

Câu 1 (1,0 điểm). Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số : $y = x^4 - 2x^2 + 1$

Câu 2 (1,0 điểm). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 4x + 3$ tại giao điểm của nó với trục tung.

Câu 3 (1,0 điểm).

a) Tìm môđun của số phức z biết $3z + 2\bar{z} = (4 - i)^2$

b) Giải bất phương trình : $3 \cdot 9^x + 2 \cdot 3^x - 1 > 0$ ($x \in \mathbb{R}$)

Câu 4 (1,0 điểm). Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^{\sin x} + x) \cdot \cos x dx$.

Câu 5 (1,0 điểm). Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai điểm $A(1;0;2), B(2;1;1)$ và mặt phẳng $(P): 2x + y - 2z + 4 = 0$. Viết phương trình tham số của đường thẳng AB và viết phương trình của mặt cầu (S) có tâm I nằm trên đường thẳng AB , bán kính bằng 4 và tiếp xúc với mặt phẳng (P) ; biết tâm I có hoành độ dương.

Câu 6 (1,0 điểm).

a) Giải phương trình: $\cos x = \sqrt{2} \sin 2x + \sin x$.

b) Từ các chữ số 0,1,2,3,4 ta lập được tập A chứa các số có 3 chữ số đôi một khác nhau, lấy ngẫu nhiên 4 số từ A . Tính xác suất để trong 4 số lấy ra có đúng 1 số chia hết cho 5.

Câu 7 (1,0 điểm). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , $SA \perp (ABCD)$, $SB = a\sqrt{3}$, gọi M là trung điểm AD . Tính theo a thể tích khối chóp $SABCD$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng SM và AB .

Câu 8 (1,0 điểm). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn tâm I ; có đỉnh A thuộc đường thẳng $d: x + y - 2 = 0$, $D(2; -1)$ là chân đường cao của tam giác ABC hạ từ đỉnh A . Gọi điểm $E(3; 1)$ là chân đường vuông góc hạ từ B xuống AI ; điểm $P(2;1)$ thuộc đường thẳng AC . Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC .

Câu 9 (1,0 điểm). Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 - y^3 + 3y^2 + x - 4y + 2 = 0 \\ x^3 + x - 3 = 2\sqrt{x+2} + y \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Câu 10 (1,0 điểm). Cho a, b, c là các số dương và $a + b + c = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu

thức:

$$P = \frac{bc}{\sqrt{3a+bc}} + \frac{ca}{\sqrt{3b+ca}} + \frac{ab}{\sqrt{3c+ab}}$$

ĐÁP ÁN

Câu 1	- TXĐ: $D = \mathbb{R}$ - Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^4 \left(1 - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^4} \right) = +\infty$ - Sự biến thiên: +) Ta có: $y' = 4x^3 - 4x \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \pm 1$ +) Bảng biến thiên <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y</td><td></td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td><td>0</td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td></tr></table> y $+\infty$ $\searrow$ 0 $\nearrow$ 1 $\searrow$ 0 $\nearrow$ $+\infty$ Suy ra: * Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1), (0; 1)$ và hàm đồng biến trên các khoảng $(-1; 0), (1; +\infty)$. * Cực trị: $x_{CD} = 0, y_{CD} = 1$ $x_{CT} = \pm 1, y_{CT} = 0$ - Đồ thị:	x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	y		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	1đ
x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$												
y		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$									
2	Giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 - 4x + 3$ với trục tung là $M(0; 3)$ $y' = 3x^2 - 4 \Rightarrow y'(0) = -4$ Phương trình tiếp tuyến cần tìm : $y = -4x + 3$	0.5 0.25 0.25															
3	a)Gọi $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow \bar{z} = a - bi$ -Ta có: $3z + 2\bar{z} = (4 - i)^2 \Leftrightarrow 3(a + bi) + 2(a - bi) = 15 - 8i \Leftrightarrow 5a + bi = 15 - 8i$ Giải được: $a = 3; b = -8 \Rightarrow z = 3 - 8i \Rightarrow z = \sqrt{73}$ b) Giải phương trình: $3 \cdot 9^x + 2 \cdot 3^x - 1 > 0 \quad (x \in \mathbb{R})$ Đặt $t = 3^x$ ($t > 0$); ta có : $3t^2 + 2t - 1 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t < -1(\text{loại}) \\ t > \frac{1}{3} \end{cases}$	0.25 0.25 0.25															

	 Ta có : $3^x > \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3^x > 3^{-1} \Leftrightarrow x > -1$ Vậy nghiệm của bất phương trình là $x > -1$	0.25
4	$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x} \cos x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \cos x dx$	0.25
	$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x} \cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x} d(\sin x) = e^{\sin x} \Big _0^{\frac{\pi}{2}} = e - 1$	0.25
	$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \cos x dx = x \sin x \Big _0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \frac{\pi}{2} + \cos x \Big _0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1$	0.25
	$I = I_1 + I_2 = e + \frac{\pi}{2} - 2$	0.25
5	-Vectơ chỉ phương của đường thẳng AB là $\overrightarrow{AB} = (1; 1; -1)$ 	0.25
	-Phương trình tham số của đường thẳng AB là $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = 2 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ -----	0.25
	Gọi tâm $I(1+t; t; 2-t) \in AB; (t > -1)$ (S) tiếp xúc mp (P) $\Leftrightarrow d(I, (P)) = 4 \Leftrightarrow 5t + 2 = 12 \Leftrightarrow \begin{cases} 5t + 2 = 12 \\ 5t + 2 = -12 \end{cases} \begin{cases} t = 2 \text{ (nhân)} \\ t = -\frac{14}{5} \text{ (loại)} \end{cases}$ 	0.25
	Phương trình mặt cầu (S) cần tìm : $(x-3)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 16$	0.25
6	a) Giải phương trình: $\cos x = \sqrt{2} \sin 2x + \sin x \Leftrightarrow \cos x - \sin x = \sqrt{2} \sin 2x \Leftrightarrow \sqrt{2} \sin 2x = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$ 	0.25
	Tìm và kết luận nghiệm: $\begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases}; k \in \mathbb{Z}$	0.25
	b) Tìm được tập A có 48 số có 3 chữ số đôi một khác nhau Tìm được số phần tử của không gian mẫu : $n(\Omega) = C_{48}^4 = 194580$ 	0.25
	Tìm được trong 48 số có 12 số chia hết cho 5 và 36 số không chia hết cho 5 Số kết quả thuận lợi cho biến cố đề bài là : $C_{12}^1 \cdot C_{36}^3 = 85680$ Xác suất cần tìm là $P = \frac{476}{1081}$	0.25

7	+ Tính được $SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = \sqrt{3a^2 - a^2} = a\sqrt{2}$, $S_{ABCD} = a^2$ + $V = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SA = \frac{a^3 \cdot \sqrt{2}}{3}$ + Kẻ $AH \perp SM$ ($H \in SM$) (1) $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp AB$, mà $AD \perp AB \Rightarrow AB \perp (SAD) \Rightarrow AB \perp AH$ Từ (1) và (2) $\Rightarrow d(SM, AB) = AH$ + $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AM^2} = \frac{1}{2a^2} + \frac{4}{a^2} \Rightarrow AH^2 = \frac{2a^2}{9} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{2}}{3} = d(SM, AB)$	0.25 0.25 0.25 0.25
8	Gọi M là điểm đối xứng của A qua I. Ta có $\angle BCM = \angle BAM = \angle EDC$ (Do tứ giác ABDE nội tiếp). Từ đó suy ra $DE \parallel MC$ mà $MC \perp AC \Rightarrow DE \perp AC$. Ta có $\overrightarrow{DE} = (1; 2)$. Phương trình AC : $1(x - 2) + 2(y - 1) = 0 \Leftrightarrow x + 2y - 4 = 0$. Ta có $\{A\} = d \cap AC$. Tọa độ của A thỏa hệ phương trình $\begin{cases} x + 2y - 4 = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow A(0; 2)$. Ta có $\overrightarrow{AD} = (2; -3)$, $\overrightarrow{AE} = (3; -1)$. Phương trình BE : $3(x - 3) - (y - 1) = 0 \Leftrightarrow 3x - y - 8 = 0$.	0.25 0.25

	Phương trình BD : $2(x-2)-3(y+1)=0 \Leftrightarrow 2x-3y-7=0$. $\{B\} = BE \cap BD$ Tọa độ của B thỏa hệ phương trình $\begin{cases} 3x-y-8=0 \\ 2x-3y-7=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{17}{7} \\ y=-\frac{5}{7} \end{cases} \Rightarrow B\left(\frac{17}{7};-\frac{5}{7}\right)$. Ta có $\{C\} = AC \cap BD$, nên Tọa độ của C thỏa hệ phương trình $\begin{cases} x+2y-4=0 \\ 2x-3y-7=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{26}{7} \\ y=\frac{1}{7} \end{cases} \Rightarrow C\left(\frac{26}{7};\frac{1}{7}\right)$. Kết luận : $A(0;2)$, $B\left(\frac{17}{7};-\frac{5}{7}\right)$, $C\left(\frac{26}{7};\frac{1}{7}\right)$.	0.25
Câu 9	$\begin{cases} x^3 - y^3 + 3y^2 + x - 4y + 2 = 0 & (1) \\ x^3 + x - 3 = 2\sqrt{x+2} + y & (2) \end{cases}$ Điều kiện: $x \geq -2$. $(1) \Leftrightarrow x^3 + x + 2 = y^3 - 3y^2 + 4y \Leftrightarrow x^3 + x + 2 = (y-1)^3 + (y-1) + 2$.	0.25
	Xét hàm số $f(t) = t^3 + t + 2$ trên $[-2; +\infty)$. Ta có: $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0, \forall t \in [-2; +\infty)$. Mà $f(t)$ liên tục trên $[-2; +\infty)$, suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[-2; +\infty)$. Do đó: $x = y - 1$.	0.25
	Thay $y = x + 1$ và phương trình (2) ta được: $x^3 - 3 = 2\sqrt{x+2} + 1$ $\Leftrightarrow x^3 - 8 = 2(\sqrt{x+2} - 2) \Leftrightarrow (x-2)(x^2 + 2x + 4) = \frac{2(\sqrt{x+2} - 2)(\sqrt{x+2} + 2)}{(\sqrt{x+2} + 2)}$ $\Leftrightarrow (x-2)(x^2 + 2x + 4) = \frac{2(x-2)}{(\sqrt{x+2} + 2)} \Leftrightarrow (x-2) \left[x^2 + 2x + 4 - \frac{2}{(\sqrt{x+2} + 2)} \right] = 0$	0.25
	$x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow y = 3$ $x^2 + 2x + 4 - \frac{2}{(\sqrt{x+2} + 2)} = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 4 = \frac{2}{(\sqrt{x+2} + 2)} \quad (*)$ Ta có $VT = x^2 + 2x + 4 = (x+1)^2 + 3 \geq 3; VP = \frac{2}{\sqrt{x+2} + 2} \leq 1, \forall x \in [-2; +\infty)$ Do đó phương trình (*) vô nghiệm. Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y) = (2; 3)$.	0.25
10	Với $a + b + c = 3$ ta có $\frac{bc}{\sqrt{3a+bc}} = \frac{bc}{\sqrt{a(a+b+c)+bc}} = \frac{bc}{\sqrt{(a+b)(a+c)}} \leq \frac{bc}{2} \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} \right)$ Theo BĐT Cô-Si: $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} \geq \frac{2}{\sqrt{(a+b)(a+c)}}$, dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow b = c$	0.25

	Tương tự $\frac{ca}{\sqrt{3b+ca}} \leq \frac{ca}{2} \left(\frac{1}{b+a} + \frac{1}{b+c} \right)$ và $\frac{ab}{\sqrt{3c+ab}} \leq \frac{ab}{2} \left(\frac{1}{c+a} + \frac{1}{c+b} \right)$	0.25
	Suy ra $P \leq \frac{bc+ca}{2(a+b)} + \frac{ab+bc}{2(c+a)} + \frac{ab+ca}{2(b+c)} = \frac{a+b+c}{2} = \frac{3}{2}$	0.25
	Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$. Vậy $\max P = \frac{3}{2}$ khi $a = b = c = 1$.	0.25