

LÊ BÁ BẢO

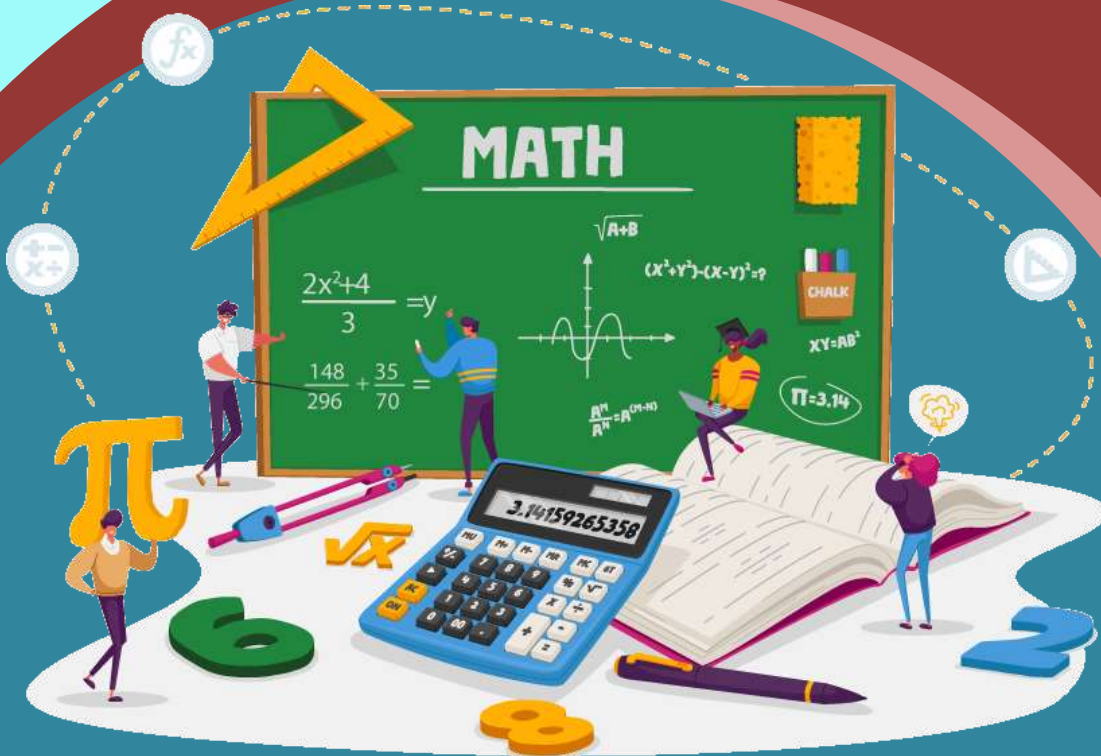
TRƯỜNG THPT ĐẶNG HUY TRỨ - ADMIN CLB GIÁO VIÊN TRẺ TP HUẾ

TOÁN 12

KHẢO SÁT HÀM SỐ

GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

- ✍ LUYỆN THI THPT QUỐC GIA
- ✍ CẬP NHẬT TỪ ĐỀ THI MỚI NHẤT





CHUYÊN ĐỀ TRẮC NGHIỆM

Môn: Toán 12

Chủ đề:

GTLN_GTNN của hàm số

Lớp Toán thầy LÊ BÁ BẢO

Trưởng THPT Đặng Huy Trứ
116/04 Nguyễn Lộ Trạch, TP Huế

SĐT: 0935.785.115 Facebook: Lê Bá Bảo
Trung tâm KM 10 Hường Trà, Huế.

I- TỔNG QUAN LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên D .

a) Số M được gọi là **giá trị lớn nhất** (GTLN) của hàm số $y = f(x)$ trên tập D nếu: $f(x) \leq M$ với mọi x thuộc D và tồn tại $x_0 \in D$ sao cho $f(x_0) = M$. Ký hiệu: $M = \max_D f(x)$

b) Số m được gọi là **giá trị nhỏ nhất** (GTNN) của hàm số $y = f(x)$ trên tập D nếu: $f(x) \geq m$ với mọi x thuộc D và tồn tại $x_0 \in D$ sao cho $f(x_0) = m$. Ký hiệu: $m = \min_D f(x)$

Tóm tắt:

$$M \text{ là GTLN của } y = f(x) \text{ trên } D \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq M, \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D : f(x_0) = M \end{cases}$$

$$m \text{ là GTNN của } y = f(x) \text{ trên } D \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq m, \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D : f(x_0) = m \end{cases}$$

2. Cách tìm GTLN- GTNN của hàm số trên một đoạn:

2.1 Kết quả 1: Mọi hàm số liên tục trên một đoạn đều có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn đó.

2.2 Quy tắc tìm GTLN- GTNN của hàm số liên tục trên một đoạn:

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $[a; b]$.

Bước 1: Tìm các điểm $x_1, x_2, \dots, x_n$ trên khoảng $(a; b)$, tại đó $f'(x) = 0$.

Bước 2: Tính $f(a), f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), f(b)$.

Bước 3: Ta có: $M = \max_{[a; b]} f(x) = \max \{f(a), f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), f(b)\}$
và $m = \min_{[a; b]} f(x) = \min \{f(a), f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), f(b)\}$.

Nhận xét:

a) Nếu đề bài không nêu khoảng, đoạn xác định cho trước thì ta tìm GTLN, GTNN trên tập xác định của hàm số đó.

b) Khi khoảng xác định của hàm số không là đoạn thì tìm GTLN- GTNN ta thường lập bảng biến thiên của hàm số.

c) Nếu $f'(x)$ giữ nguyên dấu trên cả đoạn $[a; b]$ thì hàm số đồng biến hoặc nghịch biến trên cả đoạn. Do đó, $f(x)$ đạt được GTLN, GTNN tại các điểm đầu mút của đoạn.

Bảng biến thiên			Kết luận
x	a	b	$\max_{[a;b]} f(x) = f(b); \min_{[a;b]} f(x) = f(a).$
$f'(x)$	+		
$f(x)$	$f(a) \nearrow f(b)$		
x	a	b	$\max_{[a;b]} f(x) = f(a); \min_{[a;b]} f(x) = f(b).$
$f'(x)$	+		
$f(x)$	$f(a) \searrow f(b)$		

II- BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1: Tìm GTLN- GTNN (nếu có) của các hàm số sau:

- 1) $f(x) = -3x^2 + 4x - 8, x \in [0;1]$ 2) $f(x) = \sqrt{25 - x^2}, x \in [-4;4]$ 3) $f(x) = x\sqrt{1 - x^2}$
 4) $f(x) = 4x^3 - 3x^4$ 5) $f(x) = \frac{x}{x+2}, x \in (-2;4]$ 6) $f(x) = \sqrt{x-2} + \sqrt{4-x}$
 7) $f(x) = x + 2 + \frac{1}{x-1}, x > 1$ 8) $f(x) = \frac{4}{1+x^2}$ 9) $f(x) = x^4 - 8x^2 + 16, x \in [-1;3]$
 10) $f(x) = x + \frac{1}{x}, x > 0$ 11) $f(x) = x + \frac{1}{x}$ 12) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 7, x \in [-4;3]$

Bài 2: Tìm GTLN- GTNN (nếu có) của các hàm số sau:

- 1) $f(x) = |x|$ 2) $f(x) = |x^2 - 3x + 2|, x \in [-10;10]$ 3) $f(x) = |x^3 + 3x^2 - 72x + 90|, x \in [-5;5]$

Bài 3: Tìm GTLN- GTNN (nếu có) của các hàm số sau:

- 1) $f(x) = \frac{1}{\sin x}, x \in \left[\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{6}\right]$ 2) $f(x) = \frac{1}{\sin x}, x \in (0; \pi)$ 3) $f(x) = 2\sin x + \sin 2x, x \in \left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$
 4) $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$ 5) $f(x) = 2\sin^2 x + 2\sin x - 1$ 6) $f(x) = \cos^2 x - \sin x \cos x + 4$
 7) $f(x) = \cos^3 x - 6\cos^2 x + 9\cos x + 5$ 8) $f(x) = \sin^3 x - \cos 2x + \sin x + 2$

Bài 4: Tìm GTLN- GTNN (nếu có) của các hàm số sau:

- 1) $y = \frac{2\cos^2 x + |\cos x| + 1}{|\cos x| + 1}$ 2) $y = 4\cos^2 x + 3\sqrt{3}\sin x + 7\sin^2 x$
 3) $y = \sin x - \cos^2 x + \frac{1}{2}$ 4) $y = \sin \frac{2x}{1+x^2} + \cos \frac{4x}{1+x^2} + 1$
 5) $y = \cos 3x + 2\sin^2 \frac{x}{2}$ 6) $y = 2\sin^2 x + 4\sin x \cos x + \sqrt{5}$

Bài 5: a) Tìm GTNN- GTLN của hàm số: $y = \sqrt{1+x} + \sqrt{8-x}$.

b) Xác định m để phương trình $\sqrt{1+x} + \sqrt{8-x} + \sqrt{(1+x)(8-x)} = m$ có nghiệm.

Bài 6: a) Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình $12x^2 - 6mx + m^2 - 4 + \frac{12}{m^2} = 0$.

Tìm m sao cho $x_1^3 + x_2^3$ đạt GTLN, GTNN.

b) Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình $2x^2 + 2(m+1)x + m^2 + 4m + 3 = 0$. Tìm GTLN của biểu thức: $A = |x_1x_2 - 2(x_1 + x_2)|$.

Bài 7: a) Cho x, y thỏa $x > 0, y > 0$ và $x + y = 1$. Tìm GTNN của: $P = xy + \frac{1}{xy}$.

b) Cho x, y thỏa $x \geq 0, y \geq 0$ và $x + y = 1$. Tìm GTNN, GTLN của: $P = \frac{x}{y+1} + \frac{y}{x+1}$

c) Cho x, y, z là những số dương thay đổi và thỏa mãn điều kiện: $x + y + z \leq \frac{3}{2}$

Tìm GTNN của biểu thức: $P = x + y + z + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$.

Bài 8: a) Cho số dương m . Hãy phân tích m thành tổng của hai số dương sao cho tích của chúng là lớn nhất.

b) Tìm hai số có hiệu là 13 sao cho tích của chúng là bé nhất.

c) Hãy tìm tam giác vuông có diện tích lớn nhất nếu tổng của một cạnh góc vuông và cạnh huyền bằng hằng số a ($a > 0$).

d) Cho tứ diện ABCD có $AB = x$, các cạnh khác đều bằng 1. Tìm x sao cho thể tích tứ diện là lớn nhất.

e) Thể tích của hình lăng trụ tứ giác đều bằng V. Cạnh đáy của hình lăng trụ đó phải bằng bao nhiêu để diện tích toàn phần của hình lăng trụ đó là nhỏ nhất?

f) Trong các hình trụ nội tiếp hình cầu bán kính bằng R. Hãy tìm hình trụ có thể tích lớn nhất.

g) Tính chiều cao của hình nón nội tiếp trong hình cầu bán kính R để hình nón này có thể tích lớn nhất.

III- BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Dạng 1: Lý thuyết và tìm giá trị giá trị lớn nhất – giá trị nhỏ nhất

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM MINH HỌA

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập D . Số M được gọi là giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên D nếu

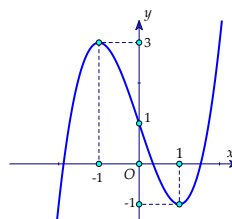
A. $f(x) \geq M$ với mọi $x \in D$.

B. $f(x) \geq M$ với mọi $x \in D$ và tồn tại $x_0 \in D$ sao cho $f(x_0) = M$.

C. $f(x) \leq M$ với mọi $x \in D$.

D. $f(x) \leq M$ với mọi $x \in D$ và tồn tại $x_0 \in D$ sao cho $f(x_0) = M$.

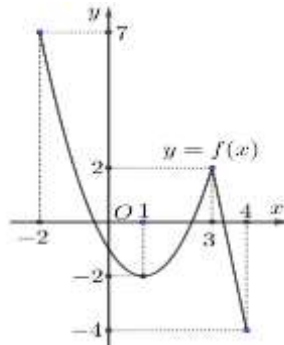
Câu 2: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên dưới:



Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\max_{[-1;1]} f(x) = 0$. B. $\max_{[-1;1]} f(x) = 1$. C. $\max_{[-1;1]} f(x) = 3$. D. $\max_{[-1;1]} f(x) = 2$.

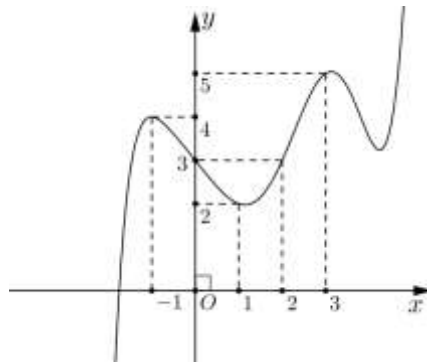
Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đồ thị trên đoạn $[-2; 4]$ như hình vẽ bên dưới:



Tổng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-2; 4]$ bằng

- A. 5. B. 3. C. -2. D. 0.

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(|x - 2|)$ trên đoạn $[-1; 5]$. Giá trị của $M + m$ bằng

- A. 9. B. 7. C. 1. D. 8.

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$				
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\max_{x \in [-1;1]} f(x) = 2$. B. $\max_{x \in [-1;1]} f(x) = 1$. C. $\max_{x \in [-1;1]} f(x) = 0$. D. $\max_{x \in [-1;1]} f(x) = -3$.

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	1	2	$+\infty$			
y'		$-$	$\parallel$	$+$	0	$+$	$\parallel$	$-$
y	$+\infty$				2			
		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		
			-3				-4	

Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

- A. Hàm số có 2 điểm cực trị.
- B. Hàm số đạt giá trị lớn nhất bằng 2 và giá trị nhỏ nhất bằng 3.
- C. Đồ thị hàm số có đúng một đường tiệm cận.
- D. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(2; +\infty)$.

Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	-3	2	1	$+\infty$

Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\max_{x \in [5; 15]} f(x) = f(5)$.
- B. $\max_{x \in [5; 15]} f(x) = f(15)$.
- C. $\max_{x \in [5; 15]} f(x) = 2$.
- D. $\max_{x \in [5; 15]} f(x) = f(10)$.

Câu 8: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	-3	2	1	$+\infty$

Đặt $g(x) = 2f(x) + 1$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\max_{x \in [-1; 1]} g(x) = 2$.
- B. $\max_{x \in [-1; 1]} g(x) = 5$.
- C. $\max_{x \in [-1; 1]} g(x) = 1$.
- D. $\max_{x \in [-1; 1]} g(x) = -5$.

Câu 9: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	-3	2	1	$+\infty$

Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\max_{x \in [-1; 1]} |f(x)| = 2$.
- B. $\max_{x \in [-1; 1]} |f(x)| = 1$.
- C. $\max_{x \in [-1; 1]} |f(x)| = 0$.
- D. $\max_{x \in [-1; 1]} |f(x)| = 3$.

Câu 10: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	-3	2	1	$+\infty$

Đặt $g(x) = f(\sin x)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

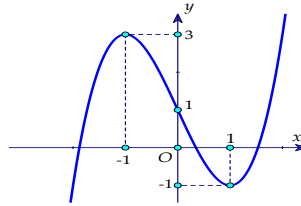
- A. $\max_{\mathbb{R}} g(x) = 2$. B. $\max_{\mathbb{R}} g(x) = 1$. C. $\max_{\mathbb{R}} g(x) = 3$. D. $\max_{\mathbb{R}} g(x) = 4$.
- Câu 11:** Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 3x + 2$ trên đoạn $[-1; 3]$ bằng
A. 4. B. 2. C. 20. D. 16.
- Câu 12:** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 36x$ trên đoạn $[3; 7]$ bằng
A. -81. B. $-48\sqrt{3}$. C. -91. D. $-24\sqrt{3}$.
- Câu 13:** Trên đoạn $[1; 5]$, hàm số $y = x + \frac{4}{x}$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm nào dưới đây?
A. $x = 5$. B. $x = 2$. C. $x = 1$. D. $x = 4$.
- Câu 14:** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \frac{x-3}{x+2}$ trên đoạn $[0; 4]$ bằng:
A. $f(0)$. B. $f(4)$. C. $f(2)$. D. $f(3)$.
- Câu 15:** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{4-3x}$ trên đoạn $[0; 1]$ bằng
A. 2. B. 1. C. 0. D. 4.
- Câu 16:** Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{5-x} + \sqrt{x+3}$. Hiệu $M - m$ bằng
A. $4 - 2\sqrt{2}$. B. $\sqrt{2}$. C. $7 - 4\sqrt{2}$. D. $8 - 5\sqrt{2}$.
- Câu 17:** Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = |x^2 + 4x - 5|$ trên đoạn $[-3; 0]$. Tính $M + m$.
A. 5. B. 9. C. 14. D. 8.
- Câu 18:** Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = 4x + \sin^2 \pi x$ trên đoạn $[-1; 2]$. Giá trị của $m + M$ bằng
A. 0. B. 4. C. -2. D. -4.
- Câu 19:** Cho hàm số $y = \sin x \cdot \cos^2 \frac{x}{2}$. Giá trị lớn nhất của hàm số trên $[0; \pi]$ bằng
A. 0. B. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{3\sqrt{3}}{8}$.
- Câu 20:** Hàm số nào sau đây **không** có giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất trên đoạn $[-2; 2]$?
A. $y = x^3 + 2$. B. $y = \frac{x-1}{x+1}$. C. $y = x^4 + x^2$. D. $y = -x + 1$.
- Câu 21:** Cho hàm số $y = \cos 3x - \cos 2x - 5 \cos x + 1$. Giá trị lớn nhất của hàm số bằng
A. 4. B. $\frac{142}{27}$. C. -4. D. $\frac{35}{27}$.
- Câu 22:** Hàm số $f(x) = -\cos^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin x + \cos x)$ có tích giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất bằng
A. $3 - \sqrt{2}$. B. $-\sqrt{2}$. C. $-\frac{5}{4}$. D. $\frac{1}{4}$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TỰ LUYỆN

Câu 23: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $\mathbb{R}$ là 2. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $f(x) < 2, \forall x \in \mathbb{R}$. B. $f(x) > 2, \forall x \in \mathbb{R}$.
C. $f(x) \geq 2, \forall x \in \mathbb{R}, \exists x_0, f(x_0) = 2$. D. $f(x) \leq 2, \forall x \in \mathbb{R}, \exists x_0, f(x_0) = 2$.

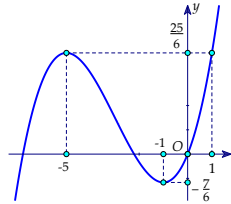
Câu 24: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên dưới:



Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\max_{[0;1]} f(x) = 0$. B. $\max_{[0;1]} f(x) = 1$. C. $\max_{[0;1]} f(x) = 3$. D. $\max_{[0;1]} f(x) = 2$.

Câu 25: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên dưới:



Gọi M, N lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên $[-5; 1]$. Tổng $M + N$ bằng

- A. 3. B. 2. C. $\frac{25}{6}$. D. -1.

Câu 26: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$				
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\min_{x \in [-1; 1]} f(x) = 2$. B. $\min_{x \in [-1; 1]} f(x) = 1$. C. $\min_{x \in [-1; 1]} f(x) = 0$. D. $\min_{x \in [-1; 1]} f(x) = -3$.

Câu 27: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$				
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Khẳng định nào sau đây đúng?

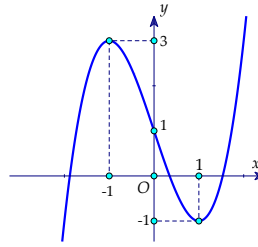
A. $\min_{x \in [0;1]} f(x) = -3.$

B. $\min_{x \in [0;1]} f(x) = 2.$

C. $\min_{x \in [0;1]} f(x) = 0.$

D. $\min_{x \in [0;1]} f(x) = 1.$

Câu 28: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên dưới:



Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f(\sin x)$ bằng

A. 0.

B. 1.

C. 3.

D. 2.

Câu 29: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$				
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$				
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\max_{x \in [-15; -5]} f(x) = f(-5).$

B. $\max_{x \in [-15; -5]} f(x) = f(-15).$

C. $\max_{x \in [-15; -5]} f(x) = 2.$

D. $\max_{x \in [-15; -5]} f(x) = f(-10).$

Câu 30: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$				
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Đặt $g(x) = 3 - 4f(x)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\min_{x \in [-1;1]} g(x) = 15.$

B. $\min_{x \in [-1;1]} g(x) = -5.$

C. $\min_{x \in [-1;1]} g(x) = -15.$

D. $\max_{x \in [-1;1]} g(x) = -3.$

Câu 31: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$				
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\min_{x \in [-1;1]} |f(x)| = 2.$

B. $\min_{x \in [-1;1]} |f(x)| = 1.$

C. $\min_{x \in [-1;1]} |f(x)| = 0.$

D. $\min_{x \in [-1;1]} |f(x)| = 3.$

Câu 32: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$				
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$		-3		2		1		$+\infty$

Đặt $g(x) = f(\cos x)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\min_{\left[0; \frac{\pi}{2}\right]} g(x) = 1.$ B. $\min_{\left[0; \frac{\pi}{2}\right]} g(x) = 2.$ C. $\min_{\left[0; \frac{\pi}{2}\right]} g(x) = -3.$ D. $\min_{\left[0; \frac{\pi}{2}\right]} g(x) = 0.$

Câu 33: Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = -x^3 + 48x$ trên đoạn $[-7; 5]$ bằng

- A. 127. B. 128. C. 115. D. 7.

Câu 34: Trên đoạn $[-4; -1]$, hàm số $y = x^4 - 8x^2 + 13$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm

- A. $x = -2.$ B. $x = -1.$ C. $x = -4.$ D. $x = -3.$

Câu 35: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 + \frac{8}{x}$ trên đoạn $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$ bằng

- A. 8. B. $\frac{15}{2}.$ C. $\frac{65}{4}.$ D. $6\sqrt[3]{2}.$

Câu 36: Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{2x+3}{x-2}$ trên đoạn $[0; 1]$. Tổng $M + m$ bằng

- A. -2. B. $\frac{7}{2}.$ C. $-\frac{13}{2}.$ D. $-\frac{17}{3}.$

Câu 37: Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = 4\sqrt{x-2} - x$ trên đoạn $[2; 11]$ bằng

- A. -2. B. 2. C. 1. D. 3.

Câu 38: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x + \cos^2 x$ trên $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ là

- A. $\frac{\pi}{2}.$ B. $\frac{\pi}{2} + 1.$ C. 1. D. $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}.$

Câu 39: Tìm tập giá trị T của hàm số $y = \sqrt{x-3} + \sqrt{5-x}.$

- A. $T = (3; 5).$ B. $T = [3; 5].$ C. $T = [\sqrt{2}; 2].$ D. $T = [0; \sqrt{2}].$

Câu 40: Hàm số nào sau đây có giá trị nhỏ nhất?

- A. $y = x^3 + 2.$ B. $y = \frac{x-1}{x+1}.$ C. $y = x^4 + 2x^2.$ D. $y = -x + 1.$

Câu 41: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \sin x + \cos 2x$ trên $[0; \pi]$ là

- A. $\frac{9}{8}.$ B. $\frac{5}{4}.$ C. 2. D. 1.

Câu 42: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = 3\sin x - 4\sin^3 x$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ là

- A. 1. B. 3. C. 7. D. -1.

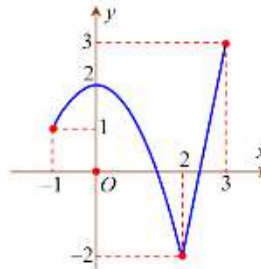
Câu 43: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sin^4 x \cos^6 x$ bằng

- A. $\frac{4}{81}$. B. $\frac{1}{32}$. C. $\frac{3^2}{4^5}$. D. $\frac{108}{5^5}$.

Dạng 3: GTLN – GTNN của hàm ẩn

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM MINH HỌA

Câu 44: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;3]$ và có đồ thị như hình vẽ sau:



Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(3\sin^2 x - 1)$ bằng

- A. 3. B. 2. C. 0. D. 1

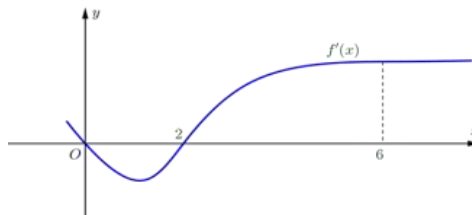
Câu 45: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = -x(x-2)^2(x-3)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[0;4]$ bằng

- A. $f(0)$. B. $f(2)$. C. $f(3)$. D. $f(4)$.

Câu 46: Cho hàm số $y = ax^3 + cx + d$ ($a \neq 0$) có $\min_{(-\infty;0)} f(x) = f(-2)$. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[1;3]$ bằng

- A. $8a + d$. B. $d - 16a$. C. $d - 11a$. D. $2a + d$.

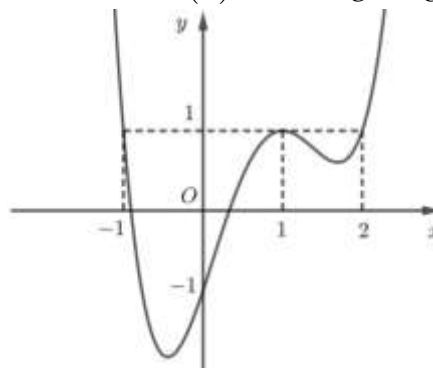
Câu 47: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới:



Biết rằng $f(0) + f(3) = f(2) + f(6)$. Giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của $f(x)$ trên đoạn $[0;6]$ lần lượt là

- A. $f(2); f(6)$. B. $f(1); f(3)$. C. $f(0); f(6)$. D. $f(2); f(0)$.

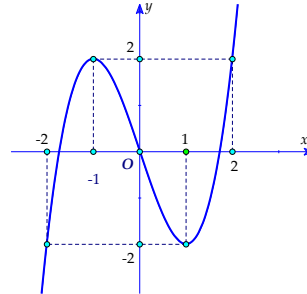
Câu 48: Cho hàm số $f(x)$, đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ là đường cong trong hình bên dưới:



Giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = f(2x) - 2x + 2021$ trên đoạn $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$ bằng

- A. $f(2) + 2019$. B. $f(-1) + 2022$. C. $f(0) + 2021$. D. $f(1) + 2020$.

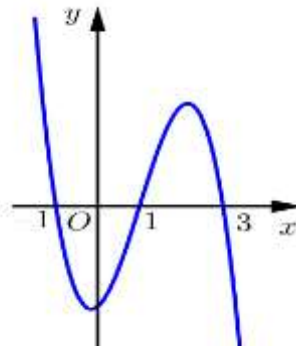
Câu 49: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Hàm số $g(x) = f(x^2 - 1)$ đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $[-1; \sqrt{2}]$ tại điểm nào sau đây?

- A. $x = \pm 1$. B. $x = \sqrt{2}$. C. $x = 0$. D. $x = -1$.

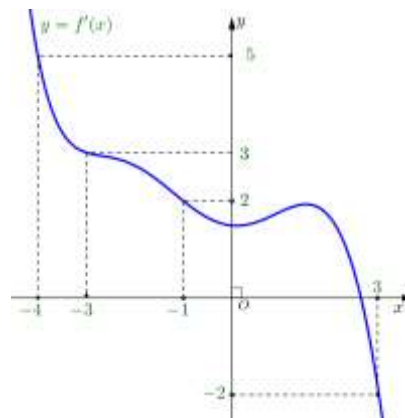
Câu 50: Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm số bậc bốn. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f(\sqrt{x^2 - 2x + 2020})$ trên đoạn $[0; 1]$ là

- A. $f(\sqrt{2020})$. B. $f(\sqrt{2019})$. C. $f(1)$. D. $f(0)$.

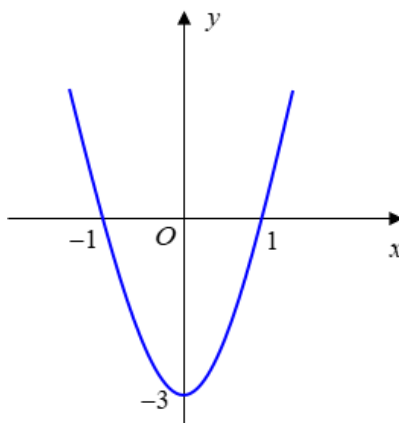
Câu 51: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của đạo hàm $y = f'(x)$ như hình dưới đây:



Trên đoạn $[-3; 4]$, hàm số $g(x) = 2f(x) + (1-x)^2$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm nào dưới đây?

- A. $x_0 = -4$. B. $x_0 = 3$. C. $x_0 = -1$. D. $x_0 = -3$.

Câu 52: Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị (C). Biết đồ thị (C) tiếp xúc với đường thẳng $y = 4$ tại điểm có hoành độ dương và đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới:



Giá trị lớn nhất của hàm số $y = |f(x)|$ trên đoạn $[0; 2]$ bằng

- A. 3. B. 14. C. 8. D. 20.

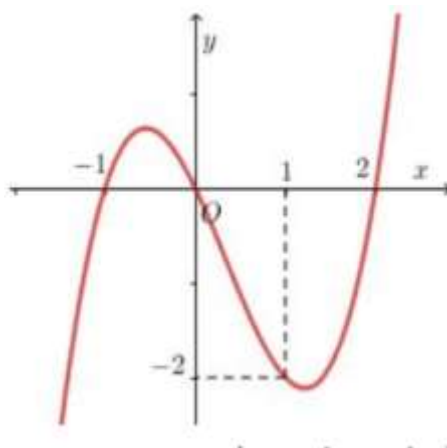
Câu 53: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên trên đoạn $[-4; 4]$ như hình sau:

x	-4	-3		-1		0		2		4
$f'(x)$		+	0	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$			↗ 4		↘ 2		↗ 3		↘ -3	
	-4									

Có bao nhiêu giá trị của tham số m trên đoạn $[-4; 4]$ sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(|x^3| + 3|x|) + f(m)$ trên đoạn $[-1; 1]$ bằng 1?

- A. 2. B. 3. C. 4. D. 5.

Câu 54: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, hàm số $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Hàm số $g(x) = 3f(x^2 - 2) - \frac{3}{2}x^4 - 3x^2 + 2$ đạt giá trị lớn nhất trên $[-2; 2]$ bằng

- A. $g(1)$. B. $g(-2)$. C. $g(0)$. D. $g(2)$.

Câu 55: Cho hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $[f(x) - x] f(x) = x^6 + 3x^4 + 2x^2, \forall x \in \mathbb{R}$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[1; 2]$. Giá trị của $3M - m$ bằng

- A. 4. B. -28. C. -3. D. 33.

Câu 56: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây:

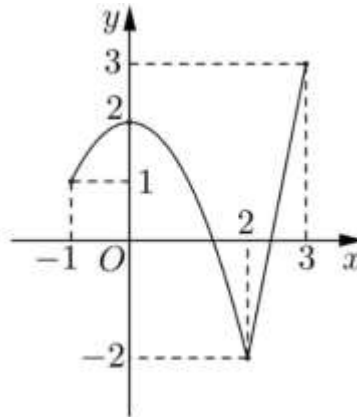
x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	$+\infty$				5		$-\infty$

Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f(4x - x^2) + \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x + \frac{1}{3}$ trên đoạn $[1; 3]$.

- A. 15. B. $\frac{25}{3}$. C. $\frac{19}{3}$. D. 12.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TỰ LUYỆN

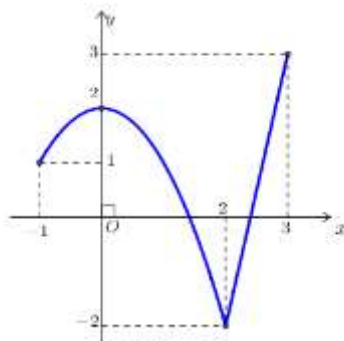
Câu 57: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = f(-\sin x + 1)$. Giá trị của $M - m$ bằng

- A. 0. B. 1. C. 4. D. 5.

Câu 58: Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Giá trị lớn nhất của hàm số $y = g(x) = f(3|\cos x| - 1)$ là

- A. 3. B. 2. C. 1. D. 0.

Câu 59: Biết hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x-1)(x-2)(x+1)^2, \forall x \in \mathbb{R}$. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-1; 2]$ bằng

- A. $f(-1)$. B. $f(0)$. C. $f(1)$. D. $f(2)$.

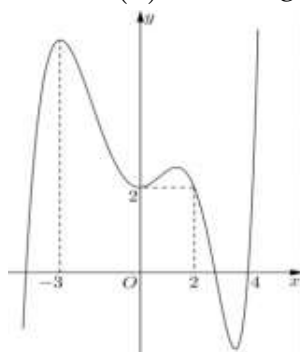
Câu 60: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên $\mathbb{R}$. Biết $f'(0) = 3, f'(2) = -2018$ và bảng xét dấu của $f''(x)$ như sau:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	-	+

Hàm số $y = f(x + 2017) + 2018x$ đạt giá trị nhỏ nhất tại x thuộc khoảng nào sau đây?

- A. $(0; 2)$. B. $(-\infty; -2017)$. C. $(-2017; 0)$. D. $(2017; +\infty)$.

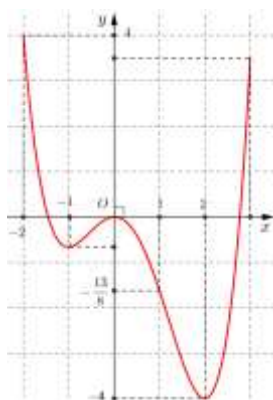
Câu 61: Cho hàm số $f(x)$, đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ là đường cong trong hình bên dưới:



Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f(2x) - 4x$ trên đoạn $\left[-\frac{3}{2}; 2\right]$ bằng

- A. $f(0)$. B. $f(-3) + 6$. C. $f(2) - 4$. D. $f(4) - 8$.

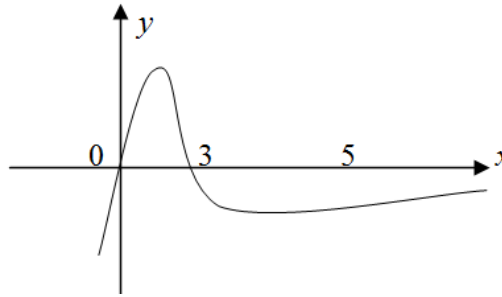
Câu 62: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên dưới:



Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(-2x)$ trên đoạn $\left[-1; \frac{1}{2}\right]$. Giá trị của $2m + 3M$ là

- A. 0. B. $\frac{35}{4}$. C. 4. D. -8.

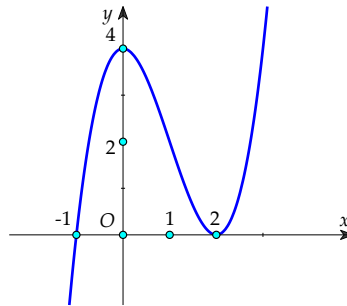
Câu 63: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ được cho như hình vẽ bên dưới:



Biết rằng $f(0) + f(1) - 2f(3) = f(5) - f(4)$. Tìm giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của $f(x)$ trên đoạn $[0; 5]$.

- A. $m = f(5), M = f(3)$ B. $m = f(5), M = f(1)$
C. $m = f(0), M = f(3)$ D. $m = f(1), M = f(3)$

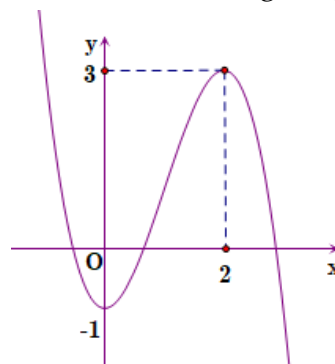
Câu 64: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Khi đó, giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f(2 - x^2)$ trên đoạn $[0; \sqrt{2}]$ là

- A. $\max_{[0; \sqrt{2}]} g(x) = f(0)$. B. $\max_{[0; \sqrt{2}]} g(x) = f(1)$. C. $\max_{[0; \sqrt{2}]} g(x) = f(\sqrt{2})$. D. $\max_{[0; \sqrt{2}]} g(x) = f(2)$.

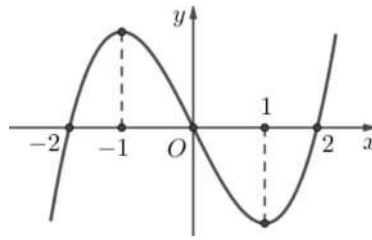
Câu 65: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên dưới:



Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f(x^2 - 3x + 2) + 2022$ trên đoạn $\left[-3; \frac{1}{2}\right]$ bằng

- A. $f\left(\frac{21}{16}\right) + 2022$. B. 2024. C. 2025. D. $f\left(\frac{3}{4}\right) + 2022$.

Câu 66: Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị của đạo hàm như sau:



Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f(2x) - \sin^2 x$ trên đoạn $[-1; 1]$ bằng

- A. $f(-1) - \sin^2 \frac{1}{2}$. B. $f(2) - \sin^2 1$. C. $f(0)$. D. $f(1) - \sin^2 \frac{1}{2}$.

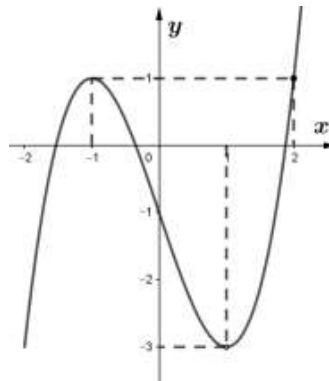
Câu 67: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên $\mathbb{R}$. Biết $f'(2) = f'(-2018) = 0$, $f'(0) = 3$ và bảng xét dấu của $f''(x)$ như sau:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Hàm số $y = f(|x-1| - 2018)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm x_0 . Khi đó x_0 thuộc khoảng nào dưới đây?

- A. $(-2015; 1)$. B. $(-\infty; -2015)$. C. $(-1009; 2)$. D. $(1; 3)$.

Câu 68: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới:



Gọi $g(x) = f(x) - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x - 2019$. Biết $g(-1) + g(1) > g(0) + g(2)$.

Với $x \in [-1; 2]$ thì $g(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng

- A. $g(2)$. B. $g(1)$. C. $g(-1)$. D. $g(0)$.

Dạng 4: Bài toán tham số (không chứa dấu giá trị tuyệt đối)

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM MINH HỌA

Câu 69: Hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên tập xác định $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-3	2	$+\infty$
y'	+	-	+	
y	$-\infty$	$\nearrow 2$	$\searrow -1$	$\nearrow +\infty$

Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của của tham số m để hàm số đã cho có giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(m; m+4)$?

- A. 2. B. 4. C. 1. D. 3.

Câu 70: Gọi S là tập tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x) = x^3 + 3x^2 + m^2 - 5$ có giá trị lớn nhất trên $[-1; 2]$ bằng 19. Tính tổng tất cả các phần tử của S .

- A. -2. B. 2. C. 4. D. 0.

Câu 71: Số các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 2m + 7$ có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[2; 4]$ thuộc khoảng $(-5; 8)$ là

- A. 12. B. 3. C. 7. D. 6.

Câu 72: Giả sử giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{(m+1)x+2}{-x+m}$ trên đoạn $[1; 3]$ bằng $\frac{1}{2}$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $m \in (-5; -3)$. B. $m \in (2; 4)$. C. $m \in (-9; -6)$. D. $m \in \left(-1; \frac{1}{2}\right)$.

Câu 73: Biết giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{x+m^2}{x-2}$ trên đoạn $[-1; 1]$ bằng -1. Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. $m \in (-1; 0)$. B. $m \in (-4; 3)$. C. $m \in (4; 6)$. D. $m \in (0; 1)$.

Câu 74: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-5; 5]$ để giá trị nhỏ nhất của $y = \frac{m \sin x + 1}{\cos x + 2}$ nhỏ hơn -1?

- A. 4. B. 2. C. 6. D. 8.

Câu 75: Có bao nhiêu giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{x-m^2-2}{x-m}$ trên đoạn $[0; 4]$ bằng -1?

- A. 2. B. 1. C. 3. D. 0.

Câu 76: Tìm số dương b để giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^3 - 3bx^2 + b - 1$ trên đoạn $[-1; b]$ bằng 10.

- A. $b = \frac{5}{2}$. B. $b = \frac{3}{2}$. C. $b = 11$. D. $b = 10$.

Câu 77: Cho hàm số $f(x) = m\sqrt{x-1}$ (m là tham số thực khác 0). Gọi m_1, m_2 là hai giá trị của m thỏa mãn $\min_{[2; 5]} f(x) + \max_{[2; 5]} f(x) = m^2 - 10$. Giá trị $m_1 + m_2$ bằng

- A. 3. B. 5. C. 10. D. 2.

Câu 78: Cho hàm số $y = f(x) = x - 3\sqrt[3]{x+1} + m$, đặt $P = \max_{[-1; 7]} (f(x))^2 + \min_{[-1; 7]} (f(x))^2$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để giá trị lớn nhất của P không vượt quá 26?

- A. 6. B. 7. C. 4. D. 5.

Câu 79: Cho hàm số $y = (x^2 + 2x + m)^2$. Tổng tất cả giá trị thực của tham số m sao cho $\min_{[-3; 3]} y = 9$ bằng

- A. 14. B. -14. C. 4. D. -18.

Câu 80: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên thuộc đoạn $[-10;10]$ của tham số m sao cho hàm số $f(x) = (m^2 - 6m)x^4 + (2m - 1)x^2 + 2m^3 - 1$ có giá trị nhỏ nhất ?

- A. 12. B. 14. C. 15. D. 13.

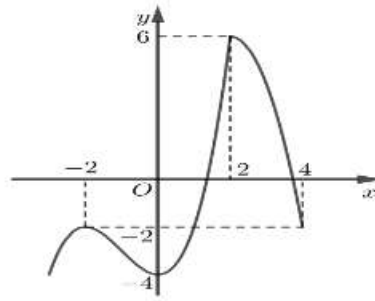
Câu 81: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{x+m}{x^2+x+1}$ có giá trị lớn nhất trên $\mathbb{R}$ nhỏ hơn hoặc bằng 1.

- A. $m \leq 1$. B. $m \geq 1$. C. $m \geq -1$. D. $m \leq -1$.

Câu 82: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ sao cho $\max_{x \in [0;10]} f(x) = f(2) = 4$. Xét hàm số $g(x) = f(x^3 + x) - x^2 + 2x + m$. Giá trị của tham số m để $\max_{x \in [0;2]} g(x) = 8$ là

- A. 5. B. 4. C. -1. D. 3.

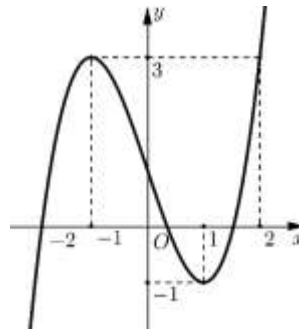
Câu 83: Cho hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-2;4]$ như hình vẽ bên dưới:



Gọi S là tập chứa các giá trị của m để hàm số $y = (f(2-x) + m)^2$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $[-2;4]$ bằng 49. Tổng các phần tử của tập S bằng

- A. -9. B. -23. C. -2. D. -12.

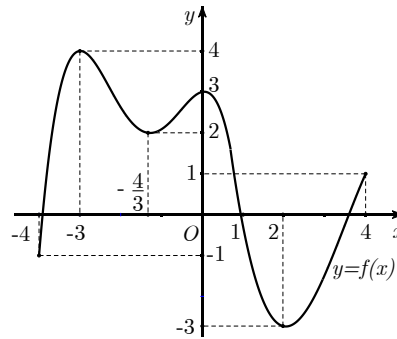
Câu 84: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Đặt hàm số $g(x) = f(2x^3 + x - 1) - m$. Tìm tất cả giá trị của tham số m để $\max_{[0;1]} g(x) = 10$.

- A. $m = 3$. B. $m = -1$. C. $m = -7$. D. $m = -12$.

Câu 85: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $[-4;4]$, có các điểm cực trị trên $(-4;4)$ là $-3; -\frac{4}{3}; 0; 2$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Đặt hàm số $y = g(x) = f(x^3 + 3x) + m$ với m là tham số. Gọi m_1 là giá trị của m để $\max_{[0;1]} g(x) = 4$, m_2 là giá trị của m để $\min_{[-1;0]} g(x) = -2$. Giá trị của $m_1 + m_2$ bằng

- A. -2. B. 0. C. 2. D. -1.

Câu 86: Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{x^2 + mx + 1}{x + m}$ liên tục và đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0; 2]$ tại một điểm $x_0 \in (0; 2)$.

- A. $0 < m < 1$. B. $m > 1$. C. $m > 2$. D. $-1 < m < 1$.

Câu 87: Có bao nhiêu cặp số nguyên $(a; b)$ để hàm số $f(x) = x^6 + ax^3 + bx + 1$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm $x = 1$?

- A. 44. B. 43. C. 45. D. 41.

Câu 88: Cho hàm số $f(x) = (x-1)^2(ax^2 + 4ax - a + b - 2)$, với $a, b \in \mathbb{R}$. Biết trên khoảng $(-\frac{4}{3}; 0)$ hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $x = -1$. Hỏi trên đoạn $[-2; -\frac{5}{4}]$ hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại giá trị nào của x ?

- A. $x = -\frac{5}{4}$. B. $x = -\frac{4}{3}$. C. $x = -\frac{3}{2}$. D. $x = -2$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TỰ LUYỆN

Câu 89: Có bao nhiêu số thực m để tích giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^4 - m^2x^3 - 2x^2 - m$ trên đoạn $[0; 1]$ bằng -1 ?

- A. 0. B. 2. C. 3. D. 1.

Câu 90: Có bao nhiêu giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{x - m^2 - 2}{x - m}$ trên đoạn $[0; 4]$ bằng -1 ?

- A. 0. B. 2. C. 3. D. 1.

Câu 91: Gọi A, B lần lượt là giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{x + m^2 + m}{x - 1}$ trên đoạn $[2; 3]$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để $A + B = \frac{13}{2}$.

- A. $m = 1; m = -2$. B. $m = -2$. C. $m = \pm 2$. D. $m = -1; m = 2$.

- Câu 92:** Có bao nhiêu số thực dương m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ trên đoạn $[m+1; m+2]$ bằng 53?
A. 2. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 1.
- Câu 93:** Cho hàm số $y = \frac{x+m}{x-2}$ thỏa mãn $\min_{[3;5]} y = 4$. Khẳng định nào dưới đây đúng?
A. $m > 5$. **B.** $4 \leq m \leq 5$. **C.** $2 \leq m < 4$. **D.** $m < 2$.
- Câu 94:** Cho hàm số $y = \frac{2x+m}{x-1}$. Tìm giá trị của tham số m để $\max_{[-1;0]} y + \min_{[-1;0]} y = -5$.
A. $m = 3$. **B.** $m = 6$. **C.** $m = 4$. **D.** $m = 2$.
- Câu 95:** Cho hàm số $y = f(x) = \frac{2x+m}{x-1}$. Tính tổng các giá trị của tham số m để $\left| \max_{[2;3]} f(x) - \min_{[2;3]} f(x) \right| = 3$.
A. -1. **B.** -4. **C.** -3. **D.** -2.
- Câu 96:** Cho hàm số $y = \frac{x+m}{x^2+4}$ (m là tham số thực). Biết $\max_{\mathbb{R}} y = 2$ khi $m = \frac{a}{b}$, với a, b là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $S = a + b$.
A. 72. **B.** 9. **C.** 69. **D.** 71.
- Câu 97:** Tìm giá trị tham số m để hàm số $f(x) = \frac{mx+5}{x-m}$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;1]$ bằng -7.
A. $m = 5$. **B.** $m = 2$. **C.** $m = 0$. **D.** $m = 1$.
- Câu 98:** Cho hàm số $f(x) = x^3 + (m^2 + 1)x + m^2 - 2$ với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;2]$ bằng 7.
A. $m = \pm 1$. **B.** $m = \pm \sqrt{7}$. **C.** $m = \pm \sqrt{2}$. **D.** $m = \pm 3$.
- Câu 99:** Có bao nhiêu số nguyên m thuộc đoạn $[-20;20]$ để giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{x+m+6}{x-m}$ trên đoạn $[1;3]$ là số dương?
A. 9. **B.** 8. **C.** 11. **D.** 10.
- Câu 100:** Cho hàm số $y = \frac{x+m}{x^2+1}$ (với m là tham số thực). Biết $\min_{\mathbb{R}} y = -2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?
A. $m < -2$. **B.** $0 < m < 2$. **C.** $m > 2$. **D.** $-2 < m < 0$.
- Câu 101:** Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{\cos x + m^2}{2 - \cos x}$ có giá trị lớn nhất trên $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{3} \right]$ bằng 1. Số phần tử của S là
A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.
- Câu 102:** Biết tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x+m}{x+1}$ trên $[1;2]$ bằng 8 (m là tham số thực), khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $m > 10$. B. $8 < m < 10$. C. $0 < m < 4$. D. $4 < m < 8$.

Câu 103: Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + 9x + m$ (m là tham số thực). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho $\max_{[0;2]} [f(x)]^2 + \min_{[0;2]} [f(x)]^2 = 2020$. Số tập con của S là

- A. 2. B. 4. C. 8. D. 16.

Câu 104: Cho hàm số $y = (3x^4 - 4x^3 + m)^2$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[-1;1]$ bằng 0?

- A. 7. B. 3. C. 9. D. 0.

Câu 105: Cho hàm số $f(x) = \frac{2\sqrt{x} + m}{\sqrt{x} + 1}$ với m là tham số thực, $m > 1$. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của m để hàm số có giá trị lớn nhất trên đoạn $[0;4]$ nhỏ hơn 3. Số phần tử của tập S là

- A. 1. B. 3. C. 0. D. 2.

Câu 106: Có bao nhiêu giá trị nguyên m thuộc $[0;2021]$ để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2x^3 - 3(m+1)x^2 + 6mx - 1$ trên đoạn $[1;2]$ bằng 3?

- A. 2019. B. 2020. C. 2021. D. 1.

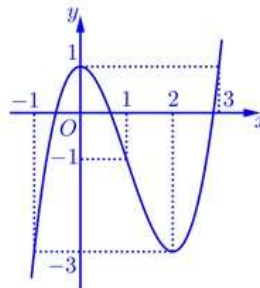
Câu 107: Cho hàm số $f(x) = x^4 - (m+2)x^3 + mx + 3$. Trong trường hợp giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất hãy tính $f(3)$.

- A. $f(3) = 12$. B. $f(3) = 27$. C. $f(3) = 47$. D. $f(3) = 54$.

Câu 108: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = (x^3 - 3x + m)^2$ trên đoạn $[-1;1]$ bằng 4. Tính tổng các phần tử của S .

- A. 3. B. 6. C. 0. D. -5.

Câu 109: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Xét hàm số $g(x) = f(x^3 + 2x) + m$. Giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $g(x)$ trên đoạn $[0;1]$ bằng 9 là

- A. $m = 10$. B. $m = 6$. C. $m = 12$. D. $m = 8$.

Câu 110: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-4;4]$ và có bảng biến thiên như hình vẽ bên:

x	-4	-3	-1	0	2	4
$f'(x)$	+	0	-	0	-	0
$f(x)$	-4	4	2	3	-3	1

Có bao nhiêu số thực $m \in [-4; 4]$ để giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f(x^3 - 3x + 2) + f(m)$ trên đoạn $[-1; 1]$ bằng 1?

- A. 2. B. 3. C. 4. D. 5.

Câu 111: Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - (m+1)x^2 + (3m^2 + 4m + 5)x + 1$ và $g(x) = x^3 + 3x + 1$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(g(x))$ trên đoạn $[-1; 1]$ có giá trị lớn nhất thuộc khoảng nào dưới đây?

- A. $(-10; 0)$. B. $(-20; -15)$. C. $(-15; -10)$. D. $(0; 10)$.

Câu 112: Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y = x^8 + (m-3)x^5 - (m^2-9)x^4 + 1$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = 0$?

- A. vô số. B. 7. C. 5. D. 6.

Dạng 5: Bài toán thực tế liên quan đến GTLN – GTNN của hàm số

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM MINH HỌA

Câu 113: Một chất điểm chuyển động theo phương trình $S = -t^3 + 9t^2 + 21t + 9$ trong đó t tính bằng giây (s) và S tính bằng mét (m). Tính thời điểm $t(s)$ mà tại đó vận tốc của chuyển động đạt giá trị lớn nhất.

- A. $t = 4(s)$. B. $t = 5(s)$. C. $t = 3(s)$. D. $t = 7(s)$.

Câu 114: Một vật chuyển động theo quy luật $s = -2t^3 + 24t^2 + 9t - 3$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

- A. 105 (m/s) B. 289 (m/s). C. 111 (m/s). D. 487 (m/s).

Câu 115: Sau khi phát hiện ra dịch bệnh vi rút Covid-19, các chuyên gia WHO ước tính số người nhiễm bệnh kể từ khi xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ t là $f(t) = 15t^2 - t^3$. Ta xem $f'(t)$ là tốc độ truyền bệnh (người/ngày) tại thời điểm t . Tốc độ truyền bệnh sẽ lớn nhất vào ngày thứ bao nhiêu?

- A. Ngày thứ 5. B. Ngày thứ 10. C. Ngày thứ 25. D. Ngày thứ 20.

Câu 116: Độ giảm huyết áp của một bệnh $G(x) = 0,025x^2(30 - x)$ trong đó x là số miligam thuốc được tiêm cho bệnh nhân ($0 < x < 30$). Để bệnh nhân đó có huyết áp giảm nhiều nhất thì liều lượng thuốc cần tiêm vào là

- A. $x = 15(mg)$. B. $x = 20(mg)$. C. $x = 20(mg)$. D. $x = 25(mg)$.

Câu 117: Sự ảnh hưởng khi sử dụng một loại độc tố với vi khuẩn X được một nhà sinh học mô tả bởi hàm số $P(t) = \frac{t+1}{t^2+t+4}$, trong đó $P(t)$ là số lượng vi khuẩn sau t sử dụng độc tố. Vào thời điểm nào thì số lượng vi khuẩn X bắt đầu giảm?

- A. Ngay từ lúc bắt đầu sử dụng độc tố. B. Sau 0,5 giờ.
C. Sau 2 giờ. D. Sau 1 giờ.

Câu 118: Cho tam giác đều ABC cạnh a . Người ta dựng một hình chữ nhật $MNPQ$ có cạnh MN nằm trên cạnh BC . Hai đỉnh P và Q theo thứ tự nằm trên hai cạnh AC và AB của tam giác. Xác định độ dài đoạn BM sao cho hình chữ nhật $MNPQ$ có diện tích lớn nhất.

- A. $BM = \frac{a}{2}$. B. $BM = \frac{a}{6}$. C. $BM = \frac{a}{3}$. D. $BM = \frac{a}{4}$.

Câu 119: Ông X muốn xây một bình chứa hình trụ có thể tích 72 m^3 . Đáy làm bằng bê tông giá 100 nghìn đồng/ m^2 , thành làm bằng tôn giá 90 nghìn đồng/ m^2 , nắp bằng nhôm giá 140 nghìn đồng/ m^2 . Vậy đáy của hình trụ có bán kính bằng bao nhiêu để chi phí xây dựng là thấp nhất?

- A. $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{\pi}}(\text{m})$. B. $\frac{3}{\sqrt[3]{\pi}}(\text{m})$. C. $\frac{2}{\sqrt[3]{\pi}}(\text{m})$. D. $\frac{3\sqrt[3]{3}}{2\sqrt[3]{\pi}}(\text{m})$.

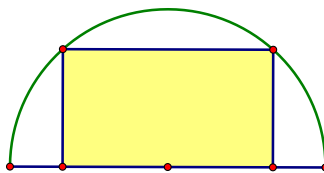
Câu 120: Người ta muốn xây một cái bể hình hộp đứng có thể tích $V = 18(\text{m}^3)$, biết đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp 3 lần chiều rộng và bể không có nắp. Hỏi cần xây bể có chiều cao h bằng bao nhiêu mét để nguyên vật liệu xây dựng là ít nhất (biết nguyên vật liệu xây dựng các mặt là như nhau)?

- A. $2(\text{m})$. B. $\frac{5}{2}(\text{m})$. C. $1(\text{m})$. D. $\frac{3}{2}(\text{m})$.

Câu 121: Một công ty bất động sản có 50 căn hộ cho thuê. Nếu giá cho thuê mỗi căn là 3 000 000 đồng/tháng thì không có phòng trống, còn nếu cho thuê mỗi căn hộ thêm 200.000đ/tháng thì sẽ có 2 căn bị bỏ trống. Hỏi công ty phải niêm yết bao nhiêu để doanh thu là lớn nhất?

- A. 3400000. B. 3000000. C. 5000000. D. 4000000.

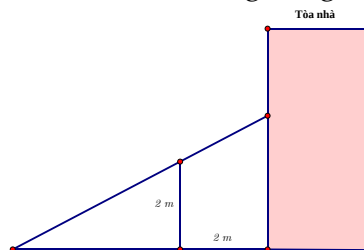
Câu 122: Từ một miếng tôn dạng nửa hình tròn có bán kính $R = 4$ người ta muốn cắt ra một hình chữ nhật (tham khảo hình vẽ)



Hỏi diện tích lớn nhất của hình chữ nhật có thể cắt được từ miếng tôn là

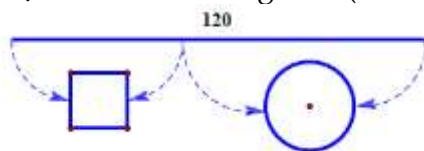
- A. $8\sqrt{2}$. B. $6\sqrt{2}$. C. 8. D. 16.

Câu 123: Một bức tường cao 2m nằm song song với tòa nhà và cách tòa nhà 2m. Người ta muốn chế tạo một chiếc thang bắc từ mặt đất bên ngoài bức tường, gác qua bức tường và chạm vào tòa nhà (xem hình vẽ). Hỏi chiều dài tối thiểu của thang bằng bao nhiêu mét?



- A. $\frac{5\sqrt{13}}{3}\text{m}$. B. $4\sqrt{2}\text{m}$. C. 6m. D. $3\sqrt{5}\text{m}$.

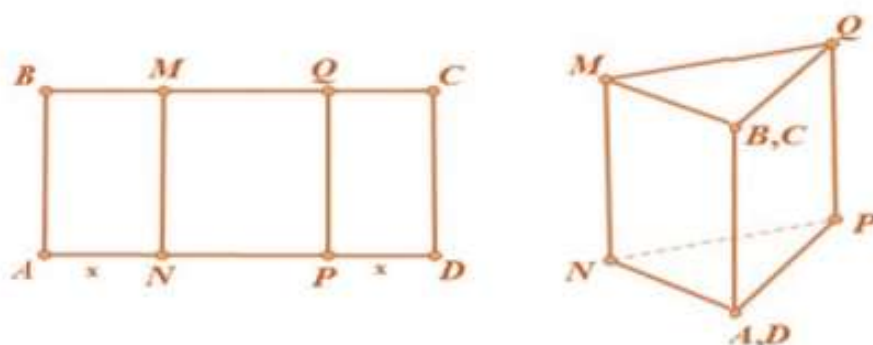
Câu 124: Một sợi dây kim loại dài 120cm được cắt thành hai đoạn. Đoạn dây thứ nhất được uốn thành hình vuông, đoạn dây thứ hai được uốn thành vòng tròn (tham khảo hình vẽ)



Tổng diện tích của hình vuông và hình tròn đạt giá trị nhỏ nhất là

- A. 498 . B. 462 . C. 504 . D. 462 .

Câu 125: Cho một tấm nhôm hình chữ nhật $ABCD$ có $AD = 60\text{ cm}$, $AB = 20\text{ cm}$. Ta gập tấm nhôm theo hai cạnh MN và PQ vào phía trong cho đến khi AB và CD trùng nhau như hình vẽ để được hình lăng trụ khuyết hai đáy. Khi đó có thể tạo được khối lăng trụ với thể tích lớn nhất bằng:



- A. $2000\sqrt{3} \text{ (cm}^3\text{)}$. B. $2000 \text{ (cm}^3\text{)}$. C. $400\sqrt{3} \text{ (cm}^3\text{)}$. D. $4000\sqrt{2} \text{ (cm}^3\text{)}$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TỰ LUYỆN

Câu 126: Một chất điểm chuyển động theo quy luật $s = -t^3 + 6t^2 + 17t$, với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó. Khi đó vận tốc $v \text{ (m/s)}$ của chuyển động đạt giá trị lớn nhất trong khoảng 8 giây đầu tiên bằng:

- A. 17 m/s . B. 36 m/s . C. 26 m/s . D. 29 m/s .

Câu 127: Vận tốc của một hạt chuyển động được xác định bởi công thức $v(t) = t^3 - 10t^2 + 29t - 20$ (t được tính bằng giây). Vận tốc của hạt tại thời điểm gia tốc nhỏ nhất gần bằng

- A. $-0,88$. B. $2,59$. C. $6,06$. D. $2,61$.

Câu 128: Một loại thuốc được dùng cho một bệnh nhân và nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân được giám sát bởi bác sĩ. Biết rằng nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân sau khi tiêm vào cơ thể trong t giờ được cho bởi công thức $c(t) = \frac{t}{t^2 + 1}$ (mg/L). Sau khi tiêm thuốc bao lâu thì nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân cao nhất?

- A. 4 giờ. B. 1 giờ. C. 3 giờ. D. 2 giờ.

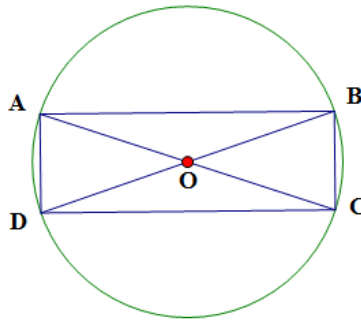
Câu 129: Một sợi dây có chiều dài 28 m được cắt thành hai đoạn để làm thành một hình vuông và một hình tròn. Tính chiều dài (theo đơn vị mét) của đoạn dây làm thành hình vuông được cắt ra sao cho tổng diện tích của hình vuông và hình tròn là nhỏ nhất?

- A. $\frac{56}{4 + \pi}$. B. $\frac{112}{4 + \pi}$. C. $\frac{84}{4 + \pi}$. D. $\frac{92}{4 + \pi}$.

Câu 130: Ông A dự định sử dụng hết $6,5\text{m}^2$ kính để làm một bể cá bằng kính có dạng khối hình hộp chữ nhật chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng(các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

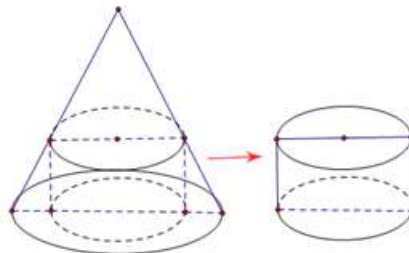
- A. $2,26\text{m}^3$. B. $1,01\text{m}^3$. C. $1,33\text{m}^3$. D. $1,50\text{m}^3$.

Câu 131: Một mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích 961m^2 , người ta muốn mở rộng thêm bốn phần đất sao cho tạo thành hình tròn ngoại tiếp mảnh vườn (xem hình minh họa). Tính diện tích nhỏ nhất $S_{\min}$ của bốn phần đất được mở rộng.



- A. $S_{\min} = 1922\pi - 961\text{ (m}^2\text{)}$. B. $S_{\min} = 480,5\pi - 961\text{ (m}^2\text{)}$.
C. $S_{\min} = 1892\pi - 946\text{ (m}^2\text{)}$. D. $S_{\min} = 961\pi - 961\text{ (m}^2\text{)}$.

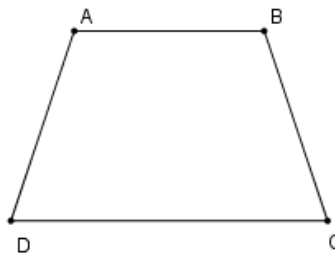
Câu 132: Một khúc gỗ có dạng hình khối nón có bán kính đáy bằng $r = 2\text{m}$, chiều cao $h = 6\text{m}$. Bác thợ mộc chế tác từ khúc gỗ đó thành một khúc gỗ có dạng hình khối trụ như hình vẽ.



Gọi V là thể tích lớn nhất của khúc gỗ hình trụ sau khi chế tác. Giá trị của V là:

- A. $V = \frac{32}{9}\pi\text{ (m}^3\text{)}$. B. $V = \frac{32}{3}\pi\text{ (m}^3\text{)}$. C. $V = \frac{32}{27}\pi\text{ (m}^3\text{)}$. D. $V = \frac{32}{5}\pi\text{ (m}^3\text{)}$.

Câu 133: Một người nông dân có 3 tấm lưới thép B40, mỗi tấm dài 16m và muốn rào một mảnh vườn dọc bờ sông dạng hình thang cân $ABCD$ như hình vẽ, trong đó bờ sông là đường thẳng DC không phải rào và mỗi tấm là một cạnh của hình thang.



Hỏi ông ấy có thể rào một mảnh vườn với diện tích lớn nhất bao nhiêu m^2 ?

- A. $192\sqrt{3}\text{m}^2$. B. $196\sqrt{3}\text{m}^2$. C. $190\sqrt{3}\text{m}^2$. D. $194\sqrt{3}\text{m}^2$.

Câu 134: Chiều dài ngắn nhất của cái thang AB để nó có thể dựa vào tường AC và mặt đất BC , ngang qua cột đỡ DE cao $4(m)$, song song và cách tường một khoảng $CE = 0,5(m)$ là.

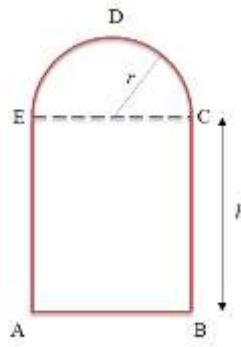
A. Xấp xỉ $5,5902(m)$.

B. Xấp xỉ $5,602(m)$.

C. Xấp xỉ $5,4902(m)$.

D. Xấp xỉ $6,5902(m)$.

Câu 135: Bác thợ hàn dùng một thanh kim loại dài $4m$ để uốn thành khung cửa sổ có dạng như hình vẽ.



Gọi r là bán kính của nửa đường tròn. Tìm r (theo m) để diện tích tạo thành đạt giá trị lớn nhất.

A. 1.

B. 0,5.

C. $\frac{4}{\pi + 4}$.

D. $\frac{2}{\pi + 4}$.

IV- LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập D . Số M được gọi là giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên D nếu

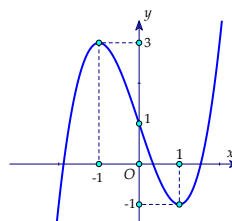
A. $f(x) \geq M$ với mọi $x \in D$.

B. $f(x) \geq M$ với mọi $x \in D$ và tồn tại $x_0 \in D$ sao cho $f(x_0) = M$.

C. $f(x) \leq M$ với mọi $x \in D$.

D. $f(x) \leq M$ với mọi $x \in D$ và tồn tại $x_0 \in D$ sao cho $f(x_0) = M$.

Câu 2: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên dưới:



Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\max_{[-1;1]} f(x) = 0$.

B. $\max_{[-1;1]} f(x) = 1$.

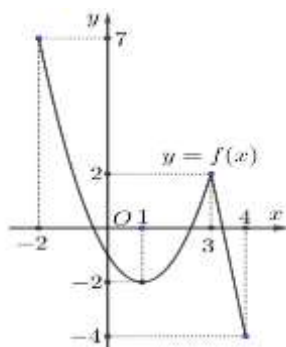
C. $\max_{[-1;1]} f(x) = 3$.

D. $\max_{[-1;1]} f(x) = 2$.

Lời giải:

Ta có: $\forall x \in [-1;1] \Rightarrow f(x) \in [-1;3]$. Suy ra: $\max_{[-1;1]} f(x) = 3$ đạt được khi $x = -1$.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đồ thị trên đoạn $[-2;4]$ như hình vẽ bên dưới:



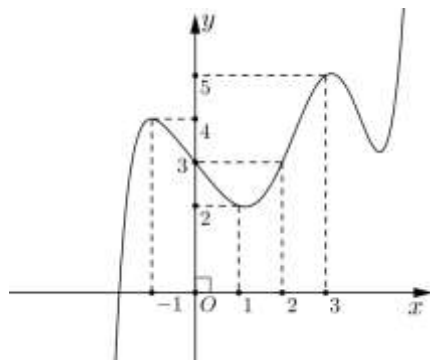
Tổng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-2; 4]$ bằng

- A. 5. B. 3. C. -2. D. 0.

Lời giải:

Quan sát hình vẽ ta thấy $\max_{[-2; 4]} = 7; \min_{[-2; 4]} = -4$ nên tổng bằng 3.

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(|x - 2|)$ trên đoạn $[-1; 5]$. Giá trị của $M + m$ bằng

- A. 9. B. 7. C. 1. D. 8.

Lời giải:

Đặt $t = |x - 2|$, với $x \in [-1; 5]$ ta có $t \in [0; 3]$.

Hàm số trở thành $y = f(t), t \in [0; 3]$.

Từ đồ thị ta có: $\min_{t \in [0; 3]} f(t) = f(1) = 2; \max_{t \in [0; 3]} f(t) = f(3) = 5$.

Suy ra $\min_{x \in [-1; 5]} f(|x - 2|) = 2 = m$ khi $|x - 2| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 1 \end{cases}$.

$\max_{x \in [-1; 5]} f(|x - 2|) = 5 = M$ khi $|x - 2| = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = -1 \end{cases}$.

Vậy $M + m = 7$.

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$f(x)$	$+\infty$	-3	2	1	$+\infty$
	$\swarrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	

Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\max_{x \in [-1;1]} f(x) = 2.$

B. $\max_{x \in [-1;1]} f(x) = 1.$

C. $\max_{x \in [-1;1]} f(x) = 0.$

D. $\max_{x \in [-1;1]} f(x) = -3.$

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1		1		2		$+\infty$			
y'		$-$	$ $	$+$	0	$+$	$ $	$-$			
y	$+\infty$	$\swarrow$		-3		$\nearrow$		2	$\searrow$		-4

Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

A. Hàm số có 2 điểm cực trị.

B. Hàm số đạt giá trị lớn nhất bằng 2 và giá trị nhỏ nhất bằng 3.

C. Đồ thị hàm số có đúng một đường tiệm cận.

D. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(2; +\infty)$.

Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$				
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\max_{x \in [5;15]} f(x) = f(5).$

B. $\max_{x \in [5;15]} f(x) = f(15).$

C. $\max_{x \in [5;15]} f(x) = 2.$

D. $\max_{x \in [5;15]} f(x) = f(10).$

Lời giải:

Dựa vào BBT ta thấy $f(x)$ đồng biến trên $[5;15] \Rightarrow \max_{x \in [5;15]} f(x) = f(15).$

Câu 8: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$				
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Đặt $g(x) = 2f(x) + 1$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\max_{x \in [-1;1]} g(x) = 2.$

B. $\max_{x \in [-1;1]} g(x) = 5.$

C. $\max_{x \in [-1;1]} g(x) = 1.$

D. $\max_{x \in [-1;1]} g(x) = -5.$

Lời giải:

Dựa vào BBT, ta có: $\forall x \in [-1;1]: -3 \leq f(x) \leq 2 \Leftrightarrow -6 \leq 2f(x) \leq 4 \Leftrightarrow -5 \leq 2f(x) + 1 \leq 5.$

Câu 9: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
-----	-----------	------	-----	-----	-----------

$f'(x)$	$-\infty$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$		-3		2		1		$+\infty$

Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\max_{x \in [-1;1]} |f(x)| = 2$. B. $\max_{x \in [-1;1]} |f(x)| = 1$. C. $\max_{x \in [-1;1]} |f(x)| = 0$. D. $\max_{x \in [-1;1]} |f(x)| = 3$.

Lời giải:

BBT:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$				
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$		-3		2		1		$+\infty$
$ f(x) $			3		2		1		

Câu 10: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$				
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$		-3		2		1		$+\infty$

Đặt $g(x) = f(\sin x)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\max_{\mathbb{R}} g(x) = 2$. B. $\max_{\mathbb{R}} g(x) = 1$. C. $\max_{\mathbb{R}} g(x) = 3$. D. $\max_{\mathbb{R}} g(x) = 4$.

Lời giải:

Đặt $t = \sin x; \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow t \in [-1;1]$.

Ta có: $\max_{\mathbb{R}} g(x) = \max_{[-1;1]} f(t) = 2$ đạt được khi $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 11: Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 3x + 2$ trên đoạn $[-1;3]$ bằng

- A. 4. B. 2. C. 20. D. 16.

Lời giải:

Ta có $f'(x) = 3x^2 - 3 \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \in [-1;3] \\ x = -1 \in [-1;3] \end{cases}$.

Do $f(-1) = 4; f(1) = 0; f(3) = 20$ nên $\max_{[-1;3]} f(x) = 20 \Leftrightarrow x = 3$.

Câu 12: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 36x$ trên đoạn $[3;7]$ bằng

- A. -81. B. $-48\sqrt{3}$. C. -91. D. $-24\sqrt{3}$.

Lời giải:

Hàm số $f(x) = x^3 - 36x$ liên tục trên đoạn $[3; 7]$.

Ta có $f'(x) = 3x^2 - 36$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 36 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\sqrt{3} \in (3; 7) \\ x = -2\sqrt{3} \notin (3; 7) \end{cases}$.

$$f(3) = -81; f(2\sqrt{3}) = -48\sqrt{3}; f(7) = 91.$$

GTNN của hàm số $f(x) = x^3 - 36x$ trên đoạn $[3; 7]$ là $\min_{[3; 7]} f(x) = -48\sqrt{3} = f(2\sqrt{3})$.

Câu 13: Trên đoạn $[1; 5]$, hàm số $y = x + \frac{4}{x}$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm nào dưới đây?

A. $x = 5$.

B. $x = 2$.

C. $x = 1$.

D. $x = 4$.

Lời giải:

Cách 1: Ta có $x \in [1; 5]$, áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có

$$x + \frac{4}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{4}{x}} = 4 \text{ suy ra hàm số } y = x + \frac{4}{x} \text{ đạt giá trị nhỏ nhất là } 4 \text{ khi } x = \frac{4}{x} \Rightarrow x = 2.$$

Cách 2: Ta có $y' = 1 - \frac{4}{x^2} \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$ (vì $x \in [1; 5]$).

Khi đó $y(1) = 5$, $y(2) = 4$ và $y(5) = \frac{29}{5}$. Do đó $\min_{[1; 5]} y = 4$ tại $x = 2$.

Câu 14: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \frac{x-3}{x+2}$ trên đoạn $[0; 4]$ bằng:

A. $f(0)$.

B. $f(4)$.

C. $f(2)$.

D. $f(3)$.

Lời giải:

Ta có $f'(x) = \frac{5}{(x+2)^2} > 0, \forall x \in [0; 4]$ nên hàm số đồng biến trên $[0; 4]$

Do đó $\min_{x \in [0; 4]} f(x) = f(0)$.

Câu 15: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{4-3x}$ trên đoạn $[0; 1]$ bằng

A. 2.

B. 1.

C. 0.

D. 4.

Lời giải:

$$\text{Ta có } y' = \frac{-3}{2\sqrt{4-3x}} < 0, \forall x < \frac{4}{3}$$

$\Rightarrow$ Trên đoạn $[0; 1]$, hàm số $y = \sqrt{4-3x}$ nghịch biến $\Rightarrow \min_{[0; 1]} y = y(1) = 1$.

Câu 16: Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{5-x} + \sqrt{x+3}$. Hiệu $M - m$ bằng

A. $4 - 2\sqrt{2}$.

B. $\sqrt{2}$.

C. $7 - 4\sqrt{2}$.

D. $8 - 5\sqrt{2}$.

Lời giải:

Ta có: $D = [-3; 5]$.

$$\text{Ta có: } y' = \frac{-1}{2\sqrt{5-x}} + \frac{1}{2\sqrt{x+3}} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+3} = \sqrt{5-x} \\ x \in (-3; 5) \end{cases} \longrightarrow x = 1 \in (-3; 5).$$

Ta có: $y(5) = 2\sqrt{2}; y(-3) = 2\sqrt{2}; y(1) = 4 \Rightarrow \begin{cases} m = \min_{x \in [-3;5]} y = 2\sqrt{2} \\ M = \max_{x \in [-3;5]} y = 4 \end{cases}$. Suy ra $M - m = 4 - 2\sqrt{2}$.

Câu 17: Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = |x^2 + 4x - 5|$ trên đoạn $[-3; 0]$. Tính $M + m$.

A. 5.

B. 9.

C. 14.

D. 8.

Lời giải:

Xét hàm số $f(x) = x^2 + 4x - 5, \forall x \in [-3; 0]$.

Ta có $f'(x) = 2x + 4, \forall x \in (-3; 0)$. Cho $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2$ (Nhận).

Vì $f(x)$ liên tục trên $[-3; 0]$, đồng thời $f(-3) = -8; f(-2) = -9; f(0) = -5$

nên ta được $-9 \leq f(x) \leq -5, \forall x \in [-3; 0] \Rightarrow 5 \leq |f(x)| \leq 9, \forall x \in [-3; 0]$.

Suy ra $\begin{cases} M = 9 \\ m = 5 \end{cases} \Rightarrow M + m = 14$.

Câu 18: Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = 4x + \sin^2 \pi x$ trên đoạn $[-1; 2]$. Giá trị của $m + M$ bằng

A. 0.

B. 4.

C. -2.

D. -4.

Lời giải:

Ta có $f'(x) = 4 + 2\pi \sin \pi x \cdot \cos \pi x = 4 + \pi \sin 2\pi x$

Do $-1 \leq \sin 2\pi x \leq 1 \Rightarrow f'(x) > 0 \forall x \in [-1; 2]$.

Vậy $m + M = f(-1) + f(2) = -4 + \sin^2(-\pi) + 8 + \sin^2(2\pi) = 4$.

Câu 19: Cho hàm số $y = \sin x \cdot \cos^2 \frac{x}{2}$. Giá trị lớn nhất của hàm số trên $[0; \pi]$ bằng

A. 0.

B. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

C. $\frac{1}{2}$.

D. $\frac{3\sqrt{3}}{8}$.

Lời giải:

Ta có: $y = \sin x \cdot \cos^2 \frac{x}{2} = \sin x \left(\frac{1 + \cos x}{2} \right) = \frac{1}{4} (2 \sin x + \sin 2x)$

$$y' = \frac{1}{2} (\cos x + \cos 2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = -\pi + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

Xét trên khoảng $(0; \pi)$ ta có nghiệm là $x = \frac{\pi}{3}$.

$$y(0) = 0; y\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{8}; y(\pi) = 0.$$

$$\text{Vậy } \max_{[0; \pi]} y = y\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

Câu 20: Hàm số nào sau đây **không** có giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất trên đoạn $[-2; 2]$?

A. $y = x^3 + 2$.

B. $y = \frac{x-1}{x+1}$.

C. $y = x^4 + x^2$.

D. $y = -x + 1$.

Lời giải:

Với $y = \frac{x-1}{x+1}$ điều kiện $x \neq -1 \in [-2; 2]$.

Ta có: $\lim_{x \rightarrow -1^+} \left(\frac{x-1}{x+1} \right) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -1^-} \left(\frac{x-1}{x+1} \right) = +\infty$. Do đó hàm số không có GTLN-GTNN.

Câu 21: Cho hàm số $y = \cos 3x - \cos 2x - 5 \cos x + 1$. Giá trị lớn nhất của hàm số bằng

A. 4.

B. $\frac{142}{27}$.

C. -4.

D. $\frac{35}{27}$.

Lời giải:

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } y &= \cos 3x - \cos 2x - 5 \cos x + 1 \\ &= 4 \cos^3 x - 3 \cos x - 2 \cos^2 x + 1 - 5 \cos x + 1 \\ &= 4 \cos^3 x - 2 \cos^2 x - 8 \cos x + 2. \end{aligned}$$

Đặt $t = \cos x, t \in [-1; 1]$.

Xét hàm $f(t) = 4t^3 - 2t^2 - 8t + 2$ với $t \in [-1; 1]$.

Ta có: $f'(t) = 12t^2 - 4t - 8$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -\frac{2}{3} \end{cases}$.

Ta có: $f(-1) = 4$, $f(1) = -4$, $f\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{142}{27}$.

Do đó: $\max_{\mathbb{R}} y = \max_{[-1; 1]} f(x) = f\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{142}{27}$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số là $\frac{142}{27}$.

Câu 22: Hàm số $f(x) = -\cos^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin x + \cos x)$ có tích giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất bằng

A. $3 - \sqrt{2}$.

B. $-\sqrt{2}$.

C. $-\frac{5}{4}$.

D. $\frac{1}{4}$.

Lời giải:

Ta có: $f(x) = -\cos^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin x + \cos x) = \sin^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 1$

Đặt $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = t$ ($-1 \leq t \leq 1$) khi đó: $g(t) = t^2 - t - 1$.

Ta có: $g(-1) = 1$, $g(0,5) = -\frac{5}{4}$, $g(1) = -1$. Nên tích của GTLN và GTNN bằng: $-\frac{5}{4}$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TỰ LUYỆN

Câu 23: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $\mathbb{R}$ là 2. Khẳng định nào sau đây đúng?

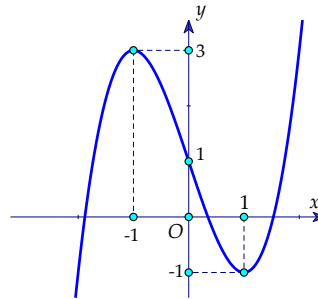
A. $f(x) < 2, \forall x \in \mathbb{R}$.

B. $f(x) > 2, \forall x \in \mathbb{R}$.

C. $f(x) \geq 2, \forall x \in \mathbb{R}, \exists x_0, f(x_0) = 2.$

D. $f(x) \leq 2, \forall x \in \mathbb{R}, \exists x_0, f(x_0) = 2.$

Câu 24: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên dưới:



Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\max_{[0;1]} f(x) = 0.$

B. $\max_{[0;1]} f(x) = 1.$

C. $\max_{[0;1]} f(x) = 3.$

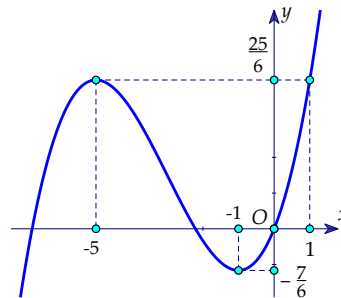
D. $\max_{[0;1]} f(x) = 2.$

Lời giải:

Ta có: $\forall x \in [0;1] \Rightarrow f(x) \in [-1;1].$

Suy ra: $\max_{[0;1]} f(x) = 1$ đạt được khi $x = 0.$

Câu 25: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên dưới:



Gọi M, N lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên $[-5;1].$

Tổng $M + N$ bằng

A. 3.

B. 2.

C. $\frac{25}{6}.$

D. -1.

Lời giải:

Ta có: $\forall x \in [-5;1] \Rightarrow f(x) \in \left[-\frac{7}{6}; \frac{25}{6}\right].$ Suy ra: $\begin{cases} M = \max_{[-5;1]} f(x) = \frac{25}{6} \\ m = \min_{[-5;1]} f(x) = -\frac{7}{6} \end{cases} \Rightarrow M + m = 3.$

Câu 26: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	-3	2	1	$+\infty$

Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\min_{x \in [-1;1]} f(x) = 2$.

B. $\min_{x \in [-1;1]} f(x) = 1$.

C. $\min_{x \in [-1;1]} f(x) = 0$.

D. $\min_{x \in [-1;1]} f(x) = -3$.

Câu 27: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$				
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$		-3		2		1		$+\infty$

Khẳng định nào sau đây đúng?

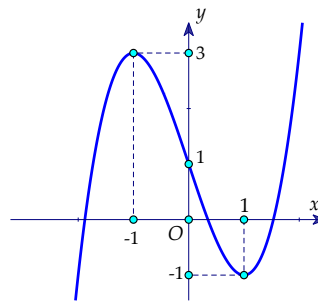
A. $\min_{x \in [0;1]} f(x) = -3$.

B. $\min_{x \in [0;1]} f(x) = 2$.

C. $\min_{x \in [0;1]} f(x) = 0$.

D. $\min_{x \in [0;1]} f(x) = 1$.

Câu 28: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên dưới:



Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f(\sin x)$ bằng

A. 0.

B. 1.

C. 3.

D. 2.

Lời giải:

Ta có: $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \sin x \in [-1;1] \Leftrightarrow f(\sin x) \in [-1;3]$.

Suy ra: $\max_{\mathbb{R}} g(x) = 3$ đạt được khi $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 29: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$				
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$		-3		2		1		$+\infty$

Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\max_{x \in [-15;-5]} f(x) = f(-5)$.

B. $\max_{x \in [-15;-5]} f(x) = f(-15)$.

C. $\max_{x \in [-15;-5]} f(x) = 2$.

D. $\max_{x \in [-15;-5]} f(x) = f(-10)$.

Lời giải:

Dựa vào BBT ta thấy $f(x)$ nghịch biến trên $[-15;-5] \Rightarrow \max_{x \in [-15;-5]} f(x) = f(-15)$.

Câu 30: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
-----	-----------	------	-----	-----	-----------

$f'(x)$	$-\infty$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$		-3		2		1		$+\infty$

Đặt $g(x) = 3 - 4f(x)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\min_{x \in [-1;1]} g(x) = 15$. B. $\min_{x \in [-1;1]} g(x) = -5$. C. $\min_{x \in [-1;1]} g(x) = -15$. D. $\max_{x \in [-1;1]} g(x) = -3$.

Lời giải:

Dựa vào BBT, ta có: $\forall x \in [-1;1]: -3 \leq f(x) \leq 2 \Leftrightarrow -8 \leq -4f(x) \leq 12 \Leftrightarrow -5 \leq 3 - 4f(x) \leq 15$.

Câu 31: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$				
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$		-3		2		1		$+\infty$

Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\min_{x \in [-1;1]} |f(x)| = 2$. B. $\min_{x \in [-1;1]} |f(x)| = 1$. C. $\min_{x \in [-1;1]} |f(x)| = 0$. D. $\min_{x \in [-1;1]} |f(x)| = 3$.

Lời giải:

BBT:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$								
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$					
$f(x)$	$+\infty$		-3		2		1		$+\infty$				
$ f(x) $			0		3		0		2		1		

Câu 32: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$		-3		2		1	$+\infty$

Đặt $g(x) = f(\cos x)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\min_{\left[0; \frac{\pi}{2}\right]} g(x) = 1$. B. $\min_{\left[0; \frac{\pi}{2}\right]} g(x) = 2$. C. $\min_{\left[0; \frac{\pi}{2}\right]} g(x) = -3$. D. $\min_{\left[0; \frac{\pi}{2}\right]} g(x) = 0$.

Lời giải:

Đặt $t = \cos x; \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow t \in [0; 1]$.

Ta có: $\min_{\left[0; \frac{\pi}{2}\right]} g(x) = \min_{[0; 1]} f(t) = 1$ đạt được khi $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 33: Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = -x^3 + 48x$ trên đoạn $[-7; 5]$ bằng

- A. 127. B. 128. C. 115. D. 7.

Lời giải:

Ta có: $f'(x) = -3x^2 + 48; f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^3 + 48x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \\ x = -4 \end{cases}$

$\Rightarrow f(0) = 0, f(-4) = -128, f(4) = 128, f(5) = 115, f(-7) = 7$

$\Rightarrow \max_{[-7; 5]} f(x) = 128$.

Câu 34: Trên đoạn $[-4; -1]$, hàm số $y = x^4 - 8x^2 + 13$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm

- A. $x = -2$. B. $x = -1$. C. $x = -4$. D. $x = -3$.

Lời giải:

Hàm số $y = x^4 - 8x^2 + 13$ xác định và liên tục trên đoạn $[-4; -1]$.

$y' = 4x^3 - 16x; y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 16x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 (\in [-4; -1]) \\ x = 0 (\notin [-4; -1]) \\ x = 2 (\notin [-4; -1]) \end{cases}$

Ta có $f(-4) = 141; f(-2) = -3; f(-1) = 6$.

Vậy hàm số $y = x^4 - 8x^2 + 13$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm $x = -2$.

Câu 35: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 + \frac{8}{x}$ trên đoạn $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$ bằng

- A. 8. B. $\frac{15}{2}$. C. $\frac{65}{4}$. D. $6\sqrt[3]{2}$.

Lời giải:

Ta có $y = f(x) = x^2 + \frac{8}{x}; y' = 2x - \frac{8}{x^2} = \frac{2x^3 - 8}{x^2}$. Có $y' = 0 \Leftrightarrow x^3 = 4 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{4}$.

Ta có $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{65}{4}, f(2) = 8, f\left(\sqrt[3]{4}\right) = 6\sqrt[3]{2}$. Vậy $\min_{\left[\frac{1}{2}; 2\right]} f(x) = 6\sqrt[3]{2}$.

Câu 36: Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{2x+3}{x-2}$ trên đoạn $[0; 1]$. Tổng $M + m$ bằng

- A. -2. B. $\frac{7}{2}$. C. $-\frac{13}{2}$. D. $-\frac{17}{3}$.

Lời giải:

Ta có $y' = -\frac{7}{(x-2)^2} < 0$ trên $[0;1]$.

Vậy $M = y(0) = -\frac{3}{2}, m = y(1) = -5 \Rightarrow M + m = -\frac{3}{2} - 5 = -\frac{13}{2}$.

Câu 37: Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = 4\sqrt{x-2} - x$ trên đoạn $[2;11]$ bằng

- A. -2. B. 2. C. 1. D. 3.

Lời giải:

Tính $f'(x) = \frac{2}{\sqrt{x-2}} - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 6 \in (2;11)$

Xét các giá trị hàm $f(2) = -2; f(6) = 2; f(11) = 1$. Vậy giá trị lớn nhất bằng 2.

Câu 38: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x + \cos^2 x$ trên $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ là

- A. $\frac{\pi}{2}$. B. $\frac{\pi}{2} + 1$. C. 1. D. $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$.

Lời giải:

Xét hàm số $y = f(x) = x + \cos^2 x$ trên $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Ta có: $y' = f'(x) = 1 - 2\sin x \cdot \cos x = 1 - \sin 2x$.

$y' = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Vì $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$.

$f(0) = 1; f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}; f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$. Vậy $\max_{\left[0; \frac{\pi}{2}\right]} f(x) = \frac{\pi}{2}$.

Câu 39: Tìm tập giá trị T của hàm số $y = \sqrt{x-3} + \sqrt{5-x}$.

- A. $T = (3;5)$. B. $T = [3;5]$. C. $T = [\sqrt{2};2]$. D. $T = [0;\sqrt{2}]$.

Lời giải:

Tập xác định: $D = [3;5]$.

Ta có: $y' = \frac{1}{2\sqrt{x-3}} - \frac{1}{2\sqrt{5-x}}, y' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-3} = \sqrt{5-x} \Leftrightarrow x = 4$

Ta có: $y(3) = \sqrt{2}, y(5) = \sqrt{2}, y(4) = 2$.

Vậy tập giá trị của hàm số là $T = [\sqrt{2};2]$.

Câu 40: Hàm số nào sau đây có giá trị nhỏ nhất?

- A. $y = x^3 + 2$. B. $y = \frac{x-1}{x+1}$. C. $y = x^4 + 2x^2$. D. $y = -x + 1$.

Lời giải:

Ta có: $y = x^4 + 2x^2 = (x^2 + 1)^2 - 1 \geq -1$.

Hoặc dựa vào hình dáng đồ thị.

Câu 41: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \sin x + \cos 2x$ trên $[0;\pi]$ là

A. $\frac{9}{8}$.

B. $\frac{5}{4}$.

C. 2.

D. 1.

Lời giải:

Ta có: $f(x) = \sin x + \cos 2x = \sin x + 1 - 2\sin^2 x$

Đặt $\sin x = t$ ($0 \leq t \leq 1$)

$g(t) = -2t^2 + t + 1$, $g'(t) = -4t + 1$; $g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{4}$

Ta có: $f(0) = 1$, $f(1) = 0$, $f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{9}{8}$

Vậy $\max_{[0;1]} f(x) = \frac{9}{8}$.

Câu 42: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = 3\sin x - 4\sin^3 x$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ là

A. 1.

B. 3.

C. 7.

D. -1.

Lời giải:

Đặt $t = \sin x$. Vì $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow t \in [-1; 1]$.

Hàm số đã cho trở thành: $y = 3t - 4t^3$ ($t \in [-1; 1]$).

$y' = 3 - 12t^2$, $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{2} \\ t = -\frac{1}{2} \end{cases}$.

Ta có $y(-1) = 1$, $y(1) = -1$, $y\left(\frac{1}{2}\right) = 1$, $y\left(-\frac{1}{2}\right) = -1$.

Vậy, giá trị lớn nhất của hàm số $y = 3\sin x - 4\sin^3 x$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ bằng 1.

Câu 43: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sin^4 x \cos^6 x$ bằng

A. $\frac{4}{81}$.

B. $\frac{1}{32}$.

C. $\frac{3^2}{4^5}$.

D. $\frac{108}{5^5}$.

Lời giải:

Ta có: $y = (1 - \cos^2 x)^2 \cos^6 x$.

Đặt $t = \cos^2 x$ điều kiện $0 \leq t \leq 1$, hàm số trở thành: $g(t) = (1-t)^2 t^3$, $0 \leq t \leq 1$.

$g'(t) = -2(1-t)t^3 + 3(1-t)^2 t^2 = t^2(5t^2 - 8t + 3)$

$g'(t) = 0 \Leftrightarrow t^2(5t^2 - 8t + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 1 \\ t = \frac{3}{5} \end{cases}$

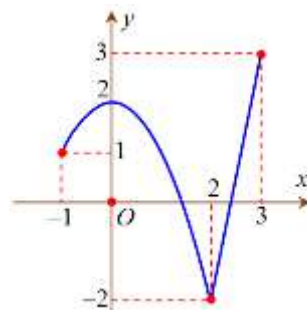
Ta có: $g(0) = 0; g(1) = 0; g\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{108}{5^5}$

Vậy $\max_{[0;1]} y = \frac{108}{5^5}$.

Dạng 3: GTLN – GTNN của hàm ẩn

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM MINH HỌA

Câu 44: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;3]$ và có đồ thị như hình vẽ sau:



Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(3\sin^2 x - 1)$ bằng

A. 3.

B. 2.

C. 0.

D. 1

Lời giải:

Đặt $t = 3\sin^2 x - 1 \Rightarrow t \in [-1; 2]$.

Nhận xét: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(3\sin^2 x - 1)$ là giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(t)$ trên $[-1; 2]$.

Dựa vào đồ thị ta có: $\max_{\mathbb{R}} y = \max_{[-1; 2]} f(t) = 2$.

Câu 45: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = -x(x-2)^2(x-3)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[0; 4]$ bằng

A. $f(0)$.

B. $f(2)$.

C. $f(3)$.

D. $f(4)$.

Lời giải:

Ta có $f'(x) = -x(x-2)^2(x-3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \\ x = 3 \end{cases}$

Bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[0; 4]$:

x	0	2	3	4		
$f'(x)$	0	+	0	+	0	-
$f(x)$	$f(0)$	$f(2)$	$f(3)$	$f(4)$		

Từ bảng biến thiên ta thấy giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[0; 4]$ là $f(3)$.

Câu 46: Cho hàm số $y = ax^3 + cx + d$ ($a \neq 0$) có $\min_{(-\infty; 0)} f(x) = f(-2)$. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[1; 3]$ bằng

A. $8a + d$.

B. $d - 16a$.

C. $d - 11a$.

D. $2a + d$.

Lời giải:

Ta có $y' = 3ax^2 + c$; $y'' = 6ax$. $y'' = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

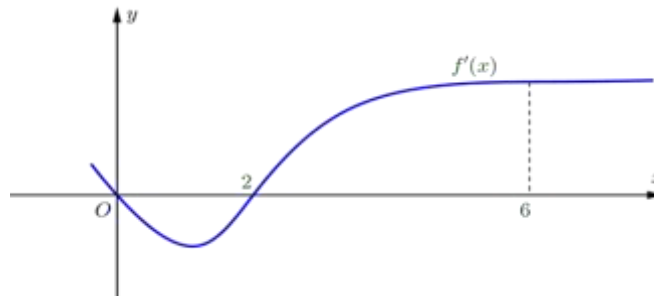
Nên đồ thị hàm số có điểm uốn là $A(0; d)$. Suy ra đồ thị hàm số nhận $A(0; d)$ làm tâm đối xứng.

Do đó từ $\min_{(-\infty; 0)} f(x) = f(-2)$ suy ra $\max_{(0; +\infty)} f(x) = f(2) \Rightarrow \max_{[1; 3]} f(x) = f(2) = 8a + 2c + d$.

Mà $f'(-2) = 0 \Leftrightarrow 12a + c = 0 \Rightarrow c = -12a$.

Vậy $\max_{[1; 3]} f(x) = 8a - 24a + d = d - 16a$.

Câu 47: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới:



Biết rằng $f(0) + f(3) = f(2) + f(6)$. Giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của $f(x)$ trên đoạn $[0; 6]$ lần lượt là

A. $f(2); f(6)$.

B. $f(1); f(3)$.

C. $f(0); f(6)$.

D. $f(2); f(0)$.

Lời giải:

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$ trên đoạn $[0; 6]$, ta suy ra $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[0; 6]$ như sau:

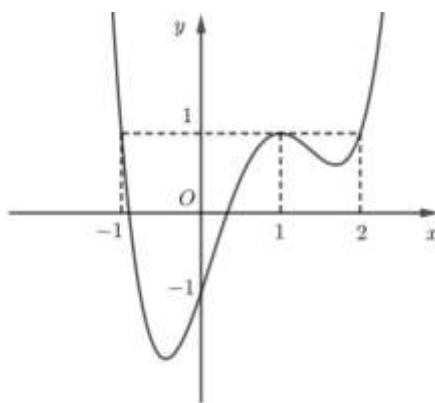
x	0	1	2	3	6
$f'(x)$	0	-	-	0	+
$f(x)$	$f(0)$	$f(1)$	$f(2)$	$f(3)$	$f(6)$

Từ bảng biến thiên trên, ta suy ra $\min_{[0; 6]} f(x) = f(2)$, $f(6) > f(3) > f(2)$, $f(0) > f(1) > f(2)$

Từ giả thiết $f(0) + f(3) = f(2) + f(6) \Leftrightarrow f(6) - f(0) = f(3) - f(2) > 0 \Rightarrow f(6) > f(0)$

Do đó $\max_{[0; 6]} f(x) = f(6)$.

Câu 48: Cho hàm số $f(x)$, đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ là đường cong trong hình bên dưới:



Giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = f(2x) - 2x + 2021$ trên đoạn $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$ bằng

- A.** $f(2) + 2019$. **B.** $f(-1) + 2022$. **C.** $f(0) + 2021$. **D.** $f(1) + 2020$.

Lời giải:

Ta có $g'(x) = 2f'(2x) - 2$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(2x) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = -1 \\ 2x = 1 \\ 2x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ x = \frac{1}{2} \\ x = 1 \end{cases}$

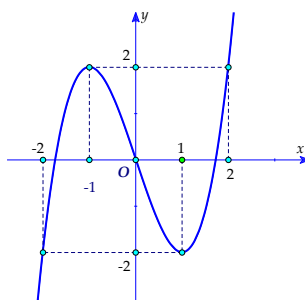
Trong đó các nghiệm $x = -\frac{1}{2}$ và $x = 1$ là nghiệm đơn, $x = \frac{1}{2}$ là nghiệm kép.

$g'(0) = 2f'(0) - 2 = -4 < 0$ nên ta có BBT của hàm $g(x)$ như sau:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
g'	+	0	0	0	+
g		$g(-\frac{1}{2})$		$g(1)$	

Vậy $\min_{\left[-\frac{1}{2}; 1\right]} g(x) = g(1) = f(2) + 2019$.

Câu 49: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Hàm số $g(x) = f(x^2 - 1)$ đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $[-1; \sqrt{2}]$ tại điểm nào sau đây?

A. $x = \pm 1$.

B. $x = \sqrt{2}$.

C. $x = 0$.

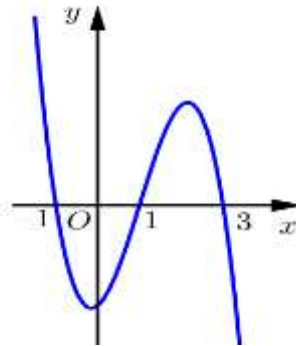
D. $x = -1$.

Lời giải:

$$\text{Ta có: } g'(x) = 2xf'(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 1 = -1 \\ x^2 - 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm \sqrt{2} \end{cases}.$$

Khi đó: $g(-1) = 0; g(0) = 2; g(\sqrt{2}) = -2$.

Câu 50: Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm số bậc bốn. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f(\sqrt{x^2 - 2x + 2020})$ trên đoạn $[0; 1]$ là

A. $f(\sqrt{2020})$.

B. $f(\sqrt{2019})$.

C. $f(1)$.

D. $f(0)$.

Lời giải:

$$\text{Từ đồ thị hàm số } y = f'(x) \text{ ta thấy } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \\ x = 3 \end{cases}.$$

Xét hàm số $g(x) = f(\sqrt{x^2 - 2x + 2020})$.

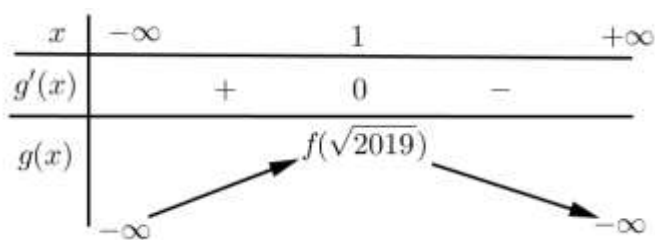
$$g'(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x + 2020}} \cdot f'(\sqrt{x^2 - 2x + 2020}); g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(\sqrt{x^2 - 2x + 2020}) = 0 \\ \frac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x + 2020}} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 - 2x + 2020} = -1 \\ \sqrt{x^2 - 2x + 2020} = 1 \\ \sqrt{x^2 - 2x + 2020} = 3 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 - 2x + 2020} = -1 \text{ (vn)} \\ x^2 - 2x + 2019 = 0 \text{ (vn)} \\ x^2 - 2x + 2011 = 0 \text{ (vn)} \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ta thấy với $x > 3$ thì $f'(x) < 0$.

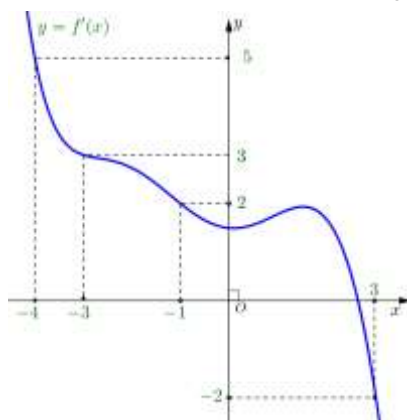
Mà $\sqrt{x^2 - 2x + 2020} \geq \sqrt{2019} > 3$ nên $f'(\sqrt{x^2 - 2x + 2020}) < 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$.

Bảng biến thiên:



Ta thấy hàm số $g(x)$ đồng biến trên đoạn $[0;1]$, suy ra $\max_{[0;1]} g(x) = g(1) = f(\sqrt{2019})$.

Câu 51: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của đạo hàm $y = f'(x)$ như hình dưới đây:



Trên đoạn $[-3;4]$, hàm số $g(x) = 2f(x) + (1-x)^2$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm nào dưới đây?

A. $x_0 = -4$.

B. $x_0 = 3$.

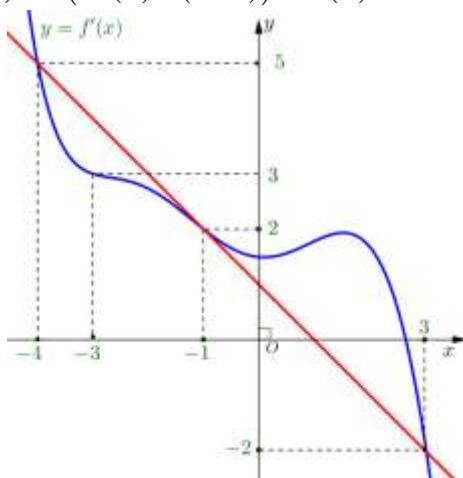
C. $x_0 = -1$.

D. $x_0 = -3$.

Lời giải:

Xét hàm $g(x) = 2f(x) + (1-x)^2$ trên đoạn $[-3;4]$.

Ta có: $g'(x) = 2f'(x) - 2(1-x) = 2(f'(x) - (1-x))$, $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 1-x$



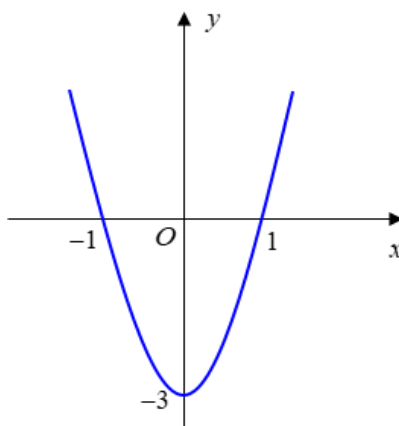
Đồ thị hàm $y = f'(x)$ và $y = 1-x$ cắt nhau tại các điểm có hoành độ $x = -4; x = -1; x = 3$.

Bảng biến thiên:

x	-4	-1	3
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	$g(-4)$	$g(-1)$	$g(3)$

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm $g(x) = 2f(x) + (1-x)^2$ trên đoạn $[-3; 4]$ đạt được tại $x_0 = -1$.

Câu 52: Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị (C). Biết đồ thị (C) tiếp xúc với đường thẳng $y = 4$ tại điểm có hoành độ dương và đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới:



Giá trị lớn nhất của hàm số $y = |f(x)|$ trên đoạn $[0; 2]$ bằng

A. 3.

B. 14.

C. 8.

D. 20.

Lời giải:

Ta có: $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

Đồ thị của hàm số $f'(x)$ đi qua các điểm $(1; 0)$; $(0; -3)$ và có trục đối xứng là $x = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = -3 \end{cases} \Rightarrow f(x) = x^3 - 3x + d.$$

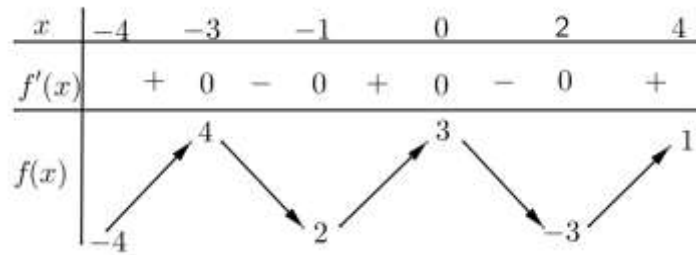
Đồ thị (C) tiếp xúc với đường thẳng $y = 4$ tại điểm có hoành độ dương

$$\Rightarrow \begin{cases} x^3 - 3x + d = 4 \\ 3x^2 - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3x + d = 4 \\ x = 1 \\ x = -1(l) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 6 \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = x^3 - 3x + 6$$

Xét trên đoạn $[0; 2]$ ta có: $f(0) = 6$; $f(2) = 8$; $f(1) = 4$.

$\Rightarrow$ giá trị lớn nhất của hàm số $y = |f(x)|$ trên đoạn $[0; 2]$ bằng $|f(2)| = 8$.

Câu 53: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên trên đoạn $[-4; 4]$ như hình sau:



Có bao nhiêu giá trị của tham số m trên đoạn $[-4;4]$ sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(|x^3| + 3|x|) + f(m)$ trên đoạn $[-1;1]$ bằng 1?

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 5.

Lời giải:

Ta có $x \in [-1;1] \Rightarrow |x| \in [0;1] \Rightarrow |x|^3 \in [0;1]$. Suy ra $t = |x|^3 + 3|x| \in [0;4]$.

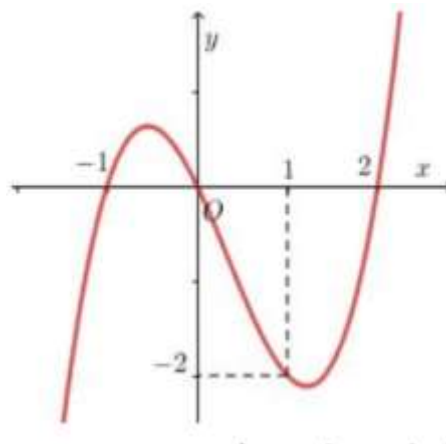
Khi đó $f(|x|^3 + 3|x|) \in [-3;3]$ hay $f(|x|^3 + 3|x|) + f(m) \in [-3 + f(m); 3 + f(m)]$.

YCBT $\Leftrightarrow 3 + f(m) = 1 \Leftrightarrow f(m) = -2$.

Nhìn vào bảng biến thiên, ta thấy phương trình $f(m) = -2$ có ba nghiệm.

Vậy có 3 giá trị của m thỏa đề.

Câu 54: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, hàm số $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Hàm số $g(x) = 3f(x^2 - 2) - \frac{3}{2}x^4 - 3x^2 + 2$ đạt giá trị lớn nhất trên $[-2;2]$ bằng

A. $g(1)$.

B. $g(-2)$.

C. $g(0)$.

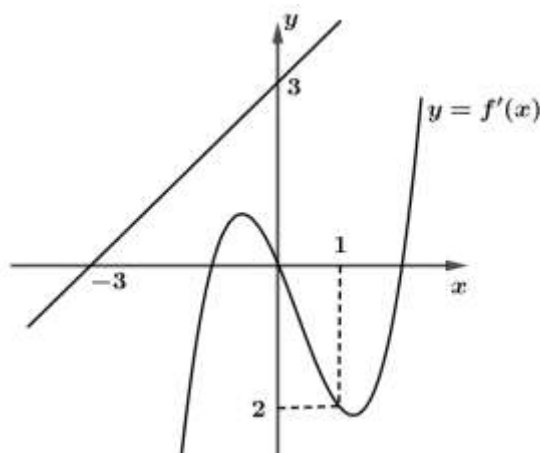
D. $g(2)$.

Lời giải:

Ta có: $g(x) = 3f(x^2 - 2) - \frac{3}{2}x^4 - 3x^2 + 2$

$$g'(x) = 6x \cdot f'(x^2 - 2) - 6x^3 - 6x = 6x(f'(x^2 - 2) - x^2 - 1); \quad g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(x^2 - 2) = (x^2 - 2) + 3 \end{cases}$$

$$\text{Đặt } t = x^2 - 2, \quad x \in [-2;2] \Rightarrow t \in [-2;2]; \quad f'(x^2 - 2) = (x^2 - 2) + 3 \Rightarrow f'(t) = t + 3$$



Với $t \in [-2; 2]$ từ đồ thị ta thấy $f'(t) < t + 3 \Rightarrow f'(x^2 - 2) - x^2 - 1 < 0 \forall x \in [-2; 2]$

$$\Rightarrow g'(x) = 6x(f'(x^2 - 2) - x^2 - 1) > 0 \text{ khi } x \in (-2; 0) \text{ và } g'(x) < 0 \text{ khi } x \in (0; 2)$$

Vậy giá trị lớn nhất của $g(x) = g(0)$.

Câu 55: Cho hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $[f(x) - x] f(x) = x^6 + 3x^4 + 2x^2, \forall x \in \mathbb{R}$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[1; 2]$. Giá trị của $3M - m$ bằng

A. 4.

B. $-28.$

C. -3.

D. 33.

Lời giải:

Ta có: $[f(x) - x]f(x) = x^6 + 3x^4 + 2x^2 \Leftrightarrow f^2(x) - xf(x) = x^6 + 3x^4 + 2x^2$

$$\Leftrightarrow 4f^2(x) - 4xf(x) = 4x^6 + 12x^4 + 8x^2 \Leftrightarrow 4f^2(x) - 4xf(x) + x^2 = 4x^6 + 12x^4 + 9x^2$$

$$\Leftrightarrow [2f(x) - x]^2 = (2x^3 + 3x)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2f(x) - x = 2x^3 + 3x \\ 2f(x) - x = -2x^3 - 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = x^3 + 2x \\ f(x) = -x^3 - x \end{cases}$$

Với $f(x) = x^3 + 2x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Với $f(x) = -x^3 - x \Rightarrow f'(x) = -3x^2 - 1 < 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên $f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Suy ra: $f(x) = -x^3 - x$. Vì $f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ nên $M = \max_{[1;2]} f(x) = f(1) = -2$ và

$$m = \min_{[1;2]} f(x) = f(2) = -10.$$

Từ đây ,ta suy ra: $3M - m = 3.(-2) + 10 = 4$.

Câu 56: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây:

x	$-\infty$	0	4	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	-3	5	$-\infty$

Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f(4x - x^2) + \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x + \frac{1}{3}$ trên đoạn $[1; 3]$.

A. 15.

B. $\frac{25}{3}$.

C. $\frac{19}{3}$.

D. 12.

Lời giải:

$$g'(x) = (4-2x)f'(4x-x^2) + x^2 - 6x + 8 = (2-x)[2f'(4x-x^2) + 4-x].$$

Với $x \in [1;3]$ thì $4-x > 0$; $3 \leq 4x-x^2 \leq 4$ nên $f'(4x-x^2) > 0$.

Suy ra $2f'(4x-x^2) + 4-x > 0, \forall x \in [1;3]$.

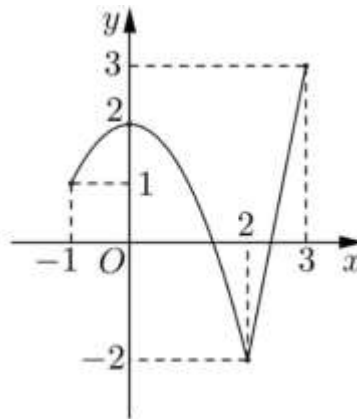
Bảng biến thiên

x	1	2	3
g'		0	
g	$g(1)$	$g(2)$	$g(3)$

Suy ra $\max_{[1;3]} g(x) = g(2) = f(4) + 7 = 12$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TỰ LUYỆN

Câu 57: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = f(-\sin x + 1)$. Giá trị của $M - m$ bằng

A. 0.

B. 1.

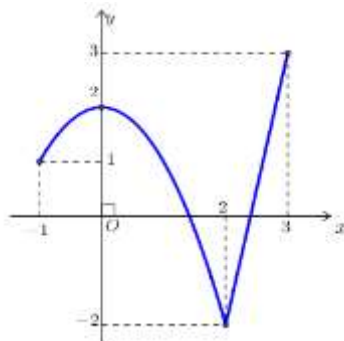
C. 4.

D. 5.

Lời giải:

Đặt $t = -\sin x + 1$ vì $-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow t \in [0;2]$. Xét hàm số $y = f(t)$ với $t \in [0;2]$, từ đồ thị đã cho, ta có: $M = \max_{[0;2]} f(t) = f(0) = 2$; $m = \min_{[0;2]} f(t) = f(2) = -2 \Rightarrow M - m = 4$.

Câu 58: Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Giá trị lớn nhất của hàm số $y = g(x) = f(3|\cos x| - 1)$ là

- A. 3. B. 2. C. 1. D. 0.

Lời giải:

Ta có: $|\cos x| \in [0; 1] \Rightarrow t = 3|\cos x| - 1 \in [-1; 2] \longrightarrow \max_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \max_{x \in [-1; 2]} f(t) = 2.$

Câu 59: Biết hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x-1)(x-2)(x+1)^2, \forall x \in \mathbb{R}$. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-1; 2]$ bằng

- A. $f(-1)$. B. $f(0)$. C. $f(1)$. D. $f(2)$.

Lời giải:

Ta có: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}.$

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$:

x	$-\infty$	-1		0		1		2		$+\infty$
$f(x)'$		$+$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$						$f(1)$		$f(2)$	$+\infty$

Vậy $\max_{[-1; 2]} f(x) = f(1).$

Câu 60: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên $\mathbb{R}$. Biết $f'(0) = 3, f'(2) = -2018$ và bảng xét dấu của $f''(x)$ như sau:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Hàm số $y = f(x + 2017) + 2018x$ đạt giá trị nhỏ nhất tại x thuộc khoảng nào sau đây?

- A. $(0; 2)$. B. $(-\infty; -2017)$. C. $(-2017; 0)$. D. $(2017; +\infty)$.

Lời giải:

Đặt $g(x) = f(x + 2017) + 2018x.$

Ta có $g'(x) = f'(x + 2017) + 2018; g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x + 2017) = -2018.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f'(x)$					

Ta có $x + 2017 = 2$ hay $x + 2017 = x_0$.

Suy ra $x = -2015$ hay $x = x_0 - 2017$. Đặt $x_1 = x_0 - 2017$ thì $x_1 < -2017$.

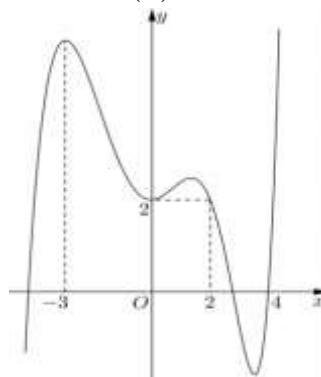
Ta có $g'(0) = f'(2017) + 2018 > 0$.

Từ đó, ta có bảng biến thiên của hàm $g(x)$ như sau:

x	$-\infty$	x_1	-2015	$+\infty$	
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$g(x)$					

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy hàm $g(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại x_1 , với $x_1 \in (-\infty; -2017)$.

Câu 61: Cho hàm số $f(x)$, đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ là đường cong trong hình bên dưới:



Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f(2x) - 4x$ trên đoạn $\left[-\frac{3}{2}; 2\right]$ bằng

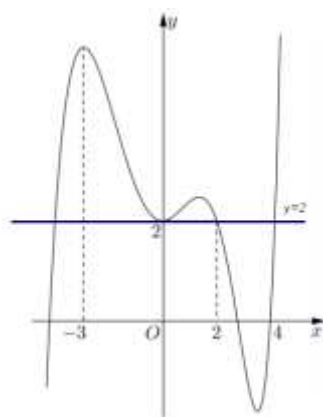
A. $f(0)$.

B. $f(-3) + 6$.

C. $f(2) - 4$.

D. $f(4) - 8$.

Lời giải:



Ta có: $g'(x) = 2f'(2x) - 4$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2f'(2x) - 4 = 0 \Leftrightarrow f'(2x) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = x_1 < -3 \\ 2x = 0 \\ 2x = 2 \\ 2x = x_2 > 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 < -\frac{3}{2} \\ x = 0 \\ x = 1 \\ x_2 > 2 \end{cases}$$

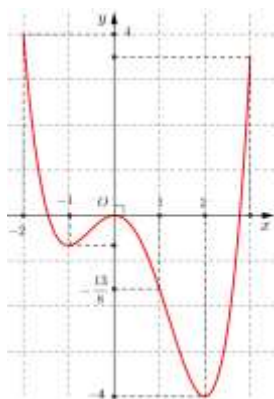
Ta có bảng biến thiên của hàm số $y = g(x)$:

x	$-\infty$	x_1	$-\frac{3}{2}$	0	1	2	x_2	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+	0	+	0	-	+
$g(x)$								

Từ bảng biến thiên ta có: trên $\left[-\frac{3}{2}; 2\right]$ hàm số $g(x) = f(2x) - 4x$ đạt giá trị lớn nhất tại $x = 1$

và $\max_{\left[-\frac{3}{2}; 1\right]} y = f(2) - 4$.

Câu 62: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên dưới:



Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(-2x)$ trên đoạn

$\left[-1; \frac{1}{2}\right]$. Giá trị của $2m + 3M$ là

A. 0.

B. $\frac{35}{4}$.

C. 4.

D. -8.

Lời giải:

Xét $g(x) = f(-2x)$ trên đoạn $\left[-1; \frac{1}{2}\right]$

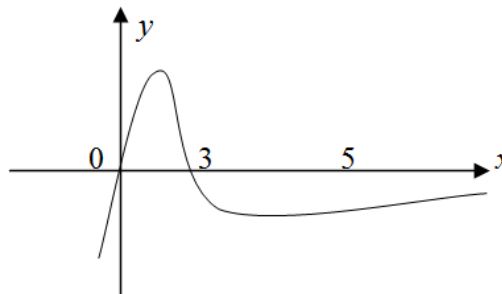
$$g'(x) = -2f'(-2x), g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(-2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2x = -1 \\ -2x = 0 \\ -2x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = 0 \in \left(-1; \frac{1}{2}\right) \\ x = -1 \end{cases}$$

Dựa vào đồ thị $y = f(x)$, ta tính được $g(-1) = f(2) = -4$, $g(0) = f(0) = 0$

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = f(-1) \text{ với } -4 < f(-1) < 0.$$

$$\text{Vậy } m = -4, M = 0 \Rightarrow 2m + 3M = -8.$$

Câu 63: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ được cho như hình vẽ bên dưới:



Biết rằng $f(0) + f(1) - 2f(3) = f(5) - f(4)$. Tìm giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của $f(x)$ trên đoạn $[0; 5]$.

A. $m = f(5), M = f(3)$

B. $m = f(5), M = f(1)$

C. $m = f(0), M = f(3)$

D. $m = f(1), M = f(3)$

Lời giải:

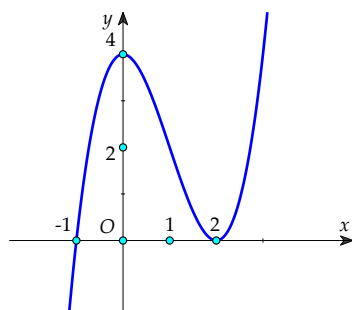
Từ đồ thị ta có bảng biến thiên của $f(x)$ trên đoạn $[0; 5]$

x	0		3		5
$f'(x)$	0	+	0	-	
$f(x)$	$f(0)$		$f(3)$		$f(5)$

$$\Rightarrow M = f(3) \text{ và } f(1) < f(3), f(4) < f(3)$$

$$f(5) - f(0) = f(1) - f(3) + f(4) - f(3) < 0 \Rightarrow f(5) < f(0) \Rightarrow m = f(5).$$

Câu 64: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



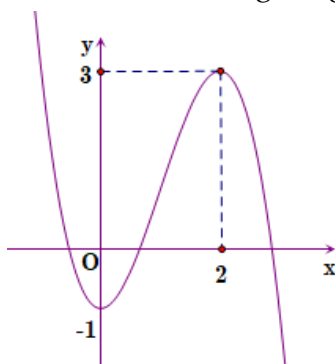
Khi đó, giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f(2 - x^2)$ trên đoạn $[0; \sqrt{2}]$ là

- A. $\max_{[0; \sqrt{2}]} g(x) = f(0)$. B. $\max_{[0; \sqrt{2}]} g(x) = f(1)$. C. $\max_{[0; \sqrt{2}]} g(x) = f(\sqrt{2})$. D. $\max_{[0; \sqrt{2}]} g(x) = f(2)$.

Lời giải:

Đặt $t = 2 - x^2$; $t' = -2x \leq 0, \forall x \in [0; \sqrt{2}] \Rightarrow t \in [0; 2] \Rightarrow \max_{[0; \sqrt{2}]} g(x) = \max_{[0; 2]} f(t) = f(0)$.

Câu 65: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên dưới:



Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f(x^2 - 3x + 2) + 2022$ trên đoạn $\left[-3; \frac{1}{2}\right]$ bằng

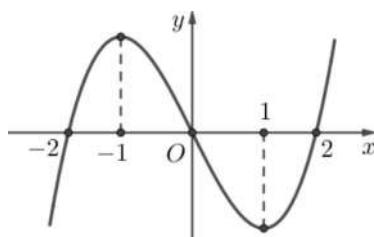
- A. $f\left(\frac{21}{16}\right) + 2022$. B. 2024. C. 2025. D. $f\left(\frac{3}{4}\right) + 2022$.

Lời giải:

Ta có $-3 \leq x \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{3}{4} \leq x^2 - 3x + 2 \leq 2 \Rightarrow f\left(\frac{3}{4}\right) \leq f(x^2 - 3x + 2) \leq f(2)$

$\Rightarrow \max_{x \in \left[-3; \frac{1}{2}\right]} g(x) = g(2) = f(2) + 2022 = 2025$.

Câu 66: Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị của đạo hàm như sau:



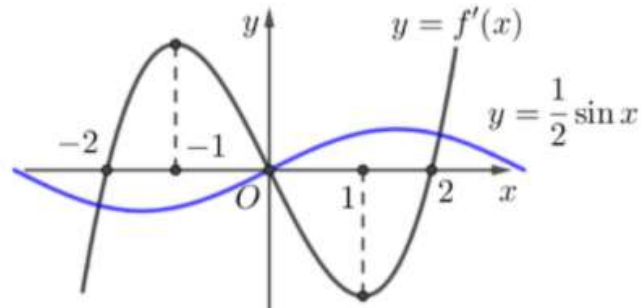
Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f(2x) - \sin^2 x$ trên đoạn $[-1; 1]$ bằng

- A. $f(-1) - \sin^2 \frac{1}{2}$. B. $f(2) - \sin^2 1$. C. $f(0)$. D. $f(1) - \sin^2 \frac{1}{2}$.

Lời giải:

Đặt $t = 2x \Rightarrow \forall x \in [-1; 1], t \in [-2; 2]$. Ta xét hàm số $y = f(t) - \sin^2 \frac{t}{2} = f(t) - \frac{1 - \cos t}{2}$ trên $[-2; 2]$.

Ta có: $y' = f'(t) - \frac{1}{2} \sin t; y' = 0 \Leftrightarrow f'(t) = \frac{1}{2} \sin t \Leftrightarrow t = 0 \in [-2; 2]$.



Bảng biến thiên:

t	-2	0	2
y'	+	0	-
y			

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số là $y(0) = f(0)$.

Câu 67: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên $\mathbb{R}$. Biết $f'(2) = f'(-2018) = 0, f'(0) = 3$ và bảng xét dấu của $f''(x)$ như sau:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$f''(x)$	+	0	-	0	+

Hàm số $y = f(|x-1| - 2018)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm x_0 . Khi đó x_0 thuộc khoảng nào dưới đây?

- A. $(-2015; 1)$. B. $(-\infty; -2015)$. C. $(-1009; 2)$. D. $(1; 3)$.

Lời giải:

Từ bảng xét dấu $f''(x)$ ta có bảng biến thiên của $f'(x)$:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$		
$f''(x)$		+	0	-	0	+
$f'(x)$			3		0	

Xét hàm số $y = f(|x-1| - 2018)$:

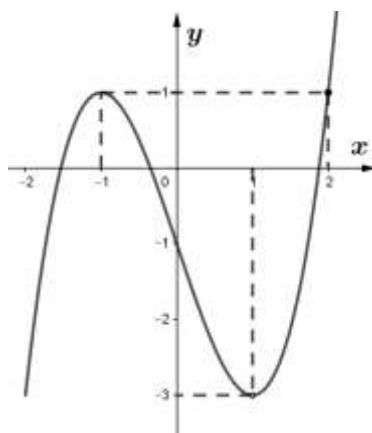
Ta có $y' = \frac{x-1}{|x-1|} f'(|x-1| - 2018), x \neq 1; y' = 0 \Leftrightarrow f'(|x-1| - 2018) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |x-1|-2018=2 \\ |x-1|-2018=-2018 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2021; x=-2019 \\ x=1 \end{cases} (l)$$

x	$-\infty$	-2019	1	2021	$+\infty$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$
y						

Dựa vào BBT ta thấy hàm số đã cho đạt giá trị nhỏ nhất tại $x=1 \in (-1009; 2)$.

Câu 68: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên dưới:



Gọi $g(x)=f(x)-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x-2019$. Biết $g(-1)+g(1)>g(0)+g(2)$.

Với $x \in [-1; 2]$ thì g đạt giá trị nhỏ nhất bằng

A. $g(2)$.

B. $g(1)$.

C. $g(-1)$.

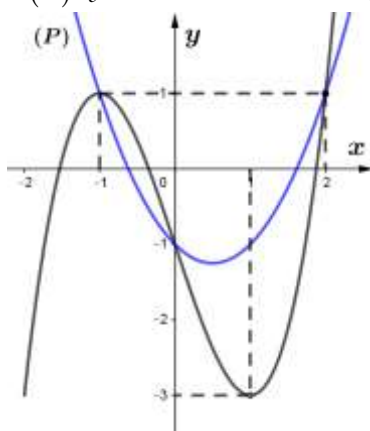
D. $g(0)$.

Lời giải:

+ Xét hàm số $g(x)=f(x)-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x-2019$ trên đoạn $[-1; 2]$.

+ Ta có $g'(x)=f'(x)-x^2+x+1$.

Vẽ đồ thị hàm số $y=f'(x)$ và Parabol $(P): y=x^2-x-1$ trên cùng hệ trục tọa độ như hình vẽ.



+ Ta thấy $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x^2 - x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$.

+ Bảng biến thiên :

x	-1	0	1	2
$g'(x)$	+	0	-	-
$g(x)$	$g(-1)$	$g(0)$	$g(1)$	$g(2)$

+ Từ giả thiết $g(-1) + g(1) > g(0) + g(2) \Leftrightarrow g(-1) - g(2) > g(0) - g(1)$
 $\Rightarrow g(-1) - g(2) > 0$ (vì $g(0) > g(1)$) $\Leftrightarrow g(-1) > g(2)$.

Vậy $\min_{[-1; 2]} g(x) = g(2)$.

Dạng 4: Bài toán tham số (không chứa dấu giá trị tuyệt đối)

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM MINH HỌA

Câu 69: Hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên tập xác định $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-3	2	$+\infty$
y'		+	-	+
y	$-\infty$	2	-1	$+\infty$

Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của của tham số m để hàm số đã cho có giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(m; m+4)$?

A. 2

B. 4.

C. 1.

D. 3.

Lời giải:

Để hàm số đã cho có giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(m; m+4)$ thì

$$\begin{cases} -1 < m < 2 \\ m+4 > -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 < m < 2 \\ m > -5 \end{cases} \Rightarrow -1 < m < 2.$$

Câu 70: Gọi S là tập tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x) = x^3 + 3x^2 + m^2 - 5$ có giá trị lớn nhất trên $[-1; 2]$ bằng 19. Tính tổng tất cả các phần tử của S .

A. -2.

B. 2.

C. 4.

D. 0.

Lời giải:

x	-2	-1	0	2
f''	0	-	0	+
f		$m^2 - 3$	$m^2 - 5$	$m^2 + 15$

Ta có $y' = 3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$.

Ta có: $\max_{[-1,2]} f(x) = f(2) = m^2 + 15$

Theo bài ta được $m^2 + 15 = 19 \Rightarrow m = \pm 2 \Rightarrow S = 0$.

Câu 71: Số các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 2m + 7$ có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[2;4]$ thuộc khoảng $(-5;8)$ là

- A. 12. B. 3. C. 7. **D. 6.**

Lời giải:

Xét hàm số trên $[2;4]$, ta có: $y' = x^2 - 2x - 3, y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \notin (2;4) \\ x = 3 \in (2;4) \end{cases}$

Ta có: $y(2) = -\frac{1}{3} + 2m; y(4) = \frac{1}{3} + 2m; y(3) = -2 + 2m$.

$\Rightarrow \min_{[2;4]} y = -2 + 2m \in (-5;8) \Leftrightarrow -5 < -2 + 2m < 8 \Leftrightarrow -3 < 2m < 10 \Leftrightarrow \frac{-3}{2} < m < 5$.

$m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-1;0;1;2;3;4\}$.

Câu 72: Giả sử giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{(m+1)x+2}{-x+m}$ trên đoạn $[1;3]$ bằng $\frac{1}{2}$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $m \in (-5;-3)$. B. $m \in (2;4)$. **C. $m \in (-9;-6)$.** D. $m \in \left(-1; \frac{1}{2}\right)$.

Lời giải:

Ta có: $y' = \frac{m^2 + m + 2}{(-x+m)^2} > 0, \forall x \in D$.

Suy ra $\min_{[1;3]} y = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} y(1) = \frac{1}{2} \\ m \notin [1;3] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m+3}{m-1} = \frac{1}{2} \\ m \notin [1;3] \end{cases} \Leftrightarrow m = -7 \in (-9;-6)$.

Câu 73: Biết giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{x+m^2}{x-2}$ trên đoạn $[-1;1]$ bằng -1 . Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. $m \in (-1;0)$. **B. $m \in (-4;3)$.** C. $m \in (4;6)$. D. $m \in (0;1)$.

Lời giải:

Đạo hàm $y' = \frac{-2-m^2}{(x-2)^2} < 0$ nên giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{x+m^2}{x-2}$ trên đoạn $[-1;1]$ là

$f(-1) = -1 \Leftrightarrow \frac{m^2-1}{-3} = -1 \Leftrightarrow m^2-1=3 \Leftrightarrow m^2=4 \Leftrightarrow m=\pm 2$

Suy ra $m \in (-4;3)$.

Câu 74: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-5;5]$ để giá trị nhỏ nhất của

$y = \frac{m \sin x + 1}{\cos x + 2}$ nhỏ hơn -1 ?

A. 4.

B. 2.

C. 6.

D. 8.

Lời giải:

Vì $\cos x + 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số xác định trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Ta có: } y = \frac{m \sin x + 1}{\cos x + 2} \Leftrightarrow m \sin x - y \cos x = 2y - 1 \quad (1)$$

Vì phương trình (1) có nghiệm nên:

$$m^2 + y^2 \geq (2y - 1)^2 \Leftrightarrow 3y^2 - 4y + 1 - m^2 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2 - \sqrt{3m^2 + 1}}{3} \leq y \leq \frac{2 + \sqrt{3m^2 + 1}}{3}$$

Vậy GTNN của y bằng: $\frac{2 - \sqrt{3m^2 + 1}}{3}$.

$$\text{Yêu cầu bài toán} \Leftrightarrow \frac{2 - \sqrt{3m^2 + 1}}{3} < -1 \Leftrightarrow \sqrt{3m^2 + 1} > 5$$

$$\Leftrightarrow 3m^2 + 1 > 25 \Leftrightarrow m^2 > 8 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2\sqrt{2} \\ m < -2\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\text{Vì } \begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m \in [-5; 5] \end{cases} \text{ nên } m \in \{-5; -4; -3; 3; 4; 5\}.$$

Câu 75: Có bao nhiêu giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{x - m^2 - 2}{x - m}$ trên đoạn $[0; 4]$ bằng -1 ?

A. 2.

B. 1.

C. 3.

D. 0.

Lời giải:

$$\text{TXĐ: } D = \mathbb{R} \setminus \{m\}.$$

$$y' = \frac{m^2 - m + 2}{(x - m)^2} = \frac{\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}}{(x - m)^2} > 0, \forall x \in D$$

TH 1: $m \in [0; 4]$, ta có hàm số không có giá trị lớn nhất trên đoạn $[0; 4]$ vì $\lim_{x \rightarrow m^-} y = +\infty$.

TH 2: $m \notin [0; 4]$, ta có hàm số đồng biến trên $[0; 4]$

Suy ra giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[0; 4]$ bằng

$$y(4) = \frac{2 - m^2}{4 - m} = -1 \Leftrightarrow m^2 + m - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -3 \end{cases}.$$

Câu 76: Tìm số dương b để giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^3 - 3bx^2 + b - 1$ trên đoạn $[-1; b]$ bằng 10.

A. $b = \frac{5}{2}$.

B. $b = \frac{3}{2}$.

C. $b = 11$.

D. $b = 10$.

Lời giải:

$$\text{Ta có } y' = 3x^2 - 6bx, \text{ cho } y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \in [-1; b] \\ x = 2b \notin [-1; b] \end{cases} \text{ với mọi } b > 0.$$

Bảng biến thiên:

x	-1	0	b
y'		+	0
y			$b-1$

Yêu cầu bài toán tương đương $b-1=10 \Leftrightarrow b=11$.

Câu 77: Cho hàm số $f(x) = m\sqrt{x-1}$ (m là tham số thực khác 0). Gọi m_1, m_2 là hai giá trị của m thỏa mãn $\min_{[2;5]} f(x) + \max_{[2;5]} f(x) = m^2 - 10$. Giá trị $m_1 + m_2$ bằng

- A. 3.** **B. 5.** **C. 10.** **D. 2.**

Lời giải:

Với mọi $x \in [2;5]$ có $f'(x) = \frac{m}{2\sqrt{x-1}}$. Ta thấy dấu của $f'(x)$ phụ thuộc vào dấu của m

$\forall m \neq 0$ thì $f(x)$ đơn điệu trên $[2;5] \Rightarrow \min_{[2;5]} f(x) + \max_{[2;5]} f(x) = f(2) + f(5) = m + 2m$

Từ giả thiết ta được $m^2 - 10 = m + 2m \Leftrightarrow m^2 - 3m - 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 5 \\ m = -2 \end{cases}$. Vậy $m_1 + m_2 = 3$.

Câu 78: Cho hàm số $y = f(x) = x - 3\sqrt[3]{x+1} + m$, đặt $P = \max_{[-1;7]} (f(x))^2 + \min_{[-1;7]} (f(x))^2$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để giá trị lớn nhất của P không vượt quá 26?

- A. 6** **B. 7** **C. 4** **D. 5**

Lời giải:

Đặt $t = x - 3\sqrt[3]{x+1}$ vì $x \in [-1;7]$ nên ta có $t \in [-3;1]$

Do đó ta có $f(t) = t + m, t \in [-3;1]$

TH 1: $f(-3).f(1) = (-3+m)(1+m) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 3 \\ m \leq -1 \end{cases}$ (1)

+) $P = \max_{[-3;1]} (f(t))^2 + \min_{[-3;1]} (f(t))^2 = f^2(-3) + f^2(1) = (-3+m)^2 + (1+m)^2 = 2m^2 - 4m + 10$

+) $P \leq 26 \Leftrightarrow 2m^2 - 4m + 10 \leq 26 \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 4$ (2)

+) Từ (1), (2) và $m \in \mathbb{Z}$ ta có: $m \in \{-2; -1; 3; 4\}$ (3)

TH 2: $f(-3).f(1) = (-3+m)(1+m) < 0 \Leftrightarrow -1 < m < 3$

+) $P = \max_{[-3;1]} (f(t))^2 + \min_{[-3;1]} (f(t))^2 = \max \{f^2(-3); f^2(1)\}$

+) $P \leq 26 \Leftrightarrow \begin{cases} f^2(-3) \leq 26 \\ f^2(1) \leq 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-3+m)^2 \leq 26 \\ (1+m)^2 \leq 26 \end{cases}$ đúng với mọi $m \in (-1;3)$

+) $m \in \mathbb{Z}$ ta có: $m \in \{0; 1; 2\}$ (4)

Từ (3), (4) ta có $m \in \{-2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$.

Câu 79: Cho hàm số $y = (x^2 + 2x + m)^2$. Tổng tất cả giá trị thực của tham số m sao cho $\min_{[-3;3]} y = 9$ bằng

- A. 14.** **B. -14.** **C. 4.** **D. -18.**

Lời giải:

Đặt $f(x) = x^2 + 2x + m$.

Khi đó: $f'(x) = 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

Lại có: $f(-3) = m + 3$; $f(-1) = m - 1$; $f(3) = m + 15$.

Do đó: $A = \max_{[-3;3]} f(x) = m + 15$; $B = \min_{[-3;3]} f(x) = m - 1$.

TH 1: Nếu $B = m - 1 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 1$ thì $\min_{[-3;3]} y = (m - 1)^2$.

Theo yêu cầu bài toán: $(m - 1)^2 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2 \text{ (KTM)} \\ m = 4 \text{ (TM)} \end{cases}$.

TH 2: Nếu $A = m + 15 \leq 0 \Leftrightarrow m \leq -15$ thì $\min_{[-3;3]} y = (m + 15)^2$.

Theo yêu cầu bài toán: $(m + 15)^2 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -12 \text{ (KTM)} \\ m = -18 \text{ (TM)} \end{cases}$.

TH 3: Nếu $A.B < 0 \Leftrightarrow -15 < m < 1$ thì $\min_{[-3;3]} y = 0 \text{ (VL)}$.

Vậy tổng các giá trị của tham số m là: -14.

Câu 80: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên thuộc đoạn $[-10;10]$ của tham số m sao cho hàm số $f(x) = (m^2 - 6m)x^4 + (2m - 1)x^2 + 2m^3 - 1$ có giá trị nhỏ nhất?

A. 12.

B. 14.

C. 15.

D. 13.

Lời giải:

TH 1: $m^2 - 6m = 0 \Leftrightarrow m = 0 \vee m = 6$

Với $m = 0$: $f(x) = -x^2 - 1$: Không có giá trị nhỏ nhất.

Với $m = 6$: $f(x) = 11x^2 + 431$: Có giá trị nhỏ nhất.

TH 2: $m^2 - 6m > 0 \Leftrightarrow m < 0 \vee m > 6$

Hàm số là hàm trùng phương, có hệ số $a > 0$ nên có giá trị nhỏ nhất.

Do $m \in [-10;10]$ nên $m \in \{-10; -9; \dots; -1; 6; 7; \dots; 10\}$.

Câu 81: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{x+m}{x^2+x+1}$ có giá trị lớn nhất trên $\mathbb{R}$ nhỏ hơn hoặc bằng 1.

A. $m \leq 1$.

B. $m \geq 1$.

C. $m \geq -1$.

D. $m \leq -1$.

Lời giải:

+ TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

+ $\lim_{x \rightarrow \infty} y = 0$

+ $y' = \frac{-x^2 - 2mx + 1 - m}{(x^2 + x + 1)^2}$.

Ta có: $y' = 0 \Leftrightarrow -x^2 - 2mx + 1 - m = 0 \text{ (*)}$

$\Delta'_{(*)} = m^2 - m + 1 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$ nên (*) có 2 nghiệm phân biệt $x_1 < x_2, \forall m \in \mathbb{R}$

+ BBT:

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y					

$0 \rightarrow f(x_1) \rightarrow f(x_2) \rightarrow 0$

Vậy hàm số đạt giá trị lớn nhất là $f(x_2) = \frac{1}{2x_2 + 1}$ với $x_2 = -m + \sqrt{m^2 - m + 1}$

$$YCBT \Leftrightarrow \frac{1}{-2m + 2\sqrt{m^2 - m + 1} + 1} \leq 1 \Leftrightarrow 1 - 2m + 2\sqrt{m^2 - m + 1} \geq 1 \text{ (vì } f(x_2) > 0 \Rightarrow 2x_2 + 1 > 0)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{m^2 - m + 1} \geq m \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m \geq 0 \\ m^2 - m + 1 \geq m^2 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq 1$$

Câu 82: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ sao cho $\max_{x \in [0;10]} f(x) = f(2) = 4$. Xét hàm số $g(x) = f(x^3 + x) - x^2 + 2x + m$. Giá trị của tham số m để $\max_{x \in [0;2]} g(x) = 8$ là

- A. 5. B. 4. C. -1. **D. 3.**

Lời giải:

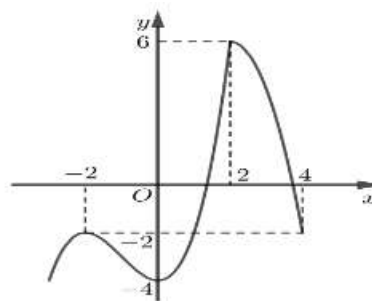
Đặt $t = x^3 + x$. Vì $x \in [0;2] \Rightarrow t \in [0;10]$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \max_{x \in [0;2]} g(x) &= \max_{x \in [0;2]} [f(x^3 + x) - x^2 + 2x + m] \leq \max_{x \in [0;2]} f(x^3 + x) + \max_{x \in [0;2]} [-x^2 + 2x + m] \\ &= \max_{x \in [0;10]} f(t) + 1 + m \text{ (với } t = x^3 + x \text{ và } \max_{x \in [0;2]} [-x^2 + 2x + m] = 1 + m) \\ &\leq \max_{x \in [0;2]} f(x) + 1 + m = 4 + 1 + m = 5 + m. \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } \max_{x \in [0;2]} g(x) = 5 + m \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ t = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

$$\text{Theo giả thiết, ta có } \max_{x \in [0;2]} g(x) = 8 \Leftrightarrow m + 5 = 8 \Leftrightarrow m = 3.$$

Câu 83: Cho hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-2;4]$ như hình vẽ bên dưới:



Gọi S là tập chứa các giá trị của m để hàm số $y = (f(2 - x) + m)^2$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $[-2;4]$ bằng 49. Tổng các phần tử của tập S bằng

- A. -9. B. -23. **C. -2.** D. -12.

Lời giải:

Đặt $2 - x = t$. Khi $x \in [-2; 4]$, ta có $t \in [-2; 4]$.

Hàm số $y = (f(2 - x) + m)^2$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $[-2; 4]$ bằng 49

khi và chỉ khi hàm số $y = (f(t) + m)^2$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $[-2; 4]$ bằng 49.

$$\Leftrightarrow (f(t) + m)^2 \leq 49, \forall t \in [-2; 4] \text{ và } \exists t \in [-2; 4] \text{ để } (f(t) + m)^2 = 49$$

$$\Leftrightarrow -7 - m \leq f(t) \leq 7 - m, \forall t \in [-2; 4] \text{ và } \begin{cases} \exists t_1 \in [-2; 4], f(t_1) = 7 - m \\ \exists t_2 \in [-2; 4], f(t_2) = -7 - m \end{cases}$$

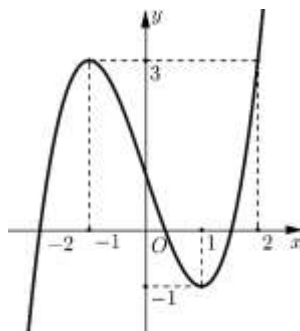
Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(t)$ trên đoạn $[-2; 4]$ ta thấy $-4 \leq f(t) \leq 6, \forall t \in [-2; 4]$.

Do đó hàm số $y = (f(t) + m)^2$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $[-2; 4]$ bằng 49

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7 - m = 6 \\ -7 - m = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -3 \end{cases}, \text{ dấu bằng xảy ra tại } \begin{cases} t = 2 \\ t = 0 \end{cases}. \text{ Suy ra } S = \{1; -3\}.$$

Vậy tổng các phần tử của S là $1 + (-3) = -2$.

Câu 84: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Đặt hàm số $g(x) = f(2x^3 + x - 1) - m$. Tìm tất cả giá trị của tham số m để $\max_{[0;1]} g(x) = 10$.

A. $m = 3$.

B. $m = -1$.

C. $m = -7$.

D. $m = -12$.

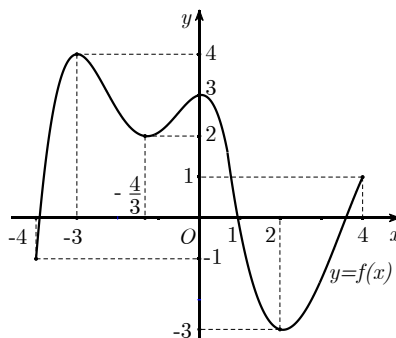
Lời giải:

$$\text{Do } x \in [0; 1] \Rightarrow 2x^3 + x - 1 \in [-1; 2].$$

$$\text{Dựa vào đồ thị ta có } f(2x^3 + x - 1) \leq f(-1) = 3, \forall x \in [0; 1].$$

$$\text{Do đó } g(x) \leq 3 - m. \text{ Khi đó } y_{cbt} \Leftrightarrow 3 - m = 10 \Leftrightarrow m = -7.$$

Câu 85: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $[-4; 4]$, có các điểm cực trị trên $(-4; 4)$ là $-3; -\frac{4}{3}; 0; 2$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Đặt hàm số $y = g(x) = f(x^3 + 3x) + m$ với m là tham số. Gọi m_1 là giá trị của m để

$\max_{[0;1]} g(x) = 4$, m_2 là giá trị của m để $\min_{[-1;0]} g(x) = -2$. Giá trị của $m_1 + m_2$ bằng

A. -2.

B. 0.

C. 2.

D. -1.

Lời giải:

Đặt $t(x) = x^3 + 3x$ với $x \in [-4; 4]$. Ta có $t'(x) = 3x^2 + 1 > 0, \forall x \in [-4; 4]$.

Suy ra hàm số $t(x)$ đồng biến trên $(-4; 4)$ nên $x \in [0; 1] \Rightarrow t \in [0; 4]$.

Từ đồ thị hàm số ta có $\max_{[0;4]} f(t) = 3 \Rightarrow \max_{[0;4]} [f(t) + m] = m + 3$.

Mà $\max_{[0;1]} g(x) = 4 \Rightarrow m + 3 = 4 \Rightarrow m = 1 \Rightarrow m_1 = 1$.

Tương tự, hàm số $t(x)$ đồng biến nên $x \in [-1; 0] \Rightarrow t \in [-4; 0]$.

Từ đồ thị hàm số ta có $\min_{[-4;0]} f(t) = -1 \Rightarrow \min_{[-4;0]} [f(t) + m] = m - 1$.

Mà $\min_{[-1;0]} g(x) = -2 \Rightarrow m - 1 = -2 \Rightarrow m = -1 \Rightarrow m_2 = -1$.

Khi đó $m_1 + m_2 = 1 + (-1) = 0$.

Câu 86: Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{x^2 + mx + 1}{x + m}$ liên tục và đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0; 2]$ tại một điểm $x_0 \in (0; 2)$.

A. $0 < m < 1$.

B. $m > 1$.

C. $m > 2$.

D. $-1 < m < 1$.

Lời giải:

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$. Hàm số liên tục trên $[0; 2] \Leftrightarrow \begin{cases} -m < 0 \\ -m > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m < -2 \end{cases}$

Ta có $y' = \frac{x^2 + 2mx + m^2 - 1}{(x + m)^2} = \frac{(x + m)^2 - 1}{(x + m)^2}$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -m - 1 \\ x_2 = -m + 1 \end{cases}$.

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	x_1	$-m$	0	x_2	2	$+\infty$
y'	+	0	-	-	0	+	+
y	$-\infty$	$\nearrow$	$\searrow$	$+\infty$	$\searrow$	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_0 \in (0; 2)$ nên $0 < -m + 1 < 2 \Leftrightarrow -1 < m < 1$

So với điều kiện hàm số liên tục trên đoạn $[0; 2]$. Ta có $0 < m < 1$.

Cách khác:

Điều kiện xác định $x \neq -m$

Hàm số liên tục trên đoạn $[0; 2]$ nên $-m \notin [0; 2] \Rightarrow \begin{cases} -m < 0 \\ -m > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m < -2 \end{cases} (*)$

$$y' = \frac{x^2 + 2mx + m^2 - 1}{(x+m)^2} = \frac{(x+m)^2 - 1}{(x+m)^2}$$

$$y' = 0 \text{ có hai nghiệm là } \begin{cases} x_1 = -m+1 \\ x_2 = -m-1 \end{cases}$$

$x_1 - x_2 = 2$ nên chỉ có nhiều nhất một nghiệm thuộc $(0; 2)$

Ta thấy $-m+1 > -m-1, \forall m$ và do đó để hàm số liên tục và đạt giá trị nhỏ nhất trên $[0; 2]$ tại một điểm $x_0 \in (0; 2)$ thì $0 < -m+1 < 2 \Leftrightarrow -1 < m < 1$ (**)

Từ (*), (**) ta có $0 < m < 1$

Câu 87: Có bao nhiêu cặp số nguyên $(a; b)$ để hàm số $f(x) = x^6 + ax^3 + bx + 1$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm $x = 1$?

A. 44.

B. 43.

C. 45.

D. 41.

Lời giải:

Ta có: $\min_{\mathbb{R}} f(x) = f(1) \Rightarrow f'(1) = 0 \Leftrightarrow (6x^5 + 3ax^2 + b)|_{x=1} = 0 \Leftrightarrow 6 + 3a + b = 0 \Leftrightarrow b = -(3a + 6)$.

Khi đó $f(x) = x^6 + ax^3 - (3a + 6)x + 1$ và điều kiện đủ là

$$f(x) = x^6 + ax^3 - (3a + 6)x + 1 \geq f(1), \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow x^6 + ax^3 - (3a + 6)x + 1 \geq 1 + a - 3a - 6 + 1, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow a(x^3 - 3x + 2) + x^6 - 6x + 5 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow a(x-1)^2(x+2) + (x-1)^2(x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow a(x+2) + x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \geq g(x) = -\frac{x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5}{x+2}, \forall x \in (-2; +\infty) \\ a \leq g(x) = -\frac{x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5}{x+2}, \forall x \in (-\infty; -2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq \max_{(-2; +\infty)} g(x) = g\left(\frac{-3 + \sqrt{5}}{2}\right) = 20 - 10\sqrt{5} \\ a \leq \min_{(-\infty; -2)} g(x) = g\left(\frac{-3 - \sqrt{5}}{2}\right) = 20 + 10\sqrt{5} \end{cases}$$

Do đó $a \in \{-2; -1; \dots; 42\}$. Vậy có $45 \times 1 = 45$ cặp số thỏa mãn.

Câu 88: Cho hàm số $f(x) = (x-1)^2(ax^2 + 4ax - a + b - 2)$, với $a, b \in \mathbb{R}$. Biết trên khoảng $\left(-\frac{4}{3}; 0\right)$ hàm

số đạt giá trị lớn nhất tại $x = -1$. Hỏi trên đoạn $\left[-2; -\frac{5}{4}\right]$ hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại giá

trị nào của x ?

A. $x = -\frac{5}{4}$.

B. $x = -\frac{4}{3}$.

C. $x = -\frac{3}{2}$.

D. $x = -2$.

Lời giải:

Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

Ta có: $f'(x) = 2(x-1)(2ax^2 + 5ax - 3a + b - 2)$.

Vì trên khoảng $\left(-\frac{4}{3}; 0\right)$ hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $x = -1$ nên hàm số đạt cực trị tại

$x = -1$ (cũng là điểm cực đại của hàm số) và $a > 0$.

$$\Rightarrow f'(-1) = 0 \Leftrightarrow -4(-6a + b - 2) = 0 \Leftrightarrow b = 6a + 2.$$

$$\Rightarrow f'(x) = 2a(x-1)(2x^2 + 5x + 3).$$

$$\text{Khi đó } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{2} \\ x = -1 \\ x = 1 \end{cases} \text{ (đều là các nghiệm đơn)}$$

Hàm số đạt cực đại tại $x = -1$ nên có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	-1	1	$+\infty$	
y'		$-$	0	$+$	0	$+$
y	$+\infty$			CD		$+\infty$
		CT			CT	

$$\Rightarrow x = -\frac{3}{2} \text{ là điểm cực tiểu duy nhất thuộc } \left[-2; -\frac{5}{4}\right].$$

Vậy hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = -\frac{3}{2}$ trên đoạn $\left[-2; -\frac{5}{4}\right]$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TỰ LUYỆN

Câu 89: Có bao nhiêu số thực m để tích giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^4 - m^2x^3 - 2x^2 - m$ trên đoạn $[0; 1]$ bằng -1 ?

- A. 0. B. 2. C. 3. **D. 1.**

Lời giải:

$$\text{Ta có } f'(x) = 4x^3 - 3m^2x^2 - 4x = x(4x^2 - 3m^2x - 4) = x \left[\underbrace{4(x^2 - 1)}_{\leq 0} - \underbrace{3m^2x}_{\geq 0} \right] \leq 0, \forall x \in [0; 1].$$

$$\text{Do đó } \max_{[0; 1]} f(x) = f(0) = -m; \min_{[0; 1]} f(x) = f(1) = -m^2 - m - 1.$$

$$\text{Vậy yêu cầu bài toán } \Leftrightarrow -m(-m^2 - m - 1) = -1 \Leftrightarrow m = -1.$$

Câu 90: Có bao nhiêu giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{x - m^2 - 2}{x - m}$ trên đoạn $[0; 4]$ bằng -1 ?

- A. 0. B. 2. C. 3. **D. 1.**

Lời giải:

Điều kiện: $x \neq m$.

Hàm số đã cho xác định trên $[0; 4]$ khi $m \notin [0; 4]$ (*).

Ta có $y' = \frac{m^2 - m + 2}{(x - m)^2} = \frac{\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}}{(x - m)^2} > 0$ với $\forall x \in [0; 4]$.

Hàm số đồng biến trên đoạn $[0; 4]$ nên $\max_{[0; 4]} y = y(4) = \frac{2 - m^2}{4 - m}$.

$\max_{[0; 4]} y = -1 \Leftrightarrow \frac{2 - m^2}{4 - m} = -1 \Leftrightarrow m^2 + m - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -3 \end{cases}$.

Kết hợp với điều kiện (*) ta được $m = -3$. Do đó có một giá trị của m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 91: Gọi A, B lần lượt là giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{x + m^2 + m}{x - 1}$ trên đoạn $[2; 3]$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để $A + B = \frac{13}{2}$.

A. $m = 1; m = -2$. **B.** $m = -2$. **C.** $m = \pm 2$. **D.** $m = -1; m = 2$.

Lời giải:

Xét hàm số $y = \frac{x + m^2 + m}{x - 1}$ trên đoạn $[2; 3]$.

$y' = \frac{-m^2 - m - 1}{(x - 1)^2} < 0 \forall x \in [2; 3] \Rightarrow A = f(3) = \frac{m^2 + m + 3}{2}, B = f(2) = \frac{m^2 + m + 2}{1}$.

Lúc đó: $A + B = \frac{13}{2} \Leftrightarrow \frac{m^2 + m + 3}{2} + \frac{m^2 + m + 2}{1} = \frac{13}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -2 \end{cases}$.

Câu 92: Có bao nhiêu số thực dương m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ trên đoạn $[m + 1; m + 2]$ bằng 53?

A. 2. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải:

Ta có: $y = x^3 - 3x + 1 \Rightarrow y' = 3x^2 - 3 > 0, \forall x \in [m + 1; m + 2]$ vì $m > 0$.

Nên $\max_{[m+1; m+2]} y = y(m + 2) = (m + 2)^3 - 3(m + 2) + 1 = m^3 + 6m^2 + 9m + 3$.

Theo đề bài ta có: $\max_{[m+1; m+2]} y = 53 \Leftrightarrow m^3 + 6m^2 + 9m + 3 = 53$

$\Leftrightarrow m^3 + 6m^2 + 9m - 50 = 0 \Leftrightarrow m = 2$.

Câu 93: Cho hàm số $y = \frac{x + m}{x - 2}$ thỏa mãn $\min_{[3; 5]} y = 4$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $m > 5$. **B.** $4 \leq m \leq 5$. **C.** $2 \leq m < 4$. **D.** $m < 2$.

Lời giải:

Xét trên đoạn $D = [3; 5]$.

Ta có: $y' = \frac{-2 - m}{(x - 2)^2}$.

TH 1: $-2 - m > 0 \Leftrightarrow m < -2$.

Hàm số $y = \frac{x + m}{x - 2}$ đồng biến trên $[3; 5] \Rightarrow \min_{[3; 5]} y = 4 \Leftrightarrow y(3) = 4 \Leftrightarrow m + 3 = 4 \Leftrightarrow m = 1$ (không thỏa mãn $m < -2$).

TH 2: $m = -2$.

Hàm số không đổi trên $[3;5] \Rightarrow \min_{[3;5]} y = \max_{[3;5]} y = 1$ loại.

TH 3: $m > -2$.

Hàm số $y = \frac{x+m}{x-2}$ nghịch biến trên $[3;5] \Rightarrow \min_{[3;5]} y = 4 \Leftrightarrow y(5) = 4 \Leftrightarrow \frac{m+5}{3} = 4 \Leftrightarrow m = 7$ (thỏa mãn $m > -2$).

Câu 94: Cho hàm số $y = \frac{2x+m}{x-1}$. Tìm giá trị của tham số m để $\max_{[-1;0]} y + \min_{[-1;0]} y = -5$.

A. $m = 3$.

B. $m = 6$.

C. $m = 4$.

D. $m = 2$.

Lời giải:

Hàm số $y = \frac{2x+m}{x-1}$ có tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Hàm số liên tục trên đoạn $[-1;0]$.

Đạo hàm: $y' = \frac{-2-m}{(x-1)^2}$.

TH 1: Nếu $m = -2$, khi đó $y = 2 \Rightarrow \max_{[-1;0]} y + \min_{[-1;0]} y = 4$ không thỏa mãn yêu cầu.

TH 2: Nếu $m \neq -2$, khi đó hàm số đã cho đơn điệu trên đoạn $[-1;0]$ nên đạt GTLN, GTNN tại các điểm đầu mút

$$\Rightarrow \max_{[-1;0]} y + \min_{[-1;0]} y = -5 \Leftrightarrow y(-1) + y(0) = -5 \Leftrightarrow \frac{-2+m}{-2} + \frac{m}{-1} = -5 \Leftrightarrow m = 4.$$

Vậy $m = 4$ là giá trị của tham số thỏa mãn yêu cầu.

Câu 95: Cho hàm số $y = f(x) = \frac{2x+m}{x-1}$. Tính tổng các giá trị của tham số m để

$$\left| \max_{[2;3]} f(x) - \min_{[2;3]} f(x) \right| = 3.$$

A. -1 .

B. -4 .

C. -3 .

D. -2 .

Lời giải:

Ta có $y' = \frac{-2-m}{(x-1)^2}$

+) Nếu $m = -2$ thì $y' = 0$ khi đó hàm số không có giá trị lớn nhất và nhỏ nhất.

+) Nếu $m \neq -2$ thì hàm số đã cho đồng biến (hoặc nghịch biến) trên $[2;3]$.

$$\text{Khi đó } \left| \max_{[2;3]} f(x) - \min_{[2;3]} f(x) \right| = 3 \Rightarrow |f(2) - f(3)| = 3$$

$$\Leftrightarrow \left| (m+4) - \frac{m+6}{2} \right| = 3 \Leftrightarrow |m+2| = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 4 \\ m = -8 \end{cases} \text{ (thỏa mãn } m \neq -2).$$

Vậy tổng các giá trị của tham số m bằng -4 .

Câu 96: Cho hàm số $y = \frac{x+m}{x^2+4}$ (m là tham số thực). Biết $\max_{\mathbb{R}} y = 2$ khi $m = \frac{a}{b}$, với a, b là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $S = a + b$.

A. 72 .

B. 9 .

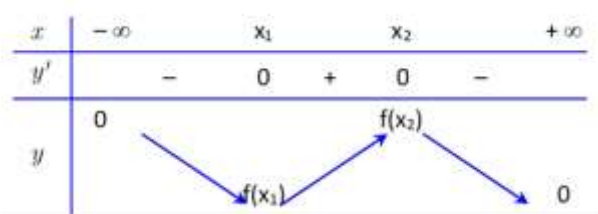
C. 69 .

D. 71 .

Lời giải:

$$\text{Ta có } y' = \frac{-x^2 - 2mx + 4}{(x^2 + 4)^2}; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -m - \sqrt{m^2 + 4} \\ x_2 = -m + \sqrt{m^2 + 4} \end{cases}$$

Bảng biến thiên:



$$\text{Mặt khác: } \max_{\mathbb{R}} y = 2 \text{ suy ra } f(x_2) = 2 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{m^2 + 4}}{2m^2 + 8 - 2m\sqrt{m^2 + 4}} = 2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{m^2 + 4}(4\sqrt{m^2 + 4} - 4m - 1) = 0 \Leftrightarrow 4\sqrt{m^2 + 4} = 4m + 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \frac{-1}{4} \\ 8m = 63 \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{63}{8}$$

$$\text{Vậy } S = a + b = 63 + 8 = 71.$$

Cách khác:

$$\text{Ta có: } \frac{x+m}{x^2+4} \leq 2, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 2x^2 - x + 8 - m \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Delta \leq 0 \Leftrightarrow 1 - 8(8 - m) \leq 0 \Leftrightarrow m \leq \frac{63}{8}.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow m = \frac{63}{8} = \frac{a}{b}.$$

$$\text{Vậy } S = a + b = 63 + 8 = 71.$$

Câu 97: Tìm giá trị tham số m để hàm số $f(x) = \frac{mx+5}{x-m}$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;1]$ bằng -7 .

A. $m = 5$.

B. $m = 2$.

C. $m = 0$.

D. $m = 1$.

Lời giải:

$$\text{Ta có, } f'(x) = \frac{-m^2 - 5}{(x-m)^2} < 0, \forall x \in (-\infty; m) \cup (m; +\infty).$$

$$\text{Để hàm số đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn } [0;1] \text{ thì } m \notin [0;1] \text{ hay } \begin{cases} m > 1 \\ m < 0 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó, } \min_{[0;1]} f(x) = f(1) = \frac{m+5}{1-m}.$$

$$\text{Mà } \min_{[0;1]} f(x) = -7 \text{ nên } \frac{m+5}{1-m} = -7 \Leftrightarrow m+5 = -7+7m \Leftrightarrow 6m = 12 \Leftrightarrow m = 2 \text{ (TM).}$$

Câu 98: Cho hàm số $f(x) = x^3 + (m^2 + 1)x + m^2 - 2$ với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;2]$ bằng 7 .

A. $m = \pm 1$.

B. $m = \pm\sqrt{7}$.

C. $m = \pm\sqrt{2}$.

D. $m = \pm 3$.

Lời giải:

- Hàm số $f(x) = x^3 + (m^2 + 1)x + m^2 - 2$ xác định và liên tục trên $[0; 2]$.
- Ta có: $f'(x) = 3x^2 + m^2 + 1 > 0, \forall x \in [0; 2]$. Suy ra hàm $f(x)$ luôn đồng biến trên $[0; 2]$.
- Khi đó: $\min_{[0; 2]} f(x) = f(0) = m^2 - 2 = 7 \Leftrightarrow m^2 = 9 \Leftrightarrow m = \pm 3$.

Câu 99: Có bao nhiêu số nguyên m thuộc đoạn $[-20; 20]$ để giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{x+m+6}{x-m}$ trên đoạn $[1; 3]$ là số dương?

A. 9.

B. 8.

C. 11.

D. 10.

Lời giải:

Xét hàm số $y = f(x) = \frac{x+m+6}{x-m}$. Điều kiện xác định của hàm số là $x \neq m$.

$$\text{Ta có: } y' = \frac{-2m-6}{(x-m)^2}.$$

$$\text{TH 1: } -2m-6 = 0 \Leftrightarrow m = -3.$$

Khi đó hàm số $y = \frac{x+m+6}{x-m} = \frac{x+3}{x+3} = 1, \forall x \neq -3$ là hàm hằng, nên $\max_{[1; 3]} y = 1 > 0$.

Do đó nhận $m = -3$.

$$\text{TH 2: } -2m-6 > 0 \Leftrightarrow m < -3 \quad (1).$$

$$\text{Khi đó } \max_{[1; 3]} y > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \notin [1; 3] \\ f(3) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ m > 3 \\ \frac{m+9}{3-m} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ m > 3 \\ -9 < m < 3 \end{cases} \Leftrightarrow -9 < m < 1.$$

Đối chiếu với (1), ta được $-9 < m < -3$.

$$\text{TH 3: } -2m-6 < 0 \Leftrightarrow m > -3 \quad (2).$$

$$\text{Khi đó } \max_{[1; 3]} y > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \notin [1; 3] \\ f(1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ m > 3 \\ \frac{m+7}{1-m} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ m > 3 \\ -7 < m < 1 \end{cases} \Leftrightarrow -7 < m < 1.$$

Đối chiếu với (2), ta được $-3 < m < 1$.

Kết hợp ba trường hợp ta có $-9 < m < 1$.

Đồng thời $m \in \mathbb{Z}$ và $m \in [-20; 20]$ nên $m \in \{-8; -7; \dots; -1; 0\}$.

Vậy có 9 giá trị nguyên của tham số m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 100: Cho hàm số $y = \frac{x+m}{x^2+1}$ (với m là tham số thực). Biết $\min_{\mathbb{R}} y = -2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $m < -2$.

B. $0 < m < 2$.

C. $m > 2$.

D. $-2 < m < 0$.

Lời giải:

♦ TXĐ $D = \mathbb{R}$.

- ♦ Ta có $\min_{\mathbb{R}} y = -2 \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} : \frac{x+m}{x^2+1} \geq -2 & (1) \\ \exists x_0 : \frac{x_0+m}{x_0^2+1} = -2 & (2) \end{cases}$
- ♦ $(1) \Leftrightarrow \frac{x+m}{x^2+1} \geq -2 \Leftrightarrow 2x^2 + x + m + 2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 1 - 4.2(m+2) \leq 0 \Leftrightarrow m \geq -\frac{15}{8}$.
- ♦ Từ (2) suy ra $m = -\frac{15}{8}$.
- ♦ Vậy $m = -\frac{15}{8}$.

Câu 101: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{\cos x + m^2}{2 - \cos x}$ có giá trị lớn nhất trên $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{3}\right]$ bằng 1. Số phần tử của S là

- A. 2. B. 3. **C. 1.** D. 0.

Lời giải:

Ta có $y = \frac{\cos x + m^2}{2 - \cos x} \quad \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{3}\right]$

Đặt $t = \cos x$ ($0 \leq t \leq 1$).

Hàm số đã cho trở thành: $f(t) = \frac{t + m^2}{2 - t} \quad \forall t \in [0; 1]$

Ta có: $f'(t) = \frac{2 + m^2}{(2 - t)^2} > 0 \quad \forall t \in [0; 1]$. Suy ra: $\max_{\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{3}\right]} y = f(1) = m^2 + 1 = 1 \Leftrightarrow m = 0$

Vậy số phần tử của S là 1.

Câu 102: Biết tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x + m}{x + 1}$ trên $[1; 2]$ bằng 8 (m là tham số thực), khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $m > 10$. **B. $8 < m < 10$.** C. $0 < m < 4$. D. $4 < m < 8$.

Lời giải:

Ta có: $y' = \frac{1 - m}{(x + 1)^2}$

- Nếu $1 - m > 0 \Leftrightarrow m < 1$ thì: $y' > 0 \quad \forall x \in [1; 2]$ do đó:

$$\begin{cases} \max_{[1; 2]} y = f(2) = \frac{m + 2}{3} \\ \min_{[1; 2]} y = f(1) = \frac{m + 1}{2} \end{cases} \Rightarrow \max_{[1; 2]} y + \min_{[1; 2]} y = \frac{m + 2}{3} + \frac{m + 1}{2} = 8 \Rightarrow m = \frac{41}{5} \quad (L)$$

- Nếu $1 - m < 0 \Leftrightarrow m > 1$ thì: $y' < 0 \quad \forall x \in [1; 2]$ do đó:

$$\begin{cases} \max_{[1;2]} y = f(1) = \frac{m+1}{2} \\ \min_{[1;2]} y = f(2) = \frac{m+2}{3} \end{cases} \Rightarrow \max_{[1;2]} y + \min_{[1;2]} y = \frac{m+1}{2} + \frac{m+2}{3} = 8 \Rightarrow m = \frac{41}{5} (N)$$

Vậy $m = \frac{41}{5}$ nên $8 < m < 10$.

Câu 103: Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + 9x + m$ (m là tham số thực). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho $\max_{[0;2]} [f(x)]^2 + \min_{[0;2]} [f(x)]^2 = 2020$. Số tập con của S là

- A. 2. B. 4. C. 8. D. 16.

Lời giải:

Ta có: $f'(x) = 3x^2 - 6x + 9 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ nên $f(x)$ đồng biến trên đoạn $[0; 2]$.

Ta có: $f(0) = m; f(2) = 14 + m$

TH 1: $m(14 + m) < 0 \Leftrightarrow -14 < m < 0$. Khi đó:

$$\begin{cases} \min_{[0;2]} [f(x)]^2 = 0 \\ \max_{[0;2]} [f(x)]^2 = \max \{m^2; (14 + m)^2\} < 14^2 = 196 \end{cases}$$

Suy ra không thỏa mãn điều kiện $\max_{[0;2]} [f(x)]^2 + \min_{[0;2]} [f(x)]^2 = 2020$

$$\text{TH 2: } m(14 + m) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 0 \\ m \leq -14 \end{cases} (*)$$

$$\text{Suy ra } \max_{[0;2]} [f(x)]^2 + \min_{[0;2]} [f(x)]^2 = m^2 + (14 + m)^2 = 2m^2 + 28m + 196.$$

$$\text{Khi đó: } \max_{[0;2]} [f(x)]^2 + \min_{[0;2]} [f(x)]^2 = 2020 \Leftrightarrow 2m^2 + 28m + 196 = 2020 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 24 \\ m = -38 \end{cases}$$

Cả hai giá trị trên đều thỏa mãn (*). Nên $S = \{24; -38\}$ có hai phần tử.

Vậy số tập con của S là: $2^2 = 4$.

Câu 104: Cho hàm số $y = (3x^4 - 4x^3 + m)^2$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[-1; 1]$ bằng 0?

- A. 7. B. 3. C. 9. D. 0.

Lời giải:

Để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = (3x^4 - 4x^3 + m)^2$ trên $[-1; 1]$ bằng 0 thì $3x^4 - 4x^3 + m = 0$ có nghiệm trên $[-1; 1]$ hay $m = -3x^4 + 4x^3$ có nghiệm trên $[-1; 1]$.

$$\text{Đặt } f(x) = -3x^4 + 4x^3, \forall x \in [-1; 1]; f'(x) = -12x^3 + 12x^2; f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên:

x	1	m	2
y'	0	-	0
y	$3m-2$	$-m^3+3m^2-1$	3

Suy ra $\min_{[1;2]} y = y(m) = 3 \Leftrightarrow -m^3 + 3m^2 - 1 = 3 \Leftrightarrow -m^3 + 3m^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 (L) \\ m = 2 (L) \end{cases}$.

TH 3 : $m \leq 1$.

Bảng biến thiên:

x	m	1	2
y'	0	-	0
y	$-m^3+3m^2-1$	$3m-2$	3

Suy ra $\min_{[1;2]} y = y(1) = 3 \Rightarrow 3m - 2 = 3 \Leftrightarrow m = \frac{5}{3} (L)$.

Vậy $m \geq 2$. Vì $m \in \mathbb{Z}$, $m \in [0; 2021] \Rightarrow m \in [2; 2021] \Rightarrow$ có 2020 giá trị của m .

Câu 107: Cho hàm số $f(x) = x^4 - (m+2)x^3 + mx + 3$. Trong trường hợp giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất hãy tính $f(3)$.

- A. $f(3) = 12$. B. $f(3) = 27$. C. $f(3) = 47$. D. $f(3) = 54$.

Lời giải:

Ta có $f'(x) = 4x^3 - 3(m+2)x^2 + m$

Điều kiện cần: Gọi $A(x_0; y_0)$ là điểm cố định mà họ đường cong (C_m) luôn đi qua $\Rightarrow \begin{cases} A(-1; 6) \\ A(1; 2) \\ A(0; 3) \end{cases}$

Giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất khi $x = 1$ và khi đó $x = 1$ cũng là điểm cực trị của hàm số $\Rightarrow f'(1) = 0 \Leftrightarrow 4 - 3(m+2) + m = 0 \Leftrightarrow m = -1$

Điều kiện đủ: Với $m = -1$ hàm số có dạng: $f(x) = x^4 - x^3 - x + 3 \Rightarrow f'(x) = 4x^3 - 3x^2 - 1$

$\Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 4x^2 + x + 1 = 0 \end{cases}$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	0
$f(x)$	$+\infty$	2	$+\infty$

Vậy $m = -1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán khi đó $f(3) = 3^4 - 3^3 - 3 + 3 = 54$

Câu 108: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = (x^3 - 3x + m)^2$ trên đoạn $[-1; 1]$ bằng 4. Tính tổng các phần tử của S .

A. 3.

B. 6.

C. 0.

D. -5.

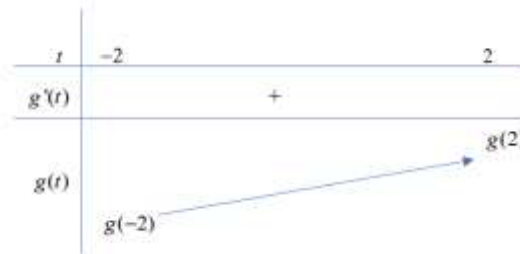
Lời giải:

Đặt $t = x^3 - 3x$; $f(x) = (x^3 - 3x + m)^2 \Rightarrow y = g(t) = (t + m)^2$.

Với $x \in [-1; 1]$ thì $t \in [-2; 2]$ nên $\min_{[-1; 1]} f(x) = \min_{[-2; 2]} g(t)$.

Ta có: $g'(t) = 0 \Leftrightarrow 2(t + m) = 0 \Leftrightarrow t = -m$.

+ Nếu $-m < -2 \Leftrightarrow m > 2$ ta có bảng biến thiên:



Suy ra $\min_{[-1; 1]} f(x) = \min_{[-2; 2]} g(t) = g(-2) = (m - 2)^2$

Khi đó $\min_{[-1; 1]} f(x) = 4 \Leftrightarrow (m - 2)^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 4 \\ m = 0 \text{ (ktm)} \end{cases}$

Nên $m = 4$.

+ Nếu $-m > 2 \Leftrightarrow m < -2$ ta có bảng biến thiên:



Suy ra $\min_{[-1; 1]} f(x) = \min_{[-2; 2]} g(t) = g(2) = (m + 2)^2$

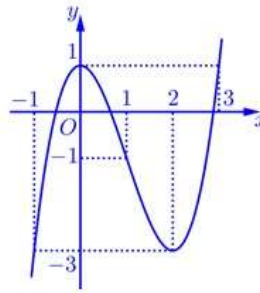
Khi đó $\min_{[-1; 1]} f(x) = 4 \Leftrightarrow (m + 2)^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -4 \\ m = 0 \text{ (ktm)} \end{cases}$

Nên $m = -4$.

+ Nếu $-2 \leq -m \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 2$ ta có $\min_{[-1; 1]} f(x) = \min_{[-2; 2]} g(t) = g(-m) = 0$ (loại)

Vậy: $S = \{4; -4\}$ nên có tổng các phần tử là $4 - 4 = 0$.

Câu 109: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Xét hàm số $g(x) = f(x^3 + 2x) + m$. Giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $g(x)$ trên đoạn $[0; 1]$ bằng 9 là

A. $m = 10$.

B. $m = 6$.

C. $m = 12$.

D. $m = 8$.

Lời giải:

Ta có: $g'(x) = (3x^2 + 2)f'(x^3 + 2x)$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x^3 + 2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + 2x = 0 \\ x^3 + 2x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \alpha, \alpha \in (0; 1) \end{cases}$$

Vì $g(0) = g(1) = 1 + m > f(\alpha) + m = g(\alpha)$ nên $\max_{[0; 1]} g(x) = 1 + m = 9 \Leftrightarrow m = 8$.

Câu 110: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-4; 4]$ và có bảng biến thiên như hình vẽ bên:

x	-4	-3	-1	0	2	4
$f'(x)$	+	0	-	0	+	0
$f(x)$	-4	4	2	3	-3	1

Có bao nhiêu số thực $m \in [-4; 4]$ để giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f(x^3 - 3x + 2) + f(m)$ trên đoạn $[-1; 1]$ bằng 1.

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 5.

Lời giải:

Đặt $t = x^3 - 3x + 2$. Ta có $t'(x) = 3x^2 - 3 \leq 0, \forall x \in [-1; 1]$

Suy ra $\min_{[-1; 1]} t(x) = t(1) = 0, \max_{[-1; 1]} t(x) = t(-1) = 4$. Do đó $\forall x \in [-1; 1]$ thì $t \in [0; 4]$

nên $\max_{[0; 4]} \{f(t) + f(m)\} = 1 \Leftrightarrow \max_{[0; 4]} f(t) + f(m) = 1 \Leftrightarrow 3 + f(m) = 1 \Leftrightarrow f(m) = -2$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy trên đoạn $[-4; 4]$ phương trình $f(m) = -2$ có ba nghiệm phân biệt.

Câu 111: Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - (m+1)x^2 + (3m^2 + 4m + 5)x + 1$ và $g(x) = x^3 + 3x + 1$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(g(x))$ trên đoạn $[-1; 1]$ có giá trị lớn nhất thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(-10; 0)$.

B. $(-20; -15)$.

C. $(-15; -10)$.

D. $(0; 10)$.

Lời giải:

Ta có $y' = g'(x) \cdot f'(g(x))$ trong đó $g'(x) = 3x^2 + 3 > 0, \forall x$

$$\text{và } f'(x) = x^2 - 2(m+1)x + 3m^2 + 4m + 5 = (x - (m+1))^2 + 2m^2 + 2m + 4 > 0, \forall x$$

$$\Rightarrow f'(g(x)) > 0, \forall x. \text{ Do đó } y' > 0, \forall x$$

$$\text{Vì vậy } \min_{[-1,1]} y = y(-1) = f(g(-1)) = f(-3)$$

$$= -9 - 9(m+1) - 3(3m^2 + 4m + 5) + 1 = -9\left(m + \frac{7}{6}\right)^2 - 19,75 \leq -19,75.$$

Câu 112: Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y = x^8 + (m-3)x^5 - (m^2-9)x^4 + 1$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x=0$?

A. vô số.

B. 7.

C. 5.

D. 6.

Lời giải:

$$\text{Ta có } y = x^8 + (m-3)x^5 - (m^2-9)x^4 + 1 = x^4 \left[x^4 + (m-3)x - (m^2-9) \right] + 1$$

$$\text{Để hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại } x=0 \text{ thì } f(x) = x^4 + (m-3)x - (m^2-9) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}} f(x) \geq 0$$

$$\text{Ta có: } f'(x) = 4x^3 + m - 3$$

$$\Rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = f\left(\sqrt[3]{\frac{3-m}{4}}\right) = \left(\sqrt[3]{\frac{3-m}{4}}\right)^4 + (m-3)\sqrt[3]{\frac{3-m}{4}} - 9 + m^2$$

$$= (3-m) \left[m + 3 - \frac{3}{4} \sqrt[3]{\frac{3-m}{4}} \right]$$

$$\Rightarrow (3-m) \left[m + 3 - \frac{3}{4} \sqrt[3]{\frac{3-m}{4}} \right] \geq 0 \Leftrightarrow 3 \leq m \leq 8,44$$

Vậy có các giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán là: $m \in \{3; 4; 5; 6; 7; 8\}$.

Dạng 5: Bài toán thực tế liên quan đến GTLN – GTNN của hàm số

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM MINH HỌA

Câu 113: Một chất điểm chuyển động theo phương trình $S = -t^3 + 9t^2 + 21t + 9$ trong đó t tính bằng giây (s) và S tính bằng mét (m). Tính thời điểm $t(s)$ mà tại đó vận tốc của chuyển động đạt giá trị lớn nhất.

A. $t = 4(s)$.

B. $t = 5(s)$.

C. $t = 3(s)$.

D. $t = 7(s)$.

Lời giải:

$$\text{Ta có: } S' = V = -3t^2 + 18t + 21 = -3(t-3)^2 + 48 \leq 48. \text{ Vậy } \max V = 48 \text{ khi } t = 3.$$

Vận tốc chuyển động đạt giá trị lớn nhất khi $t = 3(s)$.

Câu 114: Một vật chuyển động theo quy luật $s = -2t^3 + 24t^2 + 9t - 3$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

A. 105 (m/s)

B. 289 (m/s).

C. 111 (m/s).

D. 487 (m/s).

Lời giải:

$$\text{Ta có: } v = s' = -6t^2 + 48t + 9.$$

Theo đề, ta cần tìm vận tốc lớn nhất trong 10 giây đầu tiên nên bài toán trở thành tìm GTLN của hàm số $v(t) = -6t^2 + 48t + 9$ trên đoạn $[0; 10]$.

Khi đó: $v'(t) = -12t + 48$, $v'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 4 \in [0; 10]$.

Ta có: $v(0) = 9$; $v(4) = 105$; $v(10) = -111$. Suy ra $v_{\max} = 105 \text{ (m/s)}$.

Vậy vận tốc lớn nhất của vật đạt được trong khoảng 10 giây đầu tiên là 105 (m/s) .

Câu 115: Sau khi phát hiện ra dịch bệnh vi rút Covid-19, các chuyên gia WHO ước tính số người nhiễm bệnh kể từ khi xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ t là $f(t) = 15t^2 - t^3$. Ta xem $f'(t)$ là tốc độ truyền bệnh (người/ngày) tại thời điểm t . Tốc độ truyền bệnh sẽ lớn nhất vào ngày thứ bao nhiêu?

A. Ngày thứ 5. B. Ngày thứ 10. C. Ngày thứ 25. D. Ngày thứ 20.

Lời giải:

Ta có: $f(t) = 15t^2 - t^3$; $f'(t) = 30t - 3t^2 = -3(t-5)^2 + 75 \leq 75$. Suy ra $f'(t)_{\max} = 75 \Leftrightarrow t = 5$.

Câu 116: Độ giảm huyết áp của một bệnh $G(x) = 0,025x^2(30 - x)$ trong đó x là số miligam thuốc được tiêm cho bệnh nhân ($0 < x < 30$). Để bệnh nhân đó có huyết áp giảm nhiều nhất thì liều lượng thuốc cần tiêm vào là

A. $x = 15 \text{ (mg)}$. B. $x = 20 \text{ (mg)}$. C. $x = 20 \text{ (mg)}$. D. $x = 25 \text{ (mg)}$.

Lời giải:

Ta có: $G'(x) = 1,5x - 0,075x^2$; $G'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 20$

x	0	20	30
$G'(x)$		+	-
$G(x)$	0	$G_{\max}$	0

Vậy để bệnh nhân đó có huyết áp giảm nhiều nhất thì liều lượng thuốc cần tiêm vào là $x = 20 \text{ (mg)}$.

Câu 117: Sự ảnh hưởng khi sử dụng một loại độc tố với vi khuẩn X được một nhà sinh học mô tả bởi hàm số $P(t) = \frac{t+1}{t^2+t+4}$, trong đó $P(t)$ là số lượng vi khuẩn sau t sử dụng độc tố. Vào thời điểm nào thì số lượng vi khuẩn X bắt đầu giảm?

A. Ngay từ lúc bắt đầu sử dụng độc tố. B. Sau 0,5 giờ.
C. Sau 2 giờ. D. Sau 1 giờ.

Lời giải:

♦ Xét $P'(t) = \frac{-t^2 - 2t + 3}{(t^2 + t + 4)^2} = \frac{(t-1)(-t-3)}{(t^2 + t + 4)^2}$; $P'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -3 \\ t = 1 \end{cases}$.

Ta thấy hàm số đạt cực đại tại $t = 1$ và $P'(t) < 0, \forall t \in (1; +\infty)$ nên sau 1 (h) thì vi khuẩn bắt đầu giảm.

Câu 118: Cho tam giác đều ABC cạnh a . Người ta dựng một hình chữ nhật $MNPQ$ có cạnh MN nằm trên cạnh BC . Hai đỉnh P và Q theo thứ tự nằm trên hai cạnh AC và AB của tam giác. Xác định độ dài đoạn BM sao cho hình chữ nhật $MNPQ$ có diện tích lớn nhất.

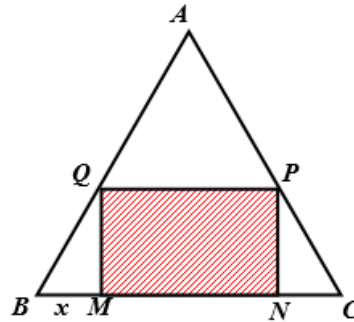
A. $BM = \frac{a}{2}$.

B. $BM = \frac{a}{6}$.

C. $BM = \frac{a}{3}$.

D. $BM = \frac{a}{4}$.

Lời giải:



Đặt $BM = x$ ($x > 0$). Độ dài $MN = a - 2x$ và $QM = BM \cdot \tan 60^\circ = x\sqrt{3}$.

Khi đó, diện tích

$$S_{MNPQ} = MN \cdot QM = x\sqrt{3}(a - 2x) = \sqrt{3}(-2x^2 + ax) = -2\sqrt{3}\left(x - \frac{a}{4}\right)^2 + \frac{a^2\sqrt{3}}{8} \leq \frac{a^2\sqrt{3}}{8}, \forall x$$

Vậy diện tích $MNPQ$ lớn nhất bằng $\frac{a^2\sqrt{3}}{8}$ khi $x = BM = \frac{a}{4}$.

Câu 119: Ông X muốn xây một bình chứa hình trụ có thể tích 72 m^3 . Đáy làm bằng bê tông giá 100 nghìn đồng/ m^2 , thành làm bằng tôn giá 90 nghìn đồng/ m^2 , nắp bằng nhôm giá 140 nghìn đồng/ m^2 . Vậy đáy của hình trụ có bán kính bằng bao nhiêu để chi phí xây dựng là thấp nhất?

A. $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{\pi}}(\text{m})$.

B. $\frac{3}{\sqrt[3]{\pi}}(\text{m})$.

C. $\frac{2}{\sqrt[3]{\pi}}(\text{m})$.

D. $\frac{3\sqrt[3]{3}}{2\sqrt[3]{\pi}}(\text{m})$.

Lời giải:

Gọi $x(\text{m})$, ($x > 0$) là bán kính đáy của bình chứa hình trụ.

Khi đó tổng số tiền phải trả là: $14 \cdot 10^4 \pi x^2 + 10^5 \pi x^2 + \frac{144 \cdot 9 \cdot 10^4}{x}$.

$$\text{Đặt } f(x) = 14 \cdot 10^4 \pi x^2 + 10^5 \pi x^2 + \frac{144 \cdot 9 \cdot 10^4}{x}.$$

$$\text{Suy ra: } f'(x) = 48 \cdot 10^4 \pi x - \frac{1296 \cdot 10^4}{x^2}.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 48 \cdot 10^4 \pi x - \frac{1296 \cdot 10^4}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{\sqrt[3]{\pi}}.$$

Vậy để chi phí xây dựng là thấp nhất thì bán kính đáy bằng $\frac{3}{\sqrt[3]{\pi}}$.

Câu 120: Người ta muốn xây một cái bể hình hộp đứng có thể tích $V = 18(\text{m}^3)$, biết đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp 3 lần chiều rộng và bể không có nắp. Hỏi cần xây bể có chiều cao h bằng bao nhiêu mét để nguyên vật liệu xây dựng là ít nhất (biết nguyên vật liệu xây dựng các mặt là như nhau)?

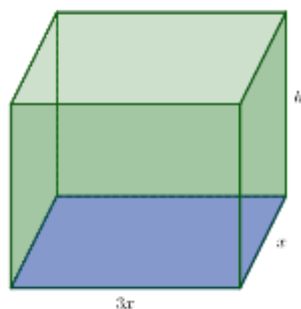
A. $2(\text{m})$.

B. $\frac{5}{2}(\text{m})$.

C. $1(\text{m})$.

D. $\frac{3}{2}(\text{m})$.

Lời giải:



Gọi x ($x > 0$) là chiều rộng hình chữ nhật đáy bể, suy ra chiều dài hình chữ nhật đáy bể là $3x$.

$$V = h \cdot x \cdot 3x = h \cdot 3x^2 = 18 \quad (x > 0) \Rightarrow h = \frac{18}{3x^2} = \frac{6}{x^2},$$

Gọi P là diện tích xung quanh cộng với diện tích một đáy bể của hình hộp chữ nhật. Nguyên vật liệu ít nhất khi P nhỏ nhất.

$$P = 2hx + 2 \cdot h \cdot 3x + 3x^2 = 2 \cdot \frac{6}{x^2} \cdot x + 2 \cdot \frac{6}{x^2} \cdot 3x + 3x^2 = \frac{48}{x} + 3x^2.$$

Đặt $f(x) = \frac{48}{x} + 3x^2$, ($x > 0$). Ta có $f'(x) = -\frac{48}{x^2} + 6x$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{48}{x^2} + 6x = 0 \Leftrightarrow x^3 = 8 \Leftrightarrow x = 2$.

Bảng biến thiên:

x	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$			

Suy ra vật liệu ít nhất khi $h = \frac{6}{x^2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ (m).

Câu 121: Một công ty bất động sản có 50 căn hộ cho thuê. Nếu giá cho thuê mỗi căn là 3 000 000 đồng/tháng thì không có phòng trống, còn nếu cho thuê mỗi căn hộ thêm 200.000đ/tháng thì sẽ có 2 căn bị bỏ trống. Hỏi công ty phải niêm yết bao nhiêu để doanh thu là lớn nhất?

A. 3400000.

B. 3000000.

C. 5000000.

D. 4000000.

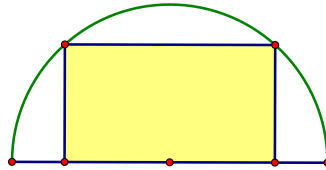
Lời giải:

- ♦ Đặt số tiền tăng thêm là $200000x$
- ♦ Giá tiền mỗi căn hộ một tháng là $3000000 + 200000x$ (đồng)
- ♦ Số căn hộ bị trống là $50 - 2x$ phòng
- ♦ Số tiền thu được mỗi tháng là: $(3000000 + 200000x)(50 - 2x)$ đồng
- ♦ Đặt $f(x) = (3000000 + 200000x)(50 - 2x)$
- ♦ Để doanh thu là lớn nhất thì ta tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$, giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ tại đỉnh của parabol. Hay:

$$f'(x) = 200000(50 - 2x) - 2(3000000 + 200000x) = 0 \Leftrightarrow x = 5.$$

Vậy công ty niêm yết giá tiền là: $3000000 + 200000 \times 5 = 4000000$ đồng để được doanh thu là lớn nhất.

Câu 122: Từ một miếng tôn dạng nửa hình tròn có bán kính $R = 4$ người ta muốn cắt ra một hình chữ nhật (tham khảo hình vẽ)



Hỏi diện tích lớn nhất của hình chữ nhật có thể cắt được từ miếng tôn là

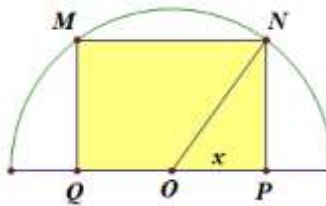
A. $8\sqrt{2}$.

B. $6\sqrt{2}$.

C. 8.

D. 16.

Lời giải:



Gọi hình chữ nhật cần tính diện tích là $MNPQ$ có $OP = x$ ($0 < x < 4$), $ON = 4$.

Khi đó diện tích của hình chữ nhật $MNPQ$ là: $S = MN \cdot NP = 2x\sqrt{16 - x^2} = f(x)$. Diện tích lớn nhất của hình chữ nhật $MNPQ$ là giá trị lớn nhất của $f(x) = 2x\sqrt{16 - x^2}$ trên $(0; 4)$. Ta có

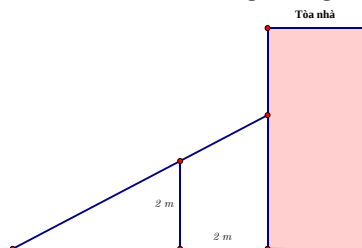
$$f'(x) = 2\sqrt{16 - x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{16 - x^2}} = \frac{-4x^2 + 32}{\sqrt{16 - x^2}}; \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\sqrt{2} \in (0; 4) \\ x = -2\sqrt{2} \notin (0; 4) \end{cases}$$

BBT

x	0		$2\sqrt{2}$		4
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	0			16	 0

Ta có: $\max_{(0;4)} f(x) = f(2\sqrt{2}) = 16$. Vậy $S_{\max} = 16$.

Câu 123: Một bức tường cao 2m nằm song song với tòa nhà và cách tòa nhà 2m. Người ta muốn chế tạo một chiếc thang bắc từ mặt đất bên ngoài bức tường, gác qua bức tường và chạm vào tòa nhà (xem hình vẽ). Hỏi chiều dài tối thiểu của thang bằng bao nhiêu mét?



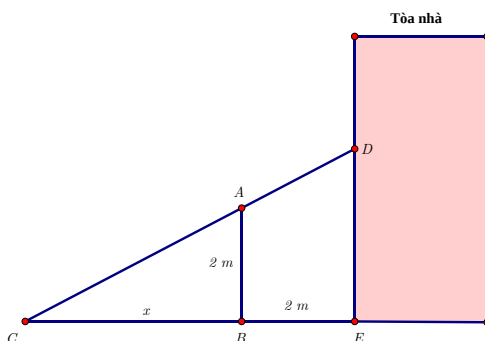
A. $\frac{5\sqrt{13}}{3} \text{ m.}$

B. $4\sqrt{2} \text{ m.}$

C. 6 m.

D. $3\sqrt{5} \text{ m.}$

Lời giải:



Đặt $BC = x (x > 0)$. Ta cần tìm x để độ dài CD đạt GTNN.

Ta có $\frac{BC}{CE} = \frac{x}{x+2} = \frac{AC}{CD} \Rightarrow CD = AC \frac{x+2}{x} = \sqrt{x^2+4} \cdot \frac{x+2}{x}$.

Đặt $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+4}(x+2)}{x}$.

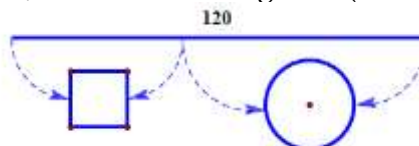
Cách 1: Ta có $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} - \frac{8}{x^2\sqrt{x^2+4}}$. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

BBT:

x	0	2	3
$f'(x)$		0	
	-		+
$f(x)$	$+\infty$	$4\sqrt{2}$	$+\infty$

Cách 2: $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+4}(x+2)}{x} \geq \frac{\sqrt{4x} \cdot 2\sqrt{2x}}{x} = 4\sqrt{2}$.

Câu 124: Một sợi dây kim loại dài 120cm được cắt thành hai đoạn. Đoạn dây thứ nhất được uốn thành hình vuông, đoạn dây thứ hai được uốn thành vòng tròn (tham khảo hình vẽ)



Tổng diện tích của hình vuông và hình tròn đạt giá trị nhỏ nhất là

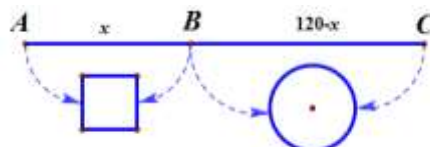
A. 498.

B. 462.

C. 504.

D. 462.

Lời giải:



Đặt $AB = x \Rightarrow BC = 120 - x (0 < x < 120)$.

Chu vi của đường tròn là: $2\pi r = 120 - x \Rightarrow r = \frac{120 - x}{2\pi}$.

Diện tích hình tròn là: $S_{ht} = \pi r^2 = \frac{(120 - x)^2}{4\pi}$; Diện tích hình vuông: $S_{hv} = \left(\frac{x}{4}\right)^2 = \frac{x^2}{16}$.

Tổng diện tích của hình vuông và hình tròn là: $S = \frac{(120 - x)^2}{4\pi} + \frac{x^2}{16} = f(x)$.

Xét $f(x) = \frac{(120 - x)^2}{4\pi} + \frac{x^2}{16}$ trên $(0; 120)$ ta có:

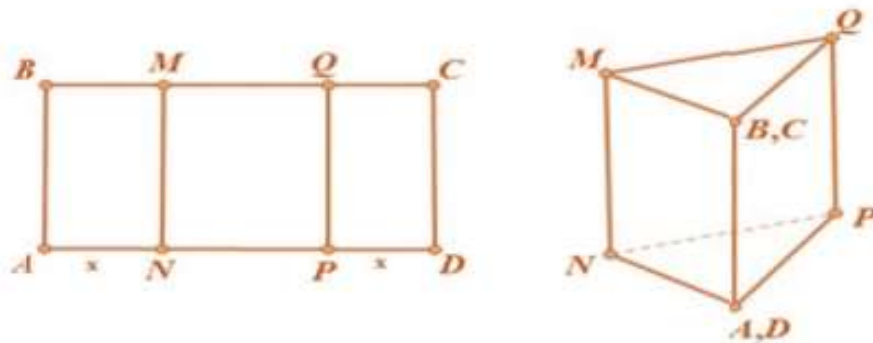
$$f'(x) = \frac{(4 + \pi)x - 480}{8\pi}; f'(x) = 0 \Leftrightarrow (4 + \pi)x - 480 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{480}{4 + \pi}.$$

Bảng xét dấu của $f(x)$:

x	0	$\frac{480}{4 + \pi}$	120
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\frac{14400}{4\pi}$	504,0892382...	900

Vậy $S_{\min} = \min_{(0; 120)} f(x) \approx 504$.

Câu 125: Cho một tấm nhôm hình chữ nhật $ABCD$ có $AD = 60\text{ cm}$, $AB = 20\text{ cm}$. Ta gập tấm nhôm theo hai cạnh MN và PQ vào phía trong cho đến khi AB và CD trùng nhau như hình vẽ để được hình lăng trụ khuyết hai đáy. Khi đó có thể tạo được khối lăng trụ với thể tích lớn nhất bằng:



A. $2000\sqrt{3} \text{ (cm}^3\text{)}$. **B.** $2000 \text{ (cm}^3\text{)}$. **C.** $400\sqrt{3} \text{ (cm}^3\text{)}$. **D.** $4000\sqrt{2} \text{ (cm}^3\text{)}$.

Lời giải:

Ta có $AN = PD = x \text{ (cm)}$, $(0 < x < 30)$ nên $NP = 60 - 2x$.

Thể tích hình lăng trụ tạo thành bằng:

$$V = AB \cdot S_{NPA} = AB \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{PA^2 - \left(\frac{NP}{2}\right)^2} \cdot NP = \frac{AB}{2} \cdot \sqrt{x^2 - \left(\frac{60 - 2x}{2}\right)^2} \cdot (60 - 2x) = 40\sqrt{15} \cdot (30 - x) \sqrt{x - 15} \text{ (cm}^3\text{)}$$

Để thể tích khối lăng trụ lớn nhất thì $f(x) = (30-x)\sqrt{x-15}$ phải đạt giá trị lớn nhất.

Xét hàm số $f(x) = (30-x)\sqrt{x-15}$ trên $[15; 30]$ ta có:

$$f'(x) = -\sqrt{x-15} + (30-x) \frac{1}{2\sqrt{x-15}} = \frac{-2x+30+30-x}{2\sqrt{x-15}} = \frac{60-3x}{2\sqrt{x-15}}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 20.$$

Ta có: $f(15) = 0$; $f(30) = 0$; $f(20) = 10\sqrt{5}$

Vậy thể tích lớn nhất của $f(x) = (30-x)\sqrt{x-15}$ là $10\sqrt{5}$ khi $x = 20$.

Khối lăng trụ với thể tích lớn nhất bằng $40\sqrt{15} \cdot 10\sqrt{5} = 2000\sqrt{3}$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TỰ LUYỆN

Câu 126: Một chất điểm chuyển động theo quy luật $s = -t^3 + 6t^2 + 17t$, với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó. Khi đó vận tốc v (m/s) của chuyển động đạt giá trị lớn nhất trong khoảng 8 giây đầu tiên bằng:

A. 17 m/s.

B. 36 m/s.

C. 26 m/s.

D. 29 m/s.

Lời giải:

Vận tốc của chất điểm là $v = s' = -3t^2 + 12t + 17 = -3(t-2)^2 + 29 \leq 29$.

Vậy vận tốc của chuyển động đạt giá trị lớn nhất bằng 29 khi $t = 2$.

Câu 127: Vận tốc của một hạt chuyển động được xác định bởi công thức $v(t) = t^3 - 10t^2 + 29t - 20$ (t được tính bằng giây). Vận tốc của hạt tại thời điểm gia tốc nhỏ nhất gần bằng

A. -0,88.

B. 2,59.

C. 6,06.

D. 2,61.

Lời giải:

♦ Gia tốc của hạt $a(t) = 3t^2 - 20t + 29$, gia tốc là hàm số bậc hai ẩn t đạt giá trị nhỏ nhất tại

$$t = \frac{10}{3}. \text{ Tại đó, vận tốc của hạt bằng } v\left(\frac{10}{3}\right) = \frac{70}{27} \approx 2,59.$$

Câu 128: Một loại thuốc được dùng cho một bệnh nhân và nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân được giám sát bởi bác sĩ. Biết rằng nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân sau khi tiêm vào cơ thể trong t giờ được cho bởi công thức $c(t) = \frac{t}{t^2+1}$ (mg/L). Sau khi tiêm thuốc bao lâu thì nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân cao nhất?

A. 4 giờ.

B. 1 giờ.

C. 3 giờ.

D. 2 giờ.

Lời giải:

$$\text{Xét hàm số } c(t) = \frac{t}{t^2+1}, (t > 0); c'(t) = \frac{1-t^2}{(t^2+1)^2}; c'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=-1 \end{cases}.$$

t	0	1	$+\infty$
$c'(t)$	+	0	-
$c(t)$	0	$\frac{1}{2}$	0

Câu 129: Một sợi dây có chiều dài $28m$ được cắt thành hai đoạn để làm thành một hình vuông và một hình tròn. Tính chiều dài (theo đơn vị mét) của đoạn dây làm thành hình vuông được cắt ra sao cho tổng diện tích của hình vuông và hình tròn là nhỏ nhất?

A. $\frac{56}{4+\pi}$.

B. $\frac{112}{4+\pi}$.

C. $\frac{84}{4+\pi}$.

D. $\frac{92}{4+\pi}$.

Lời giải:

Gọi chiều dài của đoạn dây làm thành hình vuông là $x (m)$ ($0 < x < 28$)

$\Rightarrow$ chiều dài của đoạn dây làm thành hình tròn là $28 - x (m)$

+) Diện tích hình vuông là: $\left(\frac{x}{4}\right)^2 = \frac{x^2}{16}$

+) Bán kính hình tròn là: $R = \frac{28-x}{2\pi}$

$\Rightarrow$ Diện tích hình tròn: $\pi R^2 = \pi \cdot \left(\frac{28-x}{2\pi}\right)^2 = \frac{784-56x+x^2}{4\pi}$

+) Tổng diện tích hai hình: $\frac{x^2}{16} + \frac{784-56x+x^2}{4\pi} = \left(\frac{\pi+4}{16\pi}\right)x^2 - \frac{14}{\pi}x + \frac{196}{\pi}$

Xét $f(x) = \left(\frac{\pi+4}{16\pi}\right)x^2 - \frac{14}{\pi}x + \frac{196}{\pi}$.

Nhận thấy $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = \left(\frac{-b}{2a}\right) = \frac{14}{\pi} \cdot \frac{16\pi}{2(\pi+4)} = \frac{112}{\pi+4}$.

Vậy chiều dài của đoạn dây làm thành hình vuông để tổng diện tích của hai hình đạt giá trị

nhỏ nhất là $\frac{112}{4+\pi} m$.

Câu 130: Ông A dự định sử dụng hết $6,5m^2$ kính để làm một bể cá bằng kính có dạng khối hình hộp chữ nhật chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

A. $2,26m^3$.

B. $1,01m^3$.

C. $1,33m^3$.

D. $1,50m^3$.

Lời giải:

Gọi chiều rộng của bể cá là $x(m)$, chiều cao là $y(m)$ ($x, y > 0$), khi đó chiều dài bể cá là

$2x(m)$. Diện tích kính sử dụng là $S = 2x^2 + 2xy + 4xy (m^2)$.

Theo bài ra ta có: $2x^2 + 2xy + 4xy = 6,5 \Rightarrow y = \frac{6,5-2x^2}{6x} = \frac{13-4x^2}{12x}$.

Thể tích bể cá là $V(x) = 2x^2 \cdot \frac{13-4x^2}{12x} = \frac{x(13-4x^2)}{6} (m^3)$.

Ta xét hàm số $V(x) = \frac{x(13-4x^2)}{6}$ với $x \in \left(0; \frac{\sqrt{13}}{2}\right)$.

Suy ra $V'(x) = \frac{13-12x^2}{6} \Rightarrow V'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{39}}{6}$.

Ta có $V'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm khi qua $x = \frac{\sqrt{39}}{6}$ nên hàm số đạt cực đại tại $x = \frac{\sqrt{39}}{6}$.

Trên $\left(0; \frac{\sqrt{13}}{2}\right)$, hàm số $V(x)$ chỉ có một điểm cực đại nên hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $x = \frac{\sqrt{39}}{6}$.

Thể tích của bể cá có giá trị lớn nhất là $\max_{\left(0; \frac{\sqrt{13}}{2}\right)} V(x) = V\left(\frac{\sqrt{39}}{6}\right) = \frac{13\sqrt{39}}{54} \approx 1,50 \text{ (m}^3\text{)}.$

Vậy bể cá có dung tích lớn nhất bằng $1,50 \text{ m}^3$.

Cách 2: Xử lý tìm giá trị lớn nhất của $V(x)$ bằng bất đẳng thức Cauchy.

Theo cách 1, ta tính được $V(x) = \frac{x(13-4x^2)}{6}$ với $x \in \left(0; \frac{\sqrt{13}}{2}\right)$.

Ta có $V(x) = \frac{x(13-4x^2)}{6} = \frac{1}{6} \sqrt{\frac{8x^2(13-4x^2)(13-4x^2)}{8}}$

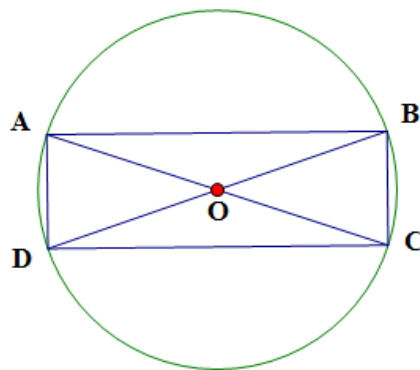
Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $8x^2(13-4x^2)(13-4x^2) \leq \left(\frac{8x^2 + 13 - 4x^2 + 13 - 4x^2}{3}\right)^3 = \frac{26^3}{27}$.

Suy ra $V(x) \leq \frac{1}{6} \sqrt{\frac{26^3}{8,27}} = \frac{13\sqrt{39}}{54} \approx 1,50$ (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $8x^2 = 13 - 4x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{13}{12}} = \frac{\sqrt{39}}{6}$.

Vậy bể cá có dung tích lớn nhất bằng $1,50 \text{ m}^3$.

Câu 131: Một mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích 961 m^2 , người ta muốn mở rộng thêm bốn phần đất sao cho tạo thành hình tròn ngoại tiếp mảnh vườn (xem hình minh họa). Tính diện tích nhỏ nhất $S_{\min}$ của bốn phần đất được mở rộng.



A. $S_{\min} = 1922\pi - 961 \text{ (m}^2\text{)}.$

B. $S_{\min} = 480,5\pi - 961 \text{ (m}^2\text{)}.$

C. $S_{\min} = 1892\pi - 946 \text{ (m}^2\text{)}.$

D. $S_{\min} = 961\pi - 961 \text{ (m}^2\text{)}.$

Lời giải:

Đặt $AB = x \text{ (m)}$, $x > 0 \Rightarrow AD = \frac{961}{x} \Rightarrow BD = \sqrt{x^2 + \frac{961^2}{x^2}}.$

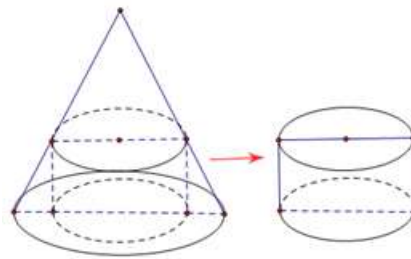
Suy ra hình tròn có bán kính $R = \frac{BD}{2} = \frac{\sqrt{x^2 + \frac{961^2}{x^2}}}{2}$.

Diện tích của phần đất cần tính là: $S = \pi \frac{x^2 + \frac{961^2}{x^2}}{4} - 961 \geq \pi \frac{2\sqrt{x^2 \frac{961^2}{x^2}}}{4} - 961 = 480,5\pi - 961$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x^2 = \frac{961^2}{x^2} \Leftrightarrow x = 31$.

Vậy $S_{\min} = 480,5\pi - 961 \text{ (m}^2\text{)}$.

Câu 132: Một khúc gỗ có dạng hình khối nón có bán kính đáy bằng $r = 2\text{m}$, chiều cao $h = 6\text{m}$. Bác thợ mộc chế tác từ khúc gỗ đó thành một khúc gỗ có dạng hình khối trụ như hình vẽ.



Gọi V là thể tích lớn nhất của khúc gỗ hình trụ sau khi chế tác. Giá trị của V là:

A. $V = \frac{32}{9}\pi \text{ (m}^3\text{)}$. **B.** $V = \frac{32}{3}\pi \text{ (m}^3\text{)}$. **C.** $V = \frac{32}{27}\pi \text{ (m}^3\text{)}$. **D.** $V = \frac{32}{5}\pi \text{ (m}^3\text{)}$.

Lời giải:

Gọi r_t , h_t lần lượt là bán kính và chiều cao của khối trụ.

Ta có: $\frac{r_t}{2} = \frac{6-h_t}{6} \Rightarrow 2(6-h_t) = 6r_t \Leftrightarrow h_t = 6-3r_t$.

Ta lại có: $V = \pi r_t^2 \cdot h_t = \pi r_t^2 (6-3r_t) = \pi (6r_t^2 - 3r_t^3)$.

Xét hàm số $f(r_t) = 6r_t^2 - 3r_t^3$, với $r_t \in (0; 2)$ có $f'(r_t) = 12r_t - 9r_t^2$; $f'(r_t) = 0 \Leftrightarrow r_t = \frac{4}{3}$.

Bảng biến thiên:

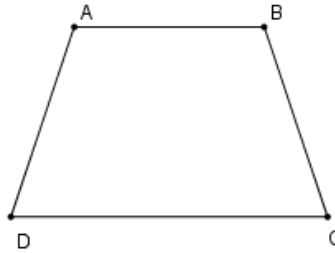
r_t	0			$\frac{4}{3}$	2										
$f'(r_t)$				+	0	-									
$f(r_t)$							$\frac{32}{9}$								
	0												0		

Dựa vào BBT ta có $\max f(r_t) = \frac{32}{9}$ đạt tại $r_t = \frac{4}{3}$. Vậy $V = \frac{32}{9}\pi$.

Cách 2: $V = \pi r_t^2 \cdot h_t = \pi r_t^2 (6-3r_t) = 12\pi \frac{r_t}{2} \frac{r_t}{2} (2-r_t)$.

Áp dụng BĐT Cauchy, V max khi chỉ khi $\frac{r_t}{2} = 2-r_t \Leftrightarrow r_t = \frac{4}{3}$.

Câu 133: Một người nông dân có 3 tấm lưới thép B40, mỗi tấm dài $16m$ và muốn rào một mảnh vườn dọc bờ sông dạng hình thang cân $ABCD$ như hình vẽ, trong đó bờ sông là đường thẳng DC không phải rào và mỗi tấm là một cạnh của hình thang.

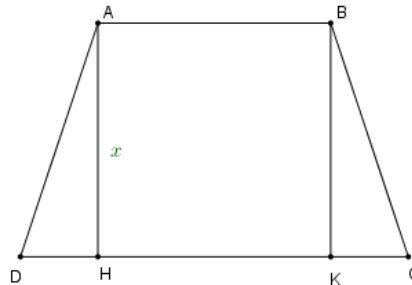


Hỏi ông ấy có thể rào một mảnh vườn với diện tích lớn nhất bao nhiêu m^2 ?

- A.** $192\sqrt{3}m^2$. **B.** $196\sqrt{3}m^2$. **C.** $190\sqrt{3}m^2$. **D.** $194\sqrt{3}m^2$.

Lời giải:

Gọi x (m , $0 < x < 16$) là độ dài chiều cao của hình thang.



Khi đó diện tích hình thang là: $S = \frac{1}{2}(16 + 16 + 2\sqrt{16^2 - x^2})x = 16x + x\sqrt{16^2 - x^2}$

Xét hàm số $f(x) = 16x + x\sqrt{16^2 - x^2}$ với $0 < x < 16$.

Ta có: $f'(x) = 16 + \frac{16^2 - 2x^2}{\sqrt{16^2 - x^2}}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 16 + \frac{16^2 - 2x^2}{\sqrt{16^2 - x^2}} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 192 = 0 \Leftrightarrow x = 8\sqrt{3}$.

Bảng biến thiên:

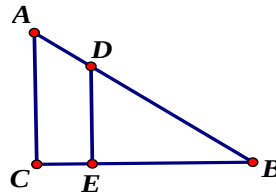
x	0	$8\sqrt{3}$	16
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$			

Vậy diện tích lớn nhất của mảnh vườn là $192\sqrt{3}m^2$.

Câu 134: Chiều dài ngắn nhất của cái thang AB để nó có thể dựa vào tường AC và mặt đất BC , ngang qua cột đỡ DE cao $4(m)$, song song và cách tường một khoảng $CE = 0,5(m)$ là.

- A.** Xấp xỉ $5,5902(m)$. **B.** Xấp xỉ $5,602(m)$.
C. Xấp xỉ $5,4902(m)$. **D.** Xấp xỉ $6,5902(m)$.

Lời giải:



Xét tam giác ABC vuông tại C và tam giác BDE vuông tại E , ta có

$$\cot B = \frac{BE}{DE} = \frac{BC}{AC} \Leftrightarrow BE \cdot AC = DE \cdot BC \Leftrightarrow (BC - 0.5)AC = 4BC \Leftrightarrow BC = \frac{0.5AC}{AC - 4}.$$

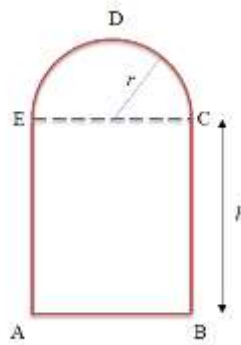
Mặt khác, theo định lý Pitago cho tam giác ABC vuông tại C ta có $AB^2 = AC^2 + \frac{0.25AC^2}{(AC - 4)^2}$.

Xét hàm số $f(x) = x^2 + \frac{0.25x^2}{(x-4)^2}$ với $x \in (4; +\infty)$ ta có

$$f'(x) = 2x - \frac{2x^2 - 8x}{(x-4)^4}. \text{ Cho } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \\ x = 5 \end{cases}. \text{ Loại } x = 0, x = 4.$$

Khi đó, ta có $\min_{x \in (4; +\infty)} f(x) = f(5) = \frac{125}{4}$. Vậy độ dài AB nhỏ nhất là $AB = \frac{5\sqrt{5}}{2} \approx 5.5902 (m)$.

Câu 135: Bác thợ hàn dùng một thanh kim loại dài $4m$ để uốn thành khung cửa sổ có dạng như hình vẽ.



Gọi r là bán kính của nửa đường tròn. Tìm r (theo m) để diện tích tạo thành đạt giá trị lớn nhất.

A. 1.

B. 0,5.

C. $\frac{4}{\pi + 4}$.

D. $\frac{2}{\pi + 4}$.

Lời giải:

♦ Ta có $2(h + r) + \pi r = 4 \Rightarrow h = \frac{4 - 2r - \pi r}{2}$.

♦ Diện tích của khung cửa là $S = \frac{1}{2}\pi r^2 + 2rh = \frac{1}{2}\pi r^2 + 2r \left(\frac{4 - 2r - \pi r}{2} \right) = -\frac{\pi + 4}{2} \cdot r^2 + 4r$.

♦ Ta có $h = \frac{4 - 2r - \pi r}{2} > 0 \Leftrightarrow 0 < r < \frac{4}{\pi + 2}$.

♦ Xét hàm số $S(r) = -\frac{\pi + 4}{2} \cdot r^2 + 4r$ trên $\left(0; \frac{4}{\pi + 2}\right)$.

$$S'(r) = -(\pi + 4)r + 4 = 0 \Leftrightarrow r = \frac{4}{\pi + 4}$$

Bảng biến thiên:

x	0	$\frac{4}{\pi + 4}$	$\frac{4}{\pi + 2}$
S'		+	0
S			-

		$\frac{8}{\pi + 4}$	
--	--	---------------------	--

$$\Rightarrow S(r) \text{ đạt giá trị lớn nhất } \Leftrightarrow r = \frac{4}{\pi + 4}.$$

HẾT

Huế, 10h00' Ngày 25 tháng 5 năm 2023