

Môn: TOÁN

Đề thi có: 01 trang

Thời gian: 180 phút (không kể thời gian giao đề)

Ngày thi: 10/9/2024

Câu 1 (4 điểm). Cho dãy số (u_n) xác định bởi
$$\begin{cases} u_1 = 2, u_2 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{u_n \cdot u_{n-1}}{u_{n-1} - 1}, \forall n \geq 2 \end{cases}$$

a) Tính giới hạn $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{u_{n+1}}$.

b) Xét dãy số (v_n) cho bởi $v_n = \frac{u_n^a}{n}$. Tìm tất cả các giá trị của a để dãy số (v_n) có giới hạn hữu hạn khác 0.

Câu 2 (4 điểm). Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x)f(y) + f(x+y) = f(xy) + f(x) + f(y) + 2xy \text{ với mọi } x, y \in \mathbb{R}.$$

Câu 3 (4 điểm). Cho tam giác ABC không cân. Đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với ba cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F . Gọi M, N lần lượt là giao điểm của IB, IC với DE, DF ; S, T lần lượt là trung điểm các cạnh AB, AC .

a. Chứng minh rằng bốn điểm M, N, S, T thẳng hàng.

b. Gọi J là giao điểm của MN và IA . Chứng minh rằng đường tròn tâm J bán kính JA tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác DMN .

Câu 4 (4 điểm). Cho a, b, n là các số nguyên dương ($n \geq 2$). Biết $(an - a + 1) \mid bn$. Đặt $x = \frac{a}{b}$.

a. Chứng minh rằng: $[x]$ không chia hết cho n .

b. Kí hiệu $\{x\} = x - [x]$. Tính $S = \sum_{i=1}^{n-1} \left\{ \frac{[ix]}{n} \right\}$.

Câu 5 (4 điểm). Cho số nguyên dương n . Cho $a_1; a_2; a_3; \dots; a_{2n}$ là một hoán vị của các số $1; 2; 3; \dots; 2n$ sao cho hai điều kiện sau được thỏa mãn:

i) $a_1 < a_3 < a_5 < \dots < a_{2n-1}$;

ii) $a_2 > a_4 > a_6 > \dots > a_{2n}$.

a) Có bao nhiêu hoán vị thỏa mãn các tính chất trên?

b) Xác định tất cả các giá trị mà tổng $S = |a_1 - a_2| + |a_3 - a_4| + \dots + |a_{2n-1} - a_{2n}|$ có thể nhận.

.....HẾT.....

*Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay;
Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.*

Họ và tên thí sinh:

SBD:

CÂU	NỘI DUNG	ĐIỂM
Câu 1 (4 điểm)	a. Ta thấy $u_2 > u_1$. Giả sử $u_m > u_{m-1}, \forall 2 \leq m \leq k$. Ta có $\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{u_{k-1}}{u_{k-1}-1} = 1 + \frac{1}{u_{k-1}-1}$. Mà $u_{k-1} > u_1 = 2 > 1$, suy ra $\frac{u_{k+1}}{u_k} > 1$ hay $u_{k+1} > u_k$. Do đó (u_n) là dãy tăng.	1
	Giả sử tồn tại M sao cho $u_n < M \forall n \geq 1$. Khi đó dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn. Đặt $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$. Chuyển qua giới hạn ta có $L = \frac{L^2}{L-1} \Rightarrow L = 0$ (vô lý do $u_n > u_1 = 2 \forall n \geq 1$). Do đó $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$. Vậy $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{u_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n-1}-1}{u_{n-1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{u_{n-1}}\right) = 1$.	1
	b. $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n \cdot u_{n-1}}{u_{n-1} - 1} - u_n = u_n \left(\frac{u_{n-1}}{u_{n-1} - 1} - 1 \right) = \frac{u_n}{u_{n-1} - 1} = \frac{\frac{u_n}{u_{n-1}}}{1 - \frac{1}{u_{n-1}}}$ $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n+1} - u_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{u_n}{u_{n-1}}}{1 - \frac{1}{u_{n-1}}} = 1.$ Do đó, theo định lý trung bình Cesaro ta có $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} = 1$. Vậy $a = 1$ thỏa mãn bài toán.	1
	Ta sẽ chứng minh $a \neq 1$ không thỏa mãn đề bài. Thật vậy +) với $a > 1$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n^a}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{u_n^a}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{u_n}{n} \cdot u_n^{a-1} \right) = +\infty$. +) với $a < 1$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n^a}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{u_n}{n} \cdot \frac{1}{u_n^{1-a}} \right) = 0$.	1
Câu 2 (4 điểm)	Ta có: $[f(x)-1][f(y)-1] + f(x+y)-1 = f(xy)-1 + 2xy + 1$ Đặt $g(x) = f(x) - 1$ ta được phương trình $g(x)g(y) + g(x+y) = g(xy) + 2xy + 1, \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (1)$ Kí hiệu $P^{(n)}(a; b)$ là phép thế $x = a, y = b$ vào phương trình (1).	0.5
	$P^{(1)}(0; 0): g(0) = 1$ hoặc $g(0) = -1$ TH1: $g(0) = 1$, xét $P^{(1)}(x; 0)$ ta được $g(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại không thỏa mãn	0.5
	TH2: $g(0) = -1$, $P^{(1)}(1; -1): g(1) = 1$ hoặc $g(-1) = 0$ Xét $g(1) = 1$, xét $P^{(1)}(x; 1)$ ta được $g(x) = 2x - 1, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) = 2x, \forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại thỏa mãn.	0.5

	a. Ta có: $\angle AIN = \angle IAC + \angle ICA = \frac{1}{2}(\angle BAC + \angle ACB) = \angle BFD = \angle AFN$ Suy ra tứ giác $AIFN$ nội tiếp. Suy ra $\angle ANI = 90^\circ$. Tương tự $\angle AMI = 90^\circ$.	0.5
	Tam giác ANC vuông tại N có T là trung điểm của AC nên ta có: $\angle ATN = 2\angle TCN = \angle ACB$ Suy ra $TN \parallel CB$. Tương tự $SM \parallel CB$, mà $TS \parallel CB$ nên bốn điểm M, N, S, T thẳng hàng.	0.5
	b. Gọi H là hình chiếu của A lên BC. Theo câu a do M, N, S, T thẳng hàng nên MN là trung trực của AH. Do đó J nằm trên trung trực AH. Khi đó đường tròn tâm J bán kính JA đi qua H.	0.5
	Gọi R là giao điểm của AJ và BC. Ta có J là trung điểm của AR.	0.5
	Gọi P là điểm đối xứng với I qua BC. Dễ thấy P và A liên hợp đẳng giác trong tam giác IBC.	0.5
	Gọi K là trung điểm AP ta có K là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $DHMN$.	0.5
	Gọi Q là điểm đối xứng với A qua BC ta có P, Q, R thẳng hàng nên H, K, J thẳng hàng.	0.5
	Suy ra các đường tròn tâm J bán kính JH và đường tròn tâm K bán kính KH tiếp xúc nhau.	0.5
Câu 4 (4 điểm)	a. Ta chứng minh tổng quát $[ix]$ không chia hết cho n với mọi $i \in \{1; 2; \dots; n-1\}$. Đặt $ia = bk + t (k, t \in \mathbb{N})$ và $0 \leq t \leq b-1$. Khi đó: $\frac{ia}{b} = k + \frac{t}{b} \Rightarrow ix = k + \frac{t}{b} \Rightarrow [ix] = \left[k + \frac{t}{b} \right] = k.$	0.5
	Ta cần chứng minh $k \nmid n$. Thật vậy giả sử $k \mid n$, suy ra $k = nk' (k' \in \mathbb{N})$. Khi đó $i(an - a + 1) = n(nbk' + t) - (bnk' + t) + i \cdot bn \Rightarrow nt - t + i \cdot bn.$	0.5
	Vì $n \geq 2$ nên $nt - t + i > 0$, do đó $bn \leq nt - t + i = t(n-1) + i \leq (b-1)(n-1) + (n-1) = b(n-1) < bn \text{ (vô lý)}.$ Do đó điều giả sử trên là sai, tức là $[ix]$ không chia hết cho n với mọi $i \in \{1; 2; \dots; n-1\}$. Yêu cầu đầu bài ứng với trường hợp $i = 1$.	0.5

	b. Ta chứng minh $\{[0x]; [1x]; [2x]; \dots; [(n-1)x]\}$ là một hệ thặng dư đầy đủ mod n. Từ chứng minh phần a ta thấy chỉ cần chứng minh $[ix] \not\equiv [jx] \pmod{n}$ với mọi $1 \leq i < j \leq n-1$. Thật vậy giả sử tồn tại $1 \leq i < j \leq n-1$ thỏa mãn $[ix] \equiv [jx] \pmod{n}$. Đặt $ia = bk + t; ja = bq + t' (k, q, t, t' \in \mathbb{N})$ và $0 \leq t, t' \leq b-1$. Vì $ia < ja$ nên $k \leq q$. Khi đó chứng minh tương tự phần a ta có $[ix] = \left[\frac{ia}{b} \right] = k; [jx] = \left[\frac{ja}{b} \right] = q \text{ và theo giả sử trên thì } n \mid q - k. \text{ Ta có:}$ $a(j-i) = b(q-k) + (t'-t) \Rightarrow b(q-k) = a(j-i) - (t'-t) : bn$ $\Rightarrow (n-1)a(j-i) - (n-1)(t'-t) : bn$ Mà $a(n-1) \equiv -1[bn]$ nên $-(j-i) - (n-1)(t'-t) : bn$ hay $(j-i) + (n-1)(t'-t) : bn. \text{ Giả sử } (j-i) + (n-1)(t'-t) = 0 \Rightarrow j-i : (n-1),$ vô lý vì $0 < j-i < n-1$. Do đó $(j-i) + (n-1)(t'-t) \neq 0$. Suy ra $bn \leq (j-i) + (n-1)(t'-t) $ Lại có: $ (j-i) + (n-1)(t'-t) \leq j-i + (n-1)(t'-t) < (n-1) + (n-1)(b-1) < bn$ (vô lý). Vậy điều giả sử trên là sai suy ra $\{[0x]; [1x]; [2x]; \dots; [(n-1)x]\}$ là một hệ thặng dư đầy đủ mod n. Từ đó: $S = \sum_{i=1}^{n-1} \left\{ \frac{[ix]}{n} \right\} = \frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \dots + \frac{n-1}{n} = \frac{n(n-1)}{2n} = \frac{n-1}{2}.$	0.5 0.5 0.5 0.5 0.5
Câu 5 (4 điểm)	a. Với mỗi cách chọn n số từ các số $1; 2; \dots; 2n$ ta thu được một dãy duy nhất các số $a_1, a_3, \dots, a_{2n-1}$ thỏa mãn $a_1 < a_3 < a_5 < \dots < a_{2n-1}$; những số còn lại $a_2; a_4; \dots; a_{2n}$ cũng có duy nhất một cách sắp xếp thỏa mãn $a_2 > a_4 > a_6 > \dots > a_{2n}$. Do đó số các hoán vị thỏa mãn yêu cầu là C_{2n}^n.	1
	a) Với mỗi k nguyên dương cố định ($1 \leq k \leq n$) ta chứng minh $a_{2k} \leq n < a_{2k-1}$ hoặc $a_{2k-1} \leq n < a_{2k}$. (*) Theo các tính chất (i) và (ii) ta có $a_1 < a_3 < \dots < a_{2k-3} < a_{2k-1} < a_{2k+1} < \dots < a_{2n-1}$ và $a_2 > a_4 > \dots > a_{2k-2} > a_{2k} > a_{2k+2} > \dots > a_{2n}$ Nếu $a_{2k-1} > a_{2k}$ thì a_{2k-1} lớn hơn n số $a_1, a_3, \dots, a_{2k-3}$ và $a_{2k}, a_{2k+2}, \dots, a_{2n}$ nên $a_{2k-1} > n$.	1

	Mặt khác a_{2k} nhỏ hơn n số $a_2, a_4, \dots, a_{2k-2}; a_{2k-1}, a_{2k+1}, \dots, a_{2n-1}$ nên $a_{2k} \leq n$. Tương tự, nếu $a_{2k-1} < a_{2k}$ thì ta cũng có $a_{2k-1} \leq n < a_{2k}$. Ta chứng minh xong (*). Tổng S sẽ có một trong các dạng $S = \pm(a_1 - a_2) \pm(a_3 - a_4) \pm \dots \pm(a_{2n-1} - a_{2n})$ Do có tính chất (*) nên khi phá các dấu ngoặc sẽ có n số a_i mang dấu cộng (ứng với những số lớn hơn n) và n số hạng còn lại mang dấu trừ. Do đó $S = -1 - 2 - \dots - n + (n + 1) + (n + 2) + \dots + 2n = n^2.$ Như vậy tổng S chỉ có thể nhận một giá trị duy nhất là $S = n^2$.	1 1

Xem thêm: ĐỀ THI HSG TOÁN 12
<https://toanmath.com/de-thi-hsg-toan-12>