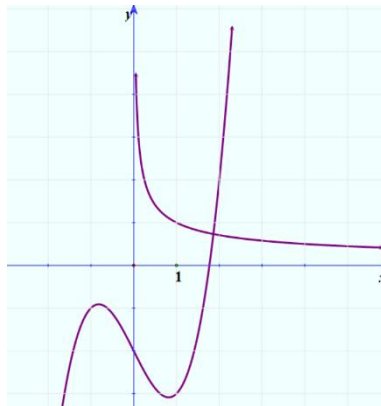
Ta có $g'(x) = 2xf'(x^2) - 2$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x^2) = \frac{1}{x},$$

Đặt $t = x^2$, do $x > 0 \Rightarrow x = \sqrt{x^2} = \sqrt{t}$

Do đó trở thành $f'(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$.

Vẽ đồ thị hàm số $y = f'(t)$ và đồ thị hàm số $y = \frac{1}{\sqrt{t}}$ trên cùng 1 hệ trục tọa độ.



Dựa vào đồ thị ta thấy phương trình có 1 nghiệm dương duy nhất $t = c$.

Từ đó có nghiệm dương duy nhất $x = \sqrt{c}$

Bảng biến thiên của hàm số $g(x) = f(x^2) - 2x - 2021$ với $x > 0$

x	0	$\sqrt{c}$	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	0		$+\infty$

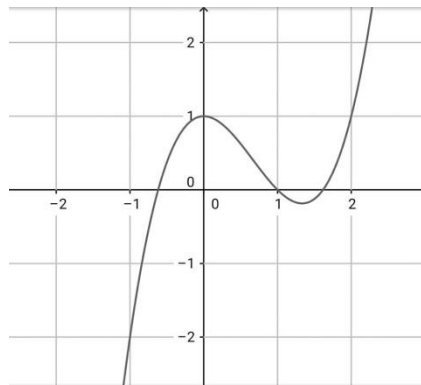
Chủ đề 01: Cơ bản về tính đơn điệu của hàm số

Do đó hàm số $y = g(|x|) = f(x^2) - 2|x| - 2021$ có bảng biến thiên :

x	$-\infty$	$-\sqrt{c}$	0	$\sqrt{c}$	$+\infty$	
y'	$-$	0	$+$	$-$	0	$+$
y	$+\infty$		0		$+\infty$	

Vậy hàm số $y = |f(x^2) - 2|x| - 2021| = |g(|x|)|$ có 5 điểm cực trị.

Câu 96: Cho $f(x)$ là một hàm số bậc bốn thỏa mãn $f(1) = -\frac{5}{3}$. Hàm số $f'(x)$ có đồ thị như sau:



Hàm số $g(x) = \left| f(x) - \frac{x^3}{3} + x^2 - x + 2 \right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 5.

Lời giải

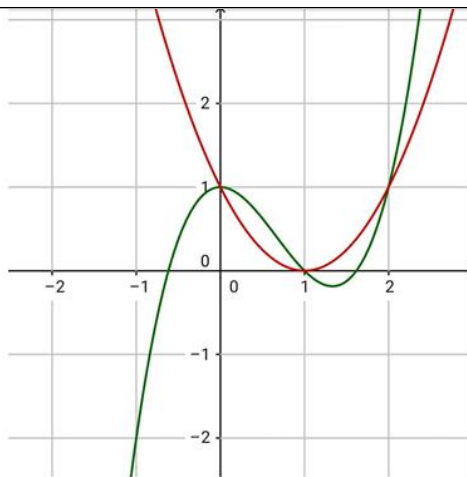
Chọn D

Xét hàm số $h(x) = f(x) - \frac{x^3}{3} + x^2 - x + 2$

Ta có $h'(x) = f'(x) - (x-1)^2$

Điểm cực trị của hàm số $y = h(x)$ là nghiệm của phương trình $h'(x) = 0$ tức là nghiệm của phương trình $f'(x) = (x-1)^2$ suy ra điểm cực trị của hàm số $y = h(x)$ cũng là hoành độ giao điểm của các đồ thị hàm số $y = f'(x); y = x^2 - 2x + 1$.

Vẽ đồ thị của các hàm số $y = f'(x); y = x^2 - 2x + 1$ trên cùng một hệ trục tọa độ như hình vẽ sau:



Dựa vào đồ thị trên ta có BBT của hàm số $y = h(x)$ như sau:

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
$h'(x)$		-	+	-	+
$h(x)$					

Hơn nữa, vì $f(x)$ là hàm số bậc bốn và $f(1) = -\frac{5}{3}$ nên $h(x)$ cũng là hàm số bậc bốn và $h(1) = 0$, do đó ta có BBT của hàm số $y = h(x)$ chi tiết hơn như sau:

x	$-\infty$	0		1	2		$+\infty$					
$h'(x)$		-	0	+	0	-	0	+				
$h(x)$	$+\infty$			a			0		b			$+\infty$

trong đó a, b là các số âm.

Từ BBT suy ra đồ thị hàm số $h(x)$ cắt trục hoành tại hai điểm, tiếp xúc với trục hoành tại điểm cực đại và hai điểm cực tiểu nằm phía dưới trục hoành nên hàm số $g(x) = |h(x)|$ có 5 điểm cực trị.

Câu 97: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(-3) = 0$ đồng thời có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Hàm số $g(x) = \left| 2(x+1)^6 - 6(x+1)^2 - 3f(-x^4 - 4x^3 - 4x^2 - 2) \right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 7.

B. 6.

C. 3.

D. 5.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Đặt } h(x) = 2(x+1)^6 - 6(x+1)^2 - 3f(-x^4 - 4x^3 - 4x^2 - 2)$$

$$\Rightarrow h'(x) = 12(x+1)^5 - 12(x+1) - 3(-4x^3 - 12x^2 - 8x) \cdot f'(-x^4 - 4x^3 - 4x^2 - 2)$$

$$= 12(x+1)(x^2 + 2x)(x^2 + 2x + 2) + 12(x+1)(x^2 + 2x) \cdot f'(-x^4 - 4x^3 - 4x^2 - 2)$$

$$= 12(x+1)(x^2 + 2x) \left[x^2 + 2x + 2 + f'(-x^4 - 4x^3 - 4x^2 - 2) \right]$$

Mà $-x^4 - 4x^3 - 4x^2 - 2 = -[x(x+2)]^2 - 2 \leq -2, \forall x \in \mathbb{R}$ nên dựa vào bảng xét dấu của $f'(x)$ ta suy ra $f'(-x^4 - 4x^3 - 4x^2 - 2) \geq 0$.

$$\Rightarrow x^2 + 2x + 2 + f'(-x^4 - 4x^3 - 4x^2 - 2) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Do đó dấu của $h'(x)$ cùng dấu với $u(x) = 12(x+1)(x^2 + 2x)$, tức là đổi dấu khi đi qua các điểm $x = -2; x = -1; x = 0$.

Vậy hàm số $h(x)$ có 3 điểm cực trị.

Ta có $h(-1) = -3f(-3) = 0$ nên đồ thị hàm số $y = h(x)$ tiếp xúc Ox tại $x = -1$ và cắt trục Ox tại 3 điểm phân biệt.

Vậy $y = g(x)$ có 5 điểm cực trị.

DẠNG 9**Tìm m để HS, ĐTHS bậc 3 có cực trị TMDK**

- Câu 1:** Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^3 - m$, với m là tham số. Gọi A, B là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số và $I(2; -2)$. Gọi S là tập hợp các giá trị thực của tham số m sao cho ba điểm I, A, B tạo thành tam giác nội tiếp đường tròn có bán kính bằng $\sqrt{5}$. Tính tổng các phân tử của S .
- A. $\frac{20}{17}$. B. $\frac{15}{17}$. C. $\frac{3}{17}$. D. $\frac{4}{17}$.
- Câu 2:** Hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - m + 1)x + 1$ đạt cực đại tại điểm $x = 1$ khi
- A. $m = 1$. B. $m = -1$. C. $m = 1$ hoặc $m = -1$. D. $m = 2$.
- Câu 3:** Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 - x + m + 1$. Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là A, B thỏa $x_A^2 + x_B^2 = 2$.
- A. $m = 0$. B. $m = 2$. C. $m = \pm 1$. D. $m = \pm 3$.
- Câu 4:** Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{m}{2}x^2 - (3m^2 - 1)x + m$ đạt cực trị tại hai điểm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1x_2 + 2(x_1 + x_2) + 4 = 0$. Số phần tử của S là
- A. 2. B. 3. C. 1. D. 0.
- Câu 5:** Gọi m_1, m_2 là các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 + m - 1$ có hai điểm cực trị là B, C sao cho tam giác OBC có diện tích bằng 2, với O là gốc tọa độ. Tính $m_1.m_2$.
- A. 6. B. -15. C. 12. D. -20.
- Câu 6:** Cho biết hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx - 1$ đạt cực trị tại x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 3$. Khi đó
- A. $m \in (0; 1)$. B. $m \in (2; 3)$. C. $m \in (1; 2)$. D. $m \leq -1$.
- Câu 7:** Tập tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + (m - 1)x + 2$ có hai điểm cực trị nằm bên trái trục tung là:
- A. $(-\infty; 1)$. B. $(1; 2)$. C. $(-\infty; 2)$. D. $(1; +\infty)$.
- Câu 8:** Biết rằng đồ thị hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}mx^2 + x - 2$ có giá trị tuyệt đối của hoành độ hai điểm cực trị là độ dài hai cạnh của tam giác vuông có cạnh huyền $\sqrt{7}$. Hỏi có mấy giá trị của m ?
- A. 0. B. 2. C. 3. D. 1.
- Câu 9:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - (2m + 1)x^2 + (2m^2 + 2m - 4)x - 2m^2 + 4$ có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục hoành?
- A. 3. B. 4. C. 6. D. 5.

- Câu 10:** Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - (m-2)x^2 - 9x + 1$, với m là tham số. Gọi x_1, x_2 là các điểm cực trị của hàm số đã cho thì giá trị nhỏ nhất của biểu thức $|9x_1 - 25x_2|$ bằng
- A. 15. B. 90. C. 450. D. 45.
- Câu 11:** Cho hàm số $y = x^3 - mx^2 - m^2x + 8$. Có bao nhiêu giá trị m nguyên để hàm số có điểm cực tiểu nằm hoàn toàn phía trên trục hoành?
- A. 3. B. 5. C. 4. D. 6.
- Câu 12:** Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(3m+2)x^2 + (2m^2+3m+1)x - 2$ có điểm cực đại x_{CD} và điểm cực tiểu x_{CT} thỏa mãn $3x_{CD}^2 = 4x_{CT}$?
- A. 2. B. 1. C. 3. D. 4.
- Câu 13:** Gọi m_1, m_2 là các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 + m - 1$ có hai điểm cực trị là B, C sao cho tam giác OBC có diện tích bằng 2, với O là gốc tọa độ. Tính $m_1.m_2$.
- A. 6. B. -15. C. 12. D. -20.
- Câu 14:** Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - (m+2)x^2 + (m^2+4m+3)x + 6m+9$. Tìm giá trị của tham số m để đồ thị hàm số (C) có cực đại tại x_1 , đạt cực tiểu tại x_2 sao cho $x_1^2 = 2x_2$.
- A. $m = 4$. B. $m = -2$. C. $\begin{cases} m = 4 \\ m = -2 \end{cases}$. D. $m = \pm\sqrt{5}$.
- Câu 15:** Hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx - 1$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 thỏa $x_1^2 + x_2^2 = 3$ khi
- A. $m = \frac{1}{2}$. B. $m = \frac{3}{2}$. C. $m = -2$. D. $m = 1$.
- Câu 16:** Cho $A = \{n \in \mathbb{Z} | 0 \leq n \leq 20\}$ và F là tập hợp các hàm số $f(x) = x^3 + (2m^2 - 5)x^2 + 6x - 8m^2$ có $m \in A$. Chọn ngẫu nhiên một hàm số $f(x)$ thuộc F . Tính xác suất để đồ thị hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị nằm khác phía đối với trục Ox .
- A. $\frac{18}{21}$. B. $\frac{19}{20}$. C. $\frac{9}{10}$. D. $\frac{19}{21}$.
- Câu 17:** Biết $\frac{a}{b}$ là giá trị của tham số m để hàm số $y = 2x^3 - 3mx^2 - 6(3m^2 - 1)x + 2020$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 thỏa mãn $x_1x_2 + 2(x_1 + x_2) = 1$. Tính $P = a + 2b$.
- A. 6. B. 5. C. 8. D. 7.
- Câu 18:** Cho hàm số $y = x^3 - mx^2 - m^2x + 8$. Có bao nhiêu giá trị m nguyên để hàm số có điểm cực tiểu nằm hoàn toàn phía trên trục hoành?
- A. 3. B. 5. C. 4. D. 6.

- Câu 19:** Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(3m+2)x^2 + (2m^2+3m+1)x - 2$ có điểm cực đại x_{CD} và điểm cực tiểu x_{CT} thỏa mãn $3x_{CD}^2 = 4x_{CT}$?
- A. 2. B. 1. C. 3. D. 4.
- Câu 20:** Cho hàm số $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 9x - 2m^2 + 1$. Hãy tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số đã cho có các điểm cực trị là $x_1; x_2$ sao cho $|x_1 - x_2| = 2$?
- A. $m = 1$. B. $m = -3$. C. $\begin{cases} m = 1 \\ m = -3 \end{cases}$. D. $m \in \emptyset$.
- Câu 21:** Cho hàm số $y = x^3 - 3mx + 1$ (1) và điểm $A(2; 3)$. Biết m là một giá trị để đồ thị hàm số (1) có hai điểm cực trị B và C sao cho tam giác ABC cân tại A . Diện tích tam giác ABC bằng
- A. 6. B. $2\sqrt{2}$. C. 3. D. $\sqrt{2}$.
- Câu 22:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^3 + m$ có hai điểm cực trị A, B và $OA + OB$ đạt giá trị nhỏ nhất?
- A. Vô số. B. 2. C. 3. D. 1.
- Câu 23:** Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - m - 1)x + 1$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m để hàm số đạt cực trị tại x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + 2mx_2 - 3m^2 + m - 5 \leq 0$?
- A. 9. B. 3. C. 7. D. 4.
- Câu 24:** Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 3(m^2 - 1)x - 3m^2 - 1$ có điểm cực đại và cực tiểu cùng với gốc tọa độ tạo thành tam giác vuông tại O . Tích tất cả các giá trị của tập S bằng
- A. -1. B. $-\frac{3}{2}$. C. $\frac{3}{2}$. D. 1.
- Câu 25:** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}mx^2 + x - 2$ đạt cực trị tại x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 + x_1x_2 = 3$
- A. $m = -4$. B. $m = 2$.
C. $m = 3$. D. Không có giá trị m .
- Câu 26:** Biết m_0 là giá trị tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx - 1$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 sao cho $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 13$. Mệnh đề nào sau đây đúng?
- A. $m_0 \in (-7; -1)$. B. $m_0 \in (7; 10)$. C. $m_0 \in (-1; 7)$. D. $m_0 \in (-15; -7)$.
- Câu 27:** Cho hàm số $y = (m-3)x^3 + 2(m^2 - m - 1)x^2 + (m+4)x - 1$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số đã cho có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục Oy . Tổng các phần tử của S là
- A. -3. B. -4. C. 0. D. -2.

Câu 28: Biết rằng $m_0 = \frac{a}{b}, a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}^*$, $\frac{a}{b}$ tối giản là giá trị của tham số m để hàm số

$$y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(m-1)x^2 + (3m-2)x + 1 \text{ có 2 điểm cực trị trái dấu } x_1, x_2 \text{ thỏa mãn } \frac{1}{x_1} - 2 = \left| \frac{1}{x_2} \right|.$$

Tính tổng $S = a + 2b$?

- A. 13. B. 8. C. 11. D. -11.

Câu 29: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + m$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị A, B sao cho tam giác AOB là tam giác cân tại O .

Lời giải

Ta có $y' = 3x^2 - 6x$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}.$$

Suy ra đồ thị hàm số đã cho luôn có hai điểm cực trị.

Gọi $A(0; m)$; $B(2; m-4)$ là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số.

Tam giác AOB cân tại O khi và chỉ khi $OA = OB$ hay $OA^2 = OB^2$.

$$\text{Mà } \overrightarrow{OA} (0; m); \overrightarrow{OB} (2; m-4). \text{ Từ đó suy ra } m^2 = 2^2 + (m-4)^2 \Leftrightarrow 20 - 8m = 0 \Leftrightarrow m = \frac{5}{2}.$$

Vậy $m = \frac{5}{2}$ là giá trị cần tìm.

Câu 30: Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}mx^3 - (m-1)x^2 + 3(m-2)x + \frac{1}{6}$ đạt cực trị tại x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + 2x_2 = 1$.

- A. $\begin{cases} m = \frac{2}{3} \\ m = 2 \end{cases}$. B. $1 - \frac{\sqrt{6}}{2} < m < 1 + \frac{\sqrt{6}}{2}$.
C. $m \in \left(1 - \frac{\sqrt{6}}{2}; 1 + \frac{\sqrt{6}}{2}\right) \setminus \{0\}$. D. $m = 2$.

Câu 31: Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x^3}{3} - (5m^2 - 3m - 1)x^2 + (2m + 1)x + 1$ có hai điểm cực trị A và B sao cho A, B cách đều đường thẳng $x - 1 = 0$?

- A. 2. B. 1. C. 3. D. 0.

Câu 32: Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x^3}{3} - (5m^2 - 3m - 1)x^2 + (2m + 1)x + 1$ có hai điểm cực trị A và B sao cho A, B cách đều đường thẳng $x - 1 = 0$?

- A. 2. B. 1. C. 3. D. 0.

Câu 33: Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 4m^3$. Có tất cả bao nhiêu giá trị của tham số m để các điểm cực đại và cực tiểu của đồ thị hàm số đối xứng nhau qua đường phân giác (d) của góc phần tư thứ nhất và thứ ba.

A. 1

B. 4

C. 2.

D. 3

Câu 34: Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 4m^3$. Có tất cả bao nhiêu giá trị của tham số m để các điểm cực đại và cực tiểu của đồ thị hàm số đối xứng nhau qua đường phân giác (d) của góc phần tư thứ nhất và thứ ba.

A. 1

B. 4

C. 2.

D. 3

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^3 - m$, với m là tham số. Gọi A, B là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số và $I(2; -2)$. Gọi S là tập hợp các giá trị thực của tham số m sao cho ba điểm I, A, B tạo thành tam giác nội tiếp đường tròn có bán kính bằng $\sqrt{5}$. Tính tổng các phần tử của S .

A. $\frac{20}{17}$.

B. $\frac{15}{17}$.

C. $\frac{3}{17}$.

D. $\frac{4}{17}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = 3x^2 - 6mx + 3m^2 - 3$.

Vì $\Delta' = 1 > 0$ nên hàm số luôn có hai cực trị với mọi m . Gọi $A(m+1; -4m-2); B(m-1; -4m+2)$ suy ra $AB = 2\sqrt{5}$ nên AB là đường kính đường tròn ngoại tiếp tam giác IAB .

Ta có $\overrightarrow{IA} = (m-1; -4m); \overrightarrow{IB} = (m-3; -4m+4)$

$$\text{Vì } \overrightarrow{IA} \perp \overrightarrow{IB} \Rightarrow \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} = 0 \Leftrightarrow (m-1)(m-3) - 4m(-4m+4) = 0 \Leftrightarrow 17m^2 - 20m + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = \frac{3}{17} \end{cases}$$

Tổng các phần tử của S là $\frac{20}{17}$.

Câu 2: Hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - m + 1)x + 1$ đạt cực đại tại điểm $x = 1$ khi

A. $m = 1$.

B. $m = -1$.

C. $m = 1$ hoặc $m = -1$.

D. $m = 2$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = x^2 - 2mx + m^2 - m + 1$ và $y'' = 2x - 2m$

Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 1$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} y'(1) = 0 \\ y''(1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 3m + 2 = 0 \\ 2 - 2m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2.$$

Câu 3: Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 - x + m + 1$. Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là A, B thỏa $x_A^2 + x_B^2 = 2$.

A. $m = 0$.

B. $m = 2$.

C. $m = \pm 1$.

D. $m = \pm 3$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = x^2 - 2mx - 1$ (1).

Hàm số đã cho có hai điểm cực trị $A, B \Leftrightarrow \Delta' = m^2 - 1 \cdot (-1) = m^2 + 1 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$.

Khi đó, x_A, x_B là hai nghiệm của tam thức (1).

Suy ra $x_A + x_B = -\frac{b}{a} = 2m$, $x_A \cdot x_B = \frac{c}{a} = -1$.

Ta có $x_A^2 + x_B^2 = 2 \Leftrightarrow (x_A + x_B)^2 - 2x_A x_B = 2 \Leftrightarrow 4m^2 - 2 \cdot (-1) = 2 \Leftrightarrow 4m^2 = 0 \Leftrightarrow m = 0$.

Vậy, $m = 0$ thỏa yêu cầu bài toán.

- Câu 4:** Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{m}{2}x^2 - (3m^2 - 1)x + m$ đạt cực trị tại hai điểm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 x_2 + 2(x_1 + x_2) + 4 = 0$. Số phần tử của S là
- A. 2. B. 3. C. 1. D. 0.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y' = x^2 - mx - 3m^2 + 1$.

Hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{m}{2}x^2 - (3m^2 - 1)x + m$ đạt cực trị tại hai điểm x_1, x_2 khi phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 . Khi đó $\Delta = m^2 - 4(-3m^2 + 1) > 0 \Leftrightarrow 13m^2 - 4 > 0$ (*).

Theo định lí Vi-et ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1 x_2 = -3m^2 + 1 \end{cases}$.

Do đó $x_1 x_2 + 2(x_1 + x_2) + 4 = 0 \Leftrightarrow -3m^2 + 1 + 2m + 4 = 0 \Leftrightarrow -3m^2 + 2m + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = \frac{5}{3} \end{cases}$.

Do điều kiện (*) nên giá trị của m cần tìm là $\begin{cases} m = -1 \\ m = \frac{5}{3} \end{cases}$.

Vậy tập hợp S có 2 phần tử.

- Câu 5:** Gọi m_1, m_2 là các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 + m - 1$ có hai điểm cực trị là B, C sao cho tam giác OBC có diện tích bằng 2, với O là gốc tọa độ. Tính $m_1 m_2$.
- A. 6. B. -15. C. 12. D. -20.

Lời giải

Chọn B

Hàm số xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.

$y' = 6x^2 - 6x$.

$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0; y = m - 1 \\ x = 1; y = m - 2 \end{cases}$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y					

Diagram illustrating the mapping of y' to y :

- $y' = -\infty \rightarrow y = m-1$
- $y' = 0 \rightarrow y = m-2$
- $y' = +\infty \rightarrow y = +\infty$

Vậy $B(0; m-1)$, $C(1; m-2)$.

$$\overrightarrow{BC} = (1; -1) \Rightarrow BC = \sqrt{2}.$$

(BC) đi qua $B(0; m-1)$ và nhận $\vec{n} = (1; 1)$ làm một vectơ pháp tuyến nên có phương trình

$$1(x-0) + 1(y-m+1) = 0 \Leftrightarrow x + y - m + 1 = 0.$$

$$d(O; BC) = \frac{|1-m|}{\sqrt{2}}.$$

$$S_{OBC} = \frac{1}{2} d(O; BC) \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot \frac{|1-m|}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} = 2 \Leftrightarrow |1-m| = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} 1-m=4 \\ 1-m=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=-3 \\ m=5 \end{cases}.$$

Vậy $m_1, m_2 = -15$.

Câu 6: Cho biết hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx - 1$ đạt cực trị tại x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 3$. Khi đó

A. $m \in (0; 1)$. B. $m \in (2; 3)$. C. $m \in (1; 2)$. D. $m \leq -1$.

Lời giải

Chọn C

$$D = \mathbb{R}.$$

$y' = 3x^2 - 6x + m$, hàm số có hai cực trị x_1, x_2 khi và chỉ khi $\Delta > 0 \Leftrightarrow 9 - 3m > 0 \Leftrightarrow m < 3$.

$$\text{Khi đó } \begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 x_2 = \frac{m}{3} \end{cases} \text{ Mặt khác}$$

$$x_1^2 + x_2^2 = 3 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 3 \Leftrightarrow 2^2 - \frac{2m}{3} = 3 \Leftrightarrow m = \frac{3}{2} (tm).$$

Câu 7: Tập tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + (m-1)x + 2$ có hai điểm

cực trị nằm bên trái trục tung là:

A. $(-\infty; 1)$.. B. $(1; 2)$. C. $(-\infty; 2)$.. D. $(1; +\infty)$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } y' = x^2 + 2x + m - 1.$$

Đồ thị hàm số đã cho có 2 điểm cực trị nằm bên trái trục tung khi và chỉ khi phương trình $y' = 0$

$$\text{có hai nghiệm âm phân biệt} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'_{y'} > 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - m + 1 > 0 \\ -2 < 0 \\ m - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < m < 2.$$

- Câu 8:** Biết rằng đồ thị hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}mx^2 + x - 2$ có giá trị tuyệt đối của hoành độ hai điểm cực trị là độ dài hai cạnh của tam giác vuông có cạnh huyền $\sqrt{7}$. Hỏi có mấy giá trị của m ?
- A. 0. B. 2. C. 3. D. 1.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y' = x^2 - mx + 1$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - mx + 1 = 0.$$

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' = m^2 - 4 > 0$. Khi đó, gọi các nghiệm của là x_1, x_2 thì x_1, x_2 chính là hoành độ hai điểm cực trị. Theo Viet ta có $x_1 + x_2 = m; x_1 \cdot x_2 = 1$.

$$\text{Theo bài ra ta có: } x_1^2 + x_2^2 = 7 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 7 \Leftrightarrow m^2 - 2 = 7 \Leftrightarrow m^2 = 9 \Leftrightarrow m = \pm 3.$$

Vậy có 2 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu.

- Câu 9:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - (2m+1)x^2 + (2m^2 + 2m - 4)x - 2m^2 + 4$ có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục hoành?
- A. 3. B. 4. C. 6. D. 5.

Lời giải

Chọn A

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $x^3 - (2m+1)x^2 + (2m^2 + 2m - 4)x - 2m^2 + 4 = 0$ (1).

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2 - 2mx + 2m^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ f(x) = x^2 - 2mx + 2m^2 - 4 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Đồ thị hàm số $y = x^3 - (2m+1)x^2 + (2m^2 + 2m - 4)x - 2m^2 + 4$ có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục hoành khi và chỉ khi phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow (2) \text{ có 2 nghiệm phân biệt khác } 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = m^2 - (2m^2 - 4) > 0 \\ f(1) = 2m^2 - 2m - 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < m < 2 \\ m \neq \frac{1 \pm \sqrt{7}}{2} \end{cases}$$

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-1; 0; 1\}$.

Vậy có 3 giá trị nguyên của m thỏa mãn bài toán.

- Câu 10:** Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - (m-2)x^2 - 9x + 1$, với m là tham số. Gọi x_1, x_2 là các điểm cực trị của hàm số đã cho thì giá trị nhỏ nhất của biểu thức $|9x_1 - 25x_2|$ bằng
- A. 15. B. 90. C. 450. D. 45.

Lời giải

Chọn B

$$+ y' = x^2 - 2(m-2)x - 9; y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2(m-2)x - 9 = 0.$$

+ Có $\Delta' = (m-2)^2 + 9 > 0, \forall m$ nên hàm số có hai cực trị.

$$\text{Theo định lý Vi-et: } \begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m-2) \\ x_1 \cdot x_2 = -9 \end{cases}.$$

Khi đó x_1, x_2 trái dấu.

$$+ \text{ Nếu } x_1 > 0 \text{ thì } |9x_1 - 25x_2| = \left| 9x_1 - 25 \cdot \left(-\frac{9}{x_1} \right) \right| = \left| 9x_1 + \frac{225}{x_1} \right| \geq \left| 2 \cdot \sqrt{9x_1 \cdot \frac{225}{x_1}} \right| = 90$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi } 9x_1 = \frac{225}{x_1} \Leftrightarrow x_1^2 = 25 \Leftrightarrow x_1 = 5.$$

+ Nếu $x_1 < 0$ thì $-x_1 > 0$, khi đó

$$|9x_1 - 25x_2| = \left| 9x_1 - 25 \cdot \left(-\frac{9}{x_1} \right) \right| = \left| 9(-x_1) + \frac{225}{-x_1} \right| \geq \left| 2 \cdot \sqrt{9(-x_1) \cdot \frac{225}{(-x_1)}} \right| = 90$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi } 9x_1 = \frac{225}{x_1} \Leftrightarrow x_1^2 = 25 \Leftrightarrow x_1 = -5.$$

Vậy GTNN $|9x_1 - 25x_2|$ là 90. Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = \pm 5$.

Câu 11: Cho hàm số $y = x^3 - mx^2 - m^2x + 8$. Có bao nhiêu giá trị m nguyên để hàm số có điểm cực tiểu nằm hoàn toàn phía trên trục hoành?

A. 3.

B. 5.

C. 4.

D. 6.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } y' = 3x^2 - 2mx - m^2, y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ x = -\frac{m}{3} \end{cases}.$$

Để hàm số có hai điểm cực trị thì $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m \neq 0$.

Trường hợp 1: $m > 0 \Rightarrow y_{ct} = y(m) = -m^3 + 8 > 0 \Leftrightarrow m < 2$. Vậy $0 < m < 2 \Rightarrow$ có 1 giá trị nguyên $m = 1$.

Trường hợp 2: $m < 0 \Rightarrow y_{ct} = y\left(-\frac{m}{3}\right) = \frac{5}{27}m^3 + 8 > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{6}{\sqrt[3]{5}}$. Vậy $-\frac{6}{\sqrt[3]{5}} < m < 0 \Rightarrow$ có 3 giá trị nguyên của m là $\{-3; -2; -1\}$.

Vậy tổng số có 4 giá trị nguyên của m .

Câu 12: Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(3m+2)x^2 + (2m^2+3m+1)x - 2$ có điểm cực đại x_{CD} và điểm cực tiểu x_{CT} thỏa mãn $3x_{CD}^2 = 4x_{CT}$?

A. 2.

B. 1.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(3m+2)x^2 + (2m^2+3m+1)x - 2 \Rightarrow y' = x^2 - (3m+2)x + (2m^2+3m+1)$ có

$$\Delta = m^2 \geq 0, \forall m \in \mathbb{R} \text{ nên } y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2m+1 \\ x = m+1 \end{cases}.$$

Hàm số có cực đại và cực tiểu khi và chỉ khi $m \neq 0$.

Trường hợp 1: $x_{CD} = 2m+1; x_{CT} = m+1$.

Do $a = \frac{1}{3} > 0$ nên suy ra $x_{CD} < x_{CT} \Leftrightarrow 2m+1 < m+1 \Leftrightarrow m < 0$.

$$\text{Lại có } 3x_{CD}^2 = 4x_{CT} \Leftrightarrow 3(2m+1)^2 = 4(m+1) \Leftrightarrow 12m^2 + 8m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{-2 \pm \sqrt{7}}{6}.$$

Với điều kiện $m < 0 \Rightarrow m = \frac{-2 - \sqrt{7}}{6}$ thỏa mãn.

Trường hợp 2: $x_{CD} = m+1; x_{CT} = 2m+1$

Do $a = \frac{1}{3} > 0$ nên suy ra $x_{CD} < x_{CT} \Leftrightarrow m+1 < 2m+1 \Leftrightarrow m > 0$.

$$\text{Lại có } 3x_{CD}^2 = 4x_{CT} \Leftrightarrow 3(m+1)^2 = 4(2m+1) \Leftrightarrow 3m^2 - 2m - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -\frac{1}{3} \end{cases}.$$

Với điều kiện $m > 0 \Rightarrow m = 1$ thỏa mãn.

Kết luận: vậy có 2 giá trị thực của tham số m thỏa mãn.

Câu 13: Gọi m_1, m_2 là các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 + m - 1$ có hai điểm cực trị là B, C sao cho tam giác OBC có diện tích bằng 2, với O là gốc tọa độ. Tính $m_1.m_2$.

A. 6.

B. -15.

C. 12.

D. -20.

Lời giải

Chọn B

Hàm số xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.

$$y' = 6x^2 - 6x.$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0; y = m-1 \\ x = 1; y = m-2 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
y'		+	0	- 0 +
y				$+\infty$

$m-1$ $m-2$
 $-\infty$

Vậy $B(0; m-1), C(1; m-2)$.

$$\overrightarrow{BC} = (1; -1) \Rightarrow BC = \sqrt{2}.$$

(BC) đi qua $B(0; m-1)$ và nhận $\vec{n} = (1; 1)$ làm một vectơ pháp tuyến nên có phương trình

$$1(x-0)+1(y-m+1)=0 \Leftrightarrow x+y-m+1=0.$$

$$d(O; BC) = \frac{|1-m|}{\sqrt{2}}.$$

$$S_{OBC} = \frac{1}{2} d(O; BC) \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot \frac{|1-m|}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} = 2 \Leftrightarrow |1-m| = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} 1-m=4 \\ 1-m=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=-3 \\ m=5 \end{cases}.$$

Vậy $m_1, m_2 = -15$.

Câu 14: Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - (m+2)x^2 + (m^2 + 4m + 3)x + 6m + 9$. Tìm giá trị của tham số m để đồ thị hàm số (C) có cực đại tại x_1 , đạt cực tiểu tại x_2 sao cho $x_1^2 = 2x_2$.

- A. $m = 4$. B. $m = -2$. C. $\begin{cases} m = 4 \\ m = -2 \end{cases}$. D. $m = \pm\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$$y' = x^2 - 2(m+2)x + m^2 + 4m + 3.$$

Hàm số đạt cực đại tại x_1 , đạt cực tiểu tại x_2 khi và chỉ khi

$$\Delta' > 0 \Leftrightarrow (m+2)^2 - (m^2 + 4m + 3) > 0 \Leftrightarrow 1 > 0, \forall m \in \mathbb{R}.$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m+3 \\ x = m+1 \end{cases}.$$

$$\text{Theo đề bài ta có: } x_1^2 = 2x_2 \Leftrightarrow (m+1)^2 = 2(m+3) \Leftrightarrow m^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -\sqrt{5} \\ m = \sqrt{5} \end{cases}.$$

Câu 15: Hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx - 1$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 thỏa $x_1^2 + x_2^2 = 3$ khi

- A. $m = \frac{1}{2}$. B. $m = \frac{3}{2}$. C. $m = -2$. D. $m = 1$.

Lời giải

Chọn B

Hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx - 1$

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$$y' = 3x^2 - 6x + m, (a = 3, b = -6, c = m, \Delta = 36 - 12m).$$

Để hàm số có hai điểm cực trị x_1, x_2 thì $\Delta > 0 \Leftrightarrow m < 3$.

$$\text{Theo đề bài } x_1^2 + x_2^2 = 3 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 3 \Leftrightarrow 4 - \frac{2}{3}m = 3 \Leftrightarrow m = \frac{3}{2}. \text{ (nhận)}$$

Người làm: Hoàng Tuấn Anh

Email: hoangtuananhgvtoan@gmail.com

Câu 16: Cho $A = \{n \in \mathbb{Z} | 0 \leq n \leq 20\}$ và F là tập hợp các hàm số $f(x) = x^3 + (2m^2 - 5)x^2 + 6x - 8m^2$ có $m \in A$. Chọn ngẫu nhiên một hàm số $f(x)$ thuộc F . Tính xác suất để đồ thị hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị nằm khác phía đối với trục Ox .

A. $\frac{18}{21}$.

B. $\frac{19}{20}$.

C. $\frac{9}{10}$.

D. $\frac{19}{21}$.

Lời giải**Chọn D**+ Không gian mẫu $|\Omega| = 21$

+ Ta có: $f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x^2 + (2m^2 - 3)x + 4m^2 = 0(*) \end{cases}$

+ Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị nằm khác phía đối với trục Ox $\Leftrightarrow (*)$ có hai nghiệm phân biệt khác 2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \in A \\ (2m^2 - 3)^2 - 16m^2 > 0 \\ 2^2 + (2m^2 - 3) \cdot 2 + 4m^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in A \\ m > \sqrt{\frac{7 + 2\sqrt{10}}{2}} \approx 2,58 \\ 0 \leq m < \sqrt{\frac{7 - 2\sqrt{10}}{2}} \approx 0,58 \\ \forall m \end{cases} \Rightarrow m \in \{0; 3; 4; \dots; 20\}$$

Vậy xác suất là: $P = \frac{19}{21}$.

Câu 17: Biết $\frac{a}{b}$ là giá trị của tham số m để hàm số $y = 2x^3 - 3mx^2 - 6(3m^2 - 1)x + 2020$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 thỏa mãn $x_1x_2 + 2(x_1 + x_2) = 1$. Tính $P = a + 2b$.

A. 6.

B. 5.

C. 8.

D. 7.

Lời giải

Xét hàm số $y = 2x^3 - 3mx^2 - 6(3m^2 - 1)x + 2020$, ta có $y' = 6x^2 - 6mx - 6(3m^2 - 1)$

$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - mx - 3m^2 + 1 = 0 \quad (1)$

Hàm số có hai điểm cực trị x_1, x_2 khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta = (-m)^2 - 4(-3m^2 + 1) > 0 \Leftrightarrow 13m^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow m < -\frac{2}{\sqrt{13}} \text{ hoặc } m > \frac{2}{\sqrt{13}}.$

Khi đó, theo định lý Viet, ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1x_2 = -3m^2 + 1 \end{cases}$.

Theo giả thiết, $x_1x_2 + 2(x_1 + x_2) = 1$ nên $-3m^2 + 1 + 2m = 1 \Leftrightarrow -3m^2 + 2m = 0$

$\Leftrightarrow m = 0 \text{ hoặc } m = \frac{2}{3}.$

Suy ra $a = 2, b = 3$. Vậy $P = a + 2b = 8$.

Câu 18: Cho hàm số $y = x^3 - mx^2 - m^2x + 8$. Có bao nhiêu giá trị m nguyên để hàm số có điểm cực tiểu nằm hoàn toàn phía trên trục hoành?

A. 3.

B. 5.

C. 4.

D. 6.

Lời giải**Chọn C**

$y' = 3x^2 - 2mx - m^2$

$$\Delta' = m^2 + 3m^2 = 4m^2.$$

Do đó phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm là $x_1 = \frac{m+2m}{3} = m$, $x_2 = \frac{m-2m}{3} = -\frac{m}{3}$.

Để hàm số có cực trị thì $m \neq 0$

Trường hợp 1: $m > 0$, khi đó $x_1 > x_2$, hàm số đạt cực tiểu tại $x_1 = m$.

Để hàm số có điểm cực tiểu nằm hoàn toàn phía trên trục hoành $f(x_1) > 0$.

$$\text{Hay } m^3 - m^3 - m^3 + 8 > 0 \Leftrightarrow 8 - m^3 > 0 \Leftrightarrow m < 2.$$

Kết hợp điều kiện ta được $0 < m < 2$. Do m nguyên nên $m = 1$.

Trường hợp 2: $m < 0$, khi đó $x_1 < x_2$, hàm số đạt cực tiểu tại $x_2 = -\frac{m}{3}$.

Để hàm số có điểm cực tiểu nằm hoàn toàn phía trên trục hoành $f(x_2) > 0$.

$$\text{Hay } -\frac{m^3}{27} - \frac{m^3}{9} + \frac{m^3}{3} + 8 > 0 \Leftrightarrow \frac{5}{27}m^3 + 8 > 0 \Leftrightarrow m > -\sqrt[3]{\frac{216}{5}}.$$

Kết hợp điều kiện ta được $-\sqrt[3]{\frac{216}{5}} < m < 0$. Do m nguyên nên $m \in \{-3; -2; -1\}$.

Vậy có 4 giá trị nguyên của m thỏa mãn đề bài.

Câu 19: Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(3m+2)x^2 + (2m^2+3m+1)x - 2$ có điểm cực đại x_{CD} và điểm cực tiểu x_{CT} thỏa mãn $3x_{CD}^2 = 4x_{CT}$?

A. 2.

B. 1.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(3m+2)x^2 + (2m^2+3m+1)x - 2 \Rightarrow y' = x^2 - (3m+2)x + (2m^2+3m+1)$ có

$$\Delta = m^2 \geq 0, \forall m \in \mathbb{R} \text{ nên } y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2m+1 \\ x = m+1 \end{cases}.$$

Hàm số có cực đại và cực tiểu khi và chỉ khi $m \neq 0$.

Trường hợp 1: $x_{CD} = 2m+1; x_{CT} = m+1$.

Do $a = \frac{1}{3} > 0$ nên suy ra $x_{CD} < x_{CT} \Leftrightarrow 2m+1 < m+1 \Leftrightarrow m < 0$.

$$\text{Lại có } 3x_{CD}^2 = 4x_{CT} \Leftrightarrow 3(2m+1)^2 = 4(m+1) \Leftrightarrow 12m^2 + 8m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{-2 \pm \sqrt{7}}{6}.$$

Với điều kiện $m < 0 \Rightarrow m = \frac{-2 - \sqrt{7}}{6}$ thỏa mãn.

Trường hợp 2: $x_{CD} = m+1; x_{CT} = 2m+1$

Do $a = \frac{1}{3} > 0$ nên suy ra $x_{CD} < x_{CT} \Leftrightarrow m+1 < 2m+1 \Leftrightarrow m > 0$.

$$\text{Lại có } 3x_{CD}^2 = 4x_{CT} \Leftrightarrow 3(m+1)^2 = 4(2m+1) \Leftrightarrow 3m^2 - 2m - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -\frac{1}{3} \end{cases}.$$

Với điều kiện $m > 0 \Rightarrow m = 1$ thỏa mãn.

Kết luận: vậy có 2 giá trị thực của tham số m thỏa mãn.

Câu 20: Cho hàm số $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 9x - 2m^2 + 1$. Hãy tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số đã cho có các điểm cực trị là $x_1; x_2$ sao cho $|x_1 - x_2| = 2$?

A. $m = 1$.

B. $m = -3$.

C. $\begin{cases} m = 1 \\ m = -3 \end{cases}$.

D. $m \in \emptyset$.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 3x^2 - 6(m+1)x + 9$.

Khi đó: $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6(m+1)x + 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2(m+1)x + 3 = 0$ (*)

Hàm số có hai điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$

$$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow (m+1)^2 - 3 > 0 \Leftrightarrow m^2 + 2m - 2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 + \sqrt{3} \\ m < -1 - \sqrt{3} \end{cases}$$

Theo định lý vi-et ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m+1) \\ x_1 x_2 = 3 \end{cases}$.

Theo bài ra: $|x_1 - x_2| = 2 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 = 4$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = 4 \Leftrightarrow 4(m+1)^2 - 4 \cdot 3 = 4 \Leftrightarrow m^2 + 2m - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -3 \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}.$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} m = 1 \\ m = -3 \end{cases}.$$

Câu 21: Cho hàm số $y = x^3 - 3mx + 1$ (1) và điểm $A(2;3)$. Biết m là một giá trị để đồ thị hàm số (1) có hai điểm cực trị B và C sao cho tam giác ABC cân tại A . Diện tích tam giác ABC bằng

A. 6.

B. $2\sqrt{2}$.

C. 3.

D. $\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = 3x^2 - 3m$.

Đồ thị hàm số (1) có hai điểm cực trị B và C khi và chỉ khi phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt, suy ra $m > 0$.

Khi đó, không giảm tổng quát suy ra $B(\sqrt{m}; 1 - 2m\sqrt{m}); C(-\sqrt{m}; 2m\sqrt{m} + 1); A(2;3)$.

Tam giác ABC cân tại A suy ra $AB = AC$.

$$\begin{aligned} AB^2 = AC^2 &\Leftrightarrow (\sqrt{m} - 2)^2 + (2 + 2m\sqrt{m})^2 = (\sqrt{m} + 2)^2 + (2 - 2m\sqrt{m})^2 \\ &\Leftrightarrow 8\sqrt{m} - 16m\sqrt{m} = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 & (\text{loại vì } m > 0) \\ m = \frac{1}{2} & (\text{thỏa mãn}) \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Với } m = \frac{1}{2} \text{ thì } BC = \sqrt{(2\sqrt{m})^2 + (4m\sqrt{m})^2} = \sqrt{4m + 16m^3} = \sqrt{4 \cdot \frac{1}{2} + 16 \cdot \frac{1}{8}} = 2.$$

Thử lại thấy ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

Gọi I là trung điểm của BC , suy ra $I(0;1)$ và $IA = \sqrt{2^2 + (3-1)^2} = 2\sqrt{2}$.

Vậy diện tích tam giác ABC bằng $\frac{1}{2}.IA.BC = \frac{1}{2}.2\sqrt{2}.2 = 2\sqrt{2}$.

Câu 22: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^3 + m$ có hai điểm cực trị A, B và $OA + OB$ đạt giá trị nhỏ nhất?

A. Vô số.

B. 2.

C. 3.

D. 1.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y = (x - m)^3 - 3x + m \Rightarrow y' = 3(x - m)^2 - 3$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow (x - m)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m + 1 \\ x = m - 1 \end{cases}$$

Đồ thị hàm số đã cho có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow m + 1 \neq m - 1 \Leftrightarrow m \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Với } x = m + 1 \Rightarrow y = 1 - 3(m + 1) + m = -2m - 2 \Rightarrow A(m + 1; -2m - 2).$$

$$\text{Với } x = m - 1 \Rightarrow y = -1 - 3(m - 1) + m = -2m + 2 \Rightarrow B(m - 1; -2m + 2).$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } OA + OB &= \sqrt{(m + 1)^2 + (-2m - 2)^2} + \sqrt{(m - 1)^2 + (-2m + 2)^2} \\ &= \sqrt{5m^2 + 10m + 5} + \sqrt{5m^2 - 10m + 5} \\ &= \sqrt{5}|m + 1| + \sqrt{5}|-m + 1| \geq \sqrt{5}.|(m + 1) + (-m + 1)| = 2\sqrt{5} \Rightarrow (OA + OB)_{\min} = 2\sqrt{5}. \end{aligned}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow (m + 1)(-m + 1) \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 1 \Rightarrow m \in \{0; \pm 1\}.$$

Câu 23: Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - m - 1)x + 1$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m

để hàm số đạt cực trị tại x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + 2mx_2 - 3m^2 + m - 5 \leq 0$?

A. 9.

B. 3.

C. 7.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y' = x^2 - 2mx + m^2 - m - 1$.

Hàm số đạt cực trị tại x_1, x_2 khi và chỉ khi phương trình $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' = m + 1 > 0 \Leftrightarrow m > -1. (*)$$

$$\text{Khi đó } \begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1.x_2 = m^2 - m - 1 \end{cases}$$

Theo đề bài: $x_1^2 + 2mx_2 - 3m^2 + m - 5 \leq 0$

$$\Leftrightarrow x_1^2 + (x_1 + x_2)x_2 - 3m^2 + m - 5 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - 3m^2 + m - 5 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - x_1 x_2 - 3m^2 + m - 5 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 4m^2 - m^2 + m + 1 - 3m^2 + m - 5 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 2m - 4 \leq 0 \Leftrightarrow m \leq 2.$$

Kết hợp với (*) ta được $-1 < m \leq 2$.

Do m nguyên nên $m \in \{0, 1, 2\}$.

Vậy có 3 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 24: Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 3(m^2 - 1)x - 3m^2 - 1$ có điểm cực đại và cực tiểu cùng với gốc tọa độ tạo thành tam giác vuông tại O . Tích tất cả các giá trị của tập S bằng

- A. -1. B. $-\frac{3}{2}$. C. $\frac{3}{2}$. D. 1.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = -3x^2 + 6x + 3m^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 2x + m^2 - 1 = 0$ (1)

Để hàm số có hai điểm cực đại và cực tiểu thì (1) phải có hai nghiệm phân biệt, nên $\Delta' = m^2 > 0$ suy ra $m \neq 0$.

Dễ thấy (1) có hai nghiệm $x_1 = 1 - m$ và $x_2 = 1 + m$ nên $A(1 - m; -2 - 2m^3)$ và $B(1 + m; -2 + 2m^3)$ là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số

Tam giác OAB vuông ở $O \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \Leftrightarrow (1 - m)(1 + m) + (-2 - 2m^3)(-2 + 2m^3) = 0$
 $\Leftrightarrow 1 - m^2 + 4(1 - m^6) = 0 \Leftrightarrow (1 - m^2)(4m^4 + 4m + 5) = 0 \Leftrightarrow m^2 = 1 \Leftrightarrow m = \pm 1$.

Do đó tích các giá trị thỏa mãn của m bằng -1.

Câu 25: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}mx^2 + x - 2$ đạt cực trị tại x_1, x_2 thỏa

mãn $x_1 + x_2 + x_1 x_2 = 3$

- A. $m = -4$. B. $m = 2$.
 C. $m = 3$. D. Không có giá trị m .

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y' = x^2 - mx + 1$

Để hàm số đạt cực trị tại x_1, x_2 thì phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow m^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow m \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty) \quad (1)$$

Khi đó, phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 .

theo hệ thức Viet $\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1 \cdot x_2 = 1 \end{cases}$.

Theo bài ra ta có: $x_1 + x_2 + x_1 x_2 = 3 \Leftrightarrow m + 1 = 3 \Leftrightarrow m = 2 \quad (2)$.

Từ (1) và (2) suy ra không có giá trị m nào thỏa mãn yêu cầu bài toán

Câu 26: Biết m_0 là giá trị tham số

m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx - 1$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 sao cho $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 13$.

Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $m_0 \in (-7; -1)$. B. $m_0 \in (7; 10)$. C. $m_0 \in (-1; 7)$. D. $m_0 \in (-15; -7)$.

Lời giải

Chọn D

Để hàm số có 2 điểm cực trị thì $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt.

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 6x + m = 0 \text{ có 2 nghiệm phân biệt } \Leftrightarrow \Delta = 36 - 12m > 0 \Leftrightarrow m < 3$$

Theo bài ra: $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 13 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2 = 13 \quad [*]$.

Mà theo định lý Viét ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{m}{3} \end{cases}$ thay vào $[*]$ ta được:

$$4 - 3 \cdot \frac{m}{3} = 13 \Leftrightarrow m = -9 \text{ (t/m)}.$$

Câu 27: Cho hàm số $y = (m-3)x^3 + 2(m^2 - m - 1)x^2 + (m+4)x - 1$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số đã cho có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục Oy . Tổng các phần tử của S là

- A. -3. B. -4. C. 0. D. -2.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = 3(m-3)x^2 + 4(m^2 - m - 1)x + m + 4 = 0$.

Đồ thị hàm số đã cho có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục $Oy \Leftrightarrow$ Phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 < 0 < x_2 \Leftrightarrow 3(m-3)(m+4) < 0 \Leftrightarrow -4 < m < 3$.

Kết hợp điều kiện $m \in \mathbb{Z}$ ta được $m \in \{-3; -2; -1; 0; 1; 2\} \Rightarrow S = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2\}$.

Vậy tổng các phần tử của S là -3.

Câu 28: Biết rằng $m_0 = \frac{a}{b}, a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}^*$, $\frac{a}{b}$ tối giản là giá trị của tham số m để hàm số

$$y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(m-1)x^2 + (3m-2)x + 1 \text{ có 2 điểm cực trị trái dấu } x_1, x_2 \text{ thỏa mãn } \frac{1}{x_1} - 2 = \left| \frac{1}{x_2} \right|.$$

Tính tổng $S = a + 2b$?

- A. 13. B. 8. C. 11. D. -11.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = x^2 - (m-1)x + 3m - 2$

Hàm số có 2 điểm cực trị trái dấu $x_1, x_2 \Leftrightarrow PT: y' = 0$ có hai nghiệm trái dấu x_1, x_2

$$\Leftrightarrow 3m - 2 < 0 \Leftrightarrow m < \frac{2}{3} \text{ (*)}.$$

Theo định lí Viet, ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = m - 1 \\ x_1 x_2 = 3m - 2 \end{cases}$

Từ $\frac{1}{x_1} - 2 = \left| \frac{1}{x_2} \right|$ suy ra $\frac{1}{x_1} - 2 > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x_1} > 2 \Leftrightarrow 0 < x_1 < \frac{1}{2} \Rightarrow x_2 < 0$.

Ta có $\frac{1}{x_1} - 2 = \left| \frac{1}{x_2} \right| \Leftrightarrow \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 2 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 2x_1 x_2 \Leftrightarrow m - 1 = 6m - 4 \Leftrightarrow m = \frac{3}{5}$

Suy ra $a = 3, b = 5 \Rightarrow S = a + 2b = 13$.

Câu 29: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + m$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị A, B sao cho tam giác AOB là tam giác cân tại O .

Lời giải

Ta có $y' = 3x^2 - 6x$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Suy ra đồ thị hàm số đã cho luôn có hai điểm cực trị.

Gọi $A(0; m)$; $B(2; m - 4)$ là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số.

Tam giác AOB cân tại O khi và chỉ khi $OA = OB$ hay $OA^2 = OB^2$.

Mà $\overrightarrow{OA}(0; m)$; $\overrightarrow{OB}(2; m - 4)$. Từ đó suy ra $m^2 = 2^2 + (m - 4)^2 \Leftrightarrow 20 - 8m = 0 \Leftrightarrow m = \frac{5}{2}$.

Vậy $m = \frac{5}{2}$ là giá trị cần tìm.

Câu 30: Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}mx^3 - (m - 1)x^2 + 3(m - 2)x + \frac{1}{6}$ đạt cực trị tại

x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + 2x_2 = 1$.

$$\text{A. } \begin{cases} m = \frac{2}{3} \\ m = 2 \end{cases} \quad \text{B. } 1 - \frac{\sqrt{6}}{2} < m < 1 + \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

$$\text{C. } m \in \left(1 - \frac{\sqrt{6}}{2}; 1 + \frac{\sqrt{6}}{2}\right) \setminus \{0\}. \quad \text{D. } m = 2.$$

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $y = \frac{1}{3}mx^3 - (m - 1)x^2 + 3(m - 2)x + \frac{1}{6}$

Tập xác định $D = \mathbb{R}$; $y' = mx^2 - 2(m - 1)x + 3(m - 2)$

Hàm số đạt cực trị tại $x_1, x_2 \Leftrightarrow y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' = (m - 1)^2 - m \cdot 3(m - 2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \left(1 - \frac{\sqrt{6}}{2}; 1 + \frac{\sqrt{6}}{2}\right) \setminus \{0\}$$

Khi đó theo định lý Viet ta có
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2(m-1)}{m} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{3(m-2)}{m} \end{cases} \cdot \text{Mà } x_1 + 2x_2 = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 - 2x_2 + x_2 = \frac{2(m-1)}{m} \\ (1 - 2x_2) \cdot x_2 = \frac{3(m-2)}{m} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = \frac{2-m}{m} \\ \left(1 - 2 \cdot \frac{2-m}{m}\right) \cdot \frac{2-m}{m} = \frac{3(m-2)}{m} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = \frac{2}{3} \\ m = 2 \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy với $\begin{cases} m = \frac{2}{3} \\ m = 2 \end{cases}$ thì hàm số đã cho đạt cực trị tại x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + 2x_2 = 1$.

- Câu 31:** Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x^3}{3} - (5m^2 - 3m - 1)x^2 + (2m + 1)x + 1$ có hai điểm cực trị A và B sao cho A, B cách đều đường thẳng $x - 1 = 0$?
- A. 2. B. 1. C. 3. D. 0.

Lời giải

Chọn B

$$y' = x^2 - 2(5m^2 - 3m - 1)x + 2m + 1$$

Đồ thị hàm số $y = \frac{x^3}{3} - (5m^2 - 3m - 1)x^2 + (2m + 1)x + 1$ có hai điểm cực trị A và B

$$\Leftrightarrow y' = 0 \text{ có hai nghiệm phân biệt} \Leftrightarrow (5m^2 - 3m - 1)^2 - (2m + 1) > 0 \quad (1)$$

Giả sử $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ với $x_1; x_2$ là hai nghiệm phân biệt của phương trình $y' = 0$

$$A, B \text{ cách đều đường thẳng } x - 1 = 0 \Rightarrow |x_1 - 1| = |x_2 - 1| \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \quad (l) \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2(5m^2 - 3m - 1) = 2 \Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

Thay vào (1) ta thấy $m = -\frac{2}{5}$ thỏa yêu cầu

- Câu 32:** Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x^3}{3} - (5m^2 - 3m - 1)x^2 + (2m + 1)x + 1$ có hai điểm cực trị A và B sao cho A, B cách đều đường thẳng $x - 1 = 0$?
- A. 2. B. 1. C. 3. D. 0.

Lời giải

Chọn B

$$y' = x^2 - 2(5m^2 - 3m - 1)x + 2m + 1$$

Đồ thị hàm số $y = \frac{x^3}{3} - (5m^2 - 3m - 1)x^2 + (2m + 1)x + 1$ có hai điểm cực trị A và B

$$\Leftrightarrow y' = 0 \text{ có hai nghiệm phân biệt} \Leftrightarrow (5m^2 - 3m - 1)^2 - (2m + 1) > 0 \quad (1)$$

Giả sử $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ với $x_1; x_2$ là hai nghiệm phân biệt của phương trình $y' = 0$

$$A, B \text{ cách đều đường thẳng } x - 1 = 0 \Rightarrow |x_1 - 1| = |x_2 - 1| \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \quad (l) \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2(5m^2 - 3m - 1) = 2 \Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

Thay vào (1) ta thấy $m = -\frac{2}{5}$ thỏa yêu cầu

Câu 33: Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 4m^3$. Có tất cả bao nhiêu giá trị của tham số m để các điểm cực đại và cực tiểu của đồ thị hàm số đối xứng nhau qua đường phân giác (d) của góc phần tư thứ nhất và thứ ba.

A. 1

B. 4

C. 2.

D. 3

Lời giải

Chọn C

Ta có: TXĐ: $D = \mathbb{R}$

$y' = 3x^2 - 6mx$. Hàm số có 2 cực trị khi $m \neq 0$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 4m^3 \\ x = 2m \Rightarrow y = 0 \end{cases}$$

Khi đó hai điểm cực trị của đồ thị là $A(0; 4m^3), B(2m; 0)$. Gọi I là trung điểm AB

Các điểm cực trị này đối xứng nhau qua đường thẳng $(d): y = x$ khi

$$\begin{cases} AB \perp (d) \\ I \in (d) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{AB} \perp \overline{a_d} \\ I(m; 2m^3) \in (d) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m - 4m^3 = 0 \\ m - 2m^3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ m = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \text{ thỏa mãn điều kiện}$$

Vậy có 2 giá trị của m

Câu 34: Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 4m^3$. Có tất cả bao nhiêu giá trị của tham số m để các điểm cực đại và cực tiểu của đồ thị hàm số đối xứng nhau qua đường phân giác (d) của góc phần tư thứ nhất và thứ ba.

A. 1

B. 4

C. 2.

D. 3

Lời giải

Chọn C

Ta có: TXĐ: $D = \mathbb{R}$

$y' = 3x^2 - 6mx$. Hàm số có 2 cực trị khi $m \neq 0$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 4m^3 \\ x = 2m \Rightarrow y = 0 \end{cases}$$

Khi đó hai điểm cực trị của đồ thị là $A(0; 4m^3), B(2m; 0)$. Gọi I là trung điểm AB

Các điểm cực trị này đối xứng nhau qua đường thẳng $(d): y = x$ khi

$$\begin{cases} AB \perp (d) \\ I \in (d) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{a_d} \\ I(m; 2m^3) \in (d) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m - 4m^3 = 0 \\ m - 2m^3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ m = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \text{ thỏa mãn điều kiện}$$

Vậy có 2 giá trị của m

DẠNG 10**Tìm điều kiện để hàm trùng phương có 1 hoặc 3 cực trị**

- Câu 1:** Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m không vượt quá 2020 để hàm số $y = -x^4 + (m-5)x^2 + 3m-1$ có ba điểm cực trị
- A. 2017. B. 2019. C. 2016. D. 2015.
- Câu 2:** Tìm số các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^4 + 2(m^2 - m - 6)x^2 + m - 1$ có ba điểm cực trị.
- A. 3 B. 4. C. 6. D. 5.
- Câu 3:** Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số $y = x^4 + (2m-6)x^2 - 2020$ có 3 điểm cực trị?
- A. $m > 3$. B. $m \leq 3$. C. $m \geq 3$. D. $m < 3$.
- Câu 4:** Tìm số các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^4 + 2(m^2 - m - 6)x^2 + m - 1$ có ba điểm cực trị.
- A. 3 B. 4. C. 6. D. 5.
- Câu 5:** Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^4 - (m^2 - 9)x^2 + 2021$ có 1 cực trị. Số phần tử của tập S là
- A. Vô số. B. 7. C. 5. D. 3.
- Câu 6:** Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^4 - (m^2 - 9)x^2 + 2021$ có 1 cực trị. Số phần tử của tập S là
- A. Vô số. B. 3. C. 7. D. 5.
- Câu 7:** Tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^4 + mx^2 - m - 5$ có 3 điểm cực trị là
- A. $m = 1$. B. $m > 8$. C. $m < 0$. D. $4 < m < 5$.
- Câu 8:** Cho hàm số $y = -x^4 + (m^2 - m)x^2$. Tìm m để hàm số có đúng một cực trị.
- A. $m \in (-\infty; 0] \cup [1; +\infty)$. B. $m \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$.
C. $m \in [0; 1]$. D. $m \in (0; 1)$.
- Câu 9:** Tìm điều kiện của tham số b để hàm số $y = x^4 + bx^2 + c$ có ba điểm cực trị.
- A. $b = 0$. B. $b \neq 0$. C. $b < 0$. D. $b > 0$.
- Câu 10:** Tìm điều kiện của tham số b để hàm số $y = x^4 + bx^2 + c$ có ba điểm cực trị.
- A. $b = 0$. B. $b \neq 0$. C. $b < 0$. D. $b > 0$.
- Câu 11:** Tìm tất cả giá trị thực của m để hàm số $y = x^4 + (2m-6)x^2 - 2020$ có ba điểm cực trị.
- A. $m > 3$. B. $m \leq 3$. C. $m \geq 3$. D. $m < 3$.
- Câu 12:** Số giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = mx^4 - (m-3)x^2 + m^2$ không có điểm cực đại là
- A. 3. B. 4. C. 0. D. 1.
- Câu 13:** Tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^4 + mx^2 - m - 5$ có 3 điểm cực trị là
- A. $m = 1$. B. $m > 8$. C. $m < 0$. D. $4 < m < 5$.

- Câu 14:** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = mx^4 + (m-3)x^2 + 3m-5$ chỉ có cực tiểu mà không có cực đại.
- A. $\begin{cases} m \leq 0 \\ m > 3 \end{cases}$. B. $m \leq 0$. C. $0 \leq m \leq 3$. D. $m > 3$.
- Câu 15:** Có bao nhiêu số nguyên m để đồ thị hàm số $y = (m-1)x^4 + (6-m)x^2 + m$ có đúng một điểm cực trị?
- A. 6. B. 1. C. 4. D. 5.
- Câu 16:** Tập hợp các giá trị của tham số thực m để hàm số $y = x^4 - 2(m+2)x^2 + 3m-1$ chỉ có điểm cực tiểu và không có điểm cực đại là
- A. $(-\infty; -2)$. B. $\{-2; 2\}$. C. $(-2; +\infty)$. D. $(-\infty; -2]$.
- Câu 17:** Tập hợp các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^4 - 2(m+2)x^2 + 3m-1$ chỉ có điểm cực tiểu, không có điểm cực đại là
- A. $(-\infty; -2)$. B. $\{-2; 2\}$. C. $(-2; +\infty)$. D. $(-\infty; 2]$.
- Câu 18:** Tập hợp các giá trị của tham số thực m để hàm số $y = x^4 - 2(m+2)x^2 + 3m-1$ chỉ có điểm cực tiểu, không có điểm cực đại là
- A. $(-\infty; -2)$. B. $\{-2; 2\}$. C. $(-2; +\infty)$. D. $(-\infty; -2]$.
- Câu 19:** Có bao nhiêu giá trị m nguyên để hàm số $y = mx^4 + (m-3)x^2 + 2021$ có 2 cực tiểu và một cực đại.
- A. 2. B. 3. C. 1. D. 4.
- Câu 20:** Hãy tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x) = x^4 - 2xm^2$ có đúng 3 điểm cực trị?
- A. $m > 0$. B. $m \in \emptyset$. C. $m < 0$. D. $\forall m \in \mathbb{R}$.
- Câu 21:** Cho hàm số trùng phương $f(x) = x^4 - 2mx^2 - 1$. Hãy tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x)$ có ba điểm cực trị.
- A. $m > 1$. B. $m \leq 1$. C. $m > 0$. D. $m \leq 0$.
- Câu 22:** Hãy tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^4 - 2(m-1)x^2$ có đúng một điểm cực trị?
- A. $m \leq 1$. B. $m \geq 1$. C. $m < 1$. D. $m = 1$.
- Câu 23:** Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m không vượt quá 2020 để hàm số $y = -x^4 + (m-5)x^2 + 3m-1$ có ba điểm cực trị
- A. 2017. B. 2019. C. 2016. D. 2015.
- Câu 24:** Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = mx^4 + (m-1)x^2 + 2020$ có đúng một điểm cực đại.
- A. $\begin{cases} m < 1 \\ m \neq 0 \end{cases}$. B. $m \leq 0$. C. $0 \leq m \leq 1$. D. $m < 1$.

- Câu 25:** Có bao nhiêu giá trị m nguyên để hàm số $y = mx^4 + (m-3)x^2 + 2021$ có 2 cực tiểu và một cực đại.
- A. 2. B. 3. C. 1. D. 4.
- Câu 26:** Số giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = (m^2 - 9)x^4 - 2x^2 + 1$ có đúng một điểm cực trị là
- A. 4. B. 3. C. 5. D. 7.

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m không vượt quá 2020 để hàm số $y = -x^4 + (m-5)x^2 + 3m-1$ có ba điểm cực trị

- A. 2017. B. 2019. C. 2016. D. 2015.

Lời giải

Chọn D

Hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có ba điểm cực trị khi và chỉ khi $ab < 0$.

Suy ra hàm số $y = -x^4 + (m-5)x^2 + 3m-1$ có ba điểm cực trị khi và chỉ khi $m-5 > 0 \Leftrightarrow m > 5$.

Mà m nguyên dương và không vượt quá 2020 nên $m \in \{6, 7, \dots, 2019, 2020\} \Rightarrow$ có tất cả 2015 giá trị.

Câu 2: Tìm số các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^4 + 2(m^2 - m - 6)x^2 + m - 1$ có ba điểm cực trị.

- A. 3 B. 4. C. 6. D. 5.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = 4x^3 + 4(m^2 - m - 6)x$

$$y' = 0 \Rightarrow 4x^3 + 4(m^2 - m - 6)x = 0 \Rightarrow \begin{cases} 4x = 0 \\ x^2 = -m^2 + m + 6 \end{cases}$$

Hàm số có ba cực trị $\Leftrightarrow -m^2 + m + 6 > 0 \Rightarrow -2 < m < 3$

Do đó ta chọn B

Câu 3: Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số $y = x^4 + (2m-6)x^2 - 2020$ có 3 điểm cực trị?

- A. $m > 3$. B. $m \leq 3$. C. $m \geq 3$. D. $m < 3$.

Lời giải

Chọn D

Ta có : $y' = 4x^3 + 2(2m-6)x = 4x(x^2 + m-3)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 0 \\ x^2 + m - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = 3 - m \end{cases}$$

Để hàm số có ba điểm cực trị thì phương trình $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt.

$\Leftrightarrow$ phương trình $x^2 = 3 - m$ có hai nghiệm phân biệt khác 0.

$$\Leftrightarrow 3 - m > 0$$

$$\Leftrightarrow m < 3.$$

Câu 4: Tìm số các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^4 + 2(m^2 - m - 6)x^2 + m - 1$ có ba điểm cực trị.

- A. 3 B. 4. C. 6. D. 5.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = 4x^3 + 4(m^2 - m - 6)x$

$$y' = 0 \Rightarrow 4x^3 + 4(m^2 - m - 6)x = 0 \Rightarrow \begin{cases} 4x = 0 \\ x^2 = -m^2 + m + 6 \end{cases}$$

Hàm số có ba cực trị $\Leftrightarrow -m^2 + m + 6 > 0 \Rightarrow -2 < m < 3$

- Câu 5:** Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^4 - (m^2 - 9)x^2 + 2021$ có 1 cực trị. Số phần tử của tập S là
- A. Vô số. B. 7. C. 5. D. 3.

Lời giải

Chọn B

Để hàm số có 1 cực trị thì $-(m^2 - 9) \geq 0 \Leftrightarrow m^2 - 9 \leq 0 \Leftrightarrow -3 \leq m \leq 3$.

Vậy có 7 giá trị nguyên thỏa mãn yêu cầu bài toán.

- Câu 6:** Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^4 - (m^2 - 9)x^2 + 2021$ có 1 cực trị. Số phần tử của tập S là
- A. Vô số. B. 3. C. 7. D. 5.

Lời giải

Chọn A

Để hàm số $y = x^4 - (m^2 - 9)x^2 + 2021$ có 1 cực trị thì $y' = 4x^3 - 2(m^2 - 9)x$

$$\Leftrightarrow 2x(2x^2 - m^2 + 9) = 0 \text{ có 1 nghiệm, suy ra: } 2x^2 - m^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{9 - m^2}{2} \text{ vô nghiệm hoặc}$$

$$\text{có nghiệm } x = 0 \text{ nên } 9 - m^2 \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -3 \\ m \geq 3 \end{cases}.$$

- Câu 7:** Tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^4 + mx^2 - m - 5$ có 3 điểm cực trị là
- A. $m = 1$. B. $m > 8$. C. $m < 0$. D. $4 < m < 5$.

Lời giải

Chọn C

♦ Để hàm số có 3 cực trị thì $a.b < 0 \Leftrightarrow 1.m < 0 \Leftrightarrow m < 0$.

- Câu 8:** Cho hàm số $y = -x^4 + (m^2 - m)x^2$. Tìm m để hàm số có đúng một cực trị.
- A. $m \in (-\infty; 0] \cup [1; +\infty)$. B. $m \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$.
C. $m \in [0; 1]$. D. $m \in (0; 1)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y' = -4x^3 + 2(m^2 - m)x$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow -4x^3 + 2(m^2 - m)x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2x^2 = m^2 - m \end{cases}$$

Hàm số có đúng một điểm cực trị khi phương trình $2x^2 = m^2 - m$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép $x = 0$.

Điều kiện là $m^2 - m \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 1$.

Vậy $m \in [0;1]$.

Câu 9: Tìm điều kiện của tham số b để hàm số $y = x^4 + bx^2 + c$ có ba điểm cực trị.

A. $b = 0$.

B. $b \neq 0$.

C. $b < 0$.

D. $b > 0$.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định của hàm số: $D = \mathbb{R}$.

$$y' = 4x^3 + 2bx = 2x(2x^2 + b).$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = -\frac{b}{2} \end{cases}$$

Hàm số có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow x^2 = -\frac{b}{2} \text{ có hai nghiệm phân biệt khác } 0 \Leftrightarrow -\frac{b}{2} > 0 \Leftrightarrow b < 0.$$

Câu 10: Tìm điều kiện của tham số b để hàm số $y = x^4 + bx^2 + c$ có ba điểm cực trị.

A. $b = 0$.

B. $b \neq 0$.

C. $b < 0$.

D. $b > 0$.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định của hàm số: $D = \mathbb{R}$.

$$y' = 4x^3 + 2bx = 2x(2x^2 + b).$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = -\frac{b}{2} \end{cases}$$

Hàm số có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt.

$$\Leftrightarrow x^2 = -\frac{b}{2} \text{ có hai nghiệm phân biệt khác } 0 \Leftrightarrow -\frac{b}{2} > 0 \Leftrightarrow b < 0.$$

Câu 11: Tìm tất cả giá trị thực của m để hàm số $y = x^4 + (2m - 6)x^2 - 2020$ có ba điểm cực trị.

A. $m > 3$.

B. $m \leq 3$.

C. $m \geq 3$.

D. $m < 3$.

Lời giải

Chọn D

Hàm số có ba điểm cực trị khi $2m - 6 < 0 \Leftrightarrow m < 3$.

Câu 12: Số giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = mx^4 - (m - 3)x^2 + m^2$ không có điểm cực đại là

A. 3.

B. 4.

C. 0.

D. 1.

Lời giải

Chọn B

Hàm số $y = mx^4 - (m - 3)x^2 + m^2$ không có điểm cực đại

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ a.b \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 0 \\ -(m - 3) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 0 \\ m \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 3.$$

Do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{0;1;2;3\}$. Vậy có bốn giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 13: Tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^4 + mx^2 - m - 5$ có 3 điểm cực trị là

A. $m = 1$.

B. $m > 8$.

C. $m < 0$.

D. $4 < m < 5$.

Lời giải

Chọn C

Để hàm số $y = x^4 + mx^2 - m - 5$ có 3 điểm cực trị thì phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 + 2mx = 0$ có 3 nghiệm đơn phân biệt.

$$\text{Ta có } y' = 4x^3 + 2mx = 0 \Leftrightarrow 2x(2x^2 + m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2x^2 + m = 0 \end{cases} \quad (*)$$

Theo yêu cầu bài toán thì phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt khác 0. Khi đó

$$\begin{cases} 2 \cdot 0^2 + m \neq 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < 0.$$

Vậy $m < 0$ thì hàm số đã cho có 3 điểm cực trị.

Câu 14: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = mx^4 + (m-3)x^2 + 3m-5$ chỉ có cực tiểu mà không có cực đại.

A. $\begin{cases} m \leq 0 \\ m > 3 \end{cases}$.

B. $m \leq 0$.

C. $0 \leq m \leq 3$.

D. $m > 3$.

Lời giải

Chọn D

+) Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

+) Trường hợp 1: $m = 0$.

$$y = -3x^2 - 5.$$

$$y' = -6x = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$
y	$-\infty$	-5	$-\infty$

Hàm số chỉ có cực đại $\Rightarrow m = 0$, không thỏa mãn.

+) Trường hợp 2: $m \neq 0$.

$$y' = 4mx^3 + 2(m-3)x.$$

$$y' = 2x(2mx^2 + m-3).$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = \frac{-m+3}{2m} \end{cases} \quad (1).$$

Nếu $\frac{-m+3}{2m} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m \geq 3 \end{cases}$ thì hàm số có 1 cực trị.

* $m < 0$.

Chủ đề 02: Cực trị của hàm số

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'		0	
y		$y(0)$	

$-\infty \swarrow \quad \searrow -\infty$

Suy ra hàm số chỉ có cực đại (không thỏa mãn).

* $m \geq 3$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'		0	
y		$y(0)$	

$+\infty \swarrow \quad \searrow +\infty$

Suy ra hàm số chỉ có cực tiểu mà không có cực đại khi $m \geq 3$ thỏa mãn.

Nếu $\frac{-m+3}{2m} > 0 \Leftrightarrow 0 \leq m < 3$ thì hàm số luôn có cả cực đại và cực tiểu.

Vậy $m \geq 3$.

Câu 15: Có bao nhiêu số nguyên m để đồ thị hàm số $y = (m-1)x^4 + (6-m)x^2 + m$ có đúng một điểm cực trị?

A. 6.

B. 1.

C. 4.

D. 5.

Lời giải

Ta có: $y' = 4(m-1)x^3 + 2(6-m)x = 2x[2(m-1)x^2 + 6-m]$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2(m-1)x^2 + 6-m = 0 \quad (1) \end{cases}$$

Hàm số đã cho có đúng một cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có đúng một nghiệm $\Leftrightarrow (m-1)(m-6) \leq 0$
 $\Leftrightarrow 1 \leq m \leq 6$.

Do $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

Vậy có 6 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Cách khác:

Hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đúng một điểm cực trị

$$\Leftrightarrow a.b \geq 0 \Leftrightarrow (m-1)(6-m) \geq 0 \Leftrightarrow 1 \leq m \leq 6.$$

Do $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

Vậy có 6 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 16: Tập hợp các giá trị của tham số thực m để hàm số $y = x^4 - 2(m+2)x^2 + 3m-1$ chỉ có điểm cực tiểu và không có điểm cực đại là

A. $(-\infty; -2)$.

B. $\{-2; 2\}$.

C. $(-2; +\infty)$.

D. $(-\infty; -2]$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định của hàm số đã cho là: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 4x^3 - 4(m+2)x$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4(m+2)x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = m+2 \end{cases}$$

Để hàm số đã cho chỉ có điểm cực tiểu và không có điểm cực đại thì $m+2 \leq 0 \Leftrightarrow m \leq -2$.

Câu 17: Tập hợp các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^4 - 2(m+2)x^2 + 3m - 1$ chỉ có điểm cực tiểu, không có điểm cực đại là

- A. $(-\infty; -2)$. B. $\{-2; 2\}$. C. $(-2; +\infty)$. D. $(-\infty; 2]$.

Lời giải

Chọn A

Hàm trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$ chỉ có điểm cực tiểu, không có điểm cực đại khi $\begin{cases} a > 0 \\ ab > 0 \end{cases}$

Áp dụng cho bài toán này ta được: $-2(m+2) > 0 \Leftrightarrow m < -2$

Câu 18: Tập hợp các giá trị của tham số thực m để hàm số $y = x^4 - 2(m+2)x^2 + 3m - 1$ chỉ có điểm cực tiểu, không có điểm cực đại là

- A. $(-\infty; -2)$. B. $\{-2; 2\}$. C. $(-2; +\infty)$. D. $(-\infty; -2]$.

Lời giải

Chọn D

TXĐ: $D = \mathbb{R}$

Ta có $y' = 4x^3 - 4(m+2)x = 4x(x^2 - m - 2)$

$$\text{Xét } y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = m+2 \end{cases}$$

Để hàm số chỉ có cực tiểu và không có cực đại thì $\begin{cases} m+2 \leq 0 \\ a = 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq -2$

Vậy $m \in (-\infty; -2]$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 19: Có bao nhiêu giá trị m nguyên để hàm số $y = mx^4 + (m-3)x^2 + 2021$ có 2 cực tiểu và một cực đại.

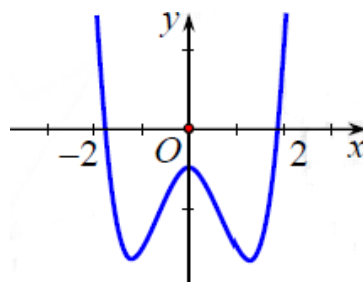
- A. 2. B. 3. C. 1. D. 4.

Lời giải

Chọn A

Ta có hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$) có 3 cực trị khi $ab < 0$

Để hàm số $y = f(x)$ có 2 cực tiểu và 1 cực đại thì đồ thị hàm số $y = f(x)$ có dạng



Chủ đề 02: Cực trị của hàm số

Ta có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow$ Đồ thị nhánh ngoài của hàm số hướng lên, nên hàm số có hệ số $a > 0$.

Khi đó để thỏa mãn yêu cầu bài toán ta có:

$$\begin{cases} a > 0 \\ ab < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m(m-3) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 3.$$

Vậy có 2 giá trị m nguyên là $m \in \{1; 2\}$.

Câu 20: Hãy tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x) = x^4 - 2xm^2$ có đúng 3 điểm cực trị?

- A. $m > 0$. B. $m \in \emptyset$. C. $m < 0$. D. $\forall m \in \mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn B

Hàm số đã cho có đúng 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow f'(x) = 0$ có đúng 3 nghiệm phân biệt.

Ta có $f'(x) = 4x^3 - 2m^2$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 2m^2 = 0 \Leftrightarrow x^3 = \frac{m^2}{2} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{m^2}{2}}.$$

Vậy không có giá trị nào của tham số m để hàm số có đúng 3 điểm cực trị.

Câu 21: Cho hàm số trùng phương $f(x) = x^4 - 2mx^2 - 1$. Hãy tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x)$ có ba điểm cực trị.

- A. $m > 1$. B. $m \leq 1$. C. $m > 0$. D. $m \leq 0$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f'(x) = 4x^3 - 4mx$. Phương trình $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = m \end{cases}$.

Hàm số $f(x)$ có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình $f'(x) = 0$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m > 0$.

Vậy $m > 0$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 22: Hãy tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^4 - 2(m-1)x^2$ có đúng một điểm cực trị?

- A. $m \leq 1$. B. $m \geq 1$. C. $m < 1$. D. $m = 1$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số $y = x^4 - 2(m-1)x^2$ có đúng một điểm cực trị khi và chỉ khi $-2(m-1) \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 1$.

Câu 23: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m không vượt quá 2020 để hàm số $y = -x^4 + (m-5)x^2 + 3m-1$ có ba điểm cực trị

- A. 2017. B. 2019. C. 2016. D. 2015.

Lời giải

Chọn D

Để hàm số có ba điểm cực trị thì: $ab = -1 \cdot (m-5) < 0 \Leftrightarrow m-5 > 0 \Leftrightarrow m > 5$ (1)

Theo giả thiết: $m \leq 2020$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra có 2015 giá trị nguyên dương của m thỏa mãn là: $m \in \{6; 7; \dots; 2020\}$

Câu 24: Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = mx^4 + (m-1)x^2 + 2020$ có đúng một điểm cực đại.

A. $\begin{cases} m < 1 \\ m \neq 0 \end{cases}$.

B. $m \leq 0$.

C. $0 \leq m \leq 1$.

D. $m < 1$.

Lời giải

Chọn D.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

Xét các trường hợp:

+**TH1:** $m = 0 \Rightarrow y = -x^2 + 2020$ là hàm bậc hai có đồ thị là parabol có bề lõm hướng xuống nên có đúng một điểm cực đại. Do đó $m = 0$ là một giá trị cần tìm.

+**TH2:** $m \neq 0$: hàm số $y = mx^4 + (m-1)x^2 + 2020$ là hàm trùng phương nên đồ thị có đúng một

$$\text{điểm cực đại khi } \begin{cases} m > 0 \\ m-1 < 0 \\ m < 0 \\ m-1 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < m < 1 \\ m < 0 \end{cases}$$

Kết hợp 2 trường hợp trên ta được $m < 1$ là tất cả các giá trị cần tìm.

Câu 25: Có bao nhiêu giá trị m nguyên để hàm số $y = mx^4 + (m-3)x^2 + 2021$ có 2 cực tiểu và một cực đại.

A. 2.

B. 3.

C. 1.

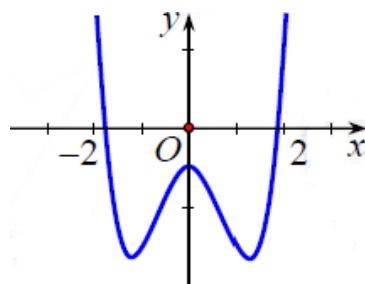
D. 4.

Lời giải

Chọn A

Ta có hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$) có 3 cực trị khi $ab < 0$

Để hàm số $y = f(x)$ có 2 cực tiểu và 1 cực đại thì đồ thị hàm số $y = f(x)$ có dạng



Ta có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow$ Đồ thị nhánh ngoài của hàm số hướng lên, nên hàm số có hệ số $a > 0$.

$$\text{Khi đó để thỏa mãn yêu cầu bài toán ta có: } \begin{cases} a > 0 \\ ab < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m(m-3) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 3.$$

Vậy có 2 giá trị m nguyên là $m \in \{1; 2\}$.

Câu 26: Số giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = (m^2 - 9)x^4 - 2x^2 + 1$ có đúng một điểm cực trị là

Lời giải

Chọn D

$$y = (m^2 - 9)x^4 - 2x^2 + 1 \quad (1).$$

Xét các trường hợp:

$$\text{TH1: } m^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 3.$$

Khi đó (1) trở thành: $y = -2x^2 + 1$ có đúng 1 điểm cực trị.

Vậy $m = \pm 3$ thỏa đề bài.

$$\text{TH2: } m^2 - 9 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 3.$$

Ta có:

$$y' = 4(m^2 - 9)x^3 - 4x.$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 4(m^2 - 9)x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ (m^2 - 9)x^2 - 1 = 0(*) \end{cases}$$

Hàm số có đúng một điểm cực trị $\Leftrightarrow (*)$ có đúng một nghiệm $x = 0$ hoặc vô nghiệm.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 9 < 0 \\ (m^2 - 9).0^2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow -3 < m < 3.$$

Vì m là số nguyên nên $m \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

Từ TH1 và TH2 suy ra có 7 giá trị nguyên của m thỏa đề bài.

Cách 2. Tổng quát $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đúng một cực trị

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \frac{b}{a} \geq 0 \end{cases}$$

Để hàm số $y = (m^2 - 9)x^4 - 2x^2 + 1$ có đúng một điểm cực trị

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 9 = 0 \\ \begin{cases} m^2 - 9 \neq 0 \\ \frac{-2}{m^2 - 9} \geq 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm 3 \\ -3 < m < 3 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq m \leq 3$$

Vì m là số nguyên nên $m \in \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$. Vậy có 7 giá trị nguyên của m thỏa đề bài.

DẠNG 11**Tìm m để hàm số, đồ thị hàm số trùng phương có cực trị TMDK**

- Câu 1:** Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 1$ có ba điểm cực trị $A(0;1)$, B , C thỏa mãn $BC = 4$
A. $m = \sqrt{2}$. **B.** $m = \pm 4$. **C.** $m = \pm 2$. **D.** $m = 4$.
- Câu 2:** Cho đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có điểm cực đại $A(0; -3)$ và điểm cực tiểu $B(-1; -5)$. Tính giá trị của $P = a + 2b + 3c$.
A. $P = 3$. **B.** $P = -5$. **C.** $P = -9$. **D.** $P = -15$.
- Câu 3:** Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = mx^4 + (2m-1)x^2 + m-2$ chỉ có một điểm cực đại mà không có điểm cực tiểu.
A. $\begin{cases} m \leq 0 \\ m > \frac{1}{2} \end{cases}$. **B.** $m \leq 0$. **C.** $\begin{cases} m \leq 0 \\ m \geq \frac{1}{2} \end{cases}$. **D.** $m \leq \frac{1}{2}$.
- Câu 4:** Để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m - 1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích bằng 2, giá trị của tham số m thuộc khoảng nào sau đây?
A. $(-1; 0)$. **B.** $(2; 3)$. **C.** $(0; 1)$. **D.** $(1; 2)$.
- Câu 5:** Cho hàm trùng phương $y = f(x) = x^4 - 2(m+1)x^2 + m^2 - 8$ có đồ thị (C) . Gọi A, B, C là ba điểm cực trị của đồ thị (C) . Để tam giác ABC đều thì giá trị tham số m nằm trong khoảng nào sau đây?
A. $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right)$. **B.** $\left(0; \frac{1}{4}\right)$. **C.** $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$. **D.** $(1; 2)$.
- Câu 6:** Gọi S là tập hợp chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số $m \in [-20; 20]$ để hàm số $y = x^4 + 2(m-2)x^2 + 1$ có duy nhất một điểm cực tiểu. Số phần tử của tập S bằng
A. 19. **B.** 21. **C.** 20. **D.** 41.
- Câu 7:** Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2$. Tổng bình phương các giá trị m để hàm số có ba cực trị và đường tròn qua ba cực trị đó có bán kính bằng 4, gần với số nguyên nào nhất trong các số nguyên sau?
A. 8. **B.** 9. **C.** 16. **D.** 7.
- Câu 8:** Cho hàm số $f(x) = x^4 - 2mx^2 + 2$. Tổng bình phương các giá trị m để hàm số có ba cực trị và đường tròn đi qua ba điểm cực trị của đồ thị hàm số có bán kính bằng 4, gần với số nguyên nào nhất trong các số nguyên sau?
A. 8. **B.** 9. **C.** 16. **D.** 7.
- Câu 9:** Cho hàm số $y = mx^4 - (2m+1)x^2 + 1$. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số có một điểm cực đại
A. $-\frac{1}{2} \leq m < 0$. **B.** $m \leq -\frac{1}{2}$. **C.** $-\frac{1}{2} \leq m \leq 0$. **D.** $m \geq -\frac{1}{2}$.

- Câu 10:** Tìm giá trị tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + 2m + 3$ có ba điểm cực trị A, B, C sao cho trục hoành chia tam giác ABC thành một tam giác và một hình thang biết rằng tỉ số diện tích tam giác nhỏ được chia ra và diện tích tam giác ABC bằng $\frac{4}{9}$
- A. $m = \frac{5+\sqrt{3}}{2}$. B. $m = \frac{-1+\sqrt{15}}{2}$. C. $m = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$. D. $m = \frac{1+\sqrt{15}}{2}$.
- Câu 11:** Với tất cả giá trị nào của m thì hàm số $y = mx^4 + (m-2)x^2 + 1 + 2m$ chỉ có một cực trị:
- A. $m \geq 2$. B. $0 \leq m \leq 2$. C. $\begin{cases} m \leq 0 \\ m \geq 2 \end{cases}$. D. $m \leq 0$.
- Câu 12:** Tìm giá trị của tham số m để hàm số $y = -x^4 + 2(m^2 + 3)x^2 + 2$ có 3 điểm cực trị sao cho giá trị cực đại của hàm số đạt giá trị nhỏ nhất.
- A. $m = 0$. B. $m = -3$. C. $m = -1$. D. $m = -2$.
- Câu 13:** Cho hàm số $y = x^4 - 2(1-m^2)x^2 + m + 1$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số có cực đại, cực tiểu và các điểm cực trị của đồ thị hàm số lập thành tam giác có diện tích là lớn nhất.
- A. $m = \frac{1}{2}$. B. $m = -\frac{1}{2}$. C. $m = 0$. D. $m = 1$.
- Câu 14:** Cho biết đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 - 2m^2 + m^4$ có 3 điểm cực trị A, B, C cùng với điểm $D(0; -3)$ là 4 đỉnh của một hình thoi. Gọi S là tổng các giá trị m thỏa mãn đề bài thì S thuộc khoảng nào sau đây?
- A. $S \in (2; 4)$. B. $S \in \left(\frac{9}{2}; 6\right)$. C. $S \in \left(1; \frac{5}{2}\right)$. D. $S \in \left(0; \frac{5}{2}\right)$.
- Câu 15:** Gọi A, B, C là các điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 4$. Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC bằng?
- A. $\sqrt{2} - 1$. B. $\sqrt{2} + 1$. C. $\sqrt{2}$. D. 1.
- Câu 16:**) Có bao nhiêu giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m - 1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng 1?
- A. 4. B. 3. C. 1. D. 2.
- Câu 17:** Gọi S tập hợp các giá trị m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2m^2x^2 + 1$ có 3 điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông cân. Tổng bình phương các phần tử của S bằng
- A. 2. B. 4. C. 8. D. 6.
- Câu 18:** Số giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = mx^4 - (m-3)x^2 + m^2$ không có điểm cực đại?
- A. 4. B. 2. C. 5. D. 0.
- Câu 19:** Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m + 1$ có giá trị cực tiểu bằng -1 . Tổng các phần tử thuộc S là
- A. -2 . B. 0. C. 1. D. -1 .
- Câu 20:** Gọi S tập hợp các giá trị m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2m^2x^2 + 1$ có 3 điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông cân. Tổng bình phương các phần tử của S bằng
- A. 2. B. 4. C. 8. D. 6.

Câu 21: Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^4 + 2mx^2 + 3m^2$ có ba điểm cực trị lập thành một tam giác nhận $G(0;7)$.

- A. $m = 1$. B. $m = -\sqrt{\frac{3}{7}}$. C. $m = -1$. D. $m = -\sqrt{3}$.

Câu 22: Cho hai đường cong $(C_1): y = x^4 - (m+1)x^2 + 2$ và $(C_2): y = 2(x+1)^4 - 4x^2 - 8x + 3m$. Biết rằng mỗi đường cong đều có 3 điểm cực trị tạo thành tam giác đồng thời các tam giác đồng dạng với nhau. Hỏi m thuộc khoảng nào dưới đây?

- A. $(1;2)$. B. $(0;1)$. C. $(2;3)$. D. $(3;4)$.

Câu 23: Đồ thị của hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + 2m + 1$ cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt có hoành độ lập thành một cấp số cộng. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $m \in (6;9)$. B. $m \in (-6;-3)$. C. $m \in (-3;2)$. D. $m \in (2;6)$.

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

- Câu 1:** Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 1$ có ba điểm cực trị $A(0;1)$, B , C thỏa mãn $BC = 4$
- A. $m = \sqrt{2}$. B. $m = \pm 4$. C. $m = \pm 2$. D. $m = 4$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 4x^3 - 4mx = 4x(x^2 - m)$.

Để hàm số có 3 cực trị thì $m > 0$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{m} \end{cases} \Rightarrow y(0) = 1, \quad y(\pm\sqrt{m}) = 1 - m^2, \text{ suy ra } A(0;1), B(\sqrt{m};1-m^2), C(-\sqrt{m};1-m^2).$$

$$BC = 4 \Leftrightarrow \sqrt{4m} = 4 \Leftrightarrow m = 4.$$

- Câu 2:** Cho đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có điểm cực đại $A(0;-3)$ và điểm cực tiểu $B(-1;-5)$. Tính giá trị của $P = a + 2b + 3c$.
- A. $P = 3$. B. $P = -5$. C. $P = -9$. D. $P = -15$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Đồ thị hàm số đi qua điểm } A(0;-3) \text{ và } B(-1;-5) \Rightarrow \begin{cases} c = -3 \\ a + b + c = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = -2 \\ c = -3 \end{cases} \quad (1)$$

$$y = ax^4 + bx^2 + c \Rightarrow y' = 4ax^3 + 2bx.$$

$$\text{Đồ thị hàm số có điểm cực tiểu } B(-1;-5) \Rightarrow -4a - 2b = 0. \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } \begin{cases} a + b = -2 \\ -4a - 2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -4 \end{cases}$$

$$\text{Với } \begin{cases} a = 2 \\ b = -4 \\ c = -3 \end{cases} \Rightarrow y = 2x^4 - 4x^2 - 3 \Rightarrow y' = 8x^3 - 8x \Rightarrow y'' = 24x^2 - 8.$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$$

$$y''(0) = -8 < 0 \Rightarrow A(0;-3) \text{ là điểm cực đại.}$$

$$y''(-1) = 16 > 0 \Rightarrow B(-1;-5) \text{ là điểm cực tiểu.}$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} a = 2 \\ b = -4 \\ c = -3 \end{cases} \Rightarrow P = a + 2b + 3c = -15.$$

- Câu 3:** Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = mx^4 + (2m-1)x^2 + m-2$ chỉ có một điểm cực đại mà không có điểm cực tiểu.

A. $\begin{cases} m \leq 0 \\ m > \frac{1}{2} \end{cases}$

B. $m \leq 0$.

C. $\begin{cases} m \leq 0 \\ m \geq \frac{1}{2} \end{cases}$

D. $m \leq \frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Xét $m = 0$, khi đó $y = -x^2 - 2$ là hàm số bậc hai có $a = -1 < 0$ nên đồ thị là Parabol có bề lõm hướng xuống nên có 1 cực đại mà không có cực tiểu. Suy ra $m = 0$ thỏa mãn đề bài.

Xét $m \neq 0$, khi đó $y = mx^4 + (2m-1)x^2 + m-2$ là hàm số bậc 4 dạng trùng phương.

Để đồ thị hàm số $y = mx^4 + (2m-1)x^2 + m-2$ chỉ có một điểm cực đại mà không có điểm cực

$$\text{tiểu thì } \begin{cases} m < 0 \\ m(2m-1) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m \leq 0 \\ m \geq \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow m < 0.$$

Vậy $m \leq 0$.

Câu 4: Để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m - 1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích bằng 2, giá trị của tham số m thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(-1; 0)$.

B. $(2; 3)$.

C. $(0; 1)$.

D. $(1; 2)$.

Lời giải

Chọn D

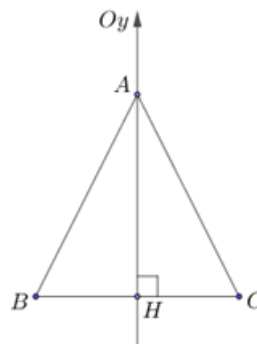
Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

Ta có $y' = 4x^3 - 4mx = 4x(x^2 - m)$

+) Đồ thị hàm số đã cho có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow$ Phương trình $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m > 0$ (*).

+) Với $m > 0$, ta có $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{m} \end{cases}$

Gọi $A(0; m-1), B(-\sqrt{m}; -m^2 + m - 1), C(\sqrt{m}; -m^2 + m - 1)$ là ba điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho.



Vì $A \in Oy$; B và C đối xứng nhau qua Oy nên tam giác ABC cân tại A (tham khảo hình vẽ).

Gọi $H = BC \cap Oy \Rightarrow AH \perp BC$

$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} AH \cdot BC = 2$$

$$\Leftrightarrow |(y_A - y_H)(x_C - x_B)| = 4 \quad (\text{với } y_H = y_B = y_C)$$

$$\Leftrightarrow |m^2 \cdot 2\sqrt{m}| = 4 \Leftrightarrow m^2 \sqrt{m} = 2 \Rightarrow m = \sqrt[5]{4} \in (1; 2).$$

Câu 5: Cho hàm trùng phương $y = f(x) = x^4 - 2(m+1)x^2 + m^2 - 8$ có đồ thị (C) . Gọi A, B, C là ba điểm cực trị của đồ thị (C) . Để tam giác ABC đều thì giá trị tham số m nằm trong khoảng nào sau đây?

- A. $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right)$. B. $\left(0; \frac{1}{4}\right)$. C. $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$. D. $(1; 2)$.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$$y' = 4x^3 - 4(m+1)x; \quad y' = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - m - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = m + 1 \end{cases}.$$

Hàm số có ba điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m + 1 > 0$

$$\Leftrightarrow m > -1. \text{ Khi đó } y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \sqrt{m+1} \\ x = -\sqrt{m+1} \end{cases}.$$

Đồ thị (C) có ba điểm cực trị là $A(0; m^2 - 8)$, $B(\sqrt{m+1}; -(m+1)^2 + m^2 - 8)$ và $C(-\sqrt{m+1}; -(m+1)^2 + m^2 - 8)$. Ta có $AB = AC = \sqrt{m+1 + (m+1)^4}$.

$$\text{Do đó tam giác } ABC \text{ đều} \Leftrightarrow AB = BC \Leftrightarrow \sqrt{m+1 + (m+1)^4} = \sqrt{4(m+1)}$$

$$\Leftrightarrow m+1 + (m+1)^4 = 4(m+1) \Leftrightarrow (m+1)^4 - 3(m+1) = 0 \Leftrightarrow (m+1) \cdot [(m+1)^3 - 3] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m+1 = 0 \\ (m+1)^3 - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = -1 + \sqrt[3]{3} \end{cases}. \text{ So điều kiện } m > -1 \text{ ta nhận } m = -1 + \sqrt[3]{3}.$$

Câu 6: Gọi S là tập hợp chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số $m \in [-20; 20]$ để hàm số $y = x^4 + 2(m-2)x^2 + 1$ có duy nhất một điểm cực tiểu. Số phần tử của tập S bằng

- A. 19. B. 21. C. 20. D. 41.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện để hàm số $y = x^4 + 2(m-2)x^2 + 1$ có duy nhất một điểm cực tiểu là $a = 1 > 0$ và phương trình $y' = 0$ có duy nhất một nghiệm. Ta có:

$$y' = 4x^3 + 4(m-2)x.$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 + m - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = 2 - m \end{cases} \quad (*)$$

Để phương trình $y' = 0$ có duy nhất một nghiệm $x = 0$ thì phương trình $(*)$ vô nghiệm hoặc có nghiệm duy nhất $x = 0 \Leftrightarrow 2 - m \leq 0 \Leftrightarrow m \geq 2$. Vậy $m \in \{2, 3, \dots, 20\}$ hay có 19 giá trị của tham số $m \in [-20; 20]$ thỏa mãn.

A. $-\frac{1}{2} \leq m < 0$. B. $m \leq -\frac{1}{2}$. C. $-\frac{1}{2} \leq m \leq 0$. D. $m \geq -\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y' = 4mx^3 - 2(2m+1)x = 2x(2mx^2 - 2m - 1); y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2mx^2 = 2m + 1 \end{cases}$

* $m = 0$ ta có $y = -x^2 + 1$. Vậy hàm số đạt cực đại tại $x = 0$.

* $m \neq 0$ để hàm số có một điểm cực đại khi $\begin{cases} m < 0 \\ 2m + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq m < 0$.

Vậy $-\frac{1}{2} \leq m \leq 0$ thì hàm số có một điểm cực đại.

Câu 10: Tìm giá trị tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + 2m + 3$ có ba điểm cực trị A, B, C sao cho trục hoành chia tam giác ABC thành một tam giác và một hình thang biết rằng tỉ số diện tích tam giác nhỏ được chia ra và diện tích tam giác ABC bằng $\frac{4}{9}$

A. $m = \frac{5+\sqrt{3}}{2}$. B. $m = \frac{-1+\sqrt{15}}{2}$. C. $m = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$. D. $m = \frac{1+\sqrt{15}}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + 2m + 3$.

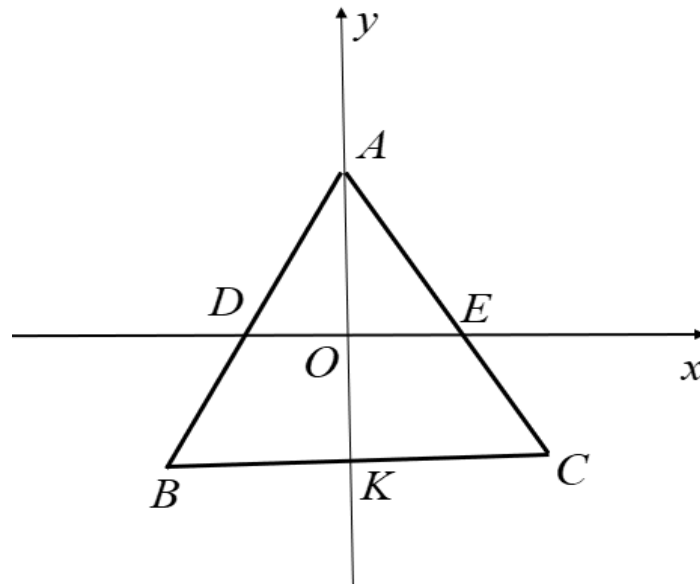
$y' = 4x^3 - 4(m+1)x$.

$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = m + 1 \end{cases}$.

Hàm số có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m > -1$.

Khi $m > -1$, đồ thị hàm số có ba điểm cực trị là $A(0; 2m+3)$, $B(-\sqrt{m+1}; -m^2+2)$, $C(\sqrt{m+1}; -m^2+2)$.

Ta có $A \in Oy$, B, C đối xứng nhau qua $Oy \Rightarrow \triangle ABC$ cân tại A .



Trục hoành chia tam giác ABC thành một tam giác và một hình thang $\Rightarrow \begin{cases} 2m+3 > 0 \\ -m^2+2 < 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > -\frac{3}{2} \\ m > \sqrt{2} \\ m < -\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \sqrt{2} \\ -\frac{3}{2} < m < -\sqrt{2} \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện $m > -1$ ta được $m > \sqrt{2}$.

Khi đó, gọi D, E lần lượt là giao điểm của trục Ox và các cạnh AB, AC , K là giao điểm của BC và Oy .

$$\text{Ta có } \frac{S_{ADE}}{S_{ABC}} = \left(\frac{AO}{AK} \right)^2 = \left(\frac{y_A}{y_A - y_B} \right)^2 = \left(\frac{2m+3}{m^2+2m+1} \right)^2.$$

$$\text{Mà } \frac{S_{ADE}}{S_{ABC}} = \frac{4}{9} \Leftrightarrow \left(\frac{2m+3}{m^2+2m+1} \right)^2 = \frac{4}{9}.$$

$$\text{Vì } m > \sqrt{2} \Rightarrow \frac{2m+3}{(m^2+2m+1)} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow 2m^2 - 2m - 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1+\sqrt{15}}{2} \\ m = \frac{1-\sqrt{15}}{2} \end{cases} \Rightarrow m = \frac{1+\sqrt{15}}{2}.$$

Vậy $m = \frac{1+\sqrt{15}}{2}$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 11: Với tất cả giá trị nào của m thì hàm số $y = mx^4 + (m-2)x^2 + 1 + 2m$ chỉ có một cực trị:

- A. $m \geq 2$. B. $0 \leq m \leq 2$. C. $\begin{cases} m \leq 0 \\ m \geq 2 \end{cases}$. D. $m \leq 0$.

Lời giải

Chọn C

Nếu $m = 0$ thì $y = -2x^2 + 1$ là hàm bậc hai nên chỉ có duy nhất một cực trị.

Khi $m \neq 0$, ta có: $y' = 4mx^3 + 2(m-2)x = 2x[2mx^2 + (m-2)]$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = \frac{2-m}{2m} \end{cases}$.

Để hàm số có một cực trị khi $\frac{2-m}{2m} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 2 \\ m < 0 \end{cases}$.

Kết hợp hai trường hợp ta được $\begin{cases} m \leq 0 \\ m \geq 2 \end{cases}$.

Câu 12: Tìm giá trị của tham số m để hàm số $y = -x^4 + 2(m^2 + 3)x^2 + 2$ có 3 điểm cực trị sao cho giá trị cực đại của hàm số đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $m = 0$.

B. $m = -3$.

C. $m = -1$.

D. $m = -2$.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $y = -x^4 + 2(m^2 + 3)x^2 + 2$

Ta có $y' = -4x^3 + 4(m^2 + 3)x$.

Phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow -4x^3 + 4(m^2 + 3)x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{m^2 + 3} \end{cases}$

$\Rightarrow$ Hàm số luôn có 3 điểm cực trị với $\forall m$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-\sqrt{m^2+3}$	0	$\sqrt{m^2+3}$	$+\infty$		
y'	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$-\infty$	y_{CD}	y_{CT}	y_{CD}	$-\infty$		

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số đạt cực đại khi $x = \pm\sqrt{m^2 + 3}$.

Giá trị cực đại của hàm số: $y_{CS} = -(\sqrt{m^2 + 3})^4 + 2(m^2 + 3)^2 + 2 = (m^2 + 3)^2 + 2$.

$\Rightarrow \min y_{CS} = 11$ khi $m = 0$.

Câu 13: Cho hàm số $y = x^4 - 2(1 - m^2)x^2 + m + 1$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số có cực đại, cực tiểu và các điểm cực trị của đồ thị hàm số lập thành tam giác có diện tích là lớn nhất.

A. $m = \frac{1}{2}$.

B. $m = -\frac{1}{2}$.

C. $m = 0$.

D. $m = 1$.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 4x^3 - 4(1 - m^2)x = 4x[x^2 - (1 - m^2)]$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = 1 - m^2 \end{cases}$.

Hàm số có ba điểm cực trị khi $1 - m^2 > 0 \Leftrightarrow -1 < m < 1$.

Khi đó tọa độ ba điểm cực trị là: $A(0; m + 1)$; $B(-\sqrt{1 - m^2}; -m^4 + 2m^2 + m)$;

$C(\sqrt{1 - m^2}; -m^4 + 2m^2 + m)$.

Gọi H là trung điểm của $BC \Rightarrow H(0; -m^4 + 2m^2 + m)$.

Khi đó: $\overrightarrow{AH} = (0; -(1-m^2)^2)$; $\overrightarrow{BC} = (2\sqrt{1-m^2}; 0)$.

Vì $\triangle ABC$ cân tại A nên $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AH \cdot BC = \frac{1}{2} (1-m^2)^2 \cdot 2\sqrt{1-m^2} = (1-m^2)^2 \cdot \sqrt{1-m^2}$.

Mà $m^2 \geq 0; \forall m \Rightarrow 1-m^2 \leq 1 \Rightarrow S \leq 1$.

Dấu “=” xảy ra khi $m = 0$ (thỏa mãn).

Vậy $m = 0$.

Câu 14: Cho biết đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 - 2m^2 + m^4$ có 3 điểm cực trị A, B, C cùng với điểm $D(0; -3)$ là 4 đỉnh của một hình thoi. Gọi S là tổng các giá trị m thỏa mãn đề bài thì S thuộc khoảng nào sau đây?

- A. $S \in (2; 4)$. B. $S \in \left(\frac{9}{2}; 6\right)$. C. $S \in \left(1; \frac{5}{2}\right)$. D. $S \in \left(0; \frac{5}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn A

$$y = x^4 - 2mx^2 - 2m^2 + m^4 \quad (1)$$

Hàm số (1) có 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow 2m > 0 \Leftrightarrow m > 0$ (2)

Với $m > 0$, ta có

$$y' = 4x^3 - 4mx; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = m^4 - 2m^2 \\ x = \sqrt{m} \Rightarrow y = m^4 - 3m^2 \\ x = -\sqrt{m} \Rightarrow y = m^4 - 3m^2 \end{cases}$$

Vậy 3 điểm cực trị của đồ thị hàm số (1) là $A(0; m^4 - 2m^2); B(\sqrt{m}; m^4 - 3m^2); C(-\sqrt{m}; m^4 - 3m^2)$. Vì tứ giác $ABDC$ có hai đường chéo vuông góc, do đó $ABDC$ là hình thoi $\Leftrightarrow$ hai đường chéo của tứ giác $ABDC$ cắt nhau tại trung điểm mỗi đường $\Leftrightarrow y_A + y_D = y_B + y_C \Leftrightarrow m^4 - 2m^2 - 3 = 2m^4 - 6m^2$

$$\Leftrightarrow m^4 - 4m^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm 1 \\ m = \pm \sqrt{3} \end{cases}. \text{ Kết hợp với điều kiện (2) suy ra } \begin{cases} m = 1 \\ m = \sqrt{3} \end{cases} \text{ là các giá trị } m \text{ thỏa}$$

$$\text{ycbt.} \Rightarrow S = 1 + \sqrt{3} \in (2; 4)$$

Câu 15: Gọi A, B, C là các điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 4$. Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC bằng?

- A. $\sqrt{2} - 1$. B. $\sqrt{2} + 1$. C. $\sqrt{2}$. D. 1.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } y = x^4 - 2x^2 + 4 \Rightarrow y' = 4x^3 - 4x = 4x(x-1)(x+1)$$

$$\text{Nên } y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 4 \\ x = 1 \Rightarrow y = 3 \\ x = -1 \Rightarrow y = 3 \end{cases} \text{ Vậy tọa độ các điểm cực trị: } A(0; 4), B(1; 3), C(-1; 3)$$

$$AB = AC = \sqrt{2}; BC = 2 \quad p = \frac{2 + \sqrt{2} + \sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} \text{Diện tích tam giác: } S &= \sqrt{p(p-BC)(p-AC)(p-AB)} \\ &= \sqrt{(1+\sqrt{2}) \cdot (1+\sqrt{2}-2) \cdot (1+\sqrt{2}-\sqrt{2}) \cdot (1+\sqrt{2}-\sqrt{2})} = \sqrt{(1+\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)} = 1 \end{aligned}$$

$$\text{Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác là: } r = \frac{S}{p} = \frac{1}{1+\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1.$$

Câu 16:) Có bao nhiêu giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m - 1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng 1?

A. 4.

B. 3.

C. 1.

D. 2.

Lời giải

Chọn D

$$y' = 4x^3 - 4mx = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = m \end{cases}$$

Theo yêu cầu bài toán ta có: $m > 0$

$$\text{Ta có } A(0; m-1); B(\sqrt{m}; -m^2 + m - 1); C(-\sqrt{m}; -m^2 + m - 1)$$

$$\text{Gọi } H \text{ là trung điểm của cạnh } BC. \text{ Ta có } H(0; -m^2 + m - 1)$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AH \cdot BC = \frac{AB \cdot AC \cdot BC}{4R}$$

$$\Leftrightarrow AB^2 = 2AH \cdot R \text{ trong đó } \begin{cases} AH = m^2 \\ AB = \sqrt{m + m^4} \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } m + m^4 = 2m^2 \Leftrightarrow m(m^3 - 2m + 1) = 0 \Leftrightarrow m(m-1)(m^2 + m - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 1 \\ m = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \\ m = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \end{cases} \text{ . Đối chiếu điều kiện ta được } S = \left\{ 1; \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right\}.$$

Câu 17: Gọi S tập hợp các giá trị m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2m^2x^2 + 1$ có 3 điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông cân. Tổng bình phương các phần tử của S bằng

A. 2.

B. 4.

C. 8.

D. 6.

Lời giải

Chọn A

$$y' = 4x^3 - 4m^2x$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm m \end{cases}.$$

Để hàm số có 3 điểm cực trị thì $m \neq 0$.

$$\text{Với } x = 0 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow A(0; 1) \in Oy.$$

$$\text{Với } \Rightarrow t + 1 + t + 2 + t = 0 \Leftrightarrow t = -1 \Rightarrow H(-1; 0; 1).$$

$\Rightarrow \Delta ABC$ cân ở A

Để 3 điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông cân $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow -8m^6 + 8 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 1$.

Vậy tổng bình phương các phần tử của S bằng 2.

Câu 18: Số giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = mx^4 - (m-3)x^2 + m^2$ không có điểm cực đại?

A. 4.

B. 2.

C. 5.

D. 0.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Với $m = 0$ hàm số trở thành $y = 3x^2$. Khi đó hàm số có một điểm cực tiểu, không có điểm cực đại. Vậy $m = 0$ thỏa mãn.

Với $m \neq 0$ ta có: $y' = 4mx^3 - 2(m-3)x = 2x[2mx^2 - (m-3)]$;

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = \frac{m-3}{2m} \end{cases}$$

Hàm số không có điểm cực đại khi: $\begin{cases} m > 0 \\ \frac{m-3}{2m} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m \leq 3$. Vì $m \in \mathbb{Z} \rightarrow m \in \{1; 2; 3\}$.

Vậy có 4 giá trị nguyên của tham số m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 19: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m + 1$ có giá trị cực tiểu bằng -1 . Tổng các phần tử thuộc S là

A. -2 .

B. 0.

C. 1.

D. -1 .

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y' = 4x^3 - 4mx$.

TH1: Phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - m) = 0$ có 1 nghiệm thực, tức là hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m + 1$ có điểm cực tiểu là $x = 0$. Khi đó $m \leq 0$. Theo bài ra: $y(0) = m + 1 = -1 \Leftrightarrow m = -2$ (thỏa mãn đk $m \leq 0$).

TH2: Phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - m) = 0$ có 3 nghiệm thực, tức là hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m + 1$ có điểm cực tiểu là $x = \pm\sqrt{m}$. Khi đó $m > 0$. Theo bài ra:

$$y(\pm\sqrt{m}) = -m^2 + m + 1 = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -1 \end{cases}. \text{ So sánh với đk } m > 0, \text{ giá trị thỏa mãn là } m = 2.$$

Vậy $S = \{-2; 2\}$, tổng các phần tử thuộc S bằng 0.

Câu 20: Gọi S tập hợp các giá trị m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2m^2x^2 + 1$ có 3 điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông cân. Tổng bình phương các phần tử của S bằng

A. 2.

B. 4.

C. 8.

D. 6.

Lời giải

Chọn A

Nhận xét: Hàm số trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$ có 3 điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông cân $\Leftrightarrow 8a + b^3 = 0$

Đồ thị hàm số $y = x^4 - 2m^2x^2 + 1$ có 3 điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông cân

$$\Leftrightarrow 8a + b^3 = 0 \Leftrightarrow 8 + (-2m^2)^3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 1 \end{cases}$$

Tổng bình phương các phần tử của S bằng 2.

Câu 21: Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^4 + 2mx^2 + 3m^2$ có ba điểm cực trị lập thành một tam giác nhận $G(0; 7)$.

- A. $m = 1$. B. $m = -\sqrt{\frac{3}{7}}$. C. $m = -1$. D. $m = -\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn D

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

Xét hàm số $y = x^4 + 2mx^2 + 3m^2$

• $y' = 4x^3 + 4mx$

• $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{-m}, (m < 0) \end{cases}$

Khi đó ba điểm cực trị là $A(0; 3m^2)$, $B(-\sqrt{-m}, 2m^2)$, $C(\sqrt{-m}, 2m^2)$.

Tam giác ABC nhận điểm $G(0; 7)$ làm trọng tâm thì $\frac{7m^2}{3} = 7 \Leftrightarrow m^2 = 3 \Leftrightarrow m = -\sqrt{3}$.

Câu 22: Cho hai đường cong $(C_1): y = x^4 - (m+1)x^2 + 2$ và $(C_2): y = 2(x+1)^4 - 4x^2 - 8x + 3m$. Biết rằng mỗi đường cong đều có 3 điểm cực trị tạo thành tam giác đồng thời các tam giác đồng dạng với nhau. Hỏi m thuộc khoảng nào dưới đây?

- A. $(1; 2)$. B. $(0; 1)$. C. $(2; 3)$. D. $(3; 4)$.

Lời giải

Chọn C

- Xét $(C_2): y = 2(x+1)^4 - 4x^2 - 8x + 3m$.

$y' = 8(x+1)^3 - 8x - 8 = 8x(x+1)(x+2)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \\ x = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 4 + 3m \\ y = 2 + 3m \\ y = 2 + 3m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(-1; 4 + 3m) \\ B(0; 2 + 3m) \\ C(-2; 2 + 3m) \end{cases}.$$

Nhận thấy tam giác ABC cân tại A .

- Xét $(C_1): y = x^4 - (m+1)x^2 + 2$, hàm số có 3 cực trị do đó $m > -1$.

$y' = 4x^3 - 2(m+1)x$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \sqrt{\frac{m+1}{2}} \\ x = -\sqrt{\frac{m+1}{2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ y = 2 - \frac{(m+1)^2}{4} \\ y = 2 - \frac{(m+1)^2}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A'(0; 2) \\ B'\left(\sqrt{\frac{m+1}{2}}; 2 - \frac{(m+1)^2}{4}\right) \\ C'\left(-\sqrt{\frac{m+1}{2}}; 2 - \frac{(m+1)^2}{4}\right) \end{cases}.$$

Nhận thấy tam giác $A'B'C'$ cân tại A' .

- Tam giác ABC đồng dạng với tam giác $A'B'C' \Leftrightarrow \frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC}$.

Ta có: $A'B' = \sqrt{\frac{m+1}{2} + \frac{(m+1)^4}{16}}$; $B'C' = \sqrt{2(m+1)}$; $AB = \sqrt{5}$; $BC = 2$, suy ra

$$\frac{\sqrt{\frac{m+1}{2} + \frac{(m+1)^4}{16}}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2(m+1)}}{2} \Leftrightarrow \frac{\frac{m+1}{2} + \frac{(m+1)^4}{16}}{5} = \frac{2(m+1)}{4}$$

$$\Leftrightarrow 2(m+1) + \frac{(m+1)^4}{4} = 10(m+1)$$

$$\Leftrightarrow (m+1) \left[\frac{1}{4}(m+1)^3 - 8 \right] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = -1 + \sqrt[3]{32} \end{cases} \Rightarrow m = -1 + \sqrt[3]{32}.$$

Câu 23: Đồ thị của hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + 2m+1$ cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt có hoành độ lập thành một cấp số cộng. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $m \in (6; 9)$. B. $m \in (-6; -3)$. C. $m \in (-3; 2)$. D. $m \in (2; 6)$.

Lời giải

Chọn D

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^4 - 2(m+1)x^2 + 2m+1 = 0$. (1)

Đặt $t = x^2, t \geq 0$. Phương trình trở thành $t^2 - 2(m+1)t + 2m+1 = 0$. (2)

Phương trình (1) có bốn nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (2) có hai nghiệm dương

$$\text{phân biệt, nghĩa là } \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+1)^2 - (2m+1) > 0 \\ m+1 > 0 \\ 2m+1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m > -1 \\ m > -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\frac{1}{2} \\ m \neq 0 \end{cases}.$$

Cách 1. Gọi x_1, x_2, x_3, x_4 ($x_1 < x_2 < x_3 < x_4$) là nghiệm của phương trình (1) và t_1, t_2 ($t_1 < t_2$) là nghiệm của phương trình (2).

Theo giả thiết, ta có

$$x_4 - x_3 = x_3 - x_2 = x_2 - x_1 \Leftrightarrow x_4 - x_3 = x_3 - x_2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{t_2} - \sqrt{t_1} = \sqrt{t_1} + \sqrt{t_1} \Leftrightarrow t_2 = 9t_1 > 0$$

Ta có hệ

$$\begin{cases} t_1 + t_2 = 2(m+1) \\ t_1 t_2 = 2m+1 \\ t_2 = 9t_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = \frac{m}{5} + \frac{1}{5} \\ t_2 = \frac{9m}{5} + \frac{9}{5} \\ t_1 t_2 = 2m+1 \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{m}{5} + \frac{1}{5} \right) \left(\frac{9m}{5} + \frac{9}{5} \right) = 2m+1 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 4 \\ m = -\frac{4}{9} \end{cases} \text{ (nhận)}$$

Cách 2. Với $\Delta' > 0$, phương trình (1) có nghiệm $t_1 = 1, t_2 = 2m+1$. Biện luận như trên, ta có hai

trường hợp $\begin{cases} t_2 = 9t_1 \\ t_1 = 9t_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 4 \\ m = -\frac{4}{9} \end{cases} \text{ (nhận)}.$

