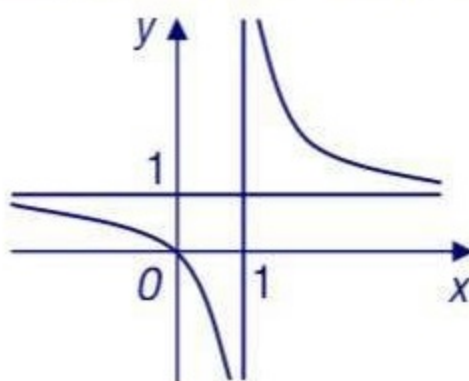


Họ và tên thí sinh Số báo danh.....

Câu 1: Hàm số nào sau đây mà đồ thị có dạng như hình vẽ bên dưới ?



A. $y = \frac{x}{1-x}$.

B. $y = \frac{x+1}{1-x}$.

C. $y = \frac{x+1}{x-1}$.

D. $y = \frac{x}{x-1}$.

Câu 2: Tìm tất cả các điểm M trên đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{x+1}$ mà tiếp tuyến của đồ thị tại điểm đó song song với đường thẳng $d : y = 3x + 10$.

A. $\left(3; \frac{1}{4}\right)$.

B. $M(0; -2)$.

C. $M(0; -2)$ và $M(-2; 4)$.

D. $\left(-\frac{5}{2}; 3\right)$.

Câu 3: Cho hàm số $y = \frac{x+1}{1-x}$ và điểm $I(1; -1)$. Tìm tất cả các điểm M nằm trên đồ thị hàm số sao cho tiếp tuyến tại M vuông góc với IM .

A. $M(1+\sqrt{2}; -1-\sqrt{2})$ và $M(1-\sqrt{2}; -1+\sqrt{2})$.

B. $M(-1; 0)$ và $M(3; -2)$.

C. $M(\sqrt{2}; -3-2\sqrt{2})$ và $M(-\sqrt{2}; 2\sqrt{2}-3)$.

D. $M(2; -3)$ và $M(0; 1)$.

Câu 4: Mệnh đề nào dưới đây về hàm số $y = (x^2 - 4)^2 + 1$ là đúng?

A. Nghịch biến trên $(-2; 2)$.

B. Đồng biến trên $\mathbb{R}$.

C. Đồng biến trên $(-\infty; -2)$ và $(2; +\infty)$.

D. Đồng biến trên $(-2; 0)$ và $(2; +\infty)$.

Câu 5: Cho một hình nón có thiết diện qua trục là một tam giác đều cạnh bằng 1. Tính thể tích khối cầu nội tiếp trong hình nón.

A. $\frac{\pi}{6}$

B. $\frac{4\sqrt{3}\pi}{27}$

C. $\frac{4\pi}{81}$

D. $\frac{\sqrt{3}\pi}{54}$.

Câu 6: Một người gửi tiền vào ngân hàng với lãi suất không thay đổi là 6% trên năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu (người ta gọi đó là lãi kép). Người đó định gửi tiền trong vòng 3 năm, sau đó rút 500 triệu đồng. Hỏi số tiền ít nhất người đó phải gửi vào ngân hàng (kết quả làm tròn đến hàng triệu) là bao nhiêu triệu đồng?

- A. 420. B. 410. C. 400. D. 390.

Câu 7: Cho biết $a = \log_2 5$ và $b = \log_5 7$. Tính $\log_{\sqrt[3]{5}} \frac{49}{8}$ theo a và b

- A. $3\left(2b - \frac{3}{a}\right)$ B. $3\left(\frac{2}{a} - 3b\right)$.
C. $3\left(\frac{2}{b} - 3a\right)$ D. $3\left(2a - \frac{3}{b}\right)$

Câu 8: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = (2x - 1)e^x$ trên đoạn $[-1; 0]$ bằng

- A. $-\frac{3}{e}$. B. $-\frac{2}{\sqrt{e}}$. C. -1 . D. e .

Câu 9: Hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - 1$ nhận giá trị nhỏ nhất trên đoạn $\left[-\frac{1}{3}; \frac{10}{3}\right]$ tại

- A. $x = -\frac{1}{3}$ B. $x = 1$ C. $x = 3$ D. $y = \frac{10}{3}$.

Câu 10: Sau đây, có bao nhiêu hàm số mà đồ thị có đúng một tiệm cận ngang?

- 1) $y = \frac{\sin x}{x}$ 2) $y = \frac{\sqrt{x^2 + x + 1}}{x}$ 3) $y = \frac{\sqrt{1-x}}{x+1}$ 4) $y = x + 1 + \sqrt{x^2 - 1}$.
A. 1 B. 2. C. 3 D. 4.

Câu 11: Cho tứ diện $ABCD$ có ABC và ABD là các tam giác đều cạnh bằng a , ACD và BCD là các tam giác vuông tương ứng tại A và B . Tính thể tích khối tứ diện $ABCD$.

- A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$ B. $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$. C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. D. $\frac{a^3}{8}$

Câu 12: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = (2x - 1) + \ln(2x + 1)$ trên đoạn $\left[-\frac{1}{4}; 0\right]$ bằng

- A. $-\frac{3}{2} - \ln 2$. B. -1 .
C. $\ln 2$. D. $1 + \ln 3$.

Câu 13: Hàm số $y = (x + 1)(x - 2)(3 - x)$ có số điểm cực trị là:

- A. 2 B. 3. C. 0 D. 1

Câu 14: $\int \tan x dx$ bằng

- A. $-\frac{1}{\sin^2 x} + C$ B. $\ln|\cos x| + C$.
C. $\frac{1}{\cos^2 x} + C$ D. $-\ln|\cos x| + C$

Câu 15: Kết luận nào sau đây đúng về hàm số $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2}$?

- A. $f'(x) = -2x \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2} \cdot \ln 2$
B. Nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

C. $f(0) = 0$

D. Đồ thị nhận trục tung làm tiệm cận đứng.

Câu 16: Một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{2x-3}$ là $F(x)$ bằng

A. $-\frac{2}{(2x-3)^2}$

B. $\frac{1}{2(2x-3)^2}$

C. $2\ln|2x-3|$

D. $\frac{1}{2}\ln|2x-3|$.

Câu 17: Kết luận nào sau đây về hàm số $y = \log(x-1)$ là SAI?

A. Đồ thị có tiệm cận đứng là đường thẳng có phương trình $x=1$.

B. Đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

C. $y' = \frac{1}{(x-1)\log e}$.

D. $y' = \frac{1}{(x-1)\ln 10}$.

Câu 18: Trong các hàm số sau đây có bao nhiêu hàm số có đúng một điểm cực trị

1) $y = x^2 + 1$ 2) $y = (2x^2 - 1)^2$ 3) $y = (2x - 1)\sqrt[3]{x^2}$ 4) $y = \frac{x}{x^2 + 1}$.

A. 0

B. 1

C. 3.

D. 2

Câu 19: Cho hình chóp $S.ABC$, đáy là tam giác vuông tại B , cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy. Biết $SA = AB = BC$ và diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp bằng 3π . Thể tích khối chóp là

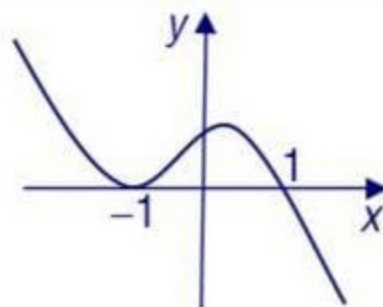
A. $\frac{1}{2}$.

B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{1}{6}$

D. $\frac{3}{2}$.

Câu 20: Hàm số nào sau đây mà đồ thị có dạng như hình vẽ bên dưới ?



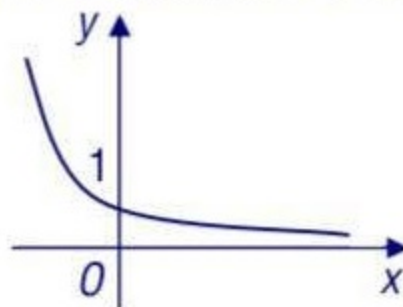
A. $y = (x+1)(x-1)^2$

B. $y = (x+1)^2(1-x)$

C. $y = (x+1)^2(x-1)$

D. $y = -(x+1)(x-1)^2$.

Câu 21: Hàm số nào sau đây mà đồ thị có dạng như hình vẽ bên dưới ?



A. $y = \ln x$

B. $y = (\sqrt{2})^x$.

C. $y = \left(\frac{1}{e}\right)^x$

D. $y = \log_{\frac{1}{2}} x$.

Câu 22: Cho một hình nón đỉnh S đáy là đường tròn (O) , bán kính đáy bằng 1. Biết thiết diện qua trục là một tam giác vuông. Tính diện tích xung quanh của hình nón.

A. 2π

B. π

C. $2\sqrt{2}\pi$.

D. $\sqrt{2}\pi$

Câu 23: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm thỏa mãn $f'(1) = 3$. Khi đó, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ bằng

A. 4.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Câu 24: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$. Đáy là tam giác vuông tại A , có $BC = 2AC = 2a$. Đường thẳng AC' tạo với mặt phẳng $(BCC'B')$ một góc 30° . Diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ đã cho bằng

A. $12\pi a^2$

B. $6\pi a^2$.

C. $4\pi a^2$.

D. $3\pi a^2$.

Câu 25: Số tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{(2x-1)\sqrt{x^2+1}}{x^2-1}$ là

A. 3

B. 1

C. 4.

D. 2.

Câu 26: Một nguyên hàm của $\ln x$ bằng

A. $x - x \ln x$

B. $\frac{1}{x}$

C. $x + x \ln x$.

D. $1 - x + x \ln x$

Câu 27: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)^3(2-x)(x-3)^2$.

Hàm số đồng biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(-\infty; 1)$ và $(3; +\infty)$.

B. $(-\infty; 1)$ và $(2; +\infty)$.

C. $(1; 2)$.

D. $(3; +\infty)$.

Câu 28: Qua điểm $M(2; 0)$ kẻ được bao nhiêu tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = x^4 - 4x^2$?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Câu 29: Tập xác định của hàm số $y = \ln|x^2 + 2x - 3|$ là

A. $D = (-\infty; -3] \cup [1; +\infty)$

B. $D = (-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$

C. $D = \mathbb{R}$

D. $D = \mathbb{R} \setminus \{-3; 1\}$.

Câu 30: Cho một hình trụ có thiết diện qua trục là một hình vuông cạnh bằng a . AB và CD là hai đường kính tương ứng của hai đáy. Biết góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng 30° . Tính thể tích khối tứ diện $ABCD$.

A. $\frac{a^3}{12}$

B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$

C. $\frac{a^3}{6}$

D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Câu 31: Cho các số nguyên a, b, c thỏa mãn $a + \frac{b + \log_2 5}{c + \log_2 3} = \log_6 45$. Tổng $a + b + c$ bằng

A. 1

B. 4

C. 2.

D. 0.

Câu 32: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[1; 2]$, thỏa mãn $f(x) = xf'(x) - x^2$. Biết $f(1) = 3$, tính $f(2)$.

A. 16.

B. 2.

C. 8.

D. 4.

Câu 33: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = -\frac{x}{x^2+1}$. Với a và b là các số dương, thỏa mãn $a < b$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$ bằng

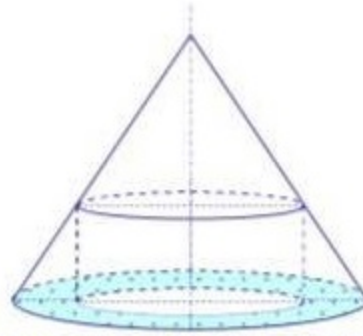
A. $f(b)$.

B. $f(a)$.

C. $\frac{f(a) + f(b)}{2}$.

D. $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$.

Câu 34: Cho một hình trụ thay đổi nội tiếp trong một hình nón cố định cho trước (tham khảo hình vẽ dưới đây).



Gọi thể tích các khối nón và khối trụ tương ứng là V và V' . Biết rằng V' là giá trị lớn nhất đạt được, khi đó tỉ số $\frac{V'}{V}$ bằng

A. $\frac{4}{9}$

B. $\frac{4}{27}$

C. $\frac{1}{2}$

D. $\frac{2}{3}$

Câu 35: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây.

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$			
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$		1		-3		$+\infty$

Đặt $g(x) = |m + f(x+1)|$ (m là tham số). Tìm các giá trị của m để hàm số $y = g(x)$ có đúng 3 điểm cực trị.

A. $m < -1$ hoặc $m > 3$.

B. $-1 < m < 3$.

C. $m \leq -1$ hoặc $m \geq 3$.

D. $-1 \leq m \leq 3$.

Câu 36: Cho phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(2x-m) + \log_2(3-x) = 0$, m là tham số. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để phương trình có nghiệm.

A. 5

B. 4

C. 6

D. 7.

Câu 37: Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1; 2; -3)$. Hình chiếu của M tương ứng trên $Ox, Oy, Oz, (Oyz), (Ozx), (Oxy)$ là A, B, C, D, E, F . Gọi P và Q tương ứng là giao điểm của đường thẳng OM với các mặt phẳng (ABC) và (DEF) . Độ dài PQ bằng

A. $\frac{6}{7}$

B. $\frac{7}{6}$

C. $\frac{\sqrt{14}}{2}$

D. $\frac{\sqrt{14}}{3}$

Câu 38: Giả sử $(1+x+x^2+x^3)^4 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_{12}x^{12}$, ($a_i \in \mathbb{R}$).

Giá trị của tổng $S = C_4^0a_4 - C_4^1a_3 + C_4^2a_2 - C_4^3a_1 + C_4^4a_0$ bằng

A. 1.

B. -4.

C. -1.

D. 4.

Câu 39: Tìm số nghiệm của phương trình $\sin(\cos x) = 0$ trên đoạn $[1; 2021]$.

A. 672.

B. 643.

C. 642.

D. 673.

Câu 40: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f'(x) = 2x - 1$ và $f(3) = 5$. Giả sử phương trình $f(x) = 999$ có hai nghiệm x_1 và x_2 . Tính tổng $S = \log|x_1| + \log|x_2|$.

A. 5.

B. 999.

C. 3.

D. 1001.

Câu 41: Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$. Tất cả các cạnh có độ dài bằng a . Gọi M là trung điểm của cạnh BC . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và BC' .

A. $\frac{a}{2}$

B. $\frac{a}{4}$

C. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$

D. $\frac{a\sqrt{2}}{4}$

Câu 42: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Mặt phẳng đi qua A và vuông góc với $A'C$ chia khối lập phương thành hai phần thể tích. Tính tỉ số k hai phần thể tích này, biết $k < 1$.

- A. $\frac{3}{25}$. B. $\frac{2}{5}$ C. $\frac{1}{5}$ D. $\frac{2}{25}$.

Câu 43: Chọn ngẫu nhiên 4 đỉnh của một đa giác lồi (H) có 30 đỉnh. Tính xác suất sao cho 4 đỉnh được chọn tạo thành một tứ giác có bốn cạnh đều là đường chéo của (H) .

- A. $\frac{30.C_{27}^3}{C_{30}^4}$. B. $\frac{30.C_{25}^3}{4.C_{30}^4}$. C. $\frac{30.C_{27}^3}{4.C_{30}^4}$. D. $\frac{30.C_{25}^3}{C_{30}^4}$.

Câu 44: Cho một hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$. Đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh bằng a và $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Một mặt phẳng tạo với mặt đáy một góc 60° và cắt tất cả các cạnh bên của hình hộp. Tính diện tích thiết diện tạo thành

- A. $2\sqrt{3}a^2$. B. $\sqrt{3}a^2$ C. $3a^2$. D. $3\sqrt{2}a^2$.

Câu 45: Cho tứ diện $ABCD$ có ABC và ABD là các tam giác đều cạnh bằng a không đổi. Độ dài CD thay đổi. Tính giá trị lớn nhất đạt được của thể tích khối tứ diện $ABCD$.

- A. $\frac{a^3}{8}$ B. $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$. C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$ D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Câu 46: Cho tứ diện $ABCD$ có ABC , ABD , ACD là các tam giác vuông tương ứng tại A , B , C . Góc giữa AD và (ABC) bằng 45° , $AD \perp BC$ và khoảng cách giữa AD và BC bằng a . Tính thể tích khối tứ diện $ABCD$.

- A. $\frac{\sqrt{3}a^3}{6}$ B. $\frac{4\sqrt{3}a^3}{3}$. C. $\frac{\sqrt{2}a^3}{6}$ D. $\frac{4\sqrt{2}a^3}{3}$.

Câu 47: Cho hàm số $y = f(x)$, có đạo hàm $f'(x) = (x+1)^2(x-3)$. Tìm số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(\sqrt{x^2 + 2x + 6})$

- A. 1. B. 2. C. 3 D. 5.

Câu 48: Cho tứ diện $ABCD$ có $AC = AD = BC = BD = a$. Các cặp mặt phẳng (ACD) và (BCD) , (ABC) và (ABD) vuông góc với nhau. Tính theo a độ dài cạnh CD .

- A. $\frac{2a}{\sqrt{3}}$. B. $\frac{a}{\sqrt{3}}$. C. $\frac{a}{2}$. D. $a\sqrt{3}$.

Câu 49: Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x - m$. Tìm m để với mọi bộ ba số phân biệt a, b, c thuộc đoạn $[-1; 3]$ thì $f(a), f(b), f(c)$ là độ dài ba cạnh của một tam giác.

- A. $m < -22$. B. $m < -2$.
C. $m < 34$. D. $m < 2$.

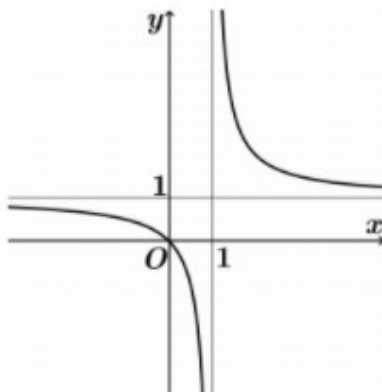
Câu 50: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi cạnh a và $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Mặt chéo $ACC'A'$ nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy, đồng thời $ACC'A'$ cũng là hình thoi có $\widehat{A'AC} = 60^\circ$. Thể tích khối tứ diện $ACB'D'$ là

- A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$ B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$. D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

----- HẾT -----

Thời gian làm bài: 90 phút; không kể thời gian phát đề

Câu 1 (TH): Hàm số nào sau đây có đồ thị như hình vẽ bên dưới?



A. $y = \frac{x}{1-x}$

B. $y = \frac{x+1}{1-x}$

C. $y = \frac{x+1}{x-1}$

D. $y = \frac{x}{x-1}$

Câu 2 (TH): Tìm tất cả các điểm M nằm trên đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{x+1}$ mà tiếp tuyến của đồ thị tại điểm đó song song với đường thẳng $d: y = 3x + 10$.

A. $M\left(3; \frac{1}{4}\right)$

B. $M(0; -2)$ hoặc $M(-2; 4)$

C. $M(-2; 4)$

D. $M\left(-\frac{5}{2}; 3\right)$

Câu 3 (TH): Cho hàm số $y = \frac{x+1}{1-x}$ và điểm $I(1; -1)$. Tìm tất cả các điểm M nằm trên đồ thị hàm số sao cho tiếp tuyến tại M vuông góc với IM.

A. $M(1+\sqrt{2}; -1-\sqrt{2})$ và $M(1-\sqrt{2}; -1+\sqrt{2})$.

B. $M(-1; 0)$ và $M(3; -2)$.

C. $M(\sqrt{2}; -3-2\sqrt{2})$ và $M(-\sqrt{2}; 2\sqrt{2}-3)$.

D. $M(2; -3)$ và $M(0; 1)$.

Câu 4 (TH): Mệnh đề nào dưới đây về hàm số $y = (x^2 - 4)^2 + 1$ là đúng?

A. Nghịch biến trên $(-2; 2)$

B. Đồng biến trên $\mathbb{R}$

C. Đồng biến trên $(-\infty; -2)$ và $(2; +\infty)$

D. Đồng biến trên $(-2; 0)$ và $(2; +\infty)$.

Câu 5 (VD): Cho một hình nón có thiết diện qua trục là một tam giác đều cạnh bằng 1. Tính thể tích khối cầu nội tiếp trong hình nón.

A. $\frac{\pi}{6}$

B. $\frac{4\sqrt{3}\pi}{27}$

C. $\frac{4\pi}{81}$

D. $\frac{\sqrt{3}\pi}{54}$

Câu 6 (TH): Một người gửi tiền vào ngân hàng với lãi suất không đổi là 6% trên năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu (lãi kép). Người đó định gửi tiền trong vòng 3 năm, sau đó rút ra 500 triệu đồng. Hỏi số tiền ít nhất người đó phải gửi vào ngân hàng (làm tròn đến hàng triệu) là bao nhiêu triệu đồng?

- A. 420 B. 410 C. 400 D. 390

Câu 7 (TH): Cho biết $a = \log_2 5$ và $b = \log_5 7$. Tính $\log_{\sqrt[3]{5}} \frac{49}{8}$ theo a và b.

- A. $3\left(2b - \frac{3}{a}\right)$ B. $3\left(\frac{2}{a} - 3b\right)$ C. $3\left(\frac{2}{b} - 3b\right)$ D. $3\left(2a - \frac{3}{b}\right)$

Câu 8 (TH): Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = (2x - 1)e^x$ trên đoạn $[-1; 0]$ bằng:

- A. $-\frac{3}{e}$ B. $-\frac{2}{\sqrt{e}}$ C. -1 D. e

Câu 9 (TH): Hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - 1$ nhận giá trị nhỏ nhất trên đoạn $\left[-\frac{1}{3}; \frac{10}{3}\right]$ tại:

- A. $x = -\frac{1}{3}$ B. $x = 1$ C. $x = 3$ D. $y = \frac{10}{3}$

Câu 10 (TH): Sau đây, có bao nhiêu hàm số mà đồ thị có đúng một tiệm cận ngang?

- 1) $y = \frac{\sin x}{x}$ 2) $y = \frac{\sqrt{x^2 + x + 1}}{x}$
3) $y = \frac{\sqrt{1-x}}{x+1}$ 4) $y = x + 1 + \sqrt{x^2 - 1}$

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Câu 11 (TH): Cho tứ diện ABCD có ABC và ABD là các tam giác đều cạnh a, ACD và BCD là các tam giác vuông tương ứng tại A và B. Tính thể tích khối tứ diện ABCD.

- A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$ B. $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$ C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$ D. $\frac{a^3}{8}$

Câu 12 (TH): Giá trị lớn nhất của hàm số $y = (2x - 1) + \ln(2x + 1)$ trên đoạn $\left[-\frac{1}{4}; 0\right]$ bằng:

- A. $-\frac{3}{2} - \ln 2$ B. -1 C. $\ln 2$ D. $1 + \ln 3$

Câu 13 (NB): Hàm số $y = (x + 1)(x - 2)(3 - x)$ có số điểm cực trị là:

- A. 2 B. 3 C. 0 D. 1

Câu 14 (NB): $\int \tan x dx$ bằng:

- A. $-\frac{1}{\sin^2 x} + C$ B. $\ln|\cos x| + C$ C. $\frac{1}{\cos^2 x} + C$ D. $-\ln|\cos x| + C$

Câu 15 (TH): Kết luận nào sau đây đúng về hàm số $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2}$?

A. $f'(x) = -2\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2} \cdot \ln 2$

B. nghịch biến trên $\mathbb{R}$

C. $f(0) = 0$

D. đồ thị nhận trục tung làm tiệm cận ngang.

Câu 16 (NB): Một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{2x-3}$ là $F(x)$ bằng:

A. $-\frac{2}{(2x-3)^2}$

B. $\frac{1}{2(2x-3)^2}$

C. $2 \ln|2x-3|$

D. $\frac{1}{2} \ln|2x-3|$

Câu 17 (TH): Kết luận nào sau đây về hàm số $y = \log(x-1)$ là sai?

A. Đồ thị có tiệm cận đứng là đường thẳng có phương trình $x = 1$.

B. Đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

C. $y' = \frac{1}{(x-1)\log e}$

D. $y' = \frac{1}{(x-1)\ln 10}$

Câu 18 (TH): Trong các hàm số sau đây có bao nhiêu hàm số có đúng một điểm cực trị?

1) $y = x^2 + 1$

2) $y = (2x^2 - 1)^2$

3) $y = (2x-1)\sqrt[3]{x^2}$

4) $y = \frac{x}{x^2 + 1}$

A. 0

B. 1

C. 3

D. 2

Câu 19 (VD): Cho hình chóp S.ABC, đáy là tam giác vuông tại B, cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy.

Biết $SA = AB = BC$ và diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp bằng 3π . Thể tích khối chóp là:

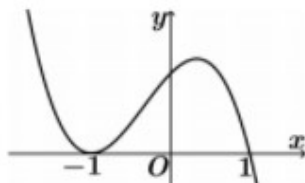
A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{1}{6}$

D. $\frac{3}{2}$

Câu 20 (TH): Hàm số nào sau đây mà đồ thị có dạng như hình vẽ bên dưới?



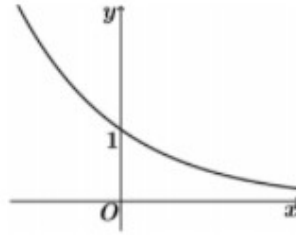
A. $y = (x+1)(x-1)^2$

B. $y = (x+1)^2(1-x)$

C. $y = (x+1)^2(x-1)$

D. $y = -(x+1)(x-1)^2$

Câu 21 (TH): Hàm số nào sau đây mà đồ thị có dạng như hình vẽ bên dưới?



- A. $y = \ln x$ B. $y = (\sqrt{2})^x$ C. $y = \left(\frac{1}{e}\right)^x$ D. $\log_{\frac{1}{2}} x$

Câu 22 (TH): Cho một hình nón đỉnh S đáy là đường tròn (O), bán kính đáy bằng 1. Biết thiết diện qua trục là một tam giác vuông. Tính diện tích xung quanh của hình nón.

- A. 2π B. π C. $2\sqrt{2}\pi$ D. $\sqrt{2}\pi$

Câu 23 (NB): Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm thỏa mãn $f'(1) = 3$. Khi đó $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ bằng:

- A. 4 B. 1 C. 2 D. 3

Câu 24 (VD): Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$. Đáy là tam giác vuông tại A, có $BC = 2AC = 2a$. Đường thẳng AC' tạo với mặt phẳng $(BCC'B')$ một góc 30° . Diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ đã cho bằng;

- A. $12\pi a^2$ B. $6\pi a^2$ C. $4\pi a^2$ D. $3\pi a^2$

Câu 25 (VD): Số tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{(2x-1)\sqrt{x^2+1}}{x^2-1}$ là:

- A. 3 B. 1 C. 4 D. 2

Câu 26 (TH): Một nguyên hàm của $\ln x$ bằng:

- A. $x - x \ln x$ B. $\frac{1}{x}$ C. $x + x \ln x$ D. $1 - x + x \ln x$

Câu 27 (TH): Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)^3(2-x)(x-3)^2$. Hỏi hàm số đồng biến trên khoảng nào sau đây?

- A. $(-\infty; 1)$ và $(3; +\infty)$ B. $(-\infty; 1)$ và $(2; +\infty)$ C. $(1; 2)$ D. $(3; +\infty)$

Câu 28 (TH): Qua điểm $M(2; 0)$ kẻ được bao nhiêu tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = x^4 - 4x^2$?

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Câu 29 (TH): Tập xác định của hàm số $y = \ln|x^2 + 2x - 3|$ là:

- A. $D = (-\infty; -3] \cup [1; +\infty)$ B. $D = (-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$
C. $D = \mathbb{R}$ D. $D = \mathbb{R} \setminus \{-3; 1\}$

Câu 30 (VD): Cho một hình trụ có thiết diện qua trục là một hình vuông có cạnh bằng a. Gọi AB và CD là hai đường kính tương ứng của hai đáy. Biết góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng 30° . Tính thể tích khối tứ diện ABCD.

A. $\frac{a^3}{12}$

B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$

C. $\frac{a^3}{6}$

D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$

Câu 31 (VD): Cho các số nguyên a, b, c thỏa mãn $a + \frac{b + \log_2 5}{c + \log_2 3} = \log_6 45$. Tổng $a + b + c$ bằng:

A. 1

B. 4

C. 2

D. 0

Câu 32 (VD): Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[1; 2]$, thỏa mãn $f'(x) = x \cdot f'(x) - x^2$. Biết $f(1) = 3$, tính $f(2)$.

A. 16

B. 2

C. 8

D. 4

Câu 33 (TH): Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = -\frac{x}{x^2 + 1}$. Với a và b là các số dương thỏa mãn $a < b$, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$ bằng:

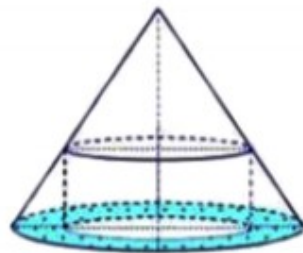
A. $f(b)$

B. $f(a)$

C. $\frac{f(a) + f(b)}{2}$

D. $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$

Câu 34 (VD): Cho một hình trụ thay đổi nội tiếp trong một hình nón cố định cho trước (tham khảo hình vẽ bên). Gọi thể tích các khối nón và khối trụ tương ứng là V và V' . Biết rằng V' là giá trị lớn nhất đạt được, khi đó tỉ số $\frac{V'}{V}$ bằng:



A. $\frac{4}{9}$

B. $\frac{4}{27}$

C. $\frac{1}{2}$

D. $\frac{2}{3}$

Câu 35 (VD): Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây:

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$			
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$		1		-3		$+\infty$

Đặt $g(x) = |m + f(x+1)|$ (m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = g(x)$ có đúng 3 điểm cực trị.

A. $m < -1$ hoặc $m > 3$

B. $-1 < m < 3$

C. $m \leq -1$ hoặc $m \geq 3$

D. $-1 \leq m \leq 3$

Câu 36 (VD): Cho phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(2x-m) + \log_2(3-x) = 0$, m là tham số. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để phương trình có nghiệm?

- A. 5 B. 4 C. 6 D. 7

Câu 37 (VD): Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;2;-3)$. Hình chiếu của M tương ứng lên $Ox, Oy, Oz, (Oyz), (Ozx), (Oxy)$ là A, B, C, D, E, F . Gọi P và Q tương ứng là giao điểm của đường thẳng OM với các mặt phẳng (ABC) và (DEF) . Độ dài PQ bằng:

- A. $\frac{6}{7}$ B. $\frac{7}{6}$ C. $\frac{\sqrt{14}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{14}}{3}$

Câu 38 (VD): Giả sử $(1+x+x^2+x^3)^4 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{12}x^{12}$ ($a_i \in \mathbb{R}$). Giá trị của tổng $S = C_4^0a_4 - C_4^1a_3 + C_4^2a_2 - C_4^3a_1 + C_4^4a_0$ bằng:

- A. 1 B. -4 C. -1 D. 4

Câu 39 (VD): Tìm số nghiệm của phương trình $\sin(\cos x) = 0$ trên đoạn $[1; 2021]$.

- A. 672 B. 643 C. 642 D. 673

Câu 40 (VD): Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f'(x) = 2x - 1$ và $f(3) = 5$. Giả sử phương trình $f(x) = 999$ có hai nghiệm x_1 và x_2 . Tính tổng $S = \log|x_1| + \log|x_2|$.

- A. 5 B. 999 C. 3 D. 1001

Câu 41 (VD): Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$, tất cả các cạnh có độ dài bằng a . Gọi M là trung điểm của cạnh BC . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và BC' .

- A. $\frac{a}{2}$ B. $\frac{a}{4}$ C. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{a\sqrt{2}}{4}$

Câu 42 (VD): Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Mặt phẳng đi qua A và vuông góc với $A'C$ chia hình lập phương thành hai phần thể tích. Tính tỉ số k hai phần thể tích này, biết $k < 1$.

- A. $\frac{3}{25}$ B. $\frac{2}{5}$ C. $\frac{1}{5}$ D. $\frac{2}{25}$

Câu 43 (VDC): Chọn ngẫu nhiên 4 đỉnh của một đa giác lồi (H) có 30 đỉnh. Tính xác suất sao cho 4 đỉnh được chọn tạo thành một tứ giác có bốn cạnh đều là đường chéo của (H) .

- A. $\frac{30.C_{27}^3}{C_{30}^4}$ B. $\frac{30.C_{25}^3}{4.C_{30}^4}$ C. $\frac{30.C_{27}^3}{4.C_{30}^4}$ D. $\frac{30.C_{25}^3}{C_{30}^4}$

Câu 44 (VD): Cho một hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$. Đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh bằng a và $\angle BAD = 60^\circ$. Một mặt phẳng tạo với đáy một góc 60° và cắt tất cả các cạnh bên của hình hộp. Tính diện tích thiết diện tạo thành

- A. $2\sqrt{3}a^2$ B. $\sqrt{3}a^2$ C. $3a^2$ D. $3\sqrt{2}a^2$

Câu 45 (VD): Cho tứ diện ABCD có ABC và ABD là các tam giác đều cạnh bằng a không đổi. Độ dài CD thay đổi. Tính giá trị lớn nhất đạt được của thể tích khối tứ diện ABCD.

- A. $\frac{a^3}{8}$ B. $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$ C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$ D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$

Câu 46 (VDC): Cho tứ diện ABCD có ABC, ABD, ACD là các tam giác vuông tương ứng tại A, B, C. Góc giữa AD và (ABC) bằng 45° , $AD \perp BC$ và khoảng cách giữa AD và BC bằng a. Tính thể tích khối tứ diện ABCD.

- A. $\frac{\sqrt{3}a^3}{6}$ B. $\frac{4\sqrt{3}a^3}{3}$ C. $\frac{\sqrt{2}a^3}{6}$ D. $\frac{4\sqrt{2}a^3}{3}$

Câu 47 (VD): Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+1)^2(x-3)$. Tìm số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(\sqrt{x^2 + 2x + 6})$.

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 5

Câu 48 (VD): Cho tứ diện ABCD có $AC = AD = BC = BD = a$. Các cặp mặt phẳng (ACD) và (BCD), (ABC) và (ABD) vuông góc với nhau. Tính theo a độ dài cạnh CD.

- A. $\frac{2a}{\sqrt{3}}$ B. $\frac{a}{\sqrt{3}}$ C. $\frac{a}{2}$ D. $a\sqrt{3}$

Câu 49 (VD): Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x - m$. Tìm m để mọi bộ ba số phân biệt a, b, c thuộc đoạn $[-1; 3]$ thì $f(a), f(b), f(c)$ là độ dài ba cạnh của một tam giác.

- A. $m \leq -22$ B. $m < -2$ C. $m < 34$ D. $m < -22$

Câu 50 (VD): Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D' có đáy là hình thoi cạnh a và $\angle BAD = 60^\circ$. Mặt chéo ACC'A' nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, đồng thời ACC'A' cũng là hình thoi có $\angle A'AC = 60^\circ$. Thể tích khối tứ diện ACB'D' là:

- A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$ B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$ C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$ D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$

----- HẾT -----

Đáp án

1-D	2-B	3-A	4-D	5-B	6-A	7-A	8-B	9-A	10-C
11-B	12-B	13-A	14-D	15-D	16-D	17-C	18-D	19-C	20-B
21-C	22-D	23-D	24-B	25-C	26-D	27-C	28-C	29-D	30-A
31-A	32-C	33-A	34-A	35-C	36-A	37-D	38-B	39-B	40-C
41-D	42-C	43-D	44-B	45-A	46-D	47-C	48-A	49-A	50-B

LỜI GIẢI CHI TIẾT**Câu 1: Đáp án D****Phương pháp giải:**

- Dựa vào đồ thị xác định các đường tiệm cận của đồ thị hàm số, các điểm thuộc đồ thị hàm số.
- Sau đó dựa vào các đáp án để chọn đáp án đúng.
- Đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d} (ad \neq bc)$ có TCN $y = \frac{a}{c}$ và TCD $x = -\frac{d}{c}$.

Giải chi tiết:

Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy: Đồ thị có đường TCN $y = 1$ và TCD $x = 1$.

Do đó loại đáp án A và B.

Đồ thị hàm số đi qua điểm $O(0;0)$ nên loại đáp án C.

Câu 2: Đáp án B**Phương pháp giải:**

- Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $M(x_0; y_0)$ là $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$.
- Hai đường thẳng $y = ax + b$ và $y = a'x + b'$ song song với nhau khi và chỉ khi $\begin{cases} a = a' \\ b \neq b' \end{cases}$.

Giải chi tiết:

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Gọi $M\left(x_0; \frac{x_0-2}{x_0+1}\right) (x_0 \neq -1)$ thuộc đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{x+1}$.

Ta có $y = \frac{x-2}{x+1} \Rightarrow y' = \frac{3}{(x+1)^2}$ nên tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại $M\left(x_0; \frac{x_0-2}{x_0+1}\right)$ có hệ số góc là

$$k = y'(x_0) = \frac{3}{(x_0+1)^2}.$$

Vì tiếp tuyến tại M song song với đường thẳng $d: y = 3x + 10$ nên $\frac{3}{(x_0+1)^2} = 3 \Leftrightarrow (x_0+1)^2 = 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 + 1 = 1 \\ x_0 + 1 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 = -2 \end{cases} (tm) \Rightarrow \begin{cases} M(0; -2) \\ M(-2; 4) \end{cases}$$

Câu 3: Đáp án A

Phương pháp giải:

- Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $M(x_0; y_0)$ là $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$.

- Đường thẳng $y = ax + b$ vuông góc với vectơ $\overrightarrow{IM}(u; v)$ khi và chỉ khi vtcp của đường thẳng $y = ax + b$ vuông góc với vectơ $\overrightarrow{IM}(u; v)$.

Giải chi tiết:

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Gọi $M\left(x_0; \frac{x_0 + 1}{1 - x_0}\right) (x_0 \neq 1)$ thuộc đồ thị hàm số $y = \frac{x + 1}{1 - x}$.

Ta có $y = \frac{x + 1}{1 - x} \Rightarrow y' = \frac{2}{(1 - x)^2}$ nên tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại $M\left(x_0; \frac{x_0 + 1}{1 - x_0}\right)$ có hệ số góc là

$$k = y'(x_0) = \frac{2}{(1 - x_0)^2}.$$

$\Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến tại M là: $y = \frac{2}{(1 - x_0)^2}(x - x_0) + \frac{x_0 + 1}{1 - x_0}$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{(1 - x_0)^2}x - y - \frac{2x_0}{(1 - x_0)^2} + \frac{x_0 + 1}{1 - x_0} = 0, \text{ có 1 VTCP là } \vec{u} = \left(1; \frac{2}{(1 - x_0)^2}\right).$$

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{IM} = \left(x_0 - 1; \frac{x_0 + 1}{1 - x_0} + 1\right) = \left(x_0 - 1; \frac{2}{1 - x_0}\right).$$

Vì tiếp tuyến tại M vuông góc với IM nên $\vec{u} \cdot \overrightarrow{IM} = 0$.

$$\Leftrightarrow (x_0 - 1) + \frac{4}{(1 - x_0)^3} = 0 \Leftrightarrow \frac{4}{(1 - x_0)^3} = 1 - x_0 \Leftrightarrow (1 - x_0)^4 = 4$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x_0 = \sqrt{2} \\ 1 - x_0 = -\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 - \sqrt{2} \\ x_0 = 1 + \sqrt{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow M(1 + \sqrt{2}; -1 - \sqrt{2}) \text{ và } M(1 - \sqrt{2}; -1 + \sqrt{2}).$$

Câu 4: Đáp án D

Phương pháp giải:

- Tính đạo hàm y' .

- Giải phương trình $y' = 0$.

- Lập BXD y' và kết luận các khoảng đồng nghịch biến của hàm số.

Giải chi tiết:

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y = (x^2 - 4)^2 + 1 \Rightarrow y' = 2(x^2 - 4).2x$.

$$\text{Cho } y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 2 \end{cases}.$$

BXD y' :

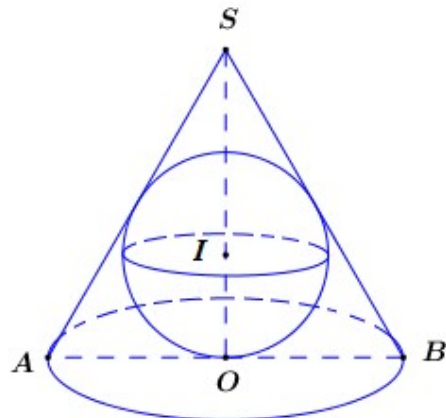
x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$

Dựa vào BXD ta thấy hàm số đồng biến trên $(-\infty; -2); (0; 2)$; nghịch biến trên $(-2; 0); (2; +\infty)$.

Do đó chỉ có đáp án D đúng.

Câu 5: Đáp án B**Phương pháp giải:**

- Giả sử thiết diện qua trục là tam giác SAB và O là tâm mặt đáy của hình nón.
- Xác định tâm mặt cầu nội tiếp hình nón chính là tâm tam giác đều SAB. Tính bán kính R.
- Thể tích khối cầu bán kính R là $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Giải chi tiết:

Giả sử thiết diện qua trục là tam giác SAB và O là tâm mặt đáy của hình nón, ta có tam giác SAB đều cạnh 1 nên $SO = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Gọi I là tâm khối cầu nội tiếp trong hình nón, dễ thấy O chính là tâm tam giác đều SAB, do đó bán kính khối cầu là $R = IO = \frac{2}{3}SO = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Vậy thể tích khối cầu nội tiếp trong hình nón là $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3 = \frac{4\sqrt{3}\pi}{27}$.

Câu 6: Đáp án A

Phương pháp giải:

- Sử dụng công thức lãi kép: $A_n = A(1+r)^n$ trong đó A_n là số tiền nhận được sau n năm, A là số tiền gửi ban đầu, r là lãi suất trên 1 kì hạn, n là số kì hạn.

- Để sau 3 năm người đó rút được 500 triệu đồng thì số tiền nhận được sau 3 năm (cả gốc và lãi) phải không nhỏ hơn 500 triệu đồng. Giải bất phương trình tìm số tiền gửi ban đầu.

Giải chi tiết:

Để sau 3 năm người đó rút được 500 triệu đồng thì số tiền nhận được sau 3 năm (cả gốc và lãi) phải không nhỏ hơn 500 triệu đồng.

Gọi số tiền ban đầu gửi vào ngân hàng là x (triệu đồng), số tiền người đó nhận được sau 3 năm là:

$$x(1+6\%)^3 \text{ (triệu đồng)}.$$

Khi đó ta có $x(1+6\%)^3 \geq 500 \Leftrightarrow x \geq 420$ (triệu đồng).

Câu 7: Đáp án A**Phương pháp giải:**

Sử dụng các công thức:

$$\log_{a^m} b^n = \frac{n}{m} \log_a b \quad (0 < a \neq 1, b > 0)$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y \quad (0 < a \neq 1, x, y > 0)$$

Giải chi tiết:

$$\text{Ta có: } \log_{\sqrt[3]{5}} \frac{49}{8} = \log_{\frac{1}{5^{\frac{1}{3}}}} \frac{49}{8}$$

$$= 3 \log_5 \frac{7^2}{2^3} = 3(2 \log_5 7 - 3 \log_5 2) = 3 \left(2b - \frac{3}{a} \right)$$

Câu 8: Đáp án B**Phương pháp giải:**

- Tính y' , giải phương trình $y' = 0$ xác định các nghiệm $x_i \in [-1; 0]$.

- Tính các giá trị $y(-1); y(0); y(x_i)$.

- Kết luận: $\min_{[-1;0]} y = \min \{y(-1); y(0); y(x_i)\}; \max_{[-1;0]} y = \max \{y(-1); y(0); y(x_i)\}$

Giải chi tiết:

TXĐ: ...

$$\text{Ta có: } y = (2x-1)e^x \Rightarrow y' = 2e^x + (2x-1)e^x = (2x+1)e^x.$$

$$\text{Cho } y' = 0 \Leftrightarrow 2x+1=0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \in [-1; 0].$$

Ta có: $y(-1) = -\frac{3}{e}; y(0) = -1; y\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{-2}{\sqrt{e}}$

Vậy $\min_{[-1;0]} y = \frac{-2}{\sqrt{e}}$.

Câu 9: Đáp án A

Phương pháp giải:

- Tính y' , giải phương trình $y' = 0$ xác định các nghiệm $x_i \in \left[-\frac{1}{3}; \frac{10}{3}\right]$.

- Tính các giá trị $y\left(-\frac{1}{3}\right); y\left(\frac{10}{3}\right); y(x_i)$.

- Kết luận: $\min_{\left[-\frac{1}{3}; \frac{10}{3}\right]} y = \min \left\{ y\left(-\frac{1}{3}\right); y\left(\frac{10}{3}\right); y(x_i) \right\}; \max_{\left[-\frac{1}{3}; \frac{10}{3}\right]} y = \max \left\{ y\left(-\frac{1}{3}\right); y\left(\frac{10}{3}\right); y(x_i) \right\}$.

Giải chi tiết:

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - 1 \Rightarrow y' = x^2 - 4x + 3$.

Cho $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \in \left[-\frac{1}{3}; \frac{10}{3}\right] \\ x = 3 \in \left[-\frac{1}{3}; \frac{10}{3}\right] \end{cases}$.

Ta có: $y\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{181}{81}; y\left(\frac{10}{3}\right) \approx -0,88; y(1) = \frac{1}{3}; y(3) = -1$.

Vậy $\min_{[-1;0]} y = y\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{181}{81}$.

Câu 10: Đáp án C

Phương pháp giải:

Sử dụng định nghĩa tiệm cận ngang của đồ thị hàm số:

- Đường thẳng $y = y_0$ được gọi là TCN của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu thỏa mãn một trong các điều kiện sau: $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = y_0; \lim_{x \rightarrow -\infty} y = y_0$.

- Sử dụng MTCT để tính giới hạn.

Giải chi tiết:

Xét hàm số $y = \frac{\sin x}{x}$ ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 0; \lim_{x \rightarrow -\infty} y = 0$, do đó ĐTHS có 1 TCN $y = 0$.

Xét hàm số $y = \frac{\sqrt{x^2 + x + 1}}{x}$ ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 1; \lim_{x \rightarrow -\infty} y = -1$, do đó ĐTHS có 2 TCN $y = \pm 1$.

Xét hàm số $y = \frac{\sqrt{1-x}}{x+1}$ ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} y$ không tồn tại, $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 0$, do đó ĐTHS có 1 TCN $y = 0$.

Xét hàm số $y = x + 1 + \sqrt{x^2 - 1}$ ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 1$, do đó ĐTHS có 1 TCN $y = 1$.

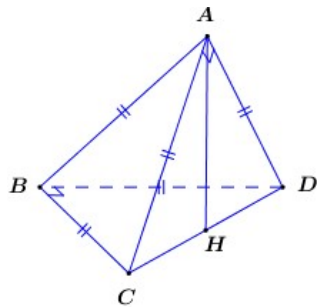
Vậy có 3 hàm số mà đồ thị có đúng một tiệm cận ngang.

Câu 11: Đáp án B

Phương pháp giải:

- Chóp có các cạnh bên bằng nhau có chân đường cao trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp đáy.
- Sử dụng tính chất tam giác vuông cân tính chiều cao và diện tích đáy.
- Thể tích khối chóp bằng $\frac{1}{3}$ tích đường cao và diện tích đáy.

Giải chi tiết:



Vì ABC và ABD là các tam giác đều cạnh a nên $AB = AC = AD = BC = BD = a$.

Do đó hình chiếu vuông góc của A lên (BCD) trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD.

Lại có tam giác BCD vuông tại B nên tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD là trung điểm H của CD.

$\Rightarrow AH \perp CD$

Xét tam giác ACD vuông cân tại A có $AC = AD = a$ nên $AH = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Tam giác BCD vuông cân tại B có $BC = BD = a$ nên $S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot BD = \frac{a^2}{2}$.

Vậy $V_{ABCD} = \frac{1}{3} AH \cdot S_{\triangle BCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a^2}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$

Câu 12: Đáp án B

Phương pháp giải:

- Tính đạo hàm.
- Chứng minh $y' > 0 \forall x \in \left[-\frac{1}{4}; 0\right]$ và suy ra giá trị lớn nhất của hàm số trên $\left[-\frac{1}{4}; 0\right]$.

Giải chi tiết:

Hàm số đã cho xác định trên $\left[-\frac{1}{4}; 0\right]$.

Ta có: $y = (2x-1) + \ln(2x+1) \Rightarrow y' = 2 + \frac{2}{2x+1} > 0 \forall x \in \left[-\frac{1}{4}; 0\right]$.

Do đó hàm số đã cho đồng biến trên $\left[-\frac{1}{4}; 0\right]$.

Vậy $\max_{\left[-\frac{1}{4}; 0\right]} y = y(0) = -1$

Câu 13: Đáp án A

Phương pháp giải:

- Khai triển đưa hàm số về dạng hàm đa thức bậc ba.
- Tính y' , giải phương trình $y' = 0$ và xác định số điểm cực trị = số nghiệm bội lẻ.

Giải chi tiết:

Ta có $y = (x+1)(x-2)(3-x) = -x^3 + 4x^2 - x - 6$.

$$\Rightarrow y' = -3x^2 + 8x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{13}}{3}.$$

Vậy hàm số đã cho có 2 điểm cực trị.

Câu 14: Đáp án D

Phương pháp giải:

- Sử dụng công thức $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$
- Sử dụng phương pháp đổi vi phân: $\sin x dx = -d(\cos x)$
- Sử dụng công thức tính nguyên hàm: $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$

Giải chi tiết:

$$\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \int \frac{-d(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C$$

Câu 15: Đáp án D

Phương pháp giải:

- Sử dụng công thức tính đạo hàm: $(a^u)' = u' \cdot a^u \ln a$.
- Xét dấu đạo hàm và suy ra các khoảng đơn điệu của hàm số.
- Sử dụng định nghĩa tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Giải chi tiết:

Ta có $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2} \Rightarrow f'(x) = 2x \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2} \ln \frac{1}{2} = f'(x) = -2x \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2} \cdot \ln 2$ nên đáp án A sai.

Xét $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, do đó hàm số không thể nghịch biến trên $\mathbb{R}$, suy ra đáp án B sai.

Ta có $f(0) = \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$ nên đáp án C sai.

Ta có: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2} = 0$ nên ĐTHS nhận $y = 0$ là TCN. Suy ra đáp án D đúng.

Câu 16: Đáp án D

Phương pháp giải:

Sử dụng công thức tính nguyên hàm: $\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln|ax+b| + C$

Giải chi tiết:

Ta có $F(x) = \int f(x) dx = \int \frac{1}{2x-3} dx = \frac{1}{2} \ln|2x-3| + C$.

Câu 17: Đáp án C

Phương pháp giải:

- Sử dụng công thức tính đạo hàm: $(\log u)' = \frac{u'}{u \ln 10}$.

- Sử dụng định nghĩa tiệm cận đứng của đồ thị hàm số: Đường thẳng $x = x_0$ được gọi là TCD của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu thỏa mãn một trong các điều kiện sau:

$\lim_{x \rightarrow x_0^+} y = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow x_0^+} y = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow x_0^-} y = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow x_0^-} y = -\infty$.

- Xét dấu y' và suy ra các khoảng đơn điệu.

Giải chi tiết:

TXĐ: $D = (1; +\infty)$

Ta có $y = \log(x-1) \Rightarrow y' = \frac{1}{(x-1)\ln 10}$. Suy ra đáp án D đúng, đáp án C sai.

Vì $x-1 > 0 \Rightarrow y' > 0 \forall x \in D$, do đó hàm số đồng biến trên $(1; +\infty)$, suy ra đáp án B đúng.

Ta có: $\lim_{x \rightarrow 1^+} y = -\infty$ nên ĐTHS nhận $x = 1$ là TCD, suy ra đáp án A đúng.

Câu 18: Đáp án D

Phương pháp giải:

Tính đạo hàm từng hàm số, giải phương trình đạo hàm và xác định số điểm cực trị của hàm số = số nghiệm bội lẻ của phương trình đạo hàm.

Giải chi tiết:

Xét đáp án A: ta có $y' = 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$, do đó hàm số có 1 điểm cực trị.

Xét đáp án B: ta có $y' = 2(2x^2 - 1).4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$, do đó hàm số có 3 điểm cực trị.

Xét đáp án C: ta có $y' = 2\sqrt[3]{x^2} + (2x-1) \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = \frac{6x+4x-2}{3\sqrt[3]{x}} = 10 \Leftrightarrow x = \frac{1}{5}$, do đó hàm số có 1 điểm cực trị.

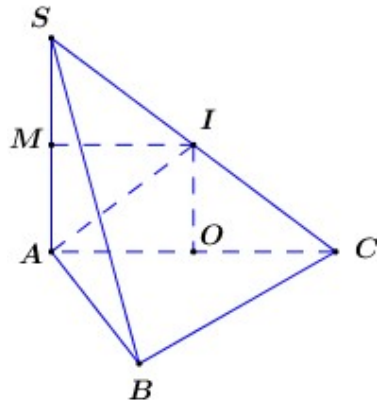
Xét đáp án D: ta có $y' = \frac{x^2+1-x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2} = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$, do đó hàm số có 2 điểm cực trị.

Câu 19: Đáp án C

Phương pháp giải:

- Xác định tâm mặt cầu ngoại tiếp khối chóp, tính bán kính mặt cầu, từ đó suy ra độ dài cạnh SC.
- Đặt $SA = AB = BC = x$, sử dụng định lý Pytago giải phương trình tìm x.
- Tính thể tích khối chóp $V = \frac{1}{3} SA \cdot S_{\Delta ABC}$.

Giải chi tiết:



Gọi O là trung điểm của AC. Vì tam giác ABC vuông tại B nên O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Gọi I, M là trung điểm của SC, SA. Ta có IO là đường trung bình của tam giác SAC $\Rightarrow IO \parallel SA$.

Mà $SA \perp (ABC) \Rightarrow IO \perp (ABC) \Rightarrow IO$ là trục của $(ABC) \Rightarrow IA = IB = IC$.

Lại có IM là đường trung bình của tam giác SAC nên $IM \parallel AC \Rightarrow IM \perp SA \Rightarrow IM$ là trung trực của SA, do đó $IS = IA$.

$\Rightarrow IA = IB = IC = IS \Rightarrow I$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp chóp $S.ABC$.

$\Rightarrow$ Bán kính của mặt cầu ngoại tiếp chóp $S.ABC$ là $R = \frac{1}{2} SC$.

Ta lại có $4\pi R^2 = 3\pi \Leftrightarrow R = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow SC = \sqrt{3}$.

Đặt $SA = AB = BC = x$, ta có tam giác SAB vuông cân tại A nên $SB = x\sqrt{2}$.

Ta có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB \Rightarrow \Delta SBC$ vuông tại B.

$\Rightarrow SB^2 + BC^2 = SC^2 \Rightarrow 2x^2 + x^2 = 3 \Leftrightarrow x = 1$

Vậy thể tích khối chóp là $V = \frac{1}{3}SA.S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3}SA.\frac{1}{2}AB.BC = \frac{1}{6}x^3 = \frac{1}{6}$.

Câu 20: Đáp án B

Phương pháp giải:

- Dựa vào các giao điểm có đồ thị với trục hoành suy ra dạng của đồ thị hàm số và loại bớt các đáp án chắc chắn sai.
- Dựa vào giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung để chọn đáp án đúng.

Giải chi tiết:

Vì đồ thị hàm số tiếp xúc với trục hoành tại điểm có hoành độ -1 và cắt qua trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 1 nên hàm số có dạng $y = a(x+1)^2(x-1)$, do đó loại đáp án A và D.

Đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ dương nên loại đáp án C.

Câu 21: Đáp án C

Phương pháp giải:

- Dựa vào đồ thị suy ra TXĐ của hàm số và loại đáp án.
- Dựa vào tính đơn điệu của hàm số để loại đáp án.

Giải chi tiết:

Dựa vào đồ thị ta thấy hàm số xác định trên $\mathbb{R}$ nên loại đáp án A, D.

Lại có: Đồ thị hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ nên chọn đáp án C.

Câu 22: Đáp án D

Phương pháp giải:

- Dựa vào giả thiết hình nón có thiết diện qua trục là tam giác vuông cân xác định chiều cao và bán kính đáy của hình nón.
- Tính độ dài đường sinh của hình nón $l = \sqrt{h^2 + r^2}$.
- Hình nón có đường sinh l , bán kính đáy r có diện tích xung quanh là $S_{xq} = \pi rl$.

Giải chi tiết:

Vì hình nón có thiết diện qua trục là tam giác vuông cân nên $h = r = 1$.

$\Rightarrow$ Độ dài đường sinh của hình nón là $l = \sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{2}$.

Vậy diện tích xung quanh của hình nón là $S_{xq} = \pi rl = \sqrt{2}\pi$.

Câu 23: Đáp án D

Phương pháp giải:

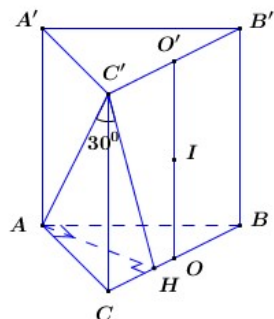
Sử dụng tính đạo hàm bằng định nghĩa: $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

Giải chi tiết:

Ta có: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) = 3$.

Câu 24: Đáp án B**Phương pháp giải:**

- Xác định tâm mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ.
- Xác định góc giữa đường thẳng AC' và mặt phẳng $(BCC'B')$ là góc giữa AC' và hình chiếu của AC' lên $(BCC'B')$.
- Dựa vào định lý Pytago, tỉ số lượng giác của góc nhọn trong tam giác vuông tính bán kính mặt cầu.
- Diện tích mặt cầu bán kính R là $S = 4\pi R^2$.

Giải chi tiết:

Gọi O, O' lần lượt là trung điểm của BC và $B'C'$.

Vì tam giác $ABC, A'B'C'$ lần lượt vuông tại A và A' nên O, O' lần lượt là tâm mặt cầu ngoại tiếp tam giác $ABC, A'B'C'$. Lại có OO' vuông góc với hai đáy nên OO' là trục hai đáy.

Gọi I là trung điểm của $OO' \Rightarrow I$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp khối lăng trụ.

Trong (ABC) kẻ $AH \perp BC (H \in BC)$ ta có $\begin{cases} AH \perp BC \\ AH \perp BB' \end{cases} \Rightarrow AH \perp (BCC'B') \Rightarrow HC'$ là hình chiếu của AC' lên $(BCC'B')$, do đó $\angle(AC'; (BCC'B')) = \angle(AC'; HC) = \angle AC'H = 30^\circ$.

Xét tam giác vuông ABC ta có $AB = \sqrt{BC^2 - AC^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = a\sqrt{3} \Rightarrow AH = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{a\sqrt{3} \cdot a}{2a} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Xét tam giác $AC'H$ vuông tại H có: $AC' = \frac{AH}{\sin 30^\circ} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = a\sqrt{3}$.

Xét tam giác vuông $AA'C'$ có: $AA' = \sqrt{AC'^2 - A'C'^2} = \sqrt{3a^2 - a^2} = a\sqrt{2} = OO' \Rightarrow IO = \frac{1}{2}OO' = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Xét tam giác vuông IOC có: $IC = \sqrt{IO^2 + OC^2} = \sqrt{\frac{a^2}{2} + a^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2} = R$.

Vậy diện tích mặt cầu ngoại tiếp khối lăng trụ là: $S = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot \left(\frac{a\sqrt{6}}{2}\right)^2 = 6\pi a^2$.

Câu 25: Đáp án C**Phương pháp giải:**

Sử dụng định nghĩa tiệm cận ngang, tiệm cận đứng của đồ thị hàm số:

- Đường thẳng $y = y_0$ được gọi là TCN của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu thỏa mãn một trong các điều kiện sau: $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = y_0$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = y_0$.

- Đường thẳng $x = x_0$ được gọi là TCD của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu thỏa mãn một trong các điều kiện sau: $\lim_{x \rightarrow x_0^+} y = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow x_0^+} y = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow x_0^-} y = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow x_0^-} y = -\infty$.

Giải chi tiết:

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$.

Ta có:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x-1)\sqrt{x^2+1}}{x^2-1} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(2x-1)\sqrt{x^2+1}}{x^2-1} = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} y = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(2x-1)\sqrt{x^2+1}}{x^2-1} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} y = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(2x-1)\sqrt{x^2+1}}{x^2-1} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} y = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{(2x-1)\sqrt{x^2+1}}{x^2-1} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} y = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{(2x-1)\sqrt{x^2+1}}{x^2-1} = -\infty$$

Vậy đồ thị hàm số đã cho có 2 TCN $y = \pm 1$ và 2 TCD $x = \pm 1$.

Câu 26: Đáp án D

Phương pháp giải:

Sử dụng phương pháp nguyên hàm từng phần $\int u dv = uv - \int v du$.

Giải chi tiết:

Đặt $I = \int \ln x dx$.

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln x \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = x \end{cases}.$$

Khi đó ta có $I = \int \ln x dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C$.

Với $C = 1$ ta có $1 - x + x \ln x$ là một nguyên hàm của hàm số $\ln x$.

Câu 27: Đáp án C

Phương pháp giải:

Lập BXD $f'(x)$.

Giải chi tiết:

$$\text{Ta có: } f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)^3(x-2)(x-3)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=2 \\ x=3 \end{cases}.$$

BXD:

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	0	-

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(1; 2)$.

Câu 28: Đáp án C

Phương pháp giải:

Lập BXD $f'(x)$.

Giải chi tiết:

$$\text{Ta có: } y = x^4 - 4x^2 \Rightarrow y' = 4x^3 - 8x.$$

Gọi $A(x_0; x_0^4 - 4x_0^2)$ thuộc đồ thị hàm số, phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại A là:

$$y = (4x_0^3 - 8x_0)(x - x_0) + x_0^4 - 4x_0^2 \quad (d)$$

Cho $M(2; 0) \in d$ ta có:

$$\begin{aligned} 0 &= (4x_0^3 - 8x_0)(2 - x_0) + x_0^4 - 4x_0^2 \Leftrightarrow 0 = 8x_0^3 - 16x_0 - 4x_0^4 + 8x_0^2 + x_0^4 - 4x_0^2 \\ \Leftrightarrow 0 &= -3x_0^4 + 8x_0^3 + 4x_0^2 - 16x_0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 = -\frac{4}{3} \\ x_0 = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy qua điểm $M(2; 0)$ kẻ được 3 tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = x^4 - 4x^2$.

Câu 29: Đáp án D

Phương pháp giải:

Hàm số $y = \ln f(x)$ xác định khi và chỉ khi $f(x)$ xác định và $f(x) > 0$.

Giải chi tiết:

$$\text{Hàm số } y = \ln|x^2 + 2x - 3| \text{ xác định} \Leftrightarrow |x^2 + 2x - 3| > 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq -3 \end{cases}.$$

Vậy TXĐ của hàm số đã cho là $D = \mathbb{R} \setminus \{-3; 1\}$.

Câu 30: Đáp án A

Phương pháp giải:

Sử dụng công thức: Cho tứ diện ABCD có góc giữa hai đường thẳng AB và CD là α , gọi d là góc giữa hai đường thẳng AB và CD. Khi đó $V_{ABCD} = \frac{1}{6} AB \cdot CD \cdot d \cdot \sin \alpha$.

Giải chi tiết:

Vì AB, CD lần lượt là đường kính hai đáy nên khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD là $d(AB; CD) = d = h$. Mà thiết diện qua trục của hình trụ là hình vuông cạnh a nên $h = AB = CD = a$.

$$\text{Khi đó ta có } V_{ABCD} = \frac{1}{6} AB \cdot CD \cdot d \cdot \sin \alpha = \frac{1}{6} \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \sin 30^\circ = \frac{a^3}{12}.$$

Câu 31: Đáp án A

Phương pháp giải:

Sử dụng các công thức:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \quad (0 < a, c \neq 1, b > 0)$$

$$\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y \quad (0 < a \neq 1, x, y > 0)$$

$$\log_{a^n} b^m = \frac{m}{n} \log_a b \quad (0 < a \neq 1, b > 0)$$

Giải chi tiết:

Ta có:

$$\begin{aligned} a + \frac{b + \log_2 5}{c + \log_2 3} &= \log_6 45 \Leftrightarrow a + \frac{b + \log_2 5}{c + \log_2 3} = \frac{\log_2 45}{\log_2 6} \\ \Leftrightarrow a + \frac{b + \log_2 5}{c + \log_2 3} &= \frac{\log_2 (3^2 \cdot 5)}{\log_2 (2 \cdot 3)} \Leftrightarrow a + \frac{b + \log_2 5}{c + \log_2 3} = \frac{2 \log_2 3 + \log_2 5}{1 + \log_2 3} \\ \Leftrightarrow a + \frac{b + \log_2 5}{c + \log_2 3} &= \frac{2 + 2 \log_2 3 - 2 + \log_2 5}{1 + \log_2 3} \Leftrightarrow a + \frac{b + \log_2 5}{c + \log_2 3} = 2 + \frac{-2 + \log_2 5}{1 + \log_2 3} \end{aligned}$$

Đồng nhất hệ số ta có $a = 2, b = -2, c = 1$.

Vậy $a + b + c = 2 + (-2) + 1 = 1$.

Câu 32: Đáp án C

Phương pháp giải:

- Biến đổi, đưa về công thức đạo hàm của một thương.
- Sử dụng phương pháp nguyên hàm hai vế tìm hàm $f(x)$.
- Sử dụng giả thiết tìm hằng số C.
- Suy ra hàm số $f(x)$ hoàn chỉnh và tính $f(2)$.

Giải chi tiết:

Theo bài ra ta có:

$$f(x) = x \cdot f'(x) - x^2 \Leftrightarrow x \cdot f'(x) - f(x) = x^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{x \cdot f'(x) - x' \cdot f(x)}{x^2} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x} \right)' = 1 \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} = \int dx = x + C$$

$$\text{Lại có } f(1) = 3 \Rightarrow \frac{f(1)}{1} = 1 + C \Leftrightarrow 3 = 1 + C \Leftrightarrow C = 2.$$

$$\text{Vậy } \frac{f(x)}{x} = x + 2 \Leftrightarrow f(x) = x^2 + 2x \Rightarrow f(2) = 8.$$

Câu 33: Đáp án A

Phương pháp giải:

- Giải phương trình $f'(x) = 0$, xét dấu $f'(x)$ trên $[a; b]$.

- Từ đó tìm $\min_{[a; b]} f(x)$.

Giải chi tiết:

Ta có $f'(x) = -\frac{x}{x^2 + 1} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \notin [a; b]$ (do a, b là các số dương)

Khi đó ta có $f'(x) < 0 \forall x \in [a; b]$, do đó hàm số nghịch biến trên $[a; b]$ nên $\min_{[a; b]} f(x) = f(b)$.

Câu 34: Đáp án A

Phương pháp giải:

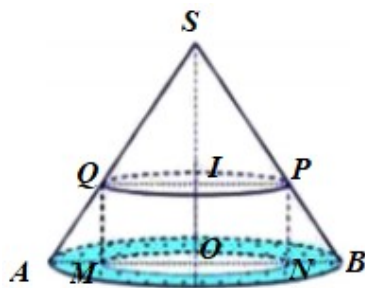
- Đặt chiều cao khối trụ là $(0 < x < h)$.

- Áp dụng định lý Ta-lét, tính bán kính đáy hình trụ theo x.

- Tính thể tích khối trụ, sử dụng phương pháp hàm số tìm GTLN của V' , từ đó suy ra x theo h.

- Lập và tính tỉ số $\frac{V'}{V}$

Giải chi tiết:



Đặt tên các điểm như hình vẽ.

Gọi h, r lần lượt là chiều cao và bán kính đáy của hình nón.

Đặt $IO = MQ = NP = x$ ($0 < x < h$).

Áp dụng định lý Ta-lét ta có:

$$\frac{MQ}{SO} = \frac{AQ}{AS} = 1 - \frac{SQ}{SA} = 1 - \frac{QI}{OA} \Rightarrow \frac{x}{h} = 1 - \frac{IQ}{r} \Rightarrow IQ = \left(1 - \frac{x}{h}\right)r$$

Khi đó thể tích khối nón là $V' = \pi.IQ^2.QM = \pi.r^2\left(1 - \frac{x}{h}\right)^2.x = \frac{\pi r^2}{h^2}.x(x-h)^2$.

Để V' đạt giá trị lớn nhất thì $x(x-h)^2$ phải đạt giá trị lớn nhất.

Đặt $f(x) = x(x-h)^2 = x(x^2 - 2hx + h^2) = x^3 - 2hx^2 + h^2x$, với $0 < x < h$ ta có:

$$f'(x) = 3x^2 - 4hx + h^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = h \text{ (ktm)} \\ x = \frac{1}{3}h \text{ (tm)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow V'_{\max} = \frac{\pi r^2}{h^2} \cdot \frac{1}{3}h \left(\frac{1}{3}h - h\right)^2 = \frac{4}{27}\pi r^2 h$$

$$\text{Vậy khi đó } \frac{V'}{V} = \frac{\frac{4}{27}\pi r^2 h}{\frac{1}{3}\pi r^2 h} = \frac{4}{9}.$$

Câu 35: Đáp án C

Phương pháp giải:

Số điểm cực trị của hàm số $y = |f(x)|$ = số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ + số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ với trục hoành (không tính điểm tiếp xúc)

Giải chi tiết:

$$\text{Dựa vào BBT ta thấy } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \\ x = x_2 \end{cases}.$$

$$\text{Đặt } h(x) = m + f(x+1) \text{ ta có } h'(x) = f'(x+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = x_1 \\ x+1 = x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 - 1 \\ x = x_2 - 1 \end{cases}, \text{ do đó hàm số}$$

$h(x) = m + f(x+1)$ có 2 điểm cực trị.

Suy ra để hàm số $g(x) = |h(x)| = |m + f(x+1)|$ có đúng 3 điểm cực trị thì phương trình $m + f(x+1) = 0$ phải có nghiệm bội lẻ duy nhất.

Ta có: $m + f(x+1) = 0 \Leftrightarrow f(x+1) = -m$, dựa vào BBT ta thấy đường thẳng $y = -m$ cắt qua (không tính điểm tiếp xúc) đồ thị hàm số $y = f(x+1)$ tại 1 điểm duy nhất khi và chỉ khi $\begin{cases} -m \geq 1 \\ -m \leq -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -1 \\ m \geq 3 \end{cases}.$

Câu 36: Đáp án A

Phương pháp giải:

- Tìm ĐKXĐ của phương trình.
- Đưa về cùng cơ số 2.
- Giải phương trình logarit: $\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x)$.

- Dựa vào điều kiện của x tìm m để phương trình có nghiệm.

Giải chi tiết:

$$\text{ĐKXĐ: } \begin{cases} 2x - m > 0 \\ 3 - x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - m > 0 \\ x < 3 \end{cases}.$$

Ta có:

$$\log_{\frac{1}{2}}(2x - m) + \log_2(3 - x) = 0 \Leftrightarrow -\log_2(2x - m) + \log_2(3 - x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_2(2x - m) = \log_2(3 - x) \Leftrightarrow 2x - m = 3 - x \Leftrightarrow 3x = m + 3$$

Để phương trình có nghiệm thì $m + 3 < 9 \Leftrightarrow m < 6$.

Kết hợp điều kiện m là số nguyên dương ta có $m \in \{1; 2; 3; 4; 5\}$.

Vậy có 5 giá trị của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 37: Đáp án D

Phương pháp giải:

- Xác định tọa độ các điểm A, B, C, D, E, F .

- Viết phương trình tham số đường thẳng OM .

- Viết phương trình cá mặt phẳng (ABC) và (DEF) .

- Tham số hóa tọa độ các điểm P, Q thuộc OM, cho $P \in (ABC); Q \in (DEF)$, tìm tọa độ P, Q.

- Tính độ dài $PQ = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2 + (z_Q - z_P)^2}$.

Giải chi tiết:

Theo bài ra ta có:

$A(1;0;0), B(0;2;0), C(0;0;-3), D(0;2;-3), E(1;0;-3), F(1;2;0)$.

Gọi P và Q tương ứng là giao điểm của đường thẳng OM với các mặt phẳng (ABC) và (DEF) . Độ dài PQ bằng:

+ Ta có: $\overrightarrow{OM} = (1;2;-3)$ là 1 VTCP của đường thẳng OM, nên phương trình đường thẳng OM là

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = -3t \end{cases}.$$

+ Phương trình mặt phẳng (ABC) là $\frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{-3} = 1 \Leftrightarrow 6x + 3y - 2z - 6 = 0$.

Gọi $OM \cap (ABC) = P(p; 2p; -3p)$, ta có $P \in (ABC)$ nên:

$$6p + 3.2p - 2.(-3p) - 6 = 0 \Leftrightarrow p = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow P\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; -1\right).$$

+ Ta có: $\overrightarrow{DE} = (1; -2; 0); \overrightarrow{DF} = (1; 0; 3) \Rightarrow [\overrightarrow{DE}; \overrightarrow{DF}] = (-6; -3; 2)$ là 1 VTPT của (DEF).

$\Rightarrow$ Phương trình mặt phẳng (DEF) là: $-6x - 3(y - 2) + 2(z + 3) = 0 \Leftrightarrow -6x - 3y + 2z + 12 = 0$.

Gọi $OM \cap (DEF) = Q(q; 2q; -3q)$, ta có $Q \in (DEF)$ nên:

$$-6q - 3.2q + 2(-3q) + 12 = 0 \Leftrightarrow q = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow Q\left(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}; -2\right).$$

$$\text{Vậy } PQ = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + (-1)^2} = \frac{\sqrt{14}}{3}.$$

Câu 38: Đáp án B

Phương pháp giải:

- Phân tích $1 + x + x^2 + x^3$ thành nhân tử.

- Khai triển nhị thức Niu-ton: $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k$.

- Tìm a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 lần lượt là hệ số của các số hạng không chứa x, chứa x, chứa x^2, x^3, x^4 .

- Thay vào tính S.

Giải chi tiết:

$$\text{Ta có: } (1 + x + x^2 + x^3)^4 = (1 + x + x^2(x + 1))^4 = (x + 1)^4 (x^2 + 1)^4 = \sum_{k=0}^4 C_4^k x^k \sum_{m=0}^4 C_4^m x^{2m}$$

Khi đó ta có

$$(k; m) = (0; 0) \Rightarrow a_0 = C_4^0 \cdot C_4^0 = 1$$

$$(k; m) = (1; 0) \Rightarrow a_1 = C_4^1 C_4^0 = 4$$

$$(k; m) \in \{(2; 0); (0; 1)\} \Rightarrow a_2 = C_4^2 C_4^0 + C_4^0 \cdot C_4^1 = 10$$

$$(k; m) \in \{(3; 0); (1; 1)\} \Rightarrow a_3 = C_4^3 C_4^0 + C_4^1 \cdot C_4^1 = 20$$

$$(k; m) \in \{(4; 0); (2; 1); (0; 2)\} \Rightarrow a_4 = C_4^4 C_4^0 + C_4^2 C_4^1 + C_4^0 \cdot C_4^2 = 31$$

$$\text{Vậy } S = C_4^0 a_4 - C_4^1 a_3 + C_4^2 a_2 - C_4^3 a_1 + C_4^4 a_0 = -4.$$

Câu 39: Đáp án B

Phương pháp giải:

Giải phương trình lượng giác cơ bản: $\sin \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = k\pi, \cos \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$

Giải chi tiết:

Ta có: $\sin(\cos x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Vì $-1 \leq \cos x \leq 1 \forall x \in \mathbb{R}$ nên $-1 \leq k\pi \leq 1, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k = 0$.

Khi đó ta có $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + l\pi (l \in \mathbb{Z})$.

Xét $x \in [1; 2021]$ ta có $1 \leq \frac{\pi}{2} + l\pi \leq 2021; l \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow l \in \{0; 1; 2; \dots; 642\}$.

Vậy phương trình đã cho có 643 nghiệm thỏa mãn.

Câu 40: Đáp án C

Phương pháp giải:

- Tìm hàm số $f(x) = \int f'(x) dx$.

- Xét phương trình $f(x) = 999$, sử dụng định lý Vi-ét tìm $x_1 x_2$ và tính S.

Giải chi tiết:

Ta có $f(x) = \int f'(x) dx = \int (2x-1) dx = x^2 - x + C$.

Mà $f(3) = 5 \Rightarrow 3^2 - 3 + C = 5 \Leftrightarrow C = -1$.

Suy ra $f(x) = x^2 - x - 1$.

Xét phương trình $f(x) = 999 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 999 \Rightarrow x^2 - x - 1000 = 0$, giả sử phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 . Áp dụng định lý Vi-ét ta có $x_1 x_2 = -1000$.

Khi đó ta có $S = \log|x_1| + \log|x_2| = \log|x_1 x_2| = \log 1000 = 3$.

Câu 41: Đáp án D

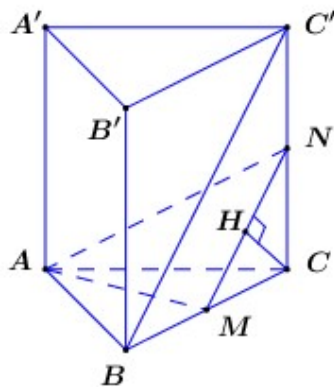
Phương pháp giải:

- Gọi N là trung điểm của CC' , chứng minh $d(AM; BC') = d(BC'; (AMN)) = d(B; (AMN))$.

- Đổi $d(B; (AMN))$ sang $d(C; (AMN))$.

- Dựng và tính khoảng cách, sử dụng phương pháp dựng khoảng cách từ chân đường cao đến mặt phẳng.

Giải chi tiết:



Gọi N là trung điểm của $CC' \Rightarrow MN$ là đường trung bình của tam giác BCC' .

$\Rightarrow MN \parallel BC' \Rightarrow BC' \parallel (AMN) \supset AM$.

Khi đó ta có $d(AM; BC') = d(BC'; (AMN)) = d(B; (AMN))$.

Ta có: $BC \cap (AMN) = M \Rightarrow \frac{d(B; (AMN))}{d(C; (AMN))} = \frac{BM}{CM} = 1 \Rightarrow d(B; (AMN)) = d(C; (AMN))$.

Trong $(BCC'B')$ kẻ $CH \perp MN (H \in MN)$ ta có:

$$\begin{cases} AM \perp CM \\ AM \perp CN \end{cases} \Rightarrow AM \perp (BCC'B') \Rightarrow AM \perp CH$$

$$\begin{cases} CH \perp AM \\ CH \perp MN \end{cases} \Rightarrow CH \perp (AMN) \Rightarrow d(C; (AMN)) = CH$$

$$\Rightarrow d(AM; BC') = CH.$$

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông CMN có: $CH = \frac{CM \cdot CN}{\sqrt{CM^2 + CN^2}} = \frac{\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}}{\sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4}}} = \frac{a\sqrt{2}}{4}$.

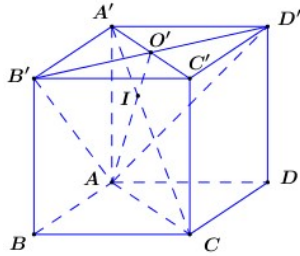
Vậy $d(AM; BC') = \frac{a\sqrt{2}}{4}$.

Câu 42: Đáp án C

Phương pháp giải:

- Chứng minh mặt phẳng đi qua A và vuông góc với A'C chính là $(AB'D')$.
- Xác định $(AB'D')$ chia khối chóp thành những phần nào và tính thể tích của chúng.

Giải chi tiết:



Gọi (α) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc với A'C.

Gọi $O' = A'C' \cap B'D'$ và $I = AO' \cap A'C$.

Vì $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương cạnh a nên $AC = A'C' = a\sqrt{2}; A'C = a\sqrt{3}$.

Áp dụng định lý Pytago ta có: $AO' = \sqrt{AA'^2 + A'O'^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{2}} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Áp dụng định lý Ta-lét ta có:

$$\frac{AI}{IO'} = \frac{AC}{A'O'} = 2 \Rightarrow AI = 2IO' = \frac{2}{3}AO' = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

$$\frac{A'I}{IC} = \frac{A'O'}{AC} = \frac{1}{2} \Rightarrow A'I = \frac{1}{2}IC = \frac{1}{3}A'C = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Xét tam giác $AA'I$ có: $AI^2 + A'I^2 = \frac{2a^2}{3} + \frac{a^2}{3} = a^2 = AA'^2$, suy ra tam giác $AA'I$ vuông tại I (Định lý

Pytago đảo) $\Rightarrow AO' \subset (\alpha) \Rightarrow O' \in (\alpha)$.

Lại có $\begin{cases} B'D' \perp A'C' \\ B'D' \perp AA' \end{cases} \Rightarrow B'D' \perp (ACC'A') \Rightarrow B'D' \perp A'C \Rightarrow B'D' \subset (\alpha)$

$\Rightarrow (\alpha) \equiv (AB'D')$.

Mặt phẳng $(AB'D')$ chia khối lập phương thành 2 phần: Chóp $A.A'B'D'$ và khối đa diện $B'C'D'.ABCD$.

Ta có: $V_{A.A'B'D'} = \frac{1}{3} AA'.S_{A'B'D'} = \frac{1}{3} AA' \cdot \frac{1}{2} S_{ABCD} = \frac{1}{6} V_{ABCD.A'B'C'D'}$

$\Rightarrow V_{B'C'D'.ABCD} = V_{ABCD.A'B'C'D'} - \frac{1}{6} V_{ABCD.A'B'C'D'} = \frac{5}{6} V_{ABCD.A'B'C'D'}$.

Vậy $k = \frac{V_{A.A'B'D'}}{V_{B'C'D'.ABCD}} = \frac{\frac{1}{6} V_{ABCD.A'B'C'D'}}{\frac{5}{6} V_{ABCD.A'B'C'D'}} = \frac{1}{5}$

Câu 43: Đáp án D

Phương pháp giải:

Giải chi tiết:

Không gian mẫu: $n(\Omega) = C_{30}^4$.

Gọi A là biến cố: “4 đỉnh được chọn tạo thành một tứ giác có bốn cạnh đều là đường chéo của (H) ”.

Chọn 1 đỉnh bất kì trong 30 đỉnh là 1 đỉnh của tứ giác, kí hiệu là A_1 , có 30 cách chọn.

Kí hiệu các đỉnh còn lại theo chiều kim đồng hồ lần lượt là $A_2, A_3, A_4, \dots, A_{30}$.

Khi đó tứ giác có dạng $A_1 A_x A_y A_z$, khi đó ta có $\begin{cases} x > 1+1=2 \\ y > x+1 \\ 30 > z > y+1 > x+2 \end{cases} \Rightarrow 3 \leq x < y-1 < z-2 \leq 27$.

Đặt $X = \{3; 4; 5; \dots; 27\}$, X có 25 phần tử, số cách chọn 1 bộ x, y, z là C_{25}^3 .

$\Rightarrow n(A) = 30.C_{25}^3$.

Vậy xác suất của biến cố A là $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{30.C_{25}^3}{C_{30}^4}$.

Câu 44: Đáp án B

Phương pháp giải:

Sử dụng công thức: Gọi (H') là hình chiếu của (H) lên mặt phẳng (P) . Gọi α là góc giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng chứa hình (H) . Khi đó ta có: $S_{(H')} = S_{(H)} \cos \alpha$.

Giải chi tiết:

Vì mặt phẳng tạo với đáy một góc 60^0 và cắt tất cả các cạnh bên của hình hộp nên hình chiếu của thiết diện lên mặt phẳng đáy chính là ABCD.

$$\text{Khi đó ta có: } S_{ABCD} = S_{TD} \cdot \cos 60^0 \Rightarrow S_{TD} = \frac{S_{ABCD}}{\cos 60^0} = 2S_{ABCD},$$

$$\text{Vì } \angle BAD = 60^0 \text{ nên } \triangle ABD \text{ là tam giác đều cạnh } a \Rightarrow S_{ABD} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \Rightarrow S_{ABCD} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Vậy } S_{TD} = a^2 \sqrt{3}.$$

Câu 45: Đáp án A

Phương pháp giải:

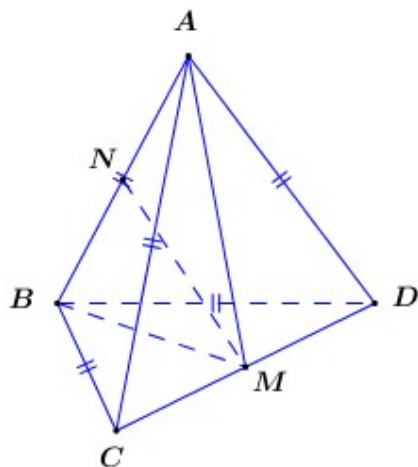
- Gọi M, N lần lượt là trung điểm của CD, AB. Chứng minh $d(AB; CD) = MN$.

- Sử dụng công thức $V_{ABCD} = \frac{1}{6} AB \cdot CD \cdot d(AB; CD) \cdot \sin \angle(AB; CD)$.

- Đặt $CD = x$, tính MN theo x, sử dụng công thức tính độ dài đường trung tuyến.

- Sử dụng BĐT Cô-si tìm GTLN của V_{ABCD} .

Giải chi tiết:



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của CD, AB.

Vì tam giác ABC, ABD là các tam giác đều cạnh a nên $AB = AC = AD = BC = BD = a$.

$$\Rightarrow \triangle BCD, \triangle ACD \text{ là các tam giác cân tại } A \Rightarrow \begin{cases} CD \perp AM \\ CD \perp BM \end{cases} \Rightarrow CD \perp (ABM) \Rightarrow CD \perp MN.$$

Lại có $\triangle BCD = \triangle ACD (c.c.c) \Rightarrow AM = BM \Rightarrow \triangle ABM$ cân tại M $\Rightarrow MN \perp AB$.

$$\Rightarrow d(AB; CD) = MN.$$

$$\text{Đặt } CD = x \ (x > 0) \text{ ta có } AM = BM = \sqrt{\frac{a^2 + a^2}{2} - \frac{x^2}{4}} = \frac{\sqrt{4a^2 - x^2}}{2}.$$

$$\Rightarrow MN = \sqrt{\frac{\frac{4a^2 - x^2}{4} + \frac{4a^2 - x^2}{4}}{2} - \frac{a^2}{4}} = \frac{\sqrt{3a^2 - x^2}}{2}$$

Do đó ta có

$$\begin{aligned} V_{ABCD} &= \frac{1}{6} AB \cdot CD \cdot d(AB; CD) \cdot \sin \angle(AB; CD) \\ &= \frac{1}{6} a \cdot x \cdot \frac{\sqrt{3a^2 - x^2}}{2} \cdot \sin \angle(AB; CD) \end{aligned}$$

$$\text{Để } V_{ABCD} \text{ đạt giá trị lớn nhất thì } \begin{cases} f(x) = x \cdot \frac{\sqrt{3a^2 - x^2}}{2} \text{ đạt GTLN} \\ \sin \angle(AB; CD) = 1 \end{cases}$$

$$\text{Áp dụng BĐT Cô-si ta có } f(x) = x \cdot \frac{\sqrt{3a^2 - x^2}}{2} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2 + 3a^2 - x^2}{2} = \frac{3a^2}{4}.$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra } \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3a^2 - x^2}}{2} \Leftrightarrow 4x^2 = 3a^2 - x^2 \Leftrightarrow x = \frac{a\sqrt{15}}{5}.$$

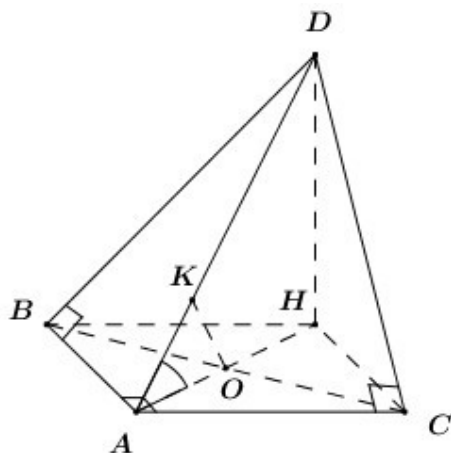
$$\text{Vậy } \max V_{ABCD} = \frac{1}{6} a \cdot \frac{3a^2}{4} = \frac{a^3}{8}.$$

Câu 46: Đáp án D

Phương pháp giải:

- Dựng hình chữ nhật ABHC, chứng minh $DH \perp (ABCD)$.
- Xác định góc giữa AD và (ABC) là góc giữa AD và hình chiếu của AD lên (ABC).
- Chứng minh ABHC là hình vuông.
- Xác định đoạn vuông góc chung của AD và BC.
- Sử dụng tỉ số lượng giác của góc nhọn trong tam giác vuông tính chiều cao DH và độ dài đường chéo của hình vuông ABHC.
- Tính $S_{ABHC} \Rightarrow S_{ABC}$, từ đó tính thể tích $V_{ABCD} = \frac{1}{3} HD \cdot S_{ABC}$.

Giải chi tiết:



Dựng hình chữ nhật ABHC ta có:

$$\begin{cases} AB \perp BD \\ AB \perp BH \end{cases} \Rightarrow AB \perp (BDH) \Rightarrow AB \perp DH$$

$$\begin{cases} AC \perp CH \\ AC \perp CD \end{cases} \Rightarrow AC \perp (CDH) \Rightarrow AC \perp DH$$

$$\Rightarrow DH \perp (ABCD)$$

$$\Rightarrow AH \text{ là hình chiếu của } AD \text{ lên } (ABC) \Rightarrow \angle(AD; (ABC)) = \angle(AD; AH) = \angle DAH = 45^\circ.$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} BC \perp DH (DH \perp (ABCD)) \\ BC \perp AD (gt) \end{cases} \Rightarrow BC \perp (ADH) \Rightarrow BC \perp AH.$$

$\Rightarrow ABHC$ là hình vuông (Tứ giác có hai đường chéo vuông góc).

Gọi $O = AH \cap BC$, trong (ADH) kẻ $OK \perp AD (K \in AD)$ ta có:

$$\begin{cases} OK \perp AD \\ OK \perp BC (BC \perp (ADH)) \end{cases} \Rightarrow d(AD; BC) = OK = a.$$

Xét tam giác OKA vuông tại K có $\angle OAK = 45^\circ$ nên tam giác OKA vuông cân tại K

$$\Rightarrow OA = OK\sqrt{2} = a\sqrt{2}.$$

$$\Rightarrow AH = 2OA = 2\sqrt{2}a.$$

Lại có tam giác AHD vuông cân tại H nên $HD = AH = 2\sqrt{2}a$.

$$\text{Ta có: } S_{ABHC} = \frac{1}{2}AH^2 = \frac{1}{2}(2\sqrt{2}a)^2 = 4a^2 \Rightarrow S_{ABC} = 2a^2.$$

$$\text{Vậy } V_{ABCD} = \frac{1}{3}HD.S_{ABC} = \frac{1}{3}.2\sqrt{2}a.2a^2 = \frac{4\sqrt{2}a^3}{3}.$$

Câu 47: Đáp án C

Phương pháp giải:

- Từ $f'(x)$ suy ra các nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$, chú ý nghiệm bội chẵn, bội lẻ.

- Tính đạo hàm $g'(x)$.

- Giải phương trình $g'(x) = 0$ xác định các nghiệm bội lẻ.

Giải chi tiết:

$$\text{Theo bài ra ta có: } f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2(x-3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \text{ (nghiệm bội 2)} \\ x = 3 \text{ (nghiệm đơn)} \end{cases}$$

Ta có:

$$g(x) = f(\sqrt{x^2 + 2x + 6})$$

$$\Rightarrow g'(x) = \frac{2x+2}{2\sqrt{x^2 + 2x + 6}} f'(\sqrt{x^2 + 2x + 6})$$

$$= \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+6}} f'(\sqrt{x^2+2x+6})$$

$$\text{Cho } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ f'(\sqrt{x^2+2x+6})=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ \sqrt{x^2+2x+6}=3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x^2+2x+6=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x^2+2x-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=1 \\ x=-3 \end{cases} \quad (\text{đều là các nghiệm đơn})$$

(Ta không xét $\sqrt{x^2+2x+6} = -1$ vì $f'(x)$ không đổi dấu qua $x = -1$ nên nghiệm của phương trình $\sqrt{x^2+2x+6} = -1$ không làm cho $g'(x)$ đổi dấu).

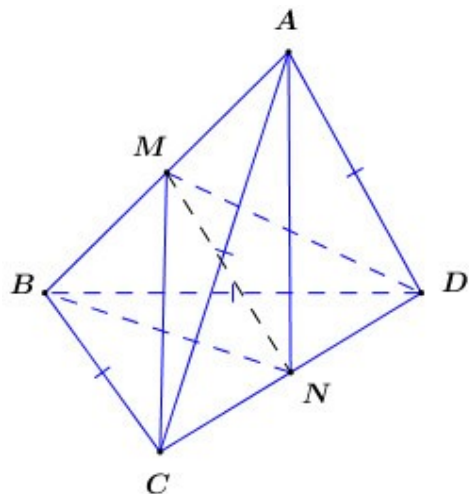
Vậy hàm số đã cho có 3 điểm cực trị.

Câu 48: Đáp án A

Phương pháp giải:

- Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD. Chứng minh tam giác ABN, CDM là các tam giác vuông cân.
- Tính BN, CN theo MN.
- Áp dụng định lý Pytago trong tam giác vuông BCN, từ đó tính MN theo a và suy ra CD theo a.

Giải chi tiết:



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD.

Vì tam giác ACD, BCD là các tam giác cân lần lượt tại A và B nên $\begin{cases} AN \perp CD \\ BN \perp CD \end{cases}$.

Lại có $\begin{cases} (ACD) \perp (BCD) = CD \\ AN \subset (ACD), AN \perp CD \Rightarrow \angle((ACD); (BCD)) = \angle(AN; BN) = \angle ANB = 90^\circ. \\ BN \subset (BCD), BN \perp CD \end{cases}$

Dễ thấy $\triangle ACD = \triangle BCD (c.c.c) \Rightarrow AN = BN \Rightarrow \triangle ABN$ vuông cân tại N $\Rightarrow MN = \frac{1}{2} AB$.

Chứng minh tương tự ta có ΔMCD vuông cân tại M nên $MN = \frac{1}{2}CD$.

$$\Rightarrow AB = CD.$$

Ta có: $BN = \sqrt{2}MN, CN = \frac{1}{2}CD = MN$.

Xét tam giác vuông BCN có: $BN^2 + CN^2 = BC^2$

$$\Rightarrow 2MN^2 + MN^2 = a^2 \Rightarrow MN = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Vậy $CD = 2MN = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 49: Đáp án A

Phương pháp giải:

- Tìm $\min y; \max y$
 $_{[-1;3]} \quad a_{[-1;3]}$

- Để $f(a), f(b), f(c)$ là độ dài ba cạnh của một tam giác thì $\begin{cases} f(a) > 0 \\ f(a) + f(b) > f(c) \end{cases}$.

Giải chi tiết:

Ta có: $y' = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1 \in [-1; 3]$.

Ta có $y(-1) = 2 - m; y(1) = -2 - m; y(3) = 18 - m$.

$$\Rightarrow \min_{[-1;3]} y = -2 - m; \max_{a_{[-1;3]}} y = 18 - m.$$

Không mất tính tổng quát, ta giả sử $f(a) \leq f(b) \leq f(c)$.

Vì $a, b, c \in [-1; 3]$ nên $-2 - m \leq f(a) \leq f(b) \leq f(c) \leq 18 - m$.

Để $f(a), f(b), f(c)$ là độ dài ba cạnh của một tam giác thì $\begin{cases} f(a) > 0 \\ f(a) + f(b) > f(c) \end{cases} (*)$.

Ta có: $\begin{cases} -2 - m \leq f(a) \\ -2 - m \leq f(b) \end{cases} \Rightarrow f(a) + f(b) \geq -4 - 2m$.

Do đó (*) luôn đúng khi và chỉ khi $\begin{cases} -2 - m > 0 \\ -4 - 2m \geq 18 - m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -2 \\ m \leq -22 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq -22$.

Câu 50: Đáp án B

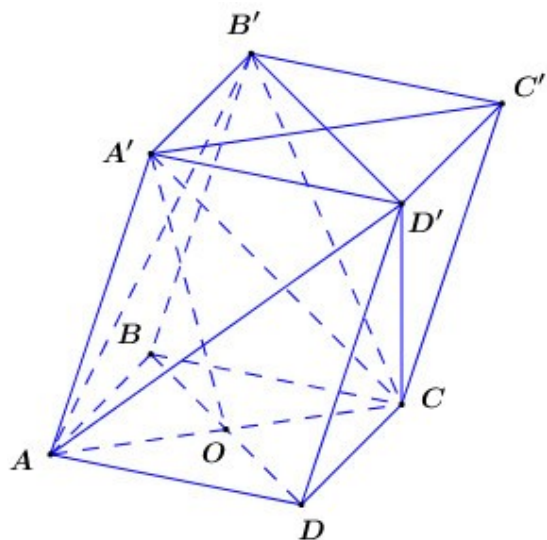
Phương pháp giải:

- Sử dụng kiến thức: $V_{ACB'D'} = \frac{1}{3}V_{ABCD.A'B'C'D'}$.

- Sử dụng định lí $\begin{cases} (P) \perp (Q) = d \\ a \subset (P), a \perp d \end{cases} \Rightarrow a \perp (Q)$.

- Tính thể tích khối lăng trụ = tích chiều cao và diện tích đáy tương ứng.

Giải chi tiết:



Gọi $O = AC \cap BD \Rightarrow O$ là trung điểm của AC và BD.

Vì $ACC'A'$ là hình thoi nên $AA' = AC$, lại có $\angle A'AC = 60^\circ$ (gt) nên $\triangle A'AC$ là tam giác đều $\Rightarrow A'O \perp AC$

Ta có: $\begin{cases} (ACC'A') \perp (ABCD) = AC \\ A'O \subset (ACC'A'), A'O \perp AC \end{cases} \Rightarrow A'O \perp (ABCD).$

Xét tam giác ABC có: $AB = AD$ (do ABCD là hình thoi), $\angle BAD = 60^\circ$ (gt) nên tam giác ABC đều cạnh a.

$$\Rightarrow AO = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AC = a\sqrt{3} \text{ và } S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow S_{ABCD} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}.$$

$$\Rightarrow \triangle A'AC \text{ là tam giác đều cạnh } a\sqrt{3} \Rightarrow A'O = \frac{a\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{3a}{2}.$$

$$\text{Vậy } V_{ACB'D'} = \frac{1}{3} V_{ABCD.A'B'C'D'} = \frac{1}{3} \cdot A'O \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3a}{2} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}.$$

----- HẾT -----

<https://toanmath.com/>