

CHƯƠNG VII. ĐẠO HÀM

Trong chương này, chúng ta sẽ tìm hiểu những vấn đề sau: định nghĩa đạo hàm, ý nghĩa hình học của đạo hàm; các quy tắc tính đạo hàm; đạo hàm bậc hai.

BÀI 1. ĐỊNH NGHĨA ĐẠO HÀM. Ý NGHĨA HÌNH HỌC CỦA ĐẠO HÀM

Hệ thống khởi động không gian SLS

(Nguồn: <https://shutterstock.com>)

Hình 1

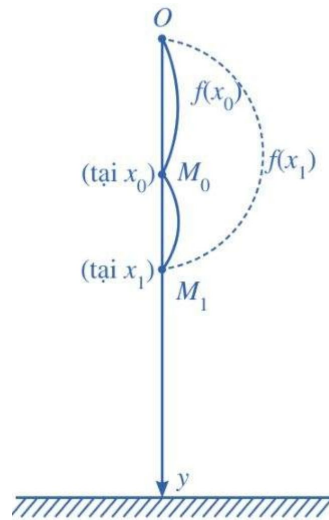
Tên lửa vũ trụ là phương tiện được chế tạo đặc biệt giúp con người thực hiện các sứ mệnh trong không gian như: tiếp cận đến các hành tinh ngoài Trái Đất, vận chuyển con người và thiết bị lên vũ trụ,... (Hình 1).

Nếu quỹ đạo chuyển động của tên lửa được miêu tả bằng hàm số theo thời gian thì đại lượng nào biểu thị độ nhanh chậm của chuyển động tại một thời điểm?

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM**I. ĐẠO HÀM TẠI MỘT ĐIỂM****1. Các bài toán dẫn đến khái niệm đạo hàm****a) Bài toán tìm vận tốc tức thời**

Từ vị trí O (ở một độ cao nhất định nào đó), ta thả một viên bi cho rơi tự do xuống đất và nghiên cứu chuyển động của viên bi. Bằng việc chọn trục Oy theo phương thẳng đứng, chiều dương hướng xuống đất, gốc O là vị trí ban đầu của viên bi, tức là tại thời điểm 0 giây, và bỏ qua sức cản không khí, ta nhận được phương trình chuyển động của viên bi là $y = f(x) = \frac{1}{2}gx^2$ (g là gia tốc rơi tự do, $g \approx 9,8m/s^2$).

Giả sử tại thời điểm x_0 , viên bi ở vị trí M_0 có $y_0 = f(x_0)$; tại thời điểm x_1 , viên bi ở vị trí M_1 có $y_1 = f(x_1)$. Khi đó, trong khoảng thời gian từ x_0 đến x_1 , quãng đường viên bi đi được



Hình 2

là $M_0M_1 = f(x_1) - f(x_0)$ (Hình 2). Vậy vận tốc trung bình của viên bi trong khoảng thời gian đó là .

Nếu $x_1 - x_0$ càng nhỏ thì tỉ số trên càng phản ánh chính xác hơn sự nhanh chậm của viên bi tại thời điểm

x_0 . Từ đó, người ta xem giới hạn của tỉ số $\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$ khi x_1 dần x_0 là *vận tốc tức thời* tại thời điểm

x_0 của viên bi, kí hiệu là $v(x_0)$. Nói cách khác, $v(x_0) = \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$. Giá trị $v(x_0)$ gọi là đạo hàm

của hàm số $y = f(x) = \frac{1}{2}gx^2$ tại thời điểm x_0 .

b) Bài toán tìm cường độ tức thời

Điện lượng Q truyền trong dây dẫn là một hàm số của thời gian t , $Q = Q(t)$. Cường độ trung bình trong

khoảng thời gian $|t - t_0|$ được xác định bởi công thức $\frac{Q(t) - Q(t_0)}{t - t_0}$.

Nếu $|t - t_0|$ càng nhỏ thì tỉ số này càng biểu thị chính xác hơn cường độ dòng điện tại thời điểm t_0 . Người ta đưa ra định nghĩa sau đây:

Giới hạn hữu hạn (nếu có) $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{Q(t) - Q(t_0)}{t - t_0}$ được gọi là *cường độ tức thời* của dòng điện tại thời điểm t_0 .

2. Định nghĩa đạo hàm tại một điểm

Hoạt động 1. Tính vận tốc tức thời của viên bi tại thời điểm $x_0 = 1s$ trong bài toán tìm vận tốc tức thời.

Lời giải

Vận tốc tức thời của viên bi tại thời điểm $x_0 = 1s$

$$v(1) = \lim_{x_1 \rightarrow 1} \frac{f(x_1) - f(1)}{x_1 - 1} = \lim_{x_1 \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{2}gx_1^2 - \frac{1}{2}g \cdot 1^2}{x_1 - 1} = \lim_{x_1 \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{2} \cdot 9,5x_1^2 - \frac{1}{2} \cdot 9,8}{x_1 - 1} = 9,8(m/s)$$

Trong trường hợp tổng quát, ta có định nghĩa sau:

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$ và điểm $x_0 \in (a; b)$. Nếu tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ thì giới hạn đó được gọi là đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại x_0 và được kí hiệu là $f'(x_0)$ hoặc y'_{x_0} .

Nhận xét.

Trong định nghĩa trên, ta đặt:

$\Delta x = x - x_0$ và gọi Δx là *số gia của biến số tại điểm x_0* ;
 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ và gọi Δy là *số gia của hàm số ứng với số gia Δx tại điểm x_0* .
 Khi đó, ta có: $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

3. Cách tính đạo hàm bằng định nghĩa

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$ và điểm x_0 thuộc khoảng đó.

Để tính đạo hàm $f'(x_0)$ của hàm số $y = f(x)$ tại x_0 , ta lần lượt thực hiện ba bước sau:

Bước 1. Xét Δx là số gia của biến số tại điểm x_0 . Tính $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Bước 2. Rút gọn tỉ số $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Bước 3. Tính $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Kết luận: Nếu $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = a$ thì $f'(x_0) = a$.

Ví dụ 1. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x}$ tại $x_0 = 2$ bằng định nghĩa.

Lời giải

+ Xét Δx là số gia của biến số tại điểm $x_0 = 2$.

$$\text{Ta có: } \Delta y = f(2 + \Delta x) - f(2) = \frac{1}{2 + \Delta x} - \frac{1}{2} = \frac{2 - (2 + \Delta x)}{2(2 + \Delta x)} = \frac{-\Delta x}{2(2 + \Delta x)}.$$

$$\text{Suy ra: } \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1}{2(2 + \Delta x)}.$$

$$+ \text{ Ta thấy: } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-1}{2(2 + \Delta x)} = \frac{-1}{4}.$$

$$\text{Vậy } f'(2) = \frac{-1}{4}.$$

? Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = 2x$ tại $x_0 = 3$ bằng định nghĩa.

Lời giải

+ Xét Δx là số gia của biến số tại điểm $x_0 = 3$.

$$\text{Ta có: } \Delta y = f(3 + \Delta x) - f(3) = 2(\Delta x + 3) - 2.3 = 2\Delta x.$$

Suy ra: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2$.

+ Ta thấy: $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 2 = 2$.

Vậy $f'(3) = 2$.

Ví dụ 2. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = x^2$ tại điểm x bất kì bằng định nghĩa.

Lời giải

+ Xét Δx là số gia của biến số tại điểm x .

Ta có: $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^2 - x^2 = \Delta x(2x + \Delta x)$.

Suy ra: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x$.

+ Ta thấy: $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x$.

Vậy $f'(x) = 2x$.

? Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = x^3$ tại điểm x bất kì bằng định nghĩa.

Lời giải

+ Xét Δx là số gia của biến số tại điểm x .

Ta có: $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$

$= (x + \Delta x)^3 - x^3 = 3x^2 \cdot \Delta x + 3x \cdot \Delta x^2 + \Delta x^3 = \Delta x(3x^2 + 3x \cdot \Delta x + \Delta x^2)$.

Suy ra: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = (3x^2 + 3x \cdot \Delta x + \Delta x^2)$.

+ Ta thấy: $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (3x^2 + 3x \cdot \Delta x + \Delta x^2) = 3x^2$.

Vậy $f'(x) = 3x^2$.

Nhận xét.

Hàm số $f(x) = x^2$ có đạo hàm tại mọi điểm x trên khoảng $(-\infty; +\infty)$. Ta nói hàm số đó có đạo hàm trên khoảng $(-\infty; +\infty)$. Một cách tổng quát: Hàm số $y = f(x)$ được gọi là có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$ nếu nó có đạo hàm tại mọi điểm x trên khoảng đó.

4. Ý nghĩa vật lí của đạo hàm

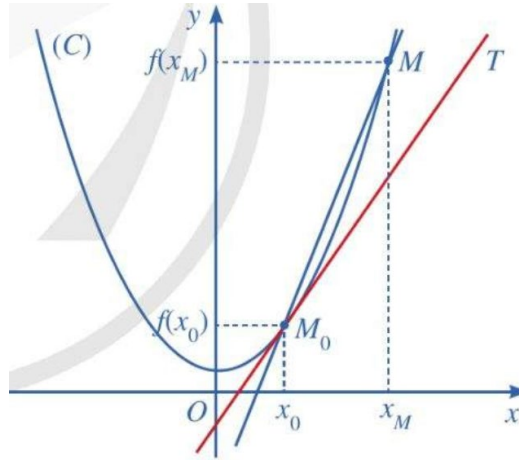
Đạo hàm xuất hiện trong nhiều khái niệm vật lí. Chẳng hạn: Xét chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s = s(t)$, với $s = s(t)$ là một hàm số có đạo hàm. Như đã thấy trong bài toán mở đầu, vận tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm t_0 là đạo hàm của hàm số tại t_0 : $v(t_0) = s'(t_0)$

II. Ý NGHĨA HÌNH HỌC CỦA ĐẠO HÀM

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C) , một điểm M_0 cố định thuộc (C) có hoành độ x_0 . Với mỗi điểm M thuộc (C) khác M_0 , kí hiệu x_M là hoành độ của điểm M và k_M là hệ số góc của cát tuyến M_0M . Giả sử

tồn tại giới hạn hữu hạn $k_0 = \lim_{x_M \rightarrow x_0} k_M$. Khi đó, ta coi đường thẳng M_0T đi qua M_0 và có hệ số góc k_0 là vị trí giới hạn của cát tuyến M_0M khi điểm M di chuyển dọc theo (C) dần tới M_0 .

Đường thẳng M_0T được gọi là *tiếp tuyến* của (C) tại điểm M_0 , còn M_0 được gọi là *tiếp điểm* (Hình 3).



Hình 3

a) Xác định hệ số góc k_0 của tiếp tuyến M_0T theo x_0 .

b) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm M_0 .

Ta có: $k_0 = \lim_{x_M \rightarrow x_0} k_M = \lim_{x_M \rightarrow x_0} \frac{f(x_M) - f(x_0)}{x_M - x_0} = f'(x_0)$.

Như vậy ta có kết luận sau:

+ Đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 là hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số đó tại điểm $M_0(x_0; f(x_0))$.

+ Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $M_0(x_0; f(x_0))$ là $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

Ví dụ 3. Cho hàm số $y = -x^2$ có đồ thị (C) .

a) Xác định hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ bằng 3.

b) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $M(3; -9)$.

Lời giải

a) Tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ bằng 3 có hệ số góc là:

$$f'(3) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-x^2 - (-3)^2}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} (-x - 3) = -6.$$

b) Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $M(3; -9)$ là: $y = -6(x - 3) + (-9)$ hay $y = -6x + 9$.

? Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{x}$ tại điểm $N(1; 1)$.

Lời giải

Tiếp tuyến của đồ thị tại điểm có hoành độ bằng 1 có hệ số góc là:

$$k_0 = \lim_{x_N \rightarrow 1} k_N = \lim_{x_N \rightarrow 1} \frac{f(x_N) - f(1)}{x_N - 1} = \lim_{x_N \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x_N} - 1}{x_N - 1} = -1 = f'(1)$$

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{x}$ tại điểm $N(1;1)$ là

$$y = -(x-1)+1 = -x+2$$

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1. Tìm số gia của hàm số

1. Phương pháp

- Số gia của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 là $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.
- Chú ý rằng số gia Δy của hàm số là một hàm số của số gia biến số Δx .

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Tìm số gia của hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$, biết rằng $x_0 = 1$; $\Delta x = -0,1$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(0,9) - f(1) = 0,9^3 - 3 \cdot 0,9^2 + 2 - (1^3 - 3 \cdot 1^2 + 2) = 0,229.$$

Ví dụ 2: Tính số gia của hàm số $y = 2x + 3$ theo x và Δx .

Lời giải

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = 2(x_0 + \Delta x) + 3 - (2x_0 + 3) = 2\Delta x$$

Ví dụ 3: Tính $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ của hàm số $y = 2x^3 - 3x^2$ theo x và Δx .

Lời giải

$$\begin{aligned} \Delta y &= f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = 2(x_0 + \Delta x)^3 - 3(x_0 + \Delta x)^2 - (2x_0^3 - 3x_0^2) \\ &= 2(x_0^3 + 3x_0^2\Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3) - 3(x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2) - (2x_0^3 - 3x_0^2) \\ &= \Delta x(6x_0^2 + 6x_0\Delta x + 3(\Delta x)^2 - 6x_0 - 3\Delta x) \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x(6x_0^2 + 6x_0\Delta x + 3(\Delta x)^2 - 6x_0 - 3\Delta x)}{\Delta x} = 6x_0^2 + 6x_0\Delta x + 3(\Delta x)^2 - 6x_0 - 3\Delta x.$$

Dạng 2. Tính đạo hàm bằng định nghĩa

1. Phương pháp

- Tính số gia của hàm số $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.
- Lập tỉ $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.
- Tính giới hạn $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Tính đạo hàm (bằng định nghĩa) của hàm số $y = 2x^2 + x + 1$ tại $x_0 = 2$.

Lời giải

Cho $x_0 = 2$ một số gia Δx . Khi đó hàm số nhận một số gia tương ứng:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = 2(2 + \Delta x)^2 + (2 + \Delta x) + 1 - (2 \cdot 2^2 + 2 + 1) = \Delta x(9 + 2\Delta x)$$

$$\text{Ta có } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(9 + 2\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (9 + 2\Delta x) = 9.$$

$$\text{Vậy } f'(2) = 9$$

Ví dụ 2: Tính đạo hàm (bằng định nghĩa) của mỗi hàm số sau tại các điểm đã chỉ ra $y = \sqrt{x^2 + 3}$ tại $x; \forall x \in \mathbb{R}$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } f'(1) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(\Delta x + x)^2 + 3} - \sqrt{x^2 + 3}}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(\Delta x)^2 + 2\Delta x \cdot x + x^2 + 3} - \sqrt{x^2 + 3}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\Delta x)^2 + 2\Delta x \cdot x}{\Delta x \cdot (\sqrt{(\Delta x)^2 + 2\Delta x \cdot x + x^2 + 3} + \sqrt{x^2 + 3})} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x + 2x}{\sqrt{(\Delta x)^2 + 2\Delta x \cdot x + x^2 + 3} + \sqrt{x^2 + 3}} = \frac{2x}{2 \cdot \sqrt{x^2 + 3}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3}}. \end{aligned}$$

Ví dụ 3: Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^3 + x^2 + 1} - 1}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$ tại $x = 0$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } f(0) = 0, \text{ do đó: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^3 + x^2 + 1} - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 1}{\sqrt{x^3 + x^2 + 1} + 1} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Vậy } f'(0) = \frac{1}{2}.$$

Ví dụ 4: Tìm a, b để hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + x & \text{khi } x \leq 1 \\ ax + b & \text{khi } x > 1 \end{cases}$ có đạo hàm tại $x = 1$.

Lời giải

Điều kiện cần:

$$f(1) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (ax + b) = a + b$$

Để hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại $x = 1$ thì $f(x)$ liên tục tại $x = 1$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) \Leftrightarrow a + b = 2$$

Điều kiện đủ:

$$f'(1^-) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x + 2) = 3$$

$$f'(1^+) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{ax + b - (a + b)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{ax - a}{x - 1} = a$$

Để hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại $x = 1$ thì $f'(1^+) = f'(1^-) \Leftrightarrow a = 3 \Rightarrow b = -1$.

Dạng 3. Ý nghĩa vật lý của đạo hàm

1. Phương pháp

❶. Vận tốc tức thời tại thời điểm t_0 của chất điểm chuyển động với phương trình $s = s(t)$ là

$$v(t_0) = s'(t_0).$$

❷. Cường độ tức thời tại thời điểm t_0 của một dòng điện với điện lượng $Q = Q(t)$ là

$$I(t_0) = Q'(t_0).$$

2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

Ví dụ 1: Một chất điểm chuyển động có phương trình chuyển động là:

$$s = f(t) = t^2 + 4t + 6 \text{ (t được tính bằng giây, s được tính bằng mét)}$$

a) Tính đạo hàm của hàm số $f(t)$ tại điểm t_0 .

b) Tính vận tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm $t = 5$.

Lời giải

$$\text{a) Ta có: } \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{t^2 + 4t + 6 - (t_0^2 + 4t_0 + 6)}{t - t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0} (t + t_0 + 4) = 2t_0 + 4.$$

$$\text{Vậy } f'(t_0) = 2t_0 + 4.$$

b) Vận tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm $t = 5$ là $v_t = f'(5) = 2 \cdot 5 + 4 = 14 \text{ (m/s)}$.

Ví dụ 2: Cho biết điện lượng trong một dây dẫn theo thời gian biểu thị bởi hàm số $Q = 6t + 5$ (t được tính bằng giây, Q được tính bằng Coulomb). Tính cường độ của dòng điện trong dây dẫn tại thời điểm $t = 10$.

Lời giải

$$\text{Vì } Q'(t) = 6 \Rightarrow \text{Cường độ của dòng điện trong dây dẫn tại thời điểm } t = 10 \text{ là } I_t = Q'(10) = 6$$

Dạng 4. Phương trình tiếp tuyến

1. Phương pháp

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $M_0(x_0; y_0)$ là:
 $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

Nếu tiếp tuyến có hệ số góc k thì ta giải phương trình $f'(x_0) = k$ tìm hoành độ tiếp điểm.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Cho hàm số $f(x) = x^2 + 5$ có $f'(x) = 2x$. Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị của hàm số tại điểm M có hoành độ $x_0 = -1$.

Hướng dẫn giải

$$x_0 = -1 \Rightarrow f(x_0) = (-1)^2 + 5 = 6$$

$$f'(-1) = -2.$$

Phương trình tiếp tuyến: $y = -2(x + 1) + 6$.

Ví dụ 2: Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x) = x^4$ tại điểm có hoành độ bằng -1

Hướng dẫn giải

Ta có: $f(1) = 1; f'(x) = 4x^3$, do đó $f'(-1) = -4$.

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y = -4(x + 1) + 1 = -4x - 3$.

Ví dụ 3: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x) = x^3$ tại điểm mà tiếp điểm có tung độ bằng -1

Hướng dẫn giải

Ta có: Khi $y = -1$ thì $x^3 = -1$, do đó $x = -1$.

$$f(-1) = -1; f'(x) = 3x^2, \text{ do đó } f'(-1) = 3.$$

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y = 3(x + 1) - 1 = 3x + 2$.

Ví dụ 5: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x) = x^4$ có hệ số góc bằng 4.

Hướng dẫn giải

Ta có: $f'(x) = 4x^3$.

Hệ số góc của tiếp tuyến bằng 4 nên $4x^3 = 4$, do đó $x = 1$; $f(1) = 1$.

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y = 4(x - 1) + 1 = 4x - 3$.

C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

Bài 1. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = 3x^3 - 1$ tại điểm $x_0 = 1$ bằng định nghĩa.

Lời giải

+ Xét Δx là số gia của biến số tại điểm 1.

$$\text{Ta có: } \Delta y = f(1 + \Delta x) - f(1)$$

$$= 3(1 + \Delta x)^3 - 1 - (3 \cdot 1^3 - 1) = 9\Delta x + 9\Delta x^2 + 3\Delta x^3 = 3\Delta x(3 + 3\Delta x + \Delta x^2).$$

Suy ra: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3 \cdot (3 + 3 \cdot \Delta x + \Delta x^2)$.

+ Ta thấy: $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 3 \cdot (3 + 3 \cdot \Delta x + \Delta x^2) = 3 \cdot 3 = 9$.

Vậy $f'(1) = 9$.

Bài 2. Chứng minh rằng hàm số $f(x) = |x|$ không có đạo hàm tại điểm $x_0 = 0$, nhưng có đạo hàm tại mọi điểm $x \neq 0$.

Lời giải

Ta có: $\lim_{x \rightarrow 0^+} |x| = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0 = f(0)$ nên hàm số $f(x) = |x|$ liên tục tại $x = 0$.

Ta có: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x| - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x| - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1$

Nên $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x}$ nên hàm số không có đạo hàm tại $x = 0$.

Với mọi $x \neq 0$ thì $f(x) = |x|$ tồn tại đạo hàm

- $x \in (-\infty, 0) \Rightarrow f'(|x|) = -1$
- $x \in (0, +\infty) \Rightarrow f'(|x|) = 1$

Bài 3. Cho hàm số $y = -2x^2 + x$ có đồ thị (C) .

- Xác định hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ bằng 2.
- Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $M(2; -6)$.

Lời giải

a) Tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ bằng 2 có hệ số góc là:

$$\begin{aligned} k_0 = f'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-2x^2 + x - (-2 \cdot 2^2 + 2)}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-2x^2 + x + 6}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-(x - 2)(2x + 3)}{x - 2} = -7 \end{aligned}$$

b) Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $M(2; -6)$ là:

$$y = -7(x - 2) - 6 \Rightarrow y = -7x + 8$$

Bài 4. Giả sử chi phí C (USD) để sản xuất Q máy vô tuyến là $C(Q) = Q^2 + 80Q + 3500$.

- Ta gọi chi phí biên là chi phí gia tăng để sản xuất thêm 1 sản phẩm từ Q sản phẩm lên $Q + 1$ sản phẩm. Giả sử chi phí biên được xác định bởi hàm số $C'(Q)$. Tìm hàm chi phí biên.

b) Tìm $C'(90)$ và giải thích ý nghĩa kết quả tìm được.

c) Hãy tính chi phí sản xuất máy vô tuyến thứ 100.

Lời giải

a) Chi phí biên là chi phí gia tăng để sản xuất thêm 1 sản phẩm từ Q sản phẩm lên $Q+1$ sản phẩm. Chi phí biên được xác định bởi hàm số $C'(Q)$

$$\Rightarrow C'(Q) = \lim_{Q \rightarrow Q+1} \frac{(Q^2 + 80Q + 3500) - ((Q+1)^2 + 80(Q+1) + 3500)}{Q - (Q+1)}$$

$$C'(Q) = \lim_{Q \rightarrow Q+1} \frac{(Q^2 + 80Q + 3500) - (Q^2 + 2Q + 1 + 80Q + 80 + 3500)}{-1}$$

$$C'(Q) = \lim_{Q \rightarrow Q+1} (2Q + 80)$$

$$b) C'(90) = 2 \cdot 90 + 80 = 260(USD)$$

=> Ý nghĩa: Chi phí gia tăng để sản xuất thêm 1 sản phẩm từ 89 sản phẩm lên 90 sản phẩm là 260 (USD)

c) Chi phí sản xuất 101 máy vô tuyến là:

$$C(101) = 101^2 + 80 \cdot 101 + 3500 = 21781(USD)$$

Chi phí sản xuất 100 máy vô tuyến là:

$$C(100) = 100^2 + 80 \cdot 100 + 3500 = 21500(USD)$$

Chi phí sản xuất máy vô tuyến thứ 100 là

$$C(101) - C(100) = 281(USD)$$

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Tính số gia của hàm số $y = x^2 + 2$ tại điểm $x_0 = 2$ ứng với số gia $\Delta x = 1$.

A. $\Delta y = 13$.

B. $\Delta y = 9$.

C. $\Delta y = 5$.

D. $\Delta y = 2$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(2+1) - f(2) = f(3) - f(2)$$

$$= (3^2 + 2) - (2^2 + 2) = 5.$$

Câu 2: Tính số gia của hàm số $y = x^3 + x^2 + 1$ tại điểm x_0 ứng với số gia $\Delta x = 1$.

A. $\Delta y = 3x_0^2 + 5x_0 + 3$.

B. $\Delta y = 2x_0^3 + 3x_0^2 + 5x_0 + 2$.

C. $\Delta y = 3x_0^2 + 5x_0 + 2$.

D. $\Delta y = 3x_0^2 - 5x_0 + 2$.

Lời giải

Chọn C

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \Delta y &= f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(x_0 + 1) - f(x_0) \\ &= \left[(x_0 + 1)^3 + (x_0 + 1)^2 + 1 \right] - \left[x_0^3 + x_0^2 + 1 \right] = 3x_0^2 + 5x_0 + 2. \end{aligned}$$

Câu 3: Tính số gia của hàm số $y = \frac{x^2}{2}$ tại điểm $x_0 = -1$ ứng với số gia Δx .

A. $\Delta y = \frac{1}{2}(\Delta x)^2 - \Delta x$.

B. $\Delta y = \frac{1}{2}[(\Delta x)^2 - \Delta x]$.

C. $\Delta y = \frac{1}{2}[(\Delta x)^2 + \Delta x]$.

D. $\Delta y = \frac{1}{2}(\Delta x)^2 + \Delta x$.

Lời giải

Chọn A

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \Delta y &= f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(-1 + \Delta x) - f(-1) \\ &= \frac{(-1 + \Delta x)^2}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1 - 2\Delta x + (\Delta x)^2}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(\Delta x)^2 - \Delta x. \end{aligned}$$

Câu 4: Tính số gia của hàm số $y = x^2 - 4x + 1$ tại điểm x_0 ứng với số gia Δx là:

A. $\Delta y = \Delta x(\Delta x + 2x_0 - 4)$.

B. $\Delta y = 2x_0 + \Delta x$.

C. $\Delta y = \Delta x(2x_0 - 4\Delta x)$.

D. $\Delta y = 2x_0 - 4\Delta x$.

Lời giải

Chọn A

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \Delta y &= f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \left[(x_0 + \Delta x)^2 - 4(x_0 + \Delta x) + 1 \right] - \left[x_0^2 - 4x_0 + 1 \right] \\ &= \Delta x(\Delta x + 2x_0 - 4). \end{aligned}$$

Câu 5: Tính số gia của hàm số $y = \frac{1}{x}$ tại điểm x (bất kì khác 0) ứng với số gia Δx .

A. $\Delta y = \frac{\Delta x}{x(x + \Delta x)}$.

B. $\Delta y = -\frac{\Delta x}{x(x + \Delta x)}$.

C. $\Delta y = -\frac{\Delta x}{x + \Delta x}$.

D. $\Delta y = \frac{\Delta x}{x + \Delta x}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x} = -\frac{\Delta x}{x(x + \Delta x)}.$$

Câu 6: Tính tỷ số $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ của hàm số $y = 3x + 1$ theo x và Δx .

A. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$.

B. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$.

C. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2$.

D. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = [3(x + \Delta x) + 1] - [3x + 1] = 3\Delta x \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = 3.$

Câu 7: Tính tỷ số $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ của hàm số $y = x^2 - 1$ theo x và Δx .

- A.** $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0.$ **B.** $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \Delta x + 2x.$ **C.** $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x.$ **D.** $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \Delta x.$

Lời giải

Chọn B

Ta có $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = [(x + \Delta x)^2 - 1] - (x^2 - 1) = 2x\Delta x + (\Delta x)^2$

$\Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x.$

Câu 8: Tính tỷ số $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ của hàm số $y = 2x^3$ theo x và Δx .

- A.** $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x^3 - 2(\Delta x)^3}{\Delta x}.$ **B.** $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2(\Delta x)^2.$
C. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 6x^2 + 6x\Delta x + 2(\Delta x)^2.$ **D.** $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2.$

Lời giải

Chọn C

Ta có $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = 2(x + \Delta x)^3 - 2x^3 = 6x^2\Delta x + 6x(\Delta x)^2 + 2(\Delta x)^3$

$\Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = 6x^2 + 6x\Delta x + 2(\Delta x)^2.$

Câu 9: Tính tỷ số $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ của hàm số $y = \frac{1}{x}$ theo x và Δx .

- A.** $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x(x + \Delta x)}.$ **B.** $\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{x(x + \Delta x)}.$ **C.** $\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{x + \Delta x}.$ **D.** $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x + \Delta x}.$

Lời giải

Chọn B

Ta có $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x} = -\frac{\Delta x}{x(x + \Delta x)}$

$\Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{x(x + \Delta x)}.$

Câu 10: Đạo hàm của hàm số $f(x) = x^2 - x$ tại điểm x_0 ứng với số gia Δx là:

- A.** $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} ((\Delta x)^2 + 2x_0\Delta x - \Delta x).$ **B.** $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta x + 2x_0 - 1).$
C. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta x + 2x_0 + 1).$ **D.** $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} ((\Delta x)^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x).$

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = [(x_0 + \Delta x)^2 - (x_0 + \Delta x)] - (x_0^2 - x_0)$$

$$= (\Delta x)^2 + 2x_0\Delta x - \Delta x \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \Delta x + 2x_0 - 1.$$

$$\text{Khi đó } f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta x + 2x_0 - 1).$$

Câu 11: Trong các phát biểu sau, phát biểu nào sau đây là đúng?

- A.** Nếu hàm số $y = f(x)$ không liên tục tại x_0 thì nó có đạo hàm tại điểm đó.
- B.** Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì nó không liên tục tại điểm đó.
- C.** Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì nó liên tục tại điểm đó.
- D.** Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục tại x_0 thì nó có đạo hàm tại điểm đó.

Lời giải

Chọn C

Câu 12: Cho f là hàm số liên tục tại x_0 . Đạo hàm của f tại x_0 là:

- A.** $f(x_0)$.
- B.** $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$.
- C.** $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ (nếu tồn tại giới hạn).
- D.** $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{h}$ (nếu tồn tại giới hạn).

Lời giải

Chọn C

Ta có Cho f là hàm số liên tục tại x_0 .

$$\text{Nếu tồn tại giới hạn (hữu hạn)} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ thì } f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

$$\text{Đặt } h = x - x_0 \Rightarrow f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Câu 13: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 là $f'(x_0)$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- A.** $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.
- B.** $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.
- C.** $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$.
- D.** $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x + x_0) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Hàm số } y = f(x) \text{ có đạo hàm tại } x_0 \text{ là } f'(x_0) \Rightarrow f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

$$\text{Đặt } h = \Delta x = x - x_0 \Rightarrow f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Câu 14: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{3 - \sqrt{4-x}}{4} & \text{khi } x \neq 0 \\ \frac{1}{4} & \text{khi } x = 0 \end{cases}$. Tính $f'(0)$.

A. $f'(0) = \frac{1}{4}$.

B. $f'(0) = \frac{1}{16}$.

C. $f'(0) = \frac{1}{32}$.

D. Không tồn tại.

Lời giải

Chọn B

$$\begin{aligned} \text{Xét } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{3 - \sqrt{4-x}}{4} - \frac{1}{4}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt{4-x}}{4x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2 - \sqrt{4-x})(2 + \sqrt{4-x})}{4x(2 + \sqrt{4-x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{4x(2 + \sqrt{4-x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{4(2 + \sqrt{4-x})} = \frac{1}{16}. \end{aligned}$$

Câu 15: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$. Tính $f'(0)$.

A. $f'(0) = 0$.

B. $f'(0) = 1$.

C. $f'(0) = \frac{1}{2}$.

D. Không tồn tại.

Lời giải

Chọn C

$$\begin{aligned} \text{Xét } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x^2+1}-1)(\sqrt{x^2+1}+1)}{x^2(\sqrt{x^2+1}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2(\sqrt{x^2+1}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+1} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Câu 16: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ bởi $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 4x^2 + 3x}{x^2 - 3x + 2} & \text{khi } x \neq 1 \\ 0 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$. Tính $f'(1)$.

A. $f'(1) = \frac{3}{2}$.

B. $f'(1) = 1$.

C. $f'(1) = 0$.

D. Không tồn tại.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Xét } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 4x^2 + 3x}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)(x-3)}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-3)}{x-2} = 2.$$

Ta thấy: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq f(1)$. Do đó, hàm số không liên tục tại điểm $x = 1$.

Vậy hàm số không tồn tại đạo hàm tại điểm $x = 1$.

Câu 17: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{khi } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A.** Hàm số không liên tục tại $x = 0$. **B.** Hàm số có đạo hàm tại $x = 2$.
C. Hàm số liên tục tại $x = 2$. **D.** Hàm số có đạo hàm tại $x = 0$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Xét các giới hạn } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 - 1) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x^2) = 0 \end{cases}.$$

Do $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ nên hàm số không liên tục tại $x = 0$.

Do đó, hàm số không có đạo hàm tại $x = 0$.

Câu 18: Tìm tham số thực b để hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{khi } x \leq 2 \\ -\frac{x^2}{2} + bx - 6 & \text{khi } x > 2 \end{cases}$ có đạo hàm tại $x = 2$.

- A.** $b = 3$. **B.** $b = 6$. **C.** $b = 1$. **D.** $b = -6$.

Lời giải

Chọn B

Để hàm số có đạo hàm tại $x = 2$ trước tiên hàm số phải liên tục tại $x = 2$, tức là

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(-\frac{x^2}{2} + bx - 6 \right) = \lim_{x \rightarrow 2^-} x^2 \Leftrightarrow -2 + 2b - 6 = 4 \Leftrightarrow b = 6.$$

Thử lại với $b = 6$, ta có

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-\frac{x^2}{2} + 6x - 10}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-\frac{x^2}{2} + 6x - 10}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x - 2)(10 - x)}{2(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{10 - x}{2} = 4; \end{aligned}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4.$$

Vì $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ nên hàm số có đạo hàm tại $x = 2$.

Câu 19: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} mx^2 + 2x + 2 & \text{khi } x > 0 \\ nx + 1 & \text{khi } x \leq 0 \end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của các tham số m, n sao cho

$f(x)$ có đạo hàm tại điểm $x = 0$.

- A.** Không tồn tại m, n . **B.** $m = 2, \forall n$. **C.** $n = 2, \forall m$. **D.** $m = n = 2$.

Lời giải

Chọn C

Ta có

$$\begin{cases} f(0) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{mx^2 + 2x + 2 - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{mx^2 + 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (mx + 2) = 2. \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{nx + 2 - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{nx}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} n = n \end{cases}$$

Hàm số có đạo hàm tại $x = 0$ khi và chỉ khi tồn tại giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \Leftrightarrow n = 2.$$

Câu 20: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{khi } x \leq 1 \\ ax + b & \text{khi } x > 1 \end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của các tham số a, b sao cho $f(x)$

có đạo hàm tại điểm $x = 1$.

A. $a = 1, b = -\frac{1}{2}$.

B. $a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}$.

C. $a = \frac{1}{2}, b = -\frac{1}{2}$.

D. $a = 1, b = \frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

• Hàm số có đạo hàm tại $x = 1$, do đó hàm số liên tục tại $x = 1$.

$$\Rightarrow a + b = \frac{1}{2}. \quad (1)$$

• Ta có $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{ax + b - (a \cdot 1 + b)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{a(x - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} a = a \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x + 1)(x - 1)}{2(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x + 1)}{2} = 1 \end{cases}$

$$\text{Hàm số có đạo hàm tại } x = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \Leftrightarrow a = 1. \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có $a = 1, b = -\frac{1}{2}$.

Câu 21: Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = t^2$, trong đó $t > 0$, t tính bằng giây và $s(t)$ tính bằng mét. Tính vận tốc của chất điểm tại thời điểm $t = 2$ giây.

A. 2m/s.

B. 3m/s.

C. 4m/s.

D. 5m/s.

Lời giải

Chọn C

Ta tính được $s'(t) = 2t$.

Vận tốc của chất điểm $v(t) = s'(t) = 2t \Rightarrow v(2) = 2 \cdot 2 = 4\text{m/s}$.

Câu 22: Một viên đạn được bắn lên cao theo phương trình $s(t) = 196t - 4,9t^2$ trong đó $t > 0$, t tính bằng giây kể từ thời điểm viên đạn được bắn lên cao và $s(t)$ là khoảng cách của viên đạn so với mặt

đất được tính bằng mét. Tại thời điểm vận tốc của viên đạn bằng 0 thì viên đạn cách mặt đất bao nhiêu mét?

- A. 1690m. B. 1069m. C. 1906m. D. 1960m.

Lời giải

Chọn D

Ta tính được $s'(t) = 196 - 9,8t$.

Vận tốc của viên đạn $v(t) = s'(t) = 196 - 9,8t \Rightarrow v(t) = 0 \Leftrightarrow 196 - 9,8t = 0 \Leftrightarrow t = 20$.

Khi đó viên đạn cách mặt đất một khoảng $h = s(20) = 196.20 - 4,9.20^2 = 1960\text{m}$.

Câu 23: Một chất điểm chuyển động có phương trình $s(t) = t^3 - 3t^2 + 9t + 2$, trong đó $t > 0$, t tính bằng giây và $s(t)$ tính bằng mét. Hỏi tại thời điểm nào thì vận tốc của vật đạt giá trị nhỏ nhất?

- A. $t = 1\text{s}$. B. $t = 2\text{s}$. C. $t = 3\text{s}$. D. $t = 6\text{s}$.

Lời giải

Chọn A

Ta tính được $s'(t) = 3t^2 - 6t + 9$.

Vận tốc của chất điểm $v(t) = s'(t) = 3t^2 - 6t + 9 = 3(t-1)^2 + 6 \geq 6$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow t = 1$.

Câu 24: Vận tốc của một chất điểm chuyển động được biểu thị bởi công thức $v(t) = 8t + 3t^2$, trong đó $t > 0$, t tính bằng giây và $v(t)$ tính bằng mét/giây. Tìm gia tốc của chất điểm tại thời điểm mà vận tốc chuyển động là 11 mét / giây

- A. 6m/s^2 . B. 11m/s^2 . C. 14m/s^2 . D. 20m/s^2 .

Lời giải

Chọn C

Ta tính được $v'(t) = 8 + 6t$.

Ta có $v(t) = 11 \Leftrightarrow 8t + 3t^2 = 11 \Leftrightarrow t = 1 (t > 0)$.

Gia tốc của chất điểm $a(t) = v'(t) = 8 + 6t \Rightarrow a(1) = v'(1) = 8 + 6.1 = 14\text{m/s}^2$.

Câu 25: Một vật rơi tự do theo phương trình $s = \frac{1}{2}gt^2$, trong đó $g = 9,8\text{m/s}^2$ là gia tốc trọng trường. Tìm vận tốc trung bình của chuyển động trong khoảng thời gian từ $t (t = 5\text{s})$ đến $t + \Delta t$ với $\Delta t = 0,001\text{s}$.

- A. $v_{tb} = 49\text{m/s}$. B. $v_{tb} = 49,49\text{m/s}$. C. $v_{tb} = 49,0049\text{m/s}$. D. $v_{tb} = 49,245\text{m/s}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } v_{tb} = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \frac{\frac{1}{2}g(t + \Delta t)^2 - \frac{1}{2}gt^2}{\Delta t} = gt + \frac{1}{2}g\Delta t = 49,0049\text{m/s}.$$

Câu 26: Tìm hệ số góc k của tiếp tuyến của parabol $y = x^2$ tại điểm có hoành độ $\frac{1}{2}$.

- A. $k = 0$. B. $k = 1$. C. $k = \frac{1}{4}$. D. $k = -\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Vậy } k = y' \left(\frac{1}{2} \right) = 1.$$

Câu 27: Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong $y = x^3$ tại điểm $(-1; -1)$.

- A. $y = -3x - 4$. B. $y = -1$. C. $y = 3x - 2$. D. $y = 3x + 2$.

Lời giải

Chọn D

Ta tính được $k = y'(-1) = 3$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} x_0 = -1 \\ y_0 = -1 \\ k = 3 \end{cases}. \text{ Suy ra phương trình tiếp tuyến } y + 1 = 3(x + 1) \Leftrightarrow y = 3x + 2.$$

Câu 28: Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong $y = \frac{1}{x}$ tại điểm có hoành độ bằng -1 .

- A. $x + y + 2 = 0$. B. $y = x + 2$. C. $y = x - 2$. D. $y = -x + 2$.

Lời giải

Chọn A

Ta tính được $k = y'(-1) = -1$.

Với $x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = -1$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} x_0 = -1 \\ y_0 = -1 \\ k = -1 \end{cases}. \text{ Suy ra phương trình tiếp tuyến } y + 1 = -1(x + 1) \Leftrightarrow y = -x - 2.$$

Câu 29: Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong $y = x^3$ tại điểm có tung độ bằng 8.

- A. $y = 8$. B. $y = -12x + 16$. C. $y = 12x - 24$. D. $y = 12x - 16$.

Lời giải

Chọn D

Với $y_0 = 8 \Rightarrow x_0 = 2$.

Ta tính được $k = y'(2) = 12$.

Ta có $\begin{cases} x_0 = 2 \\ y_0 = 8 \\ k = 12 \end{cases}$. Suy ra phương trình tiếp tuyến $y - 8 = 12(x - 2) \Leftrightarrow y = 12x - 16$.

Câu 30: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại giao điểm với trục tung.

A. $y = 2x$.

B. $y = 2$.

C. $y = 0$.

D. $y = -2$.

Lời giải

Chọn B

Ta có : $x_0 = 0; y_0 = 2; y' = 3x^2 - 6x \Rightarrow k = y'(0) = 0$

Ta có : $\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 2 \\ k = 0 \end{cases}$. Suy ra phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y = 2$.

Câu 31: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại giao điểm với đường thẳng $y = -2$.

A. $y = -9x + 7; y = -2$.

B. $y = -2$.

C. $y = 9x + 7; y = -2$.

D. $y = 9x + 7; y = 2$.

Lời giải

Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm : $y = x^3 - 3x^2 + 2 = -2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$.

Với $x = -1 \rightarrow \begin{cases} y = -2 \\ k = y'(-1) = 9 \end{cases}$. Suy ra phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y = 9x + 7$.

Với $x = 2 \rightarrow \begin{cases} y = -2 \\ k = y'(-2) = 0 \end{cases}$. suy ra phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y = -2$.

Câu 32: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = 9x + 7$.

A. $y = 9x + 7; y = 9x - 25$.

B. $y = 9x - 25$.

C. $y = 9x - 7; y = 9x + 25$.

D. $y = 9x + 25$.

Lời giải

Chọn B

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm.

Ta tính được $k = y'(x_0) = 3x_0^2 - 6x_0$. Do tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = 9x + 7$ nên có

$k = 9 \Leftrightarrow 3x_0^2 - 6x_0 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ x_0 = 3 \end{cases}$.

Với $x_0 = -1 \rightarrow \begin{cases} y_0 = -2 \\ k = 9 \end{cases}$. Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y = 9x + 7$ (loại) (vì trùng với đường thẳng đã cho).

Với $x_0 = 3 \rightarrow \begin{cases} y_0 = 2 \\ k = 9 \end{cases}$. Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y = 9x - 25$.

Câu 33: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = -\frac{1}{45}x$.

A. $y = 45x - 173$; $y = 45x + 83$.

B. $y = 45x - 173$.

C. $y = 45x + 173$; $y = 45x - 83$.

D. $y = 45x - 83$.

Lời giải

Chọn A

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm.

Ta tính được $k = y'(x_0) = 3x_0^2 - 6x_0$. Do tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = -\frac{1}{45}x$ nên

$$\text{có } k \cdot \left(-\frac{1}{45}\right) = -1 \Leftrightarrow k = 45 \Leftrightarrow 3x_0^2 - 6x_0 = 45 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 5 \\ x_0 = -3 \end{cases}$$

Với $x_0 = 5 \rightarrow \begin{cases} y_0 = 52 \\ k = 45 \end{cases}$. Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y = 45x - 173$.

Với $x_0 = -3 \rightarrow \begin{cases} y_0 = -52 \\ k = 45 \end{cases}$. Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y = 45x + 83$.

Câu 34: Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong $y = \frac{1}{x}$ biết hệ số góc của tiếp tuyến bằng $-\frac{1}{4}$.

A. $x + 4y - 1 = 0$; $x + 4y + 1 = 0$.

B. $x + 4y - 4 = 0$; $x + 4y + 4 = 0$.

C. $y = -\frac{1}{4}x - 4$; $y = -\frac{1}{4}x + 4$.

D. $y = -\frac{1}{4}x$.

Lời giải

Chọn B

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm. Ta tính được $k = y'(x_0) = -\frac{1}{x_0^2}$.

Theo giả thiết ta có $k = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow -\frac{1}{x_0^2} = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow x_0^2 = 4 \Leftrightarrow x_0 = \pm 2$.

• Với $x_0 = 2 \rightarrow y_0 = \frac{1}{2}$. Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y = -\frac{1}{4}(x - 2) + \frac{1}{2} \Leftrightarrow x + 4y - 4 = 0$.

- Với $x_0 = -2 \rightarrow y_0 = -\frac{1}{2}$. Phương trình tiếp tuyến cần tìm là:

$$y = -\frac{1}{4}(x+2) - \frac{1}{2} \Leftrightarrow x + 4y + 4 = 0.$$

Câu 35: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số biết cosin góc tạo bởi tiếp tuyến và đường thẳng $\Delta: 4x - 3y = 0$ bằng $\frac{3}{5}$.

- A.** $y = 2; y = 1$. **B.** $y = -2; y = 1$. **C.** $y = -2; y = -1$. **D.** $y = 2; y = -2$.

Lời giải

Chọn D

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm $\Rightarrow k = y'(x_0) = 3x_0^2 - 6x_0$.

Phương trình tiếp tuyến d có dạng $y + y_0 = k(x - x_0)$.

Suy ra tiếp tuyến d có một vector pháp tuyến là $\vec{n}_d = (-k; 1)$.

Đường thẳng Δ có một vector pháp tuyến là $\vec{n}_\Delta = (4; -3)$.

Theo đề bài ta có: $\cos(d, \Delta) = \frac{|-4k - 3|}{\sqrt{k^2 + 1}\sqrt{16 + 9}} = \frac{3}{5} \Rightarrow \begin{cases} k = 0 \\ k = -\frac{24}{7} \end{cases}$.

Với $k = -\frac{24}{7} \Rightarrow 3x_0^2 - 6x_0 = -\frac{24}{7}$: vô nghiệm.

Với $k = 0 \Rightarrow 3x_0^2 - 6x_0 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 = 2 \end{cases}$.

- $x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 2 \Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = 2$.
- $x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = -2 \Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y + 2 = 0 \Leftrightarrow y = -2$.

BÀI 2. CÁC QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM

Ta có thể tính đạo hàm của hàm số bằng cách sử dụng định nghĩa. Tuy nhiên, cách làm đó là không thuận lợi khi hàm số được cho bằng những công thức phức tạp. Trong thực tiễn, để tính đạo hàm của một hàm số ta thường sử dụng các quy tắc tính đạo hàm để đưa việc tính toán đó về tính đạo hàm của những hàm số sơ cấp cơ bản.

Đạo hàm của những hàm số sơ cấp cơ bản là gì?

Làm thế nào để thực hiện được các quy tắc tính đạo hàm?



A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I. ĐẠO HÀM CỦA MỘT SỐ HÀM SƠ CẤP CƠ BẢN

1. Đạo hàm của hàm số $y = x^n$ ($n \in \mathbb{N}, n > 1$)



- Tính đạo hàm của hàm số $y = x^2$ tại điểm x_0 bất kì bằng định nghĩa.
- Dự đoán đạo hàm của hàm số $y = x^n$ tại điểm x bất kì.

Lời giải

a) + Xét Δx là số gia của biến số tại điểm x_0 .

Ta có: $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^2 - (x_0)^2 = 2x_0 \cdot \Delta x + \Delta x^2 = \Delta x(2x_0 + \Delta x)$.

Suy ra: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = (2x_0 + \Delta x)$.

+ Ta thấy: $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0$.

Vậy $f'(x_0) = 2x_0$.

b) Dự đoán đạo hàm của hàm số $y = x^n$ tại điểm x bất kì là:

$$y = x^n \Rightarrow y' = n \cdot x^{n-1}$$

Hàm số $y = x^n$ ($n \in \mathbb{N}, n > 1$) có đạo hàm tại mọi $x \in \mathbb{R}$ và $(x^n)' = nx^{n-1}$.

Nhận xét: Bằng định nghĩa, ta chứng minh được:

- Đạo hàm của hàm hằng bằng 0: $(c)' = 0$ với c là hằng số;
- Đạo hàm của hàm số $y = x$ bằng 1: $(x)' = 1$.

Ví dụ 1. Cho hàm số $f(x) = x^{10}$.

- a) Tính đạo hàm của hàm số trên tại điểm x bất kì.
b) Tính đạo hàm của hàm số trên tại điểm $x_0 = 1$.

Lời giải

- a) Ta có: $f'(x) = (x^{10})' = 10x^9$.
b) Đạo hàm của hàm số tại điểm $x_0 = 1$ là: $f'(1) = 10 \cdot 1^9 = 10$.

1. Cho hàm số $y = x^{22}$.

- a) Tính đạo hàm của hàm số trên tại điểm x bất kì.
b) Tính đạo hàm của hàm số trên tại điểm $x_0 = -1$.

Lời giải

- a) Ta có: $y' = 22x^{21}$
b) Đạo hàm của hàm số tại điểm $x_0 = -1$ là: $f'(-1) = 22 \cdot (-1)^{21} = -22$

2. Đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{x}$



Tính đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{x}$ tại điểm $x_0 = 1$ bằng định nghĩa.

Lời giải

- b) Với Δx là số gia của đối số $x_0 = 1$.
Khi đó hàm số sẽ gia tương ứng:

$$\Delta y = f(1 + \Delta x) - f(1) = \sqrt{1 + \Delta x} - \sqrt{1}$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } f'(1) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \Delta x} - \sqrt{1}}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1 + \Delta x - 1}{\Delta x (\sqrt{1 + \Delta x} + \sqrt{1})} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x (\sqrt{1 + \Delta x} + \sqrt{1})} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1 + \Delta x} + \sqrt{1}} = \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{1}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Hàm số $y = \sqrt{x}$ có đạo hàm tại mọi $x \in \mathbb{R}, x > 0$ và $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Ví dụ 2. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{x}$ tại điểm $x_0 = 4$

Lời giải

Ta có: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ với $x > 0$.

Vậy đạo hàm của hàm số trên tại điểm $x_0 = 4$ là: $f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$.

2. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{x}$ tại điểm $x_0 = 9$.

Lời giải

Ta có: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ với $x > 0$.

Vậy đạo hàm của hàm số trên tại điểm $x_0 = 9$ là: $f'(9) = \frac{1}{2\sqrt{9}} = \frac{1}{6}$.

3. Đạo hàm của hàm số lượng giác

Sử dụng kết quả $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, tính đạo hàm của hàm số $y = \sin x$ tại điểm x bất kì bằng định nghĩa.

Lời giải

Giả sử Δx là số gia của đối số x_0 .

Ta có: $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0 = 2 \cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right) \sin \frac{\Delta x}{2}$;

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right) \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$$

$$\text{Do đó } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right) \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}.$$

$$\text{Vì } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = 1 \text{ nên } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x_0.$$

Vậy $f'(x_0) = \cos x_0$.

Hàm số $y = \sin x$ có đạo hàm tại mọi $x \in \mathbb{R}$ và $(\sin x)' = \cos x$.

Ví dụ 3. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \sin x$ tại điểm $x_0 = \frac{\pi}{3}$.

Lời giải

Ta có: $f'(x) = \cos x$.

Đạo hàm của hàm số trên tại điểm $x_0 = \frac{\pi}{3}$ là:

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$$

3. Tính đạo hàm của hàm $f(x) = \sin x$ tại điểm $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

Lời giải

Ta có: $f'(x) = \cos x$.

Đạo hàm của hàm số trên tại điểm $x_0 = \frac{\pi}{2}$ là:

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos \frac{\pi}{2} = 0.$$



Bằng định nghĩa, tính đạo hàm của hàm số $y = \cos x$ tại điểm x bất kì.

Lời giải

Giả sử Δx là số gia của đối số x .

$$\text{Ta có: } \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \cos\left(x + \Delta x\right) - \cos x = -2\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \sin \frac{\Delta x}{2}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-2\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \sin \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = -\frac{\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} -\frac{\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = -\sin x$$

Vậy $f'(x) = -\sin x$.

Hàm số $y = \cos x$ có đạo hàm tại mọi $x \in \mathbb{R}$ và $(\cos x)' = -\sin x$.

Ví dụ 4. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \cos x$ tại điểm $x_0 = \frac{\pi}{6}$.

Lời giải

Ta có: $f'(x) = -\sin x$.

Đạo hàm của hàm số trên tại điểm $x_0 = \frac{\pi}{6}$ là:

$$f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

4. Một vật dao động theo phương trình $f(x) = \cos x$, trong đó x là thời gian tính theo giây. Tính vận tốc tức thời của vật tại thời điểm $x_0 = 2(s)$

Lời giải

Để tính vận tốc của vật dao động tại một thời điểm xác định, ta cần lấy đạo hàm của hàm $f(x)$ theo x tại thời điểm đó

Có $f'(x) = -\sin x$

Đạo hàm của hàm số trên tại điểm $x_0 = 2(s)$ là:

$\Rightarrow f'(2) = -\sin(2)$



Bằng định nghĩa, tính đạo hàm của hàm số $y = \tan x$ tại điểm x bất kì, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$

Lời giải

Giả sử Δx là số gia của đối số x_0 .

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \tan(x_0 + \Delta x) - \tan x_0$$

Ta có:
$$= \frac{\sin(x_0 + \Delta x - x_0)}{\cos(x_0 + \Delta x) \cdot \cos x_0} = \frac{\sin \Delta x}{\cos(x_0 + \Delta x) \cdot \cos x_0};$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin \Delta x}{\cos(x_0 + \Delta x) \cdot \cos x_0 \cdot \Delta x}$$

Do đó
$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta x}{\cos(x_0 + \Delta x) \cdot \cos x_0 \cdot \Delta x}.$$

Vì $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} = 1$ nên
$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos(x_0 + \Delta x) \cdot \cos x_0} = \frac{1}{\cos^2 x_0}.$$

Vậy
$$f'(x_0) = \frac{1}{\cos^2 x_0}.$$

Hàm số $y = \tan x$ có đạo hàm tại mọi $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ và $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$

Ví dụ 5. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \tan x$ tại điểm $x_0 = \frac{\pi}{4}.$

Lời giải

Ta có:
$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \left(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right).$$

Đạo hàm của hàm số trên tại điểm $x_0 = \frac{\pi}{4}$ là:

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right)} = 2$$

5. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \tan x$ tại điểm $x_0 = -\frac{\pi}{6}$.

Lời giải

Ta có: $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \left(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right)$.

Đạo hàm của hàm số trên tại điểm $x_0 = -\frac{\pi}{6}$ là:

$$f'\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\cos^2\left(-\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{4}{3}$$



Bằng định nghĩa, tính đạo hàm của hàm số $y = \cot x$ tại điểm x bất kì, $x \neq k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Lời giải

Giả sử Δx là số gia của đối số x_0 .

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \cot(x_0 + \Delta x) - \cot x_0$$

$$\text{Ta có: } = -\frac{\sin(x_0 + \Delta x - x_0)}{\sin(x_0 + \Delta x) \cdot \sin x_0} = -\frac{\sin \Delta x}{\sin(x_0 + \Delta x) \cdot \sin x_0};$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{\sin \Delta x}{\sin(x_0 + \Delta x) \cdot \sin x_0 \cdot \Delta x}$$

$$\text{Do đó } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} -\frac{\sin \Delta x}{\sin(x_0 + \Delta x) \cdot \sin x_0 \cdot \Delta x}.$$

$$\text{Vì } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} = 1 \text{ nên } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-1}{\sin(x_0 + \Delta x) \cdot \sin x_0} = \frac{-1}{\sin^2 x_0}.$$

$$\text{Vậy } f'(x_0) = \frac{-1}{\sin^2 x_0}.$$

Hàm số $y = \cot x$ có đạo hàm tại mọi $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$ và $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

Ví dụ 6. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \cot x$ tại điểm $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

Lời giải

Ta có: $f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x} (x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z})$.

Đạo hàm của hàm số trên tại điểm $x_0 = \frac{\pi}{2}$ là: $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right)} = -1$.

6. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \cot x$ tại điểm $x_0 = -\frac{\pi}{3}$.

Lời giải

Ta có: $f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x} (x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z})$.

Đạo hàm của hàm số trên tại điểm $x_0 = -\frac{\pi}{3}$ là: $f'\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{\sin^2\left(-\frac{\pi}{3}\right)} = -\frac{4}{3}$.

4. Đạo hàm của hàm số mũ



Sử dụng kết quả $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$, tính đạo hàm của hàm số $y = e^x$ tại điểm x bất kì bằng định nghĩa.

Lời giải

Giả sử Δx là số gia của đối số x .

Ta có: $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = (e^{x+\Delta x}) - e^x = e^x (e^{\Delta x} - 1)$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{e^x (e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x}$$

$$\text{Do } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^x (e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = e^x$$

Vậy $f'(x) = e^x$.

Hàm số $y = e^x$ có đạo hàm tại mọi $x \in \mathbb{R}$ và $(e^x)' = e^x$.

Một cách tổng quát, ta có định lí sau:

Hàm số $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$) có đạo hàm tại mọi $x \in \mathbb{R}$ và $(a^x)' = a^x \ln a$.

Ví dụ 7. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = 2^x$ tại điểm $x_0 = 1$.

Lời giải

Ta có: $f'(x) = 2^x \ln 2$.

Đạo hàm của hàm số trên tại điểm $x_0 = 1$ là: $f'(1) = 2^1 \ln 2 = 2 \ln 2$.

7. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = 10^x$ tại điểm $x_0 = -1$.

Lời giải

Ta có: $f'(x) = 10^x \ln 10$.

Đạo hàm của hàm số trên tại điểm $x_0 = -1$ là: $f'(-1) = 10^{-1} \ln 10 = \frac{\ln 10}{10}$.

5. Đạo hàm của hàm số lôgarit



Sử dụng kết quả $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$, tính đạo hàm của hàm số $y = \ln x$ tại điểm x dương bất kì bằng định nghĩa.

Lời giải

Giả sử Δx là số gia của đối số x .

Ta có: $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \ln(x + \Delta x) - \ln(x)$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\ln(x + \Delta x) - \ln(x)}{\Delta x} = \frac{\ln\left(\frac{x + \Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \frac{\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x} \cdot x}$$

$$\text{Do } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}} = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x} \cdot x} = \frac{1}{x}$$

Hàm số $y = \ln x$ có đạo hàm tại mọi x dương và $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

Một cách tổng quát, ta có định lý sau:

Hàm số $y = \log_a x (a > 0, a \neq 1)$ có đạo hàm tại mọi x dương và $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$.

Ví dụ 8. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \ln x$ tại điểm $x_0 = 1$.

Lời giải

Ta có: $f'(x) = \frac{1}{x} (x > 0)$.

Đạo hàm của hàm số trên tại điểm $x_0 = 1$ là: $f'(1) = \frac{1}{1} = 1$.

8. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \log x$ tại điểm $x_0 = \frac{1}{2}$.

Lời giải

Ta có: $f'(x) = \frac{1}{x \ln 10} (x > 0)$.

Đạo hàm của hàm số trên tại điểm $x_0 = \frac{1}{2}$ là: $f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\frac{1}{2} \cdot \ln 10} = \frac{2}{\ln 10}$.

II. ĐẠO HÀM CỦA TỔNG, HIỆU, TÍCH, THƯƠNG VÀ ĐẠO HÀM CỦA HÀM HỢP

1. Đạo hàm của tổng, hiệu, tích, thương



Cho hai hàm số $f(x), g(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$, cùng có đạo hàm tại điểm $x_0 \in (a; b)$.

a) Xét hàm số $h(x) = f(x) + g(x), x \in (a; b)$. So sánh:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{h(x_0 + \Delta x) - h(x_0)}{\Delta x} \quad \text{và} \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x}$$

b) Nêu nhận xét về $h'(x_0)$ và $f'(x_0) + g'(x_0)$.

Lời giải

a)

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{h(x_0 + \Delta x) - h(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x_0 + \Delta x) + g(x_0 + \Delta x) - (f(x_0) + g(x_0))}{\Delta x} \right) \quad (1)$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} + \frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x} \right)$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) + g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x} \right)$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x_0 + \Delta x) + g(x_0 + \Delta x) - (f(x_0) + g(x_0))}{\Delta x} \right) \quad (2)$$

$$(1)(2) \Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{h(x_0 + \Delta x) - h(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x}$$

b) Nhận xét về $h'(x_0)$ và $f'(x_0) + g'(x_0)$: $h'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

Nhận xét: Ta có: $h'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$, tức là đạo hàm của tổng thì bằng tổng các đạo hàm.

Tương tự, ta cũng có các quy tắc tính đạo hàm của hiệu, tích, thương.

Cụ thể, ta có định lý sau:

Giả sử $f = f(x)$, $g = g(x)$ là các hàm số có đạo hàm tại điểm x thuộc khoảng xác định. Ta có:

$$(f + g)' = f' + g';$$

$$(f - g)' = f' - g';$$

$$(fg)' = f'g + fg';$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} (g = g(x) \neq 0).$$

Hệ quả: Cho $f = f(x)$ là hàm số có đạo hàm tại điểm x thuộc khoảng xác định.

Nếu c là một hằng số thì $(cf)' = cf'$.

$$\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2} (f = f(x) \neq 0).$$

Ví dụ 9. Tính đạo hàm của mỗi hàm số sau:

a) $f(x) = x^3 + x$.

b) $g(x) = x^4 - x^2$.

Lời giải

a) $f'(x) = (x^3)' + (x)' = 3x^2 + 1$.

b) $g'(x) = (x^4)' - (x^2)' = 4x^3 - 2x$.

9. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = x\sqrt{x}$ tại điểm x dương bất kì.

Lời giải

$$f'(x) = x' \sqrt{x} + x (\sqrt{x})' = \sqrt{x} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Ví dụ 10. Tính đạo hàm của hàm số: $y = \frac{2x+1}{x-1}$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \left(\frac{2x+1}{x-1}\right)' = \frac{(2x+1)'(x-1) - (2x+1)(x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{2(x-1) - (2x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-3}{(x-1)^2}.$$

10. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \tan x + \cot x$ tại điểm $x_0 = \frac{\pi}{3}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\tan x)' + (\cot x)' \\ &= \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x} \\ \Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right)} - \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

2. Đạo hàm của hàm hợp

Cho hàm số $y = f(u) = \sin u; u = g(x) = x^2$.

- Bằng cách thay u bởi x^2 trong biểu thức $\sin u$, hãy biểu thị giá trị của y theo biến số x .
- Xác định hàm số $y = f(g(x))$.

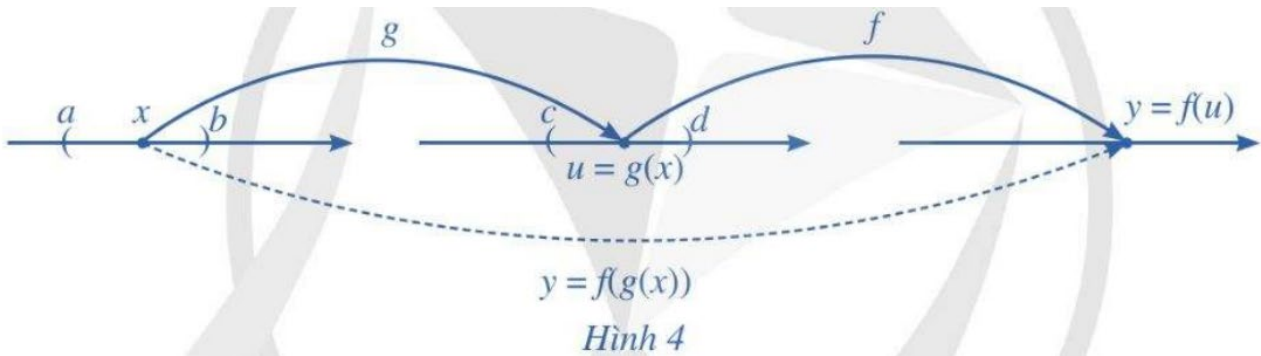
Lời giải

- Thay u bởi x^2 trong biểu thức $\sin u$, giá trị của y theo biến số x là:

$$y = f(x^2) = \sin x^2$$

- $y = f(g(x)) = f(x^2) = \sin(x^2)$

Giả sử hàm số $u = g(x)$ xác định trên $(a; b)$ và lấy giá trị trên $(c; d)$; $y = f(u)$ là hàm số của u , xác định trên $(c; d)$ và lấy giá trị trên $\mathbb{R}$. Khi đó, ta có thể lập được một hàm số mới xác định trên $(a; b)$ và lấy giá trị trên $\mathbb{R}$ theo quy tắc như Hình 4.



Hàm số $y = f(g(x))$ được gọi là hàm hợp của hai hàm số $y = f(u), u = g(x)$.

Ví dụ 11. Cho hàm số $y = f(u) = \sqrt{u}$ và $u = g(x) = x - 2$. Tìm hàm hợp $y = f(g(x))$ và tập xác định của nó.

Lời giải

Ta có: $y = f(g(x)) = f(x - 2) = \sqrt{x - 2}$.

Hàm số trên xác định khi và chỉ khi $x - 2 \geq 0$ hay $x \geq 2$. Tập xác định của hàm số đó là $[2; +\infty)$

11. Hàm số $y = \log_2(3x+1)$ là hàm hợp của hai hàm số nào?

Lời giải

Hàm số $y = \log_2(3x+1)$ là hàm hợp của hai hàm số $y = \log_2(u), u = 3x+1$

Ví dụ 12. Mỗi hàm số sau đây là hàm hợp của hai hàm số nào?

- a) $y = \sin(2x+3)$;
b) $y = 2 \sin x + 3$.

Lời giải

a) Đặt $u = 2x+3$, ta có: $y = \sin u$.

Vậy $y = \sin(2x+3)$ là hàm hợp của hai hàm số $y = \sin u, u = 2x+3$.

b) Đặt $u = \sin x$, ta có: $y = 2u + 3$. Vậy $y = 2 \sin x + 3$ là hàm hợp của hai hàm số $y = 2u + 3, u = \sin x$.

Cho hàm số $u = g(x)$ có đạo hàm tại x_0 và hàm số $y = f(u)$ có đạo hàm tại $u_0 = g(x_0)$. Xét hàm hợp $y = f(g(x))$.

Ta có quy tắc tính đạo hàm của hàm hợp như sau:

Nếu hàm số $u = g(x)$ có đạo hàm tại x là u'_x và hàm số $y = f(u)$ có đạo hàm tại u là y'_u thì hàm hợp $y = f(g(x))$ có đạo hàm tại x là $y'_x = y'_u \cdot u'_x$.

Nhận xét: Bảng đạo hàm của một số hàm số sơ cấp cơ bản và hàm hợp:

Đạo hàm của hàm số sơ cấp cơ bản thường gặp	Đạo hàm của hàm hợp (ở đây $u = u(x)$)
$(x^n)' = n.x^{n-1}$	$(u^n)' = n.x^{n-1}.u'$
$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = u' \cdot \cos u$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -u' \cdot \sin u$
$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$
$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(\cot u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$
$(e^x)' = e^x$	$(e^u)' = u' \cdot e^u$

$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$	$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$

Ví dụ 13. Tìm đạo hàm của mỗi hàm số sau:

a) $y = (3 - 2x)^4$

b) $y = \cos(4x + 5)$.

Lời giải

a) Đặt $u = 3 - 2x$, ta có: $y = u^4$. Khi đó: $y'_u = 4u^3; u'_x = -2$.

Theo công thức tính đạo hàm của hàm hợp, ta có:

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x = 4u^3 \cdot (-2) = -8u^3 = -8(3 - 2x)^3.$$

b) Đặt $u = 4x + 5$, ta có $y = \cos u$. Khi đó: $y'_u = -\sin u; u'_x = 4$.

Theo công thức tính đạo hàm của hàm hợp, ta có:

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x = -\sin u \cdot 4 = -4 \sin u = -4 \sin(4x + 5).$$

12. Tìm đạo hàm của mỗi hàm số sau:

a) $y = e^{3x+1}$

b) $y = \log_3(2x - 3)$

Lời giải

a) $y' = (e^{3x+1})' = (3x+1)' \cdot (e^{3x+1})$
 $= 3e^{3x+1}$

b) $y' = (\log_3(2x-3))' = \frac{(2x-3)'}{(2x-3)\ln 3} = \frac{2}{(2x-3)\ln 3}$

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1. Đạo hàm của hàm đa thức

1. Phương pháp

Chủ yếu ta dùng các công thức sau

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

$$(c)' = 0; \quad (x)' = 1.$$

$$(u+v)' = u' + v'$$

$$(u-v)' = u' - v'$$

$$(uv)' = u'v + v'u$$

2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

Ví dụ 1: Cho hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 - 5$. Tìm x để $y' = 0$

Lời giải

$$y = 2x^3 - 3x^2 - 5$$

$$\Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow x(x-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}.$$

Ví dụ 2: Cho hàm số $y = 3x^3 + x^2 + 1$. Giải bất phương trình $y' \leq 0$.

Lời giải

$$y = 3x^3 + x^2 + 1 \Rightarrow y' = 9x^2 + 2x$$

$$y' \leq 0 \Leftrightarrow 9x^2 + 2x \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{9} \leq x \leq 0.$$

Ví dụ 3: Cho hai hàm số $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4x$; $g(x) = 9x - \frac{3}{2}x^2$. Tìm x để $f'(x) = g'(x)$

Lời giải

$$f'(x) = x + 4; g'(x) = 9 - 3x.$$

$$\text{Do đó } f'(x) = g'(x) \Leftrightarrow 4x = 5 \Leftrightarrow x = \frac{5}{4}.$$

Ví dụ 4: Cho hàm số $f(x) = mx - \frac{1}{3}x^3$. Tìm m để $x = -1$ là nghiệm của bất phương trình $f'(x) < 2$

Lời giải

Ta có: $f'(x) = m - x^2$. Giá trị $x = -1$ là nghiệm của bất phương trình $f'(x) < 2$ khi và chỉ khi:
 $m - 1 < 2 \Leftrightarrow m < 3$.

Dạng 2. Đạo hàm của hàm phân thức

1. Phương pháp

Ta thường sử dụng các công thức sau:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2} \quad (v \neq 0)$$

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}, \quad (u \neq 0).$$

2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

Ví dụ 1: $y = \frac{x(1-3x)}{x+1}$

Lời giải

$$y = \frac{x(1-3x)}{x+1} \Rightarrow y' = \frac{(1-6x)(x+1) - 1(x-3x^2)}{(x+1)^2} = \frac{-3x^2 - 6x + 1}{(x+1)^2}.$$

Ví dụ 2: Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{2x+3}{2x-1}$

Lời giải

Dùng công thức nhanh: $y = \frac{ax+b}{cx+d} \Rightarrow y' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$.

Do đó, với $y = \frac{2x+3}{2x-1}$ thì $y' = -\frac{8}{(2x-1)^2}$.

Ví dụ 3: Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{1}{x^2+1}$

Lời giải

$$y' = \frac{-(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}.$$

Ví dụ 4: Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{x^2+1}{x^2-1}$?

Lời giải

$$y = \frac{x^2+1}{x^2-1} = \frac{x^2-1+2}{x^2-1} = 1 + \frac{2}{x^2-1}$$

$$\text{Do đó } y' = \frac{-2(x^2-1)'}{(x^2-1)^2} = \frac{-4x}{(x^2-1)^2}.$$

Ví dụ 5: Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{1}{x^2+x-1}$

Lời giải

$$y' = \frac{-(x^2+x-1)'}{(x^2+x-1)^2} = \frac{-2x-1}{(x^2+x-1)^2}.$$

Ví dụ 6: Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{x^2+x+3}{x^2+x-1}$

Lời giải

$$y = \frac{x^2+x+3}{x^2+x-1} = \frac{x^2+x-1+4}{x^2+x-1} = 1 + \frac{4}{x^2+x-1}.$$

$$\text{Do đó: } y' = \frac{-4(x^2+x-1)'}{(x^2+x-1)^2} = \frac{-4(2x+1)}{(x^2+x-1)^2}.$$

Dạng 3. Đạo hàm của hàm chứa căn

1. Phương pháp

Ta thường dùng các công thức sau

Hàm số $y = \sqrt{x}$ có đạo hàm tại mọi x dương và $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Ngoài ra, đối với hàm hợp $(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}}$

2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

Ví dụ 1: Cho hàm số $y = 4x - \sqrt{x}$. Tìm x để $y' = 0$?

Lời giải

$$y = 4x - \sqrt{x} \Rightarrow y' = 4 - \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 4 - \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow x = \frac{1}{64}.$$

Ví dụ 2: Tính đạo hàm của hàm số $y = x^3 - \sqrt{x} + 1$

Lời giải

$$y' = 3x^2 - \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Ví dụ 3: Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3\sqrt{2}x^2 + 18x - 7$. Tìm x để $f'(x) \leq 0$

Lời giải

$$f'(x) = x^2 - 6\sqrt{2}x + 18 = (x - 3\sqrt{2})^2.$$

$$f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow (x - 3\sqrt{2})^2 \leq 0 \Leftrightarrow x = 3\sqrt{2}.$$

Ví dụ 4: Cho hàm số $f(x) = \sqrt{1+x}$. Tính $f(3) + (x-3).f'(3)$?

Lời giải

$$\text{Ta có: } f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \Rightarrow f'(3) = \frac{1}{4}.$$

$$\text{Lại có: } f(3) = 2. \text{ Vậy } f(3) + (x-3).f'(3) = 2 + (x-3).\frac{1}{4} = \frac{x+5}{4}.$$

Ví dụ 5: Tính đạo hàm của hàm số: $y = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$?

Lời giải

$$\text{Ta có: } y' = \frac{-x}{\sqrt{x^2+1}^3} = \frac{-x}{\sqrt{(x^2+1)^3}}.$$

Ví dụ 6: Tính đạo hàm của hàm số: $y = x\sqrt{x^2+1}$?

Lời giải

$$\text{Ta có: } y' = \sqrt{x^2+1} + x.\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{2x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Ví dụ 7: Tính đạo hàm của hàm số: $y = \frac{1+x}{\sqrt{1-x}}$?

Lời giải

Ta có: $y' = \frac{1}{1-x} \left(\sqrt{1-x} + \frac{1+x}{2\sqrt{1-x}} \right) = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{2-2x+1+x}{2\sqrt{1-x}} = \frac{3-x}{2\sqrt{(1-x)^3}}$.

Dạng 4. Tính đạo hàm của các hàm số lượng giác

1. Phương pháp

- Áp dụng quy tắc tính đạo hàm.
- Áp dụng các đạo hàm lượng giác cơ bản.

2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

Ví dụ 1: Tính đạo hàm của hàm số $y = \tan 7x$

Hướng dẫn giải

$$y' = \frac{(7x)'}{\cos^2 7x} = \frac{7}{\cos^2 7x}.$$

Ví dụ 2: Tính đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{\cos x}$

Hướng dẫn giải

$$y' = \frac{(\cos x)'}{2\sqrt{\cos x}} = \frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}.$$

Ví dụ 3: Tính đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{\cos 2x}$

Hướng dẫn giải

$$y' = \frac{(\cos 2x)'}{2\sqrt{\cos 2x}} = \frac{-2\sin 2x}{2\sqrt{\cos 2x}} = \frac{-\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}}.$$

Ví dụ 4: Tính đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{\sin x}$

Hướng dẫn giải

$$y = \sqrt{\sin x} \Rightarrow y' = \frac{(\sin x)'}{2\sqrt{\sin x}} = \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}.$$

Ví dụ 5: Tính đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{\sin 3x}$

Hướng dẫn giải

$$y' = \frac{(\sin 3x)'}{2\sqrt{\sin 3x}} = \frac{3\cos 3x}{2\sqrt{\sin 3x}}.$$

Ví dụ 6: Tính đạo hàm của hàm số $y = \tan^2 5x$

Hướng dẫn giải

$$y' = 2 \tan 5x \cdot \frac{(5x)'}{\cos^2 5x} = \frac{10 \sin 5x}{\cos^3 5x}.$$

Ví dụ 7: Tính đạo hàm của hàm số $y = \cos\left(\frac{\pi}{3} - 3x\right)$

Hướng dẫn giải

$$y = \cos\left(\frac{\pi}{3} - 3x\right) \Rightarrow y' = \left(\frac{\pi}{3} - 3x\right)' \cdot \left(-\sin\left(\frac{\pi}{3} - 3x\right)\right) = 3 \sin\left(\frac{\pi}{3} - 3x\right).$$

Ví dụ 8: Tính đạo hàm của hàm số $y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$

Hướng dẫn giải

$$y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = \cos 2x \Rightarrow y' = -2 \sin 2x.$$

Ví dụ 9: Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = 2 \sin 2x + \cos 2x$

Hướng dẫn giải

$$y' = 2(\sin 2x)' + (\cos 2x)' = 4 \cos 2x - 2 \sin 2x.$$

Ví dụ 10: Cho $f(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$. Tính $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$

Hướng dẫn giải

Cách 1: Giải bằng tự luận

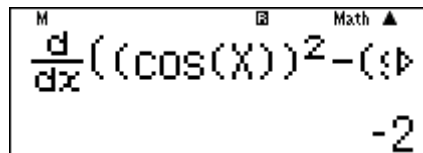
Ta có $f(x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$. Do đó $f'(x) = -2 \sin 2x$.

$$\text{Vậy } f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2 \sin \frac{\pi}{2} = -2.$$

Cách 2: Giải nhanh bằng máy tính

Chuyển sang chế độ rad bằng cách ấn phím **SHIFT** **MODE** 4

Nhập vào màn hình $\frac{d}{dx}((\cos(X))^2 - (\sin(X))^2)$ rồi ấn phím **=** ta được kết quả



The calculator screen displays the expression $\frac{d}{dx}((\cos(X))^2 - (\sin(X))^2)$ and the result -2 .

Ví dụ 11: Tính đạo hàm của hàm số $y = \cos^3 4x$

Hướng dẫn giải

$$y = \cos^3 4x \Rightarrow y' = 3 \cos^2 4x \cdot (\cos 4x)' = 3 \cos^2 4x \cdot (-4 \sin 4x) = -12 \cos^2 4x \cdot \sin 4x.$$

Ví dụ 12: Với $y = \cos\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)$ thì $\frac{y'\left(\frac{\pi}{8}\right)}{y'\left(\frac{\pi}{3}\right)}$ có giá trị bằng bao nhiêu?

Hướng dẫn giải

Cách 1: Giải bằng tự luận

$$y = \cos\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) \Rightarrow y' = 2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)$$

$$y'\left(\frac{\pi}{8}\right) = 2 \left(\sin \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = 0; y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{2\pi}{3}\right) \neq 0$$

$$\Rightarrow \frac{y'\left(\frac{\pi}{8}\right)}{y'\left(\frac{\pi}{3}\right)} = 0.$$

Cách 2: Giải nhanh bằng máy tính

Chuyển sang chế độ rad bằng cách ấn phím **SHIFT** **MODE** 4

Nhập vào màn hình $\frac{d}{dx} \left(\cos \left(\frac{\pi}{4} - 2x \right) \right) \Big|_{x=\frac{\pi}{8}}$ rồi ấn phím $\boxed{=}$ ta được kết quả

Ví dụ 13: Cho hàm số $f(x) = 2 \sin \left(\frac{5\pi}{6} + x \right)$. Tính $f' \left(\frac{\pi}{6} \right)$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } f'(x) = 2 \cos \left(\frac{5\pi}{6} + x \right) \Rightarrow f' \left(\frac{\pi}{6} \right) = -2$$

Ví dụ 14: Cho hàm số $f(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$. Tính $f' \left(\frac{\pi}{4} \right)$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } f(x) = \cos 2x \Rightarrow f'(x) = -2 \sin 2x. \text{ Do đó: } f' \left(\frac{\pi}{4} \right) = -2.$$

Ví dụ 15: Cho hàm số $y = f(x) = \sqrt{\tan x + \cot x}$. Tính $f' \left(\frac{\pi}{4} \right)$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } f'(x) = \frac{(\tan x + \cot x)'}{2\sqrt{\tan x + \cot x}} = \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x}}{2\sqrt{\tan x + \cot x}} \Rightarrow f' \left(\frac{\pi}{4} \right) = 0.$$

Dạng 5: Giải phương trình lượng giác $f'(x) = 0$

1. Phương pháp

- ✓ Tính đạo hàm $f'(x)$
- ✓ Để giải phương trình $f'(x) = 0$, ta áp dụng cách giải các phương trình lượng giác cơ bản và một số phương trình lượng giác thường gặp.

2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

Ví dụ 1: Cho hàm số $y = \sin \left(\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}x \right)$. Giải phương trình $y' = 0$.

Hướng dẫn giải

$$y = \sin \left(\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}x \right) \Rightarrow y' = -\frac{1}{2} \cos \left(\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}x \right)$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \cos \left(\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}x \right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} - 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Ví dụ 2: Cho hàm số $y = \cos\left(\frac{2\pi}{3} + 2x\right)$. Giải phương trình $y' = 0$.

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} y &= \cos\left(\frac{2\pi}{3} + 2x\right) \Rightarrow y' = -2\sin\left(\frac{2\pi}{3} + 2x\right) \\ y' = 0 &\Leftrightarrow \sin\left(\frac{2\pi}{3} + 2x\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{2\pi}{3} + 2x = k\pi \\ &\Leftrightarrow 2x = -\frac{2\pi}{3} + k\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Ví dụ 3: Cho hàm số $y = \cot^2 \frac{x}{4}$, Giải phương trình $y' = 0$.

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} y &= \cot^2 \frac{x}{4} \Rightarrow y' = 2 \cot \frac{x}{4} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot \frac{1}{\sin^2 \frac{x}{4}} = -\frac{1}{2} \frac{\cos \frac{x}{4}}{\sin^3 \frac{x}{4}} \\ y' = 0 &\Leftrightarrow \cos \frac{x}{4} = 0 \Leftrightarrow x = 2\pi + k4\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Ví dụ 4: Giải phương trình: $f'(x) = 0$, biết $f(x) = \cos x - \sin x + x$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $f'(x) = -\sin x - \cos x + 1$.

$$\text{Vậy: } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sin x + \cos x = 1 \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases}$$

Ví dụ 6: Cho hàm số $f(x) = \frac{\sin 3x}{3} + \cos x - \sqrt{3}\left(\sin x + \frac{\cos 3x}{3}\right)$. Tìm tập nghiệm của $f'(x) = 0$

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } f(x) = \frac{\sin 3x}{3} + \cos x - \sqrt{3}\left(\sin x + \frac{\cos 3x}{3}\right)$$

$$f'(x) = \cos 3x - \sin x - \sqrt{3}(\cos x - \sin 3x)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos 3x - \sin x - \sqrt{3}(\cos x - \sin 3x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 3x + \sqrt{3} \sin 3x = \sin x + \sqrt{3} \cos x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \cos 3x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 3x = \frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x$$

$$\Leftrightarrow \cos \frac{\pi}{3} \cos 3x + \sin \frac{\pi}{3} \sin 3x = \cos \frac{\pi}{3} \sin x + \sin \frac{\pi}{3} \cos x$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) &= \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \\ \Leftrightarrow \cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} - x + k2\pi \\ 3x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{6} + x + k2\pi \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{12} + k\pi \end{cases}; k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Dạng 6. Tính đạo hàm

1. Phương pháp:

$$\begin{aligned} (e^x)' &= e^x & (a^x)' &= a^x \cdot \ln a \\ (e^u)' &= u'e^u & (a^u)' &= u'a^u \cdot \ln a \end{aligned}$$

Với mọi $0 < a \neq 1$

$$\begin{aligned} (\log_a x)' &= \frac{1}{x \cdot \ln a} & (\ln x)' &= \frac{1}{x} \\ (\log_a u)' &= \frac{u'}{u \cdot \ln a} & (\ln u)' &= \frac{1}{u} \cdot u' \end{aligned}$$

Ngoài ra ta có thể sử dụng MTCT để kiểm tra và thử đáp án

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Tính đạo hàm của hàm số $y = \log_3(2x-2)$.

Lời giải

$$\text{Ta có } y' = \frac{(2x-2)'}{(2x-2)\ln 3} = \frac{1}{(x-1)\ln 3}.$$

Ví dụ 2: Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{x+1}{2^x}$

Lời giải

$$y' = \frac{2^x - (x+1)2^x \ln 2}{4^x} = \frac{1 - (x+1)\ln 2}{2^x}$$

Ví dụ 3: Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{x+2}{x-1} \ln(x+2)$

Lời giải

$$y' = \frac{-3}{(x-1)^2} \ln(x+2) + \frac{x+2}{x-1} \cdot \frac{1}{x+2} = \frac{-3 \ln(x+2)}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-1}$$

Ví dụ 4: Cho hàm số $f(x) = x^2 e^{-x}$. Giải bất phương trình $f'(x) \geq 0$

Lời giải

$$f'(x) = \frac{2x - x^2}{e^x} \geq 0 \Leftrightarrow 2x - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 2$$

C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

Bài 1. Cho $u = u(x), v = v(x), w = w(x)$ là các hàm số có đạo hàm tại điểm x thuộc khoảng xác định. Phát biểu nào sau đây là đúng?

- a) $(u + v + w)' = u' + v' + w'$
- b) $(u + v - w)' = u' + v' - w'$;
- c) $(uv)' = u'v'$
- d) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'}{v'}$ với $v = v(x) \neq 0, v' = v'(x) \neq 0$.

Lời giải

- a) Đúng
- b) Đúng
- c) Sai: $\Rightarrow (uv)' = u'v + uv'$
- d) Sai: $\Rightarrow \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

Bài 2. Cho $u = u(x), v = v(x), w = w(x)$ là các hàm số có đạo hàm tại điểm x thuộc khoảng xác định. Chứng minh rằng $(u.v.w)' = u'.v.w + u.v'.w + u.v.w'$.

Lời giải

Đặt $u.v = a$

Có $(u.v)' = u'v + uv'$

$$\Rightarrow (u.v.w)' = (a.w)' = a'.w + a.w' = (u'v + uv')w + u.v.w' = u'.v.w + u.v'.w + u.v.w'$$

Bài 3. Tìm đạo hàm của mỗi hàm số sau:

- a) $y = 4x^3 - 3x^2 + 2x + 10$;
- b) $y = \frac{x+1}{x-1}$
- c) $y = -2x\sqrt{x}$
- d) $y = 3\sin x + 4\cos x - \tan x$
- e) $y = 4^x + 2e^x$
- g) $y = x \ln x$

Lời giải

a) $y = 4x^3 - 3x^2 + 2x + 10$
 $y' = 12x^2 - 6x + 2$

b) $y = \frac{x+1}{x-1}$
 $y' = (x+1) \cdot \frac{1}{x-1}$
 $y' = \frac{1}{x-1} + \frac{-x-1}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2}$

c) $y = -2x\sqrt{x}$

$$y' = -2\sqrt{x} + (-2x) \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$y' = -2\sqrt{x} - \frac{2x}{2\sqrt{x}} = -2\sqrt{x} - \sqrt{x} = -3\sqrt{x}$$

d) $y = 3\sin x + 4\cos x - \tan x$

$$y' = 3\cos x - 4\sin x - \frac{1}{\cos^2 x}$$

e) $y = 4^x + 2e^x$

$$y' = 4^x \ln 4 + 2e^x$$

g) $y = x \ln x$

$$y' = \ln x + 1$$

Bài 4. Cho hàm số $f(x) = 2^{3x+2}$.

a) Hàm số $f(x)$ là hàm hợp của các hàm số nào?

b) Tìm đạo hàm của $f(x)$.

Lời giải

a) Hàm số $f(x)$ là hàm hợp của hai hàm số $y = 2^u, u = 3x + 2$

b) $f'(x) = 3 \cdot 2^{3x+2} \cdot \ln 2$

Bài 5. Tìm đạo hàm của mỗi hàm số sau:

a) $y = \sin 3x + \sin^2 x$

b) $y = \log_2(2x+1) + 3^{-2x+1}$.

Lời giải

a) $\sin 3x + \sin^2 x$

$$y' = 3\cos 3x + \sin 2x$$

b) $\log_2(2x+1) + 3^{-2x+1}$

$$y' = \frac{2}{(2x+1)\ln 2} + (-2) \cdot 3^{-2x+1} \cdot \ln 3$$

Bài 6. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị mỗi hàm số sau:

a) $y = x^3 - 3x^2 + 4$ tại điểm có hoành độ $x_0 = 2$;

b) $y = \ln x$ tại điểm có hoành độ $x_0 = e$;

c) $y = e^x$ tại điểm có hoành độ $x_0 = 0$.

Lời giải

a)

$$y = x^3 - 3x^2 + 4$$

$$\Rightarrow f(2) = 0$$

$$y' = f'(x) = 3x^2 - 6x$$

$$\Rightarrow f'(2) = 0$$

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 4$ tại điểm có hoành độ $x_0 = 2$ là:

$$y = 0 \cdot (x - 2) + 0$$

b)

$$y = \ln x \Rightarrow f(e) = 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(e) = \frac{1}{e}$$

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \ln x$ tại điểm có hoành độ $x_0 = e$ là:

$$y = \frac{1}{e}(x - e) + 1 = \frac{x}{e}$$

c)

$$y = e^x = f'(x)$$

$$\Rightarrow f'(0) = f'(0) = e^0 = 1$$

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = e^x$ tại điểm có hoành độ $x_0 = 0$ là:

$$y = x + 1$$

Bài 7. Một viên đạn được bắn lên từ mặt đất theo phương thẳng đứng với tốc độ ban đầu $v_0 = 196 \text{ m/s}$ (bỏ qua sức cản của không khí). Tìm thời điểm tại đó tốc độ của viên đạn bằng 0. Khi đó viên đạn cách mặt đất bao nhiêu mét (lấy $g = 9,8 \text{ m/s}^2$)?

Lời giải

Ta lần lượt có:

- Phương trình của viên đạn đi theo phương thẳng đứng được cho bởi:

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 - v_0t \Leftrightarrow y = -4,9t^2 + 196t$$

- Vận tốc viên đạn tại thời điểm t là:

$$v = y' = -9,8t + 196$$

Từ đó, ta nhận thấy:

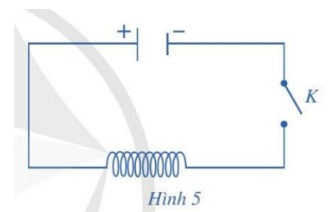
- Thời điểm tại đó tốc độ của viên đạn bằng 0 được cho bởi:

$$-9,8t + 196 = 0 \Leftrightarrow t = 20s$$

- Khi đó viên đạn cách mặt đất một khoảng cho bởi:

$$y = -4,9 \cdot 20^2 + 196 \cdot 20 = 1960m$$

Bài 8. Cho mạch điện như Hình 5. Lúc đầu tụ điện có điện tích Q_0 . Khi đóng khóa tụ điện phóng điện qua cuộn dây; điện tích q của tụ điện phụ thuộc vào thời gian t theo công thức $q(t) = Q_0 \sin \omega t$, trong đó ω là tốc độ góc. Biết rằng cường độ $I(t)$ của dòng điện tại thời điểm t được tính theo công thức $I(t) = q'(t)$. Cho biết $Q_0 = 10^{-8} \text{ (C)}$ và $\omega = 10^6 \pi \text{ (rad/s)}$. Tính cường độ của dòng điện tại thời điểm $t = 6 \text{ (s)}$ (tính chính xác đến 10^{-5} (mA)).



Lời giải

Cường độ của dòng điện tại t là :

$$I(t) = q'(t) = Q_0 \cdot \omega \cdot \cos \omega t$$

Khi $Q_0 = 10^{-8} (C)$ và $\omega = 10^6 \pi (\text{rad/s})$ thì cường độ của dòng điện tại thời điểm $t = 6(s)$ là :

$$\begin{aligned} I(6) &= q'(6) = 10^{-8} \cdot \pi \cdot \cos(10^6 \cdot \pi \cdot 6) = \frac{\pi}{10} (A) \\ &\approx 31,41593 (mA) \end{aligned}$$

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2\sqrt{2}x^2 + 8x - 1$, có đạo hàm là $f'(x)$. Tập hợp những giá trị của x để $f'(x) = 0$ là:

- A. $\{-2\sqrt{2}\}$. B. $\{2; \sqrt{2}\}$. C. $\{-4\sqrt{2}\}$. D. $\{2\sqrt{2}\}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $f'(x) = x^2 - 4\sqrt{2}x + 8$.

Phương trình $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4\sqrt{2}x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = 2\sqrt{2}$.

Câu 2: Cho hàm số $y = 3x^3 + x^2 + 1$, có đạo hàm là y' . Để $y' \leq 0$ thì x nhận các giá trị thuộc tập nào sau đây?

- A. $\left[-\frac{2}{9}; 0\right]$. B. $\left[-\frac{9}{2}; 0\right]$.
C. $\left(-\infty; -\frac{9}{2}\right] \cup [0; +\infty)$. D. $\left(-\infty; -\frac{2}{9}\right] \cup [0; +\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y' = 9x^2 + 2x$.

Do đó, $y' \leq 0 \Leftrightarrow y' = 9x^2 + 2x \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{9} \leq x \leq 0 \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{2}{9}; 0\right]$.

Câu 3: Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = -x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 2x + 1$ tại điểm $x = -1$.

- A. $f'(-1) = 4$. B. $f'(-1) = 14$. C. $f'(-1) = 15$. D. $f'(-1) = 24$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $f'(x) = -4x^3 + 12x^2 - 6x + 2$.

Suy ra $f'(-1) = -4(-1)^3 + 12(-1)^2 - 6(-1) + 2 = 24$.

Câu 4: Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - (2m+1)x^2 - mx - 4$, có đạo hàm là y' . Tìm tất cả các giá trị của m để $y' \geq 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$.

A. $m \in \left(-1; -\frac{1}{4}\right)$.

B. $m \in \left[-1; -\frac{1}{4}\right]$.

C. $m \in (-\infty; -1] \cup \left[-\frac{1}{4}; +\infty\right)$.

D. $m \in \left[-1; \frac{1}{4}\right]$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y' = x^2 - 2(2m+1)x - m$.

Khi đó, $y' \geq 0$ với $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x^2 - 2(2m+1)x - m \geq 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \Delta' = (2m+1)^2 + m \leq 0 \Leftrightarrow 4m^2 + 5m + 1 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq m \leq -\frac{1}{4}.$$

Câu 5: Cho hàm số $y = -\frac{1}{3}mx^3 + (m-1)x^2 - mx + 3$, có đạo hàm là y' . Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt là x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 6$.

A. $m = -1 + \sqrt{2}$; $m = -1 - \sqrt{2}$.

B. $m = -1 - \sqrt{2}$.

C. $m = 1 - \sqrt{2}$; $m = 1 + \sqrt{2}$.

D. $m = -1 + \sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y' = -mx^2 + 2(m-1)x - m$.

Phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow -mx^2 + 2(m-1)x - m = 0 \text{ có 2 nghiệm phân biệt}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' = (m-1)^2 - m^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m < \frac{1}{2} \end{cases}$$

Khi đó, gọi x_1, x_2 là hai nghiệm phân biệt của phương trình $\Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2(m-1)}{m} \\ x_1 x_2 = 1 \end{cases}$.

Ta có: $x_1^2 + x_2^2 = 6 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 6 \Leftrightarrow \left(\frac{2(m-1)}{m}\right)^2 - 2 = 6$

$$\Leftrightarrow m^2 + 2m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = -1 \pm \sqrt{2}.$$

So với điều kiện thì $m = -1 \pm \sqrt{2}$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 6: Biết hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a > 0$) có đạo hàm $f'(x) > 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.** $b^2 - 3ac > 0$. **B.** $b^2 - 3ac \geq 0$. **C.** $b^2 - 3ac < 0$. **D.** $b^2 - 3ac \leq 0$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$. Vì $a > 0$ và $f'(x) > 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$ nên $\Delta' < 0$ tức là $b^2 - 3ac < 0$.

Câu 7: Biết hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a < 0$) có đạo hàm $f'(x) < 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.** $b^2 - 3ac > 0$. **B.** $b^2 - 3ac \geq 0$. **C.** $b^2 - 3ac < 0$. **D.** $b^2 - 3ac \leq 0$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$. Vì $a < 0$ và $f'(x) < 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$ nên $\Delta' < 0$ tức là $b^2 - 3ac < 0$.

Câu 8: Tính đạo hàm của của hàm số $y = (x^3 - 2x^2)^2$.

- A.** $f'(x) = 6x^5 - 20x^4 + 16x^3$. **B.** $f'(x) = 6x^5 + 16x^3$.
C. $f'(x) = 6x^5 - 20x^4 + 4x^3$. **D.** $f'(x) = 6x^5 - 20x^4 - 16x^3$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y' = 2(x^3 - 2x^2)'(x^3 - 2x^2) = 2(3x^2 - 4x)(x^3 - 2x^2) = 6x^5 - 20x^4 + 16x^3$.

Câu 9: Cho hàm số $y = (2x^2 + 1)^3$, có đạo hàm là y' . Để $y' \geq 0$ thì x nhận các giá trị nào sau đây?

- A.** Không có giá trị nào của x .
B. $(-\infty; 0]$. **C.** $[0; +\infty)$. **D.** $\mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y' = 3(2x^2 + 1)'(2x^2 + 1)^2 = 3 \cdot 4x(2x^2 + 1)^2 = 12x(2x^2 + 1)^2$.

Do đó, $y' \geq 0 \Leftrightarrow 12x(2x^2 + 1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$.

Câu 10: Tính đạo hàm của hàm số $y = (1 - x^3)^5$.

- A.** $y' = 5x^2(1 - x^3)^4$. **B.** $y' = -15x^2(1 - x^3)^4$.
C. $y' = -3x^2(1 - x^3)^4$. **D.** $y' = -5x^2(1 - x^3)^4$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y' = 5(1-x^3)'(1-x^3)^4 = 5(-3x^2)(1-x^3)^4 = -15x^2(1-x^3)^4$.

Câu 11: Tính đạo hàm của hàm số $y = (x^3 - 2x^2)^{2016}$.

A. $y' = 2016(x^3 - 2x^2)^{2015}$.

B. $y' = 2016(x^3 - 2x^2)^{2015}(3x^2 - 4x)$.

C. $y' = 2016(x^3 - 2x^2)(3x^2 - 4x)$.

D. $y' = 2016(x^3 - 2x^2)(3x^2 - 2x)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y' = 2016(x^3 - 2x^2)'(x^3 - 2x^2)^{2015} = 2016(3x^2 - 4x)(x^3 - 2x^2)^{2015}$.

Câu 12: Tính đạo hàm của hàm số $y = (x^2 - 2)(2x - 1)$.

A. $y' = 4x$.

B. $y' = 3x^2 - 6x + 2$.

C. $y' = 2x^2 - 2x + 4$.

D. $y' = 6x^2 - 2x - 4$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y' = (x^2 - 2)'(2x - 1) + (x^2 - 2)(2x - 1)' = 2x(2x - 1) + 2(x^2 - 2) = 6x^2 - 2x - 4$

Câu 13: Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = x(x-1)(x-2)...(x-2018)$ tại điểm $x = 0$.

A. $f'(0) = 0$.

B. $f'(0) = -2018!$.

C. $f'(0) = 2018!$.

D. $f'(0) = 2018$.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $f(x) = f_0(x)f_1(x)f_2(x)...f_n(x)$ ($n \geq 1; n \in \mathbb{Z}$).

Bằng quy nạp, dễ dàng chứng minh được:

$$f'(x) = f_0'(x)f_1(x)...f_n(x) + f_0(x)f_1'(x)...f_n(x) + ... + f_0(x)f_1(x)...f_n'(x)$$

Áp dụng công thức trên cho hàm số $f(x) = x(x-1)(x-2)...(x-2018)$ và thay $x = 0$ với chú ý $f_0(0) = 0$ ta được:

$$f'(0) = (-1) \cdot (-2) \cdot ... \cdot (-2018) + 0 \cdot (-2) \cdot ... \cdot (-2018) + ... + 0 \cdot (-1) \cdot ... \cdot (-2017) = 2018!.$$

Câu 14: Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = x(x+1)(x+2)...(x+2018)$ tại điểm $x = -1004$.

A. $f'(-1004) = 0$.

B. $f'(-1004) = 1004!$.

C. $f'(-1004) = -1004!$.

D. $f'(-1004) = (1004!)^2$.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $f(x) = f_0(x)f_1(x)f_2(x)...f_n(x)$ ($n \geq 1; n \in \mathbb{Z}$).

Bằng quy nạp, dễ dàng chứng minh được:

$$f'(x) = f_0'(x)f_1(x)\dots f_n(x) + f_0(x)f_1'(x)\dots f_n(x) + \dots + f_0(x)f_1(x)\dots f_n'(x).$$

Áp dụng công thức trên cho hàm số $f(x) = x(x+1)(x+2)\dots(x+2018)$ và thay $x = -1004$ với chú ý $f_{1004}(-1004) = 0$ ta được

$$\begin{aligned} f'(-1004) &= [(-1004)(-1004+1)\dots(-1004+1003)] \cdot [(-1004+1005)\dots(-1004+2018)] \\ &= (-1) \cdot 1 \cdot (-2) \cdot 2 \cdot \dots \cdot (-1004) \cdot 1004 = (1004!)^2. \end{aligned}$$

Câu 15: Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \frac{2x}{x-1}$ tại điểm $x = -1$.

- A.** $f'(-1) = 1$. **B.** $f'(-1) = -\frac{1}{2}$. **C.** $f'(-1) = -2$. **D.** $f'(-1) = 0$.

Lời giải

Chọn B

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

$$\text{Ta có } f'(x) = \frac{-2}{(x-1)^2} \Rightarrow f'(-1) = -\frac{1}{2}$$

Câu 16: Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{x^2 + 2x - 3}{x + 2}$.

- A.** $y' = 1 + \frac{3}{(x+2)^2}$. **B.** $y' = \frac{x^2 + 6x + 7}{(x+2)^2}$. **C.** $y' = \frac{x^2 + 4x + 5}{(x+2)^2}$. **D.** $y' = \frac{x^2 + 8x + 1}{(x+2)^2}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } y = x - \frac{3}{x+2} \Rightarrow y' = 1 + \frac{3}{(x+2)^2}.$$

Câu 17: Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{x(1-3x)}{x+1}$.

- A.** $y' = \frac{-9x^2 - 4x + 1}{(x+1)^2}$. **B.** $y' = \frac{-3x^2 - 6x + 1}{(x+1)^2}$. **C.** $y' = 1 - 6x^2$. **D.** $y' = \frac{1 - 6x^2}{(x+1)^2}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } y = \frac{x(1-3x)}{x+1} = \frac{x-3x^2}{x+1}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{(x-3x^2)'(x+1) - (x-3x^2)(x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{(1-6x)(x+1) - (x-3x^2)}{(x+1)^2} = \frac{-3x^2 - 6x + 1}{(x+1)^2}.$$

Câu 18: Cho hàm số $f(x) = \frac{1-3x+x^2}{x-1}$. Giải bất phương trình $f'(x) > 0$.

- A. $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. B. $x \in \emptyset$. C. $x \in (1; +\infty)$. D. $x \in \mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn A

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } f'(x) &= \frac{(1-3x+x^2)'(x-1) - (1-3x+x^2)(x-1)'}{(x-1)^2} \\ &= \frac{(-3+2x)(x-1) - (1-3x+x^2)}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x+2}{(x-1)^2}. \end{aligned}$$

$$\text{Bất phương trình } f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-2x+2}{(x-1)^2} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x+2 > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

Câu 19: Cho hàm số $f(x) = \frac{x^3}{x-1}$. Phương trình $f'(x) = 0$ có tập nghiệm S là:

- A. $S = \left\{0; \frac{2}{3}\right\}$. B. $S = \left\{-\frac{2}{3}; 0\right\}$. C. $S = \left\{0; \frac{3}{2}\right\}$. D. $S = \left\{-\frac{3}{2}; 0\right\}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } f'(x) = \frac{(x^3)'(x-1) - x^3(x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{3x^2(x-1) - x^3}{(x-1)^2} = \frac{2x^3-3x^2}{(x-1)^2}.$$

$$\text{Phương trình } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x^3-3x^2}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow 2x^3-3x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{3}{2} \end{cases}.$$

Câu 20: Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{-2x^2+x-7}{x^2+3}$.

- A. $y' = \frac{-3x^2-13x-10}{(x^2+3)^2}$. B. $y' = \frac{-x^2+x+3}{(x^2+3)^2}$.
C. $y' = \frac{-x^2+2x+3}{(x^2+3)^2}$. D. $y' = \frac{-7x^2-13x-10}{(x^2+3)^2}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } y' = \frac{(-2x^2+x-7)'(x^2+3) - (x^2+3)'(-2x^2+x-7)}{(x^2+3)^2}$$

$$y' = \frac{(-4x+1)(x^2+3) - 2x(-2x^2+x-7)}{(x^2+3)^2} = \frac{-x^2+2x+3}{(x^2+3)^2}$$

Câu 21: Cho hàm số $y = -2\sqrt{x} + 3x$. Tập nghiệm S của bất phương trình $y' > 0$ là:

- A.** $S = (-\infty; +\infty)$. **B.** $S = \left(-\infty; \frac{1}{9}\right)$. **C.** $S = \left(\frac{1}{9}; +\infty\right)$. **D.** $S = \emptyset$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y = -2\sqrt{x} + 3x \Rightarrow y' = \frac{-1}{\sqrt{x}} + 3$.

Do đó $y' > 0 \Leftrightarrow \frac{-1}{\sqrt{x}} + 3 > 0 \Leftrightarrow 3 > \frac{1}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow x > \frac{1}{9}$

Câu 22: Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{x-1}$ tại điểm $x=1$.

- A.** $f'(1) = \frac{1}{2}$. **B.** $f'(1) = 1$. **C.** $f'(1) = 0$. **D.** Không tồn tại.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$.

Tại $x=1$ thì $f'(x)$ không xác định.

Câu 23: Tính đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{1-2x^2}$.

- A.** $y' = \frac{1}{2\sqrt{1-2x^2}}$. **B.** $y' = \frac{-4x}{\sqrt{1-2x^2}}$. **C.** $y' = \frac{-2x}{\sqrt{1-2x^2}}$. **D.** $y' = \frac{2x}{\sqrt{1-2x^2}}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y' = \frac{(1-2x^2)'}{2\sqrt{1-2x^2}} = \frac{-4x}{2\sqrt{1-2x^2}} = \frac{-2x}{\sqrt{1-2x^2}}$.

Câu 24: Tính đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{x^2-4x^3}$.

- A.** $y' = \frac{x-6x^2}{\sqrt{x^2-4x^3}}$. **B.** $y' = \frac{1}{2\sqrt{x^2-4x^3}}$. **C.** $y' = \frac{x-12x^2}{2\sqrt{x^2-4x^3}}$. **D.** $y' = \frac{x-6x^2}{2\sqrt{x^2-4x^3}}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = \frac{2x-12x^2}{2\sqrt{x^2-4x^3}} = \frac{x-6x^2}{\sqrt{x^2-4x^3}}$.

Câu 25: Cho hàm số $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$. Tập nghiệm S của bất phương trình $f'(x) \geq f(x)$ có bao nhiêu giá trị nguyên?

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } f'(x) = \frac{(x^2 - 2x)'}{2\sqrt{x^2 - 2x}} = \frac{2x - 2}{2\sqrt{x^2 - 2x}} = \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x}}.$$

$$\text{Khi đó, } f'(x) \geq f(x) \Leftrightarrow \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x}} \geq \sqrt{x^2 - 2x}$$

$$\Leftrightarrow x - 1 \geq x^2 - 2x \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \leq x \leq \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$

Vì $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \{1; 2\} \Rightarrow$ tập S có 2 giá trị nguyên.

Câu 26: Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = x\sqrt{x}$.

- A. $f'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x}$. B. $f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$. C. $f'(x) = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{x}}{x}$. D. $f'(x) = \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } f'(x) = x' \cdot \sqrt{x} + x \cdot (\sqrt{x})' = \sqrt{x} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{x}.$$

Câu 27: Tính đạo hàm của hàm số $y = x\sqrt{x^2 - 2x}$.

- A. $y' = \frac{2x - 2}{\sqrt{x^2 - 2x}}$. B. $y' = \frac{3x^2 - 4x}{\sqrt{x^2 - 2x}}$. C. $y' = \frac{2x^2 - 3x}{\sqrt{x^2 - 2x}}$. D. $y' = \frac{2x^2 - 2x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x}}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } y' = \sqrt{x^2 - 2x} + x \cdot \frac{2x - 2}{2\sqrt{x^2 - 2x}} = \frac{x^2 - 2x + x^2 - x}{\sqrt{x^2 - 2x}} = \frac{2x^2 - 3x}{\sqrt{x^2 - 2x}}.$$

Câu 28: Tính đạo hàm của hàm số $y = (2x - 1)\sqrt{x^2 + x}$.

- A. $y' = 2\sqrt{x^2 + x} - \frac{4x^2 - 1}{2\sqrt{x^2 + x}}$. B. $y' = 2\sqrt{x^2 + x} + \frac{4x^2 - 1}{\sqrt{x^2 + x}}$.
C. $y' = 2\sqrt{x^2 + x} + \frac{4x^2 - 1}{2\sqrt{x^2 + x}}$. D. $y' = 2\sqrt{x^2 + x} + \frac{4x^2 + 1}{2\sqrt{x^2 + x}}$.

Lời giải

Chọn C

$$\begin{aligned}\text{Ta có } y' &= (2x-1)' \cdot \sqrt{x^2+x} + (2x-1) \cdot (\sqrt{x^2+x})' \\ &= 2 \cdot \sqrt{x^2+x} + \frac{(2x-1)(2x+1)}{2\sqrt{x^2+x}} = 2\sqrt{x^2+x} + \frac{4x^2-1}{2\sqrt{x^2+x}}.\end{aligned}$$

Câu 29: Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

A. $y' = \frac{x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.

B. $y' = -\frac{x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.

C. $y' = \frac{x}{2(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$. **D.** $y' = -\frac{x(x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}}$.

Lời giải

Chọn B

$$\begin{aligned}\text{Ta có } y' &= \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \right)' = \frac{-(\sqrt{x^2+1})'}{x^2+1} = \frac{-(x^2+1)'}{2\sqrt{x^2+1}(x^2+1)} \\ &= \frac{-x}{\sqrt{x^2+1}(x^2+1)}.\end{aligned}$$

Câu 30: Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}$.

A. $y' = \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$.

B. $y' = \frac{1+x}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$.

C. $y' = \frac{2(x+1)}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$.

D. $y' = \frac{x^2-x+1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$.

Lời giải

Chọn B

$$\begin{aligned}\text{Ta có } y' &= \frac{(x-1)' \cdot \sqrt{x^2+1} - (x-1)(\sqrt{x^2+1})'}{(\sqrt{x^2+1})^2} = \frac{\sqrt{x^2+1} - (x-1) \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{(\sqrt{x^2+1})^2} \\ &= \frac{x^2+1-x^2+x}{(\sqrt{x^2+1})^3} = \frac{1+x}{\sqrt{(x^2+1)^3}}.\end{aligned}$$

Câu 31: Tính đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{\frac{2x-1}{x+2}}$.

A. $y' = \frac{5}{(2x-1)^2} \cdot \sqrt{\frac{x+2}{2x-1}}$.

B. $y' = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{(2x-1)^2} \cdot \sqrt{\frac{x+2}{2x-1}}$.

C. $y' = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{x+2}{2x-1}}$.

D. $y' = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{(x+2)^2} \cdot \sqrt{\frac{x+2}{2x-1}}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } y' = \frac{1}{2\sqrt{\frac{2x-1}{x+2}}} \cdot \left(\frac{2x-1}{x+2} \right)' = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{(x+2)^2} \cdot \sqrt{\frac{x+2}{2x-1}}.$$

Câu 32: Tính đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{\frac{x^2+1}{x}}$.

A. $y' = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x}{x^2+1}} \left(1 - \frac{1}{x^2} \right).$

B. $y' = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x}{x^2+1}}.$

C. $y' = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x}{x^2+1}} \left(1 + \frac{1}{x^2} \right).$

D. $y' = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x}{x^2+1}} \left(x - \frac{1}{x^2} \right).$

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } y' = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x^2+1}{x}}} \left(\frac{x^2+1}{x} \right)' = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x}{x^2+1}} \left(1 - \frac{1}{x^2} \right).$$

Câu 33: Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}$.

A. $y' = -\frac{1}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})^2}.$

B. $y' = \frac{1}{2\sqrt{x+1} + 2\sqrt{x-1}}.$

C. $y' = \frac{1}{4\sqrt{x+1}} + \frac{1}{4\sqrt{x-1}}.$

D. $y' = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} + \frac{1}{2\sqrt{x-1}}.$

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } y = \frac{1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}} = \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{2}.$$

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{2} (\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})' = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}} + \frac{1}{2\sqrt{x-1}} \right) = \frac{1}{4\sqrt{x+1}} + \frac{1}{4\sqrt{x-1}}.$$

Câu 34: Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \frac{3x^2 + 2x + 1}{2\sqrt{3x^3 + 2x^2 + 1}}$ tại điểm $x = 0$.

A. $f'(0) = 0.$

B. $f'(0) = \frac{1}{2}.$

C. Không tồn tại.

D. $f'(0) = 1.$

Lời giải

Chọn B

$$\begin{aligned} \text{Ta có } f'(x) &= \frac{(3x^2 + 2x + 1)' \cdot 2\sqrt{3x^3 + 2x^2 + 1} - (3x^2 + 2x + 1) \cdot (2\sqrt{3x^3 + 2x^2 + 1})'}{(2\sqrt{3x^3 + 2x^2 + 1})^2} \\ &= \frac{(6x + 2)2\sqrt{3x^3 + 2x^2 + 1} - (3x^2 + 2x + 1) \frac{9x^2 + 4x}{\sqrt{3x^3 + 2x^2 + 1}}}{(2\sqrt{3x^3 + 2x^2 + 1})^2} = \frac{9x^4 + 6x^3 - 9x^2 + 8x + 4}{4(3x^3 + 2x^2 + 1)\sqrt{3x^3 + 2x^2 + 1}} \\ \Rightarrow f'(0) &= \frac{4}{8} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Câu 35: Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{a^3}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ (a là hằng số).

A. $y' = \frac{a^3 x}{(a^2 - x^2)\sqrt{a^2 - x^2}}.$

B. $y' = \frac{a^3 x}{a^2 - x^2}.$

C. $y' = \frac{a^3 x}{2(a^2 - x^2)\sqrt{a^2 - x^2}}.$

D. $y' = \frac{a^3(3a^2 - 2x)}{2(a^2 - x^2)\sqrt{a^2 - x^2}}.$

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } y' = \frac{-a^3(\sqrt{a^2 - x^2})'}{a^2 - x^2} = \frac{-a^3(-2x)}{2\sqrt{a^2 - x^2} \cdot (a^2 - x^2)} = \frac{a^3 x}{(a^2 - x^2)\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Câu 36: Tính đạo hàm của hàm số $y = \sin\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right).$

A. $y' = 3 \cos\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right).$

B. $y' = -3 \cos\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right).$

C. $y' = \cos\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right).$

D. $y' = -3 \sin\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right).$

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } y' = \left(\frac{\pi}{6} - 3x\right)' \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right) = -3 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right).$$

Câu 37: Tính đạo hàm của hàm số $y = -\frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{3} - x^2\right).$

A. $y' = x \cos\left(\frac{\pi}{3} - x^2\right).$

B. $y' = \frac{1}{2} x^2 \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right).$

C. $y' = \frac{1}{2} x \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right).$

D. $y' = \frac{1}{2} x \cos\left(\frac{\pi}{3} - x^2\right).$

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } y' = -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{3} - x^2 \right)' \cdot \cos \left(\frac{\pi}{3} - x^2 \right) = -\frac{1}{2} \cdot (-2x) \cdot \cos \left(\frac{\pi}{3} - x^2 \right) = x \cdot \cos \left(\frac{\pi}{3} - x^2 \right).$$

Câu 38: Tính đạo hàm của hàm số $y = \sin(x^2 - 3x + 2)$.

A. $y' = \cos(x^2 - 3x + 2)$.

B. $y' = (2x - 3) \cdot \sin(x^2 - 3x + 2)$.

C. $y' = (2x - 3) \cdot \cos(x^2 - 3x + 2)$.

D. $y' = -(2x - 3) \cdot \cos(x^2 - 3x + 2)$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } y' = (x^2 - 3x + 2)' \cdot \cos(x^2 - 3x + 2) = (2x - 3) \cdot \cos(x^2 - 3x + 2).$$

Câu 39: Tính đạo hàm của hàm số $y = x^2 \tan x + \sqrt{x}$.

A. $y' = 2x \tan x + \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

B. $y' = 2x \tan x + \frac{1}{\sqrt{x}}$.

C. $y' = 2x \tan x + \frac{x^2}{\cos^2 x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

D. $y' = 2x \tan x + \frac{x^2}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } y' = (x^2)' \tan x + (\tan x)' \cdot x^2 + (\sqrt{x})' = 2x \tan x + \frac{x^2}{\cos^2 x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Câu 40: Tính đạo hàm của hàm số $y = 2 \cos x^2$.

A. $y' = -2 \sin x^2$.

B. $y' = -4x \cos x^2$.

C. $y' = -2x \sin x^2$.

D. $y' = -4x \sin x^2$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } y' = -2 \cdot (x^2)' \cdot \sin x^2 = -2 \cdot 2x \cdot \sin x^2 = -4x \sin x^2.$$

Câu 41: Tính đạo hàm của hàm số $y = \tan \frac{x+1}{2}$.

A. $y' = \frac{1}{2 \cos^2 \frac{x+1}{2}}$.

B. $y' = \frac{1}{\cos^2 \frac{x+1}{2}}$.

C. $y' = -\frac{1}{2 \cos^2 \frac{x+1}{2}}$.

D. $y' = -\frac{1}{\cos^2 \frac{x+1}{2}}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } y' = \left(\tan \frac{x+1}{2} \right)' = \frac{\left(\frac{x+1}{2} \right)'}{\cos^2 \frac{x+1}{2}} = \frac{1}{2 \cos^2 \frac{x+1}{2}}.$$

Câu 42: Tính đạo hàm của hàm số $y = \sin \sqrt{2+x^2}$.

A. $y' = \frac{2x+2}{\sqrt{2+x^2}} \cos \sqrt{2+x^2}.$

B. $y' = -\frac{x}{\sqrt{2+x^2}} \cos \sqrt{2+x^2}.$

C. $y' = \frac{x}{\sqrt{2+x^2}} \cos \sqrt{2+x^2}.$

D. $y' = \frac{x+1}{\sqrt{2+x^2}} \cos \sqrt{2+x^2}.$

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } y' = \left(\sqrt{2+x^2} \right)' \cos \sqrt{2+x^2} = \frac{(2+x^2)'}{2\sqrt{2+x^2}} \cos \sqrt{2+x^2} = \frac{x}{\sqrt{2+x^2}} \cos \sqrt{2+x^2}$$

Câu 43: Tính đạo hàm của hàm số $y = \cos \sqrt{2x+1}$.

A. $y' = -\frac{\sin \sqrt{2x+1}}{\sqrt{2x+1}}.$

B. $y' = \frac{\sin \sqrt{2x+1}}{\sqrt{2x+1}}.$

C. $y' = -\sin \sqrt{2x+1}.$

D. $y' = -\frac{\sin \sqrt{2x+1}}{2\sqrt{2x+1}}.$

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } y' = -\left(\sqrt{2x+1} \right)' \sin \sqrt{2x+1} = \frac{(2x+1)'}{2\sqrt{2x+1}} \sin \sqrt{2x+1} = -\frac{\sin \sqrt{2x+1}}{\sqrt{2x+1}}.$$

Câu 44: Tính đạo hàm của hàm số $y = \cot \sqrt{x^2+1}$.

A. $y' = -\frac{x}{\sqrt{x^2+1} \cdot \sin^2 \sqrt{x^2+1}}.$

B. $y' = \frac{x}{\sqrt{x^2+1} \cdot \sin^2 \sqrt{x^2+1}}.$

C. $y' = -\frac{1}{\sin^2 \sqrt{x^2+1}}.$

D. $y' = \frac{1}{\sin^2 \sqrt{x^2+1}}.$

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } y' = -\frac{\left(\sqrt{x^2+1} \right)'}{\sin^2 \sqrt{x^2+1}} = -\frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{\sin^2 \sqrt{x^2+1}} = -\frac{x}{\sqrt{x^2+1} \cdot \sin^2 \sqrt{x^2+1}}.$$

Câu 45: Tính đạo hàm của hàm số $y = \sin(\sin x)$.

A. $y' = \cos(\sin x).$

B. $y' = \cos(\cos x).$

C. $y' = \cos x \cdot \cos(\sin x).$

D. $y' = \cos x \cdot \cos(\cos x).$

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y' = [\sin(\sin x)]' = (\sin x)' \cdot \cos(\sin x) = \cos x \cdot \cos(\sin x)$.

Câu 46: Tính đạo hàm của hàm số $y = \cos(\tan x)$.

A. $y' = \sin(\tan x) \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$.

B. $y' = -\sin(\tan x) \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$.

C. $y' = \sin(\tan x)$.

D. $y' = \sin(\tan x)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y' = -(\tan x)' \sin(\tan x) = -\frac{1}{\cos^2 x} \cdot \sin(\tan x)$.

Câu 47: Tính đạo hàm của hàm số $y = 2\sin^2 x - \cos 2x + x$.

A. $y' = 4\sin x + \sin 2x + 1$.

B. $y' = 4\sin 2x + 1$.

C. $y' = 4\cos x + 2\sin 2x + 1$.

D. $y' = 4\sin x - 2\sin 2x + 1$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = 2 \cdot 2(\sin x)' \cdot \sin x + (2x)' \sin 2x + 1 = 4\cos x \sin x + 2\sin 2x + 1$
 $= 2\sin 2x + 2\sin 2x + 1 = 4\sin 2x + 1$

Câu 48: Tính đạo hàm của hàm số $y = \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) + \frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{4}$.

A. $y' = -2\sin(\pi - 4x) + \frac{\pi}{2}$.

B. $y' = 2\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \frac{\pi}{2}$.

C. $y' = 2\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \frac{\pi}{2}x$.

D. $y' = -2\sin(\pi - 4x)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y = \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) + \frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{4} = \frac{1 - \cos(\pi - 4x)}{2} + \frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{4}$
 $= -\frac{1}{2}\cos(\pi - 4x) + \frac{\pi}{2}x + \left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$

Suy ra $y' = \left(-\frac{1}{2}\cos(\pi - 4x) + \frac{\pi}{2}x + \left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right)'$
 $= \frac{1}{2}(\pi - 4x)' \sin(\pi - 4x) + \frac{\pi}{2} = -2\sin(\pi - 4x) + \frac{\pi}{2}$.

Câu 49: Tính đạo hàm của hàm số $y = \cos^3(2x - 1)$.

A. $y' = -3\sin(4x - 2)\cos(2x - 1)$.

B. $y' = 3\cos^2(2x - 1)\sin(2x - 1)$.

C. $y' = -3 \cos^2(2x-1) \sin(2x-1).$

D. $y' = 6 \cos^2(2x-1) \sin(2x-1).$

Lời giải

Chọn A

$$\begin{aligned} \text{Ta có } y' &= [\cos^3(2x-1)]' = 3 \cos^2(2x-1) [\cos(2x-1)]' \\ &= -6 \sin(2x-1) \cos^2(2x-1) \\ &= -3 [2 \sin(2x-1) \cos(2x-1)] \cos(2x-1) = -3 \sin(4x-2) \cos(2x-1). \end{aligned}$$

Câu 50: Tính đạo hàm của hàm số $y = \sin^3(1-x).$

A. $y' = \cos^3(1-x).$

B. $y' = -\cos^3(1-x).$

C. $y' = -3 \sin^2(1-x) \cdot \cos(1-x).$

D. $y' = 3 \sin^2(1-x) \cdot \cos(1-x).$

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } y' = [\sin^3(1-x)]' = 3 \cdot [\sin(1-x)]' \cdot \sin^2(1-x) = -3 \cdot \cos(1-x) \cdot \sin^2(1-x).$$

Câu 51: Tính đạo hàm của hàm số $y = \tan^3 x + \cot 2x.$

A. $y' = 3 \tan^2 x \cdot \cot x + 2 \tan 2x.$

B. $y' = -\frac{3 \tan^2 x}{\cos^2 x} + \frac{2}{\sin^2 2x}.$

C. $y' = 3 \tan^2 x - \frac{1}{\sin^2 2x}.$

D. $y' = \frac{3 \tan^2 x}{\cos^2 x} - \frac{2}{\sin^2 2x}.$

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } y' = (\tan^3 x + \cot 2x)' = 3 \tan^2 x (\tan x)' - \frac{2}{\sin^2 2x} = \frac{3 \tan^2 x}{\cos^2 x} - \frac{2}{\sin^2 2x}$$

Câu 52: Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}.$

A. $y' = \frac{-\sin 2x}{(\sin x - \cos x)^2}.$

B. $y' = \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{(\sin x - \cos x)^2}.$

C. $y' = \frac{2 - 2 \sin 2x}{(\sin x - \cos x)^2}.$

D. $y' = \frac{-2}{(\sin x - \cos x)^2}.$

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } y = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} = \frac{\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{-\sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} = -\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

$$\text{Suy ra } y' = -\frac{1}{\cos^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} = -\frac{1}{\left(\frac{\cos x - \sin x}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{-2}{(\sin x - \cos x)^2}.$$

Câu 53: Tính đạo hàm của hàm số $y = -\frac{2}{\tan(1-2x)}$.

A. $y' = \frac{4x}{\sin^2(1-2x)}$. **B.** $y' = \frac{-4}{\sin(1-2x)}$. **C.** $y' = \frac{-4x}{\sin^2(1-2x)}$. **D.** $y' = \frac{-4}{\sin^2(1-2x)}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } y' = -\frac{-2(\tan(1-2x))'}{\tan^2(1-2x)} = \frac{-4 \cdot \frac{1}{\cos^2(1-2x)}}{\tan^2(1-2x)} = \frac{-4}{\sin^2(1-2x)}.$$

Câu 54: Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{\cos 2x}{3x+1}$.

A. $y' = \frac{-2(3x+1)\sin 2x - 3\cos 2x}{(3x+1)^2}$. **B.** $y' = \frac{-2(3x+1)\sin 2x - 3\cos 2x}{3x+1}$.
C. $y' = \frac{-(3x+1)\sin 2x - 3\cos 2x}{(3x+1)^2}$. **D.** $y' = \frac{2(3x+1)\sin 2x + 3\cos 2x}{(3x+1)^2}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } y' = \frac{(\cos 2x)'(3x+1) - (3x+1)' \cdot \cos 2x}{(3x+1)^2} = \frac{-2(3x+1)\sin 2x - 3\cos 2x}{(3x+1)^2}.$$

Câu 55: Cho $f(x) = 2x^2 - x + 2$ và $g(x) = f(\sin x)$. Tính đạo hàm của hàm số $g(x)$.

A. $g'(x) = 2\cos 2x - \sin x$. **B.** $g'(x) = 2\sin 2x + \cos x$.
C. $g'(x) = 2\sin 2x - \cos x$. **D.** $g'(x) = 2\cos 2x + \sin x$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } g(x) = f(\sin x) = 2\sin^2 x - \sin x + 2$$

$$\Rightarrow g'(x) = (2\sin^2 x - \sin x + 2)' = 2 \cdot 2\sin x \cdot \cos x - \cos x = 2\sin 2x - \cos x.$$

Câu 56: Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = 5\sin x - 3\cos x$ tại điểm $x = \frac{\pi}{2}$.

A. $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$. **B.** $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -3$. **C.** $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -5$. **D.** $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 5$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f'(x) = (5 \sin x - 3 \cos x)' = 5(\sin x)' - 3(\cos x)' = 5 \cos x + 3 \sin x$.

Suy ra $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 5 \cos \frac{\pi}{2} + 3 \sin \frac{\pi}{2} = 3$

Câu 57: Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = 2 \sin\left(\frac{3\pi}{5} - 2x\right)$ tại điểm $x = -\frac{\pi}{5}$.

- A.** $f'\left(-\frac{\pi}{5}\right) = 4$. **B.** $f'\left(-\frac{\pi}{5}\right) = -4$. **C.** $f'\left(-\frac{\pi}{5}\right) = 2$. **D.** $f'\left(-\frac{\pi}{5}\right) = -2$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f'(x) = \left[2 \sin\left(\frac{3\pi}{5} - 2x\right)\right]' = 2\left(\frac{3\pi}{5} - 2x\right)' \cos\left(\frac{3\pi}{5} - 2x\right) = -4 \cos\left(\frac{3\pi}{5} - 2x\right)$.

Suy ra $f'\left(-\frac{\pi}{5}\right) = -4 \cos\left(\frac{3\pi}{5} + \frac{2\pi}{5}\right) = -4 \cos \pi = 4$.

Câu 58: Hàm số $f(x) = x^4$ có đạo hàm là $f'(x)$, hàm số $g(x) = 2x + \sin \frac{\pi x}{2}$ có đạo hàm là $g'(x)$. Tính giá trị biểu thức $P = \frac{f'(1)}{g'(1)}$.

- A.** $P = \frac{4}{3}$. **B.** $P = 2$. **C.** $P = -2$. **D.** $P = -\frac{4}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f'(x) = 4x^3$ và $g'(x) = \left(2x + \sin \frac{\pi x}{2}\right)' = 2 + \frac{\pi}{2} \cdot \cos \frac{\pi x}{2}$.

Suy ra $P = \frac{f'(1)}{g'(1)} = \frac{4}{2 + \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2}} = 2$.

Câu 59: Hàm số $f(x) = 4x$ có đạo hàm là $f'(x)$, hàm số $g(x) = 4x + \sin \frac{\pi x}{4}$ có đạo hàm là $g'(x)$. Tính giá trị biểu thức $P = \frac{f'(2)}{g'(2)}$.

- A.** $P = 1$. **B.** $P = \frac{16}{16 + \pi}$. **C.** $P = \frac{16}{17}$. **D.** $P = \frac{1}{16}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f'(x) = 4$ và $g'(x) = 4 + \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi x}{4}$.

Suy ra $P = \frac{f'(2)}{g'(2)} = \frac{4}{4 + \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi \cdot 2}{4}} = 1$

Câu 60: Hàm số $f(x) = a \sin x + b \cos x + 1$ có đạo hàm là $f'(x)$. Để $f'(0) = \frac{1}{2}$ và $f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 1$ thì giá trị của a và b bằng bao nhiêu?

A. $a = b = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

B. $a = \frac{\sqrt{2}}{2}; b = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

C. $a = \frac{1}{2}; b = -\frac{1}{2}$.

D. $a = b = \frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f'(x) = a \cos x - b \sin x$. Khi đó
$$\begin{cases} f'(0) = \frac{1}{2} \\ f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \cos 0 - b \sin 0 = \frac{1}{2} \\ a \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) + b \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}a + \frac{\sqrt{2}}{2}b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{2} \\ a = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Câu 61: Cho hàm số $y = f(x) - \cos^2 x$ với $f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$. Trong các biểu thức dưới đây, biểu thức nào xác định hàm số $f(x)$ thỏa mãn $y'(x) = 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$?

A. $f(x) = x + \frac{1}{2} \cos 2x$.

B. $f(x) = x - \frac{1}{2} \cos 2x$.

C. $f(x) = x - \sin 2x$.

D. $f(x) = x + \sin 2x$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y'(x) = f'(x) + 2 \sin x \cos x = f'(x) + \sin 2x$.

Suy ra $y'(x) = 1 \Leftrightarrow f'(x) + \sin 2x = 1 \Leftrightarrow f'(x) = 1 - \sin 2x$.

Đến đây ta lần lượt xét từng đáp án, ví dụ xét đáp án A ta có

$$f'(x) = \left(x + \frac{1}{2} \cos 2x\right)' = x' + \frac{1}{2}(\cos 2x)' = 1 - \sin 2x \text{ (thỏa mãn)}$$

Câu 62: Cho hàm số $y = \cos^2 x + \sin x$. Phương trình $y' = 0$ có bao nhiêu nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$.

A. 1 nghiệm.

B. 2 nghiệm.

C. 3 nghiệm.

D. 4 nghiệm.

Lời giải

Chọn C

$$y' = -2 \cos x \sin x + \cos x = \cos x(1 - 2 \sin x)$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} ; (k \in \mathbb{Z})$$

Vì $x \in (0; \pi) \Rightarrow x \in \left\{ \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{6} \right\}$. Vậy có 3 nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$

Câu 63: Cho hàm số $y = (m+1)\sin x + m\cos x - (m+2)x + 1$. Tìm giá trị của m để $y' = 0$ có nghiệm?

- A.** $\begin{cases} m \leq -1 \\ m \geq 3 \end{cases}$. **B.** $m \geq 2$. **C.** $-1 \leq m \leq 3$. **D.** $m \leq -2$.

Lời giải

Chọn A

$$y' = (m+1)\cos x - m\sin x - (m+2)$$

$$\text{Phương trình } y' = 0 \Leftrightarrow (m+1)\cos x - m\sin x = (m+2)$$

Điều kiện phương trình có nghiệm là $a^2 + b^2 \geq c^2$

$$\Leftrightarrow (m+1)^2 + m^2 \geq (m+2)^2 \Leftrightarrow m^2 - 2m - 3 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -1 \\ m \geq 3 \end{cases}$$

Câu 64: Cho hàm số $f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{\cos 2x}}$. Biểu diễn nghiệm của phương trình lượng giác $f'(x) = 0$ trên đường tròn lượng giác ta được mấy điểm phân biệt?

- A.** 1 điểm. **B.** 2 điểm. **C.** 3 điểm. **D.** 4 điểm.

Lời giải

Chọn B

$$f'(x) = \frac{-\sin x \cdot \sqrt{\cos 2x} - \cos x \cdot \frac{1}{2\sqrt{\cos 2x}}(-\sin 2x)}{\cos 2x} = \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos 2x}}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Ta biểu diễn được 2 điểm phân biệt trên đường tròn lượng giác.

Câu 65: Cho hàm số $f(x) = -\cos x + \sin x - \cos 2x$. Phương trình $f'(x) = 1$ tương đương với phương trình nào sau đây?

- A.** $\sin x = 0$. **B.** $\sin x - 1 = 0$.
C. $(\sin x - 1)(\cos x - 1) = 0$. **D.** $\cos x = 0$.

Lời giải

Chọn C

$$f'(x) = \sin x + \cos x + 2\sin 2x$$

$$f'(x) = 1 \Leftrightarrow \sin x + \cos x + 2\sin 2x = 1$$

$$\text{Đặt } t = \sin x + \cos x \quad (|t| \leq \sqrt{2}) \Rightarrow \sin 2x = t^2 - 1$$

$$\text{Khi đó phương trình } \Leftrightarrow 2t^2 + t - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -\frac{3}{2} \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{Với } t = 1 \Leftrightarrow \sin x + \cos x = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Nghiệm trên cũng là nghiệm của phương trình $(\sin x - 1)(\cos x - 1) = 0$.

Câu 66: Cho hàm số $f(x) = 2\frac{\cos^3 x}{3} + \sin^3 x - 2\cos x - 3\sin x$. Biểu diễn nghiệm của phương trình lượng giác $f'(x)$ trên đường tròn ta được mấy điểm phân biệt?

- A.** 1 điểm. **B.** 2 điểm. **C.** 4 điểm. **D.** 6 điểm.

Lời giải

Chọn B

$$f'(x) = 2\sin^3 x - 3\cos^3 x$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \tan^3 x = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \tan x = \sqrt[3]{\frac{3}{2}}.$$

Vậy có hai điểm biểu diễn nghiệm trên đường tròn lượng giác.

Câu 67: Hàm số $y = 8^{x^2+x+1}(6x+3)\ln 2$ là đạo hàm của hàm số nào sau đây?

- A.** $y = 8^{x^2+x+1}$ **B.** $y = 2^{x^2+x+1}$ **C.** $y = 2^{3x^2+3x+1}$ **D.** $y = 8^{3x^2+3x+1}$

Lời giải

Chọn A

Câu 68: Đạo hàm của hàm số $y = \frac{x+1}{9^x}$

A. $y' = \frac{1-2(x+1)\ln 3}{3^{2x}}.$

B. $y' = \frac{1-(x+1)\ln 3}{3^{2x}}.$

C. $y' = \frac{1-2(x+1)\ln 9}{3^x}.$

D. $y' = \frac{1-2(x+1)\ln 3}{3^x}.$

Lời giải

Chọn A

$$y' = \frac{(x+1)' \cdot 9^x - (9^x)' \cdot (x+1)}{9^{2x}} = \frac{9^x - 9^x(x+1)\ln 9}{9^{2x}} = \frac{1-2(x+1)\ln 3}{3^{2x}}.$$

Câu 69: Cho hàm số $y = \log_3(2x+1)$, ta có:

- A.** $y' = \frac{1}{2x+1}.$ **B.** $y' = \frac{1}{(2x+1)\ln 3}.$ **C.** $y' = \frac{2}{(2x+1)\ln 3}.$ **D.** $y' = \frac{2}{2x+1}.$

Lời giải

Chọn C

Câu 70: Đạo hàm của hàm số $y = \frac{1}{\log_2 x}$ là:

A. $y' = -\frac{\ln 2}{x \ln^2 x}$. **B.** $y' = \frac{\ln 2}{x \ln^2 x}$. **C.** $y' = -\frac{x \ln 2}{\log_2^2 x}$. **D.** $y' = \frac{x \ln 2}{\log_2^2 x}$.

Lời giải

Chọn A

$$y' = -\frac{(\log_2 x)'}{\ln^2 x} = -\frac{\ln 2}{x \ln^2 x}$$

Câu 71: Kết quả tính đạo hàm nào sau đây **sai**?

A. $(3^x)' = 3^x \ln 3$ **B.** $(10^x)' = 10^x \ln 10$ **C.** $(\log_3 x)' = \frac{1}{x \ln 3}$ **D.** $(e^{2x})' = e^{2x}$

Lời giải

Chọn D

Ta có $(e^{2x})' = 2e^{2x}$, suy ra **D** sai.

Câu 72: Đạo hàm của hàm số $y = (2x+1)\ln(1-x)$ là.

A. $2\ln(1-x) - \frac{2x+1}{1-x}$. **B.** $2x\ln(x-1)$.
C. $\frac{2x+1}{1-x} + 2x$. **D.** $2\ln(1-x) + \frac{2x+1}{1-x}$.

Lời giải

Chọn A

$$\begin{aligned} y' &= (2x+1)' \cdot \ln(1-x) + (2x+1) \cdot (\ln(1-x))' = 2 \cdot \ln(1-x) + (2x+1) \cdot \frac{-1}{(1-x)} \\ &= 2\ln(1-x) - \frac{2x+1}{1-x} \end{aligned}$$

Câu 73: Đạo hàm của hàm số $y = \log_2 \left(\frac{x-1}{\ln x} \right)$ là:

A. $\frac{x \ln x + 1 - x}{x(x-1) \ln 2}$. **B.** $\frac{x \ln x + 1 - x}{(x-1) \ln x \ln 2}$. **C.** $\frac{x \ln x + 1 - x}{(x-1) \ln 2}$. **D.** $\frac{x \ln x + 1 - x}{x(x-1) \ln 2 \cdot \ln x}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } y' = \frac{\left(\frac{x-1}{\ln x} \right)'}{\frac{x-1}{\ln x} \ln 2} = \frac{x \ln x + 1 - x}{x(x-1) \ln 2 \cdot \ln x}$$

Câu 74: Cho hàm số $f(x) = 2^{x^2+a}$ và $f'(1) = 2 \ln 2$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $-2 < a < 0$ **B.** $0 < a < 1$ **C.** $a > 1$ **D.** $a < -2$

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } f'(x) = 2x \cdot 2^{x^2+a} \ln 2 \Rightarrow f'(1) = 2 \ln 2 \cdot 2^{a+1} = 2 \ln 2 \Rightarrow 2^{a+1} = 1 \Rightarrow a = -1$$

Câu 75: Cho hàm số $y = \ln \frac{1}{x}$. Hệ thức nào sau đây đúng?

A. $e^y + y' = 0$

B. $e^y - y' = 0$

C. $e^y \cdot y' = 0$

D. $e^y \cdot y' = \frac{1}{x^2}$

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = \frac{1}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{1}{x}\right)' = x \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{x}$, $e^y = \ln e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x} \Rightarrow y' + e^y = 0$

BÀI 3. ĐẠO HÀM CẤP 2

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I. ĐỊNH NGHĨA

➤➤1. Xét hàm số $y = x^3 - 4x^2 + 5$.

- a) Tìm y' .
b) Tìm đạo hàm của hàm số y' .

Lời giải

- a) Có $y' = 3x^2 - 8x$
b) $y'' = 6x - 8$

Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $y' = f'(x)$ tại mọi điểm $x \in (a; b)$. Nếu hàm số $y' = f'(x)$ tiếp tục có đạo hàm tại x thì ta gọi đạo hàm của y' tại x là đạo hàm cấp hai của hàm số $y = f(x)$ tại x , kí hiệu là y'' hoặc $f''(x)$.

Ví dụ 1. Cho hàm số $f(x) = x^4 - 4x^2 + 3$.

- a) Tìm đạo hàm cấp hai của hàm số tại điểm x bất kì.
b) Tính đạo hàm cấp hai của hàm số tại điểm $x_0 = -1$.

Lời giải

- a) Ta có: $f'(x) = 4x^3 - 8x$ và $f''(x) = 12x^2 - 8$.
b) Ta có: $f''(-1) = 12 \cdot (-1)^2 - 8 = 4$.

Ví dụ 2. Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{x+2}$.

- a) Tìm đạo hàm cấp hai của hàm số tại điểm $x \neq -2$.
b) Tính đạo hàm cấp hai của hàm số tại điểm $x_0 = 2$.

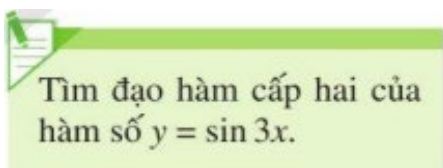
Lời giải

- a) Với $x \neq -2$, ta có:

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x+2} \right)' = -\frac{(x+2)'}{(x+2)^2} = \frac{-1}{(x+2)^2}$$

$$f''(x) = \left[\frac{-1}{(x+2)^2} \right]' = \frac{[(x+2)^2]'}{(x+2)^4} = \frac{2(x+2)}{(x+2)^4} = \frac{2}{(x+2)^3}.$$

- b) Ta có: $f''(2) = \frac{2}{(2+2)^3} = \frac{1}{32}$.



Lời giải

$$\text{Ta có } y' = 3\cos 3x$$

$$\Rightarrow y'' = -9\sin 3x$$

II. Ý NGHĨA CƠ HỌC CỦA ĐẠO HÀM CẤP HAI

➤➤2. Một vật rơi tự do theo phương thẳng đứng có phương trình $s = \frac{1}{2}gt^2$, trong đó g là gia tốc rơi tự do, $g \approx 9,8 \text{ m/s}^2$.

a) Tính vận tốc tức thời $v(t)$ tại thời điểm $t_0 = 4 \text{ (s)}$; $t_1 = 4,1 \text{ (s)}$.

b) Tính tỉ số $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ trong khoảng thời gian $\Delta t = t_1 - t_0$.

Lời giải

a) $v(t) = s'(t) = gt$

Vận tốc tức thời $v(t)$ tại thời điểm $t_0 = 4 \text{ (s)}$.

$$v(4) = 9,8 \cdot 4 = 39,2 \text{ (m/s)}$$

Vận tốc tức thời $v(t)$ tại thời điểm $t_0 = 4,1 \text{ (s)}$.

$$v(4,1) = 9,8 \cdot 4,1 = 40,18 \text{ (m/s)}$$

b) tỉ số $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ trong khoảng thời gian $\Delta t = t_1 - t_0$.

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t_1) - v(t_0)}{t_1 - t_0} = \frac{gt_1 - gt_0}{t_1 - t_0} = g$$

• Tỉ số $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ gọi là gia tốc trung bình của chuyển động trong khoảng thời gian Δt .

• $v'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = a(t)$ gọi là gia tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm t .

Trong trường hợp tổng quát, ta có:

Đạo hàm cấp hai $s''(t)$ là gia tốc tức thời của chuyển động $s = s(t)$ tại thời điểm t .

Ví dụ 3. Xét dao động điều hoà có phương trình chuyển động $s(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$, trong đó A, ω, φ là các hằng số. Tìm gia tốc tức thời tại thời điểm t của chuyển động đó.

Lời giải

Gọi $v(t)$ là vận tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm t , ta có:

$$v(t) = s'(t) = [A\cos(\omega t + \varphi)]' = -A\omega \sin(\omega t + \varphi)$$

Gia tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm t là:

$$s''(t) = v'(t) = [-A\omega \sin(\omega t + \varphi)]' = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi)$$

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1: Tính đạo hàm cấp cao của hàm số $y = f(x)$

1. Phương pháp

✓ Tính đạo hàm cấp 1: $f'(x)$

✓ Tính đạo hàm cấp 2: $f''(x) = [f'(x)]'$

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Tính đạo hàm cấp hai của hàm số $f(x) = \frac{4}{5}x^5 - 3x^2 - x + 4$

Hướng dẫn giải

$$f(x) = \frac{4}{5}x^5 - 3x^2 - x + 4 \text{ thì } f'(x) = 4x^4 - 6x - 1, \text{ do đó: } f''(x) = 16x^3 - 6.$$

Ví dụ 2: Tính đạo hàm cấp hai của hàm số $y = \cos 2x$

Hướng dẫn giải

$$y = \cos 2x \text{ thì } y' = -2\sin 2x. \text{ Do đó } y'' = -4\cos 2x.$$

Ví dụ 3: Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 12x - 1$. Giải $f''(x) \geq 0$

Hướng dẫn giải

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 12x - 1 \text{ thì } f'(x) = x^2 + x - 12; f''(x) = 2x + 1.$$

$$\text{Do đó } f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2}.$$

Ví dụ 4: Cho hàm số $y = \frac{1}{x+1}$. Tính y'' ?

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } y' = -\frac{1}{(x+1)^2} \Rightarrow y'' = \frac{2}{(x+1)^3}.$$

Ví dụ 5: Cho hàm số $y = \frac{x-3}{x+4}$. Tính $M = 2(y')^2 + (1-y) \cdot y''$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } y' = \frac{7}{(x+4)^2} \Rightarrow y'' = -\frac{14}{(x+4)^3}$$

$$\text{Lại có } 1-y = 1 - \frac{x-3}{x+4} = \frac{7}{x+4}$$

$$\text{Vậy: } M = 2(y')^2 + (1-y) \cdot y'' = 2 \cdot \frac{49}{(x+4)^4} + \frac{7}{x+4} \cdot \left(-\frac{14}{(x+4)^3} \right) = 0.$$

Ví dụ 6: Cho hàm số $y = \frac{1}{2}x^2 + x + 1$. Tính $y'^2 - 2y \cdot y''$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } y' = x + 1 \Rightarrow y'' = 1.$$

$$\text{Vậy: } y'^2 - 2y \cdot y'' = (x+1)^2 - 2\left(\frac{1}{2}x^2 + x + 1\right) \cdot 1 = x^2 + 2x + 1 - x^2 - 2x - 2 = -1.$$

Ví dụ 7: Cho hàm số $y = x \sin x$. Tính $xy - 2(y' - \sin x) + xy''$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } y' = \sin x + \cos x \Rightarrow y'' = \cos x + (\cos x - x \sin x) = 2\cos x - x \sin x.$$

Vậy:

$$xy - 2(y' - \sin x) + xy'' = x^2 \sin x - 2(\sin x + x \cos x - \sin x) + 2x \cos x - x^2 \sin x = 0.$$

Ví dụ 8: Cho hàm số $y = A \sin(\omega x + \varphi)$. Tính $M = y'' + \omega^2 \cdot y$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $y' = A\omega \cos(\omega x + \varphi) \Rightarrow y'' = -A\omega^2 \sin(\omega x + \varphi)$

$$\Rightarrow y'' + \omega^2 y = -A\omega^2 \sin(\omega x + \varphi) + A\omega^2 \sin(\omega x + \varphi) = 0.$$

Ví dụ 9: Cho hàm số $y = \sin 2x - \cos 2x$. Giải phương trình $y'' = 0$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $y' = 2 \cos 2x + 2 \sin 2x \Rightarrow y'' = -4 \sin 2x + 4 \cos 2x$.

$$\text{Phương trình } y'' = 0 \Leftrightarrow -4 \sin 2x + 4 \cos 2x = 0 \Leftrightarrow \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{4} = k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}.$$

Ví dụ 10: Cho hàm số: $y = (m-4)\frac{x^2}{2} + \cos x$.

Tìm m sao cho $y'' \leq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $y' = (m-4)x - \sin x \Rightarrow y'' = m-4 - \cos x$

$$y'' \leq 0 \Leftrightarrow m-4 - \cos x \leq 0 \Leftrightarrow \cos x \geq m-4 (*)$$

Vì $\cos x \geq -1, \forall x \in \mathbb{R}$.

Vậy bất phương trình (*) luôn nghiệm đúng $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow -1 \geq m-4 \Leftrightarrow m \leq 3$.

Ví dụ 11: Cho hàm số $y = \frac{3x-2}{1-x}$. Giải bất phương trình $y'' > 0$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } y' = \frac{1}{(1-x)^2} \Rightarrow y'' = \frac{2}{(1-x)^3}.$$

$$\text{Vậy } y'' > 0 \Leftrightarrow \frac{2}{(1-x)^3} > 0 \Leftrightarrow 1-x > 0 \Leftrightarrow x < 1.$$

Ví dụ 12 : Hàm số $f(x) = \frac{x^3 + 3x + 2}{x-1}$ có $f''(x) = \frac{ax^3 + bx^2 + cx + d}{(x-1)^3}$. Tính $S = a - b + c - 2d$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } f(x) = \frac{x^3 + 3x + 2}{x-1} = x^2 + x + 4 + \frac{6}{x-1}.$$

$$\Rightarrow f'(x) = 2x + 1 - \frac{6}{(x-1)^2}.$$

$$\Rightarrow f''(x) = 2 + \frac{12}{(x-1)^3} = \frac{2(x-1)^3 + 12}{(x-1)^3} = \frac{2x^3 - 6x^2 + 6x + 10}{(x-1)^3}.$$

$$\Rightarrow a = 2, b = -6, c = 6, d = 10.$$

$$\text{Do đó } S = a - b + c - 2d = -6.$$

Dạng 2: Ý nghĩa vật lý của đạo hàm cấp hai

1. Phương pháp

Ý nghĩa của đạo hàm cấp hai: Gia tốc tức thời (γ) tại thời điểm t là đạo hàm cấp 2 của hàm số $s = f(t)$.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Câu 1: Một chất điểm chuyển động thẳng được xác định bởi phương trình : $s = t^3 - 3t^2 + 5t + 2$, trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét. Tính gia tốc của chuyển động khi $t = 3$.

Lời giải

- Gia tốc chuyển động tại $t = 3s$ là $s''(3)$
- Ta có: $s'(t) = 3t^2 - 6t + 5$
- $s''(t) = 6t - 6 \Rightarrow s''(3) = 12m / s^2$.

Câu 2: Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $S = -t^3 + 3t^2 + 9t$, trong đó t tính bằng giây và S tính bằng mét. Tính vận tốc của chuyển động tại thời điểm gia tốc triệt tiêu.

Lời giải

- Vận tốc của chuyển động chính là đạo hàm cấp một của quãng đường:
 $v = S' = -3t^2 + 6t + 9$
- Gia tốc của chuyển động chính là đạo hàm cấp hai của quãng đường: $a = S'' = -6t + 6$
- Gia tốc triệt tiêu khi $S'' = 0 \Leftrightarrow t = 1$.
- Khi đó vận tốc của chuyển động là $S'(1) = 12m/s$.

Câu 3: Một chất điểm chuyển động theo quy luật $s(t) = -t^3 + 6t^2$ với t là thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động, $s(t)$ là quãng đường đi được trong khoảng thời gian t . Tính thời điểm t tại đó vận tốc đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải

Ta có $v(t) = s'(t) = -3t^2 + 12t$ có đồ thị là Parabol, do đó $v(t)_{\max} \Leftrightarrow t = \frac{-12}{-6} = 2$.

C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH BÀI TẬP

Bài 1. Tìm đạo hàm cấp hai của mỗi hàm số sau:

- a) $y = \frac{1}{2x+3}$. b) $y = \log_3 x$. c) $y = 2^x$.

Lời giải

a) $y = \frac{1}{2x+3}$

$$y' = -\frac{2}{4x^2 + 12x + 9} = -2 \cdot \frac{1}{4x^2 + 12x + 9}$$

$$y'' = -2 \cdot -\frac{8x + 12}{(4x^2 + 12x + 9)^2}$$

b) $y = \log_3 x$

$$y' = \frac{1}{x \cdot \ln 3}$$

$$\Rightarrow y'' = -\frac{\ln 3}{(x \cdot \ln 3)^2} = -\frac{1}{x^2 \cdot \ln 3}$$

c) $y = 2^x$

$$y' = 2^x \ln 2$$

$$\Rightarrow y'' = 2^x (\ln 2)^2$$

Bài 2. Tính đạo hàm cấp hai của mỗi hàm số sau:

a) $y = 3x^2 - 4x + 5$ tại điểm $x_0 = -2$;

b) $y = \log_3 (2x + 1)$ tại điểm $x_0 = 3$;

c) $y = e^{4x+3}$ tại điểm $x_0 = 1$;

d) $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ tại điểm $x_0 = \frac{\pi}{6}$;

e) $y = \cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)$ tại điểm $x_0 = 0$.

Lời giải

a) $y = 3x^2 - 4x + 5$

$$y' = 6x - 4$$

$$y'' = 6$$

b) $\log_3 (2x + 1)$

$$y' = \frac{2}{(2x + 1) \ln 3} = 2 \cdot \frac{1}{(2x + 1) \ln 3}$$

$$\Rightarrow y'' = 2 \cdot -\frac{2 \cdot \ln 3}{(2x + 1)^2 (\ln 3)^2} = \frac{-4}{(2x + 1)^2 \cdot \ln 3}$$

Thay $x_0 = 3$

$$\Rightarrow y''(3) = \frac{-4}{49 \cdot \ln 3}$$

c) e^{4x+3}

$$y' = 4e^{4x+3}$$

$$\Rightarrow y'' = 16e^{4x+3}$$

$$\Rightarrow y''(1) = 16e^7$$

d) $\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$

$$y' = 2\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Rightarrow y'' = -4\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Rightarrow y''\left(\frac{\pi}{6}\right) = -4\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

e) $y = \cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)$

$$y' = -3\sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$y'' = -9\cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$y''(0) = -9\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

Bài 3. Một vật rơi tự do theo phương thẳng đứng có phương trình $s = \frac{1}{2}gt^2$, trong đó g là gia tốc rơi tự do, $g \approx 9,8 \text{ m/s}^2$.

a) Tính vận tốc tức thời của vật tại thời điểm $t_0 = 2(\text{s})$.

b) Tính gia tốc tức thời của vật tại thời điểm $t_0 = 2(\text{s})$.

Lời giải

a) $v(t) = s'(t) = gt$

Vận tốc tức thời $v(t)$ tại thời điểm $t_0 = 2(\text{s})$.

$$v(2) = 9,8 \cdot 2 = 19,6(\text{m/s})$$

b) $a(t) = v'(t) = g$

Gia tốc tức thời của vật tại thời điểm $t_0 = 2(\text{s})$.

$$a(2) = g = 9,8(\text{m/s}^2)$$

Bài 4. Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = t^3 - 3t^2 + 8t + 1$, trong đó $t > 0$, t tính bằng giây và $s(t)$ tính bằng mét. Tìm vận tốc tức thời, gia tốc tức thời của chất điểm:

a) Tại thời điểm $t = 3(\text{s})$;

b) Tại thời điểm mà chất điểm di chuyển được $7(\text{m})$.

Lời giải

$$v(t) = s'(t) = 3t^2 - 6t + 8$$

$$a(t) = v'(t) = 6t - 6$$

a) vận tốc tức thời tại thời điểm $t = 3(s)$ là:

$$v(3) = s'(3) = 3.3^2 - 6.3 + 8 = 17(m/s)$$

Gia tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t = 3(s)$ là:

$$a(3) = 6.3 - 6 = 12(m/s^2)$$

b) Chất điểm di chuyển được 7 (m)

$$\Rightarrow s(t) = t^3 - 3t^2 + 8t + 1 = 7$$

$$\Leftrightarrow t = 1(s)$$

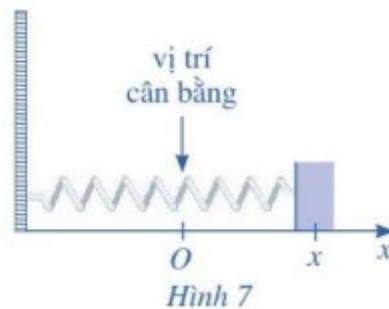
vận tốc tức thời tại thời điểm $t = 1(s)$ là:

$$v(1) = 3.1^2 - 6.1 + 8 = 5(m/s)$$

Gia tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t = 1(s)$ là:

$$a(1) = 6.1 - 6 = 0(m/s^2)$$

Bài 5. Một con lắc lò xo dao động điều hoà theo phương ngang trên mặt phẳng không ma sát như Hình 7, có phương trình chuyển động $x = 4\sin t$, trong đó t tính bằng giây và x tính bằng centimét.



a) Tìm vận tốc tức thời và gia tốc tức thời của con lắc tại thời điểm $t(s)$.

b) Tìm vị trí, vận tốc tức thời và gia tốc tức thời của con lắc tại thời điểm $t = \frac{2\pi}{3}(s)$. Tại thời điểm đó, con lắc di chuyển theo hướng nào?

Lời giải

a) Vận tốc tức thời của con lắc tại thời điểm $t(s)$ là:

$$v(t) = x' = 4\cos t$$

Gia tốc tức thời của con lắc tại thời điểm $t(s)$ là:

$$a(t) = v'(t) = -4\sin t$$

b) Tại thời điểm $t = \frac{2\pi}{3}$ (s)

$$x\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 4 \cdot \sin \frac{2\pi}{3} = 2\sqrt{3} \text{ (cm)}$$

$$v\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 4 \cos \frac{2\pi}{3} = -2 \text{ (cm/s)}$$

$$a\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -4 \sin \frac{2\pi}{3} = -2\sqrt{3} \text{ (cm/s}^2\text{)}$$

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Đạo hàm cấp hai của hàm số $f(x) = 2x^5 - \frac{4}{x} + 1$ bằng biểu thức nào sau đây?

A. $40x^3 - \frac{4}{x^3}$.

B. $40x^3 + \frac{4}{x^3}$.

C. $40x^3 - \frac{8}{x^3}$.

D. $40x^3 + \frac{8}{x^3}$.

Lời giải

CHỌN C

$$f(x) = 2x^5 - \frac{4}{x} + 1 \text{ thì } f'(x) = 10x^4 + \frac{4}{x^2}, \text{ do đó } f''(x) = 40x^3 - \frac{8}{x^3}.$$

Câu 2: Đạo hàm cấp hai của hàm số $y = \sin 2x$ bằng biểu thức nào sau đây?

A. $-\sin 2x$.

B. $-4 \sin x$.

C. $-4 \sin 2x$.

D. $-2 \sin 2x$.

Lời giải

CHỌN C

$$y = \sin 2x \text{ thì } y' = 2 \cos 2x. \text{ Do đó } y'' = -4 \sin 2x.$$

Câu 3: Cho hàm số $y = \cos^2 x$. Tính y'' ?

A. $y'' = -2 \cos 2x$.

B. $y'' = -4 \cos 2x$.

C. $y'' = 2 \cos 2x$.

D. $y'' = 4 \cos 2x$.

Lời giải

CHỌN A

$$\text{Ta có: } y' = -2 \cos x \sin x = -\sin 2x \Rightarrow y'' = -2 \cos 2x.$$

Câu 4: Cho hàm số $y = \sqrt{2x - x^2}$. Tính $M = y^3 \cdot y'' + 1$.

A. -2 .

B. 0 .

C. -1 .

D. $\frac{1}{\sqrt{2x - x^2}}$.

Lời giải

CHỌN B

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } y' &= \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}} \Rightarrow y'' = \frac{1}{(2x-x^2)} \cdot \left[-1 \cdot \sqrt{2x-x^2} - \frac{(1-x)^2}{\sqrt{2x-x^2}} \right] \\ &= \frac{-1}{(2x-x^2)\sqrt{2x-x^2}} \Rightarrow y^3 \cdot y'' = -1 \Rightarrow y^3 \cdot y'' + 1 = 0. \end{aligned}$$

Câu 5: Cho hàm số $f(x) = (x+1)^4$. Tính $f''(2)$.

A. 27.

B. 81.

C. 96.

D. 108.

Lời giải

CHỌN D

Ta có: $f'(x) = 4(x+1)^3 \Rightarrow f''(x) = 12(x+1)^2$. Vậy $f''(2) = 108$.

Câu 6: Cho hàm số $y = \sin^3 x$. Tính $M = y'' + 9y$.

A. $\sin x$.

B. $6 \sin x$.

C. $6 \cos x$.

D. $-6 \sin x$.

Lời giải

CHỌN B

Ta có: $y' = 3 \sin^2 x \cos x \Rightarrow y'' = 6 \sin x \cos^2 x - 3 \sin^3 x$.

Vậy:

$$M = y'' + 9y = 6 \sin x \cos^2 x - 3 \sin^3 x + 9 \sin^3 x = 6 \sin x (\cos^2 x + \sin^2 x) = 6 \sin x.$$

Câu 7: Cho hàm số $y = 3x^5 - 5x^4 + 3x - 2$. Giải bất phương trình $y'' < 0$.

A. $x \in (-\infty; 1) \setminus \{0\}$.

B. $x \in (1; +\infty)$.

C. $x \in (-1; 1)$.

D. $x \in (-2; 2)$.

Lời giải

CHỌN A

Ta có: $y' = 15x^4 - 20x^3 + 3 \Rightarrow y'' = 60x^3 - 60x^2$.

$$y'' < 0 \Leftrightarrow 60x^3 - 60x^2 < 0 \Leftrightarrow 60x^2(x-1) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

Câu 8: Cho hàm số $y = \frac{1}{(x+1)^3}$. Giải bất phương trình $y'' < 0$.

A. $x < -1$.

B. $x > -1$.

C. $x \neq 1$.

D. Vô nghiệm.

Lời giải

CHỌN A

$$\text{Ta có: } y' = \frac{-3}{(x+1)^4} \Rightarrow y'' = \frac{12}{(x+1)^5}.$$

$$\text{Vậy } y'' < 0 \Leftrightarrow \frac{12}{(x+1)^5} < 0 \Leftrightarrow x+1 < 0 \Leftrightarrow x < -1.$$

Câu 9: Cho hàm số $y = f(x) = \frac{-2x^2 + 3x}{1-x}$. Đạo hàm cấp 2 của f là:

A. $y'' = 2 + \frac{1}{(1-x)^2}$.

B. $y'' = \frac{2}{(1-x)^3}$.

C. $y'' = \frac{-2}{(1-x)^3}$.

D. $y'' = \frac{2}{(1-x)^4}$.

Lời giải

CHỌN B

$$y = 2x - 1 + \frac{1}{1-x} \Rightarrow y' = 2 + \frac{1}{(1-x)^2} \Rightarrow y'' = \frac{2(1-x)(-1)}{(1-x)^2} = \frac{2}{(1-x)^3}.$$

Câu 10: Cho hàm số: $y = (2-m)x^4 + 2x^3 + 2mx^2 + 2m - 1$.

Tìm m để phương trình $y'' = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

A. $m \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{3}{2}; +\infty\right) \setminus \{2\}.$

B. $m \in \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right) \setminus \{2\}.$

C. $m \in \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right) \setminus \{2\}.$

D. $m \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right) \setminus \{2\}.$

Lời giải

CHỌN D

Ta có: $y' = 4(2-m)x^3 + 6x^2 + 4mx \Rightarrow y'' = 12(2-m)x^2 + 12x + 4m.$

Phương trình $y'' = 0$ có hai nghiệm phân biệt hay phương trình: $3(2-m)x^2 + 3x + m = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2-m \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2-m \neq 0 \\ 4m^2 - 8m + 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 2 \\ m < \frac{1}{2} \\ m > \frac{3}{2} \end{cases}$$

Câu 11: Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $S = t^3 - 3t^2$ (t: tính bằng giây, s: tính bằng mét).

Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Vận tốc của chuyển động khi $t = 3s$ là $v = 12m/s$.

B. Vận tốc của chuyển động khi $t = 3s$ là $v = 24m/s$.

C. Gia tốc của chuyển động khi $t = 4s$ là $a = 18m/s^2$.

D. Gia tốc của chuyển động khi $t = 4s$ là $a = 9m/s^2$.

Lời giải

CHỌN C

$\square \quad S = t^3 - 3t^2 \Rightarrow v(t) = S' = 3t^2 - 6t$

$\Rightarrow v(3) = 3 \cdot 3^2 - 18 = 9(m/s).$

$\square \quad S = t^3 - 3t^2 \Rightarrow a = S'' = 6t - 6$

$a_{(t=4s)} = 6 \cdot 4 - 6 = 18(m/s^2).$

Câu 12: Một chất điểm chuyển động thẳng xác định bởi phương trình: $S = t^3 - 3t^2 + 5t + 2$, trong đó t tính bằng giây và S tính bằng mét. Gia tốc của chuyển động khi $t = 3$ là:

A. $24(m/s^2).$

B. $17(m/s^2).$

C. $14(m/s^2).$

D. $12(m/s^2).$

Lời giải

CHỌN D

Gia tốc của chuyển động khi $t = 3$ bằng $S''(3).$

$S'(t) = 3t^2 - 6t + 5; S''(t) = 6t - 6$ nên $S''(3) = 18 - 6 = 12(m/s^2).$

Câu 13: Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình:

$S = t^3 - 3t^2 - 9t + 2$ (t: tính bằng giây, s tính bằng mét).

Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A.** Vận tốc của chuyển động bằng 0 khi $t = 0$ hoặc $t = 3$.
B. Gia tốc của chuyển động tại thời điểm $t = 1$ là $a = 12 \text{ m/s}^2$.
C. Gia tốc của chuyển động tại thời điểm $t = 3$ là $a = 12 \text{ m/s}^2$.
D. Gia tốc của chuyển động bằng 0 khi $t = 0$.

Lời giải

CHỌN C

$$\square S = t^3 - 3t^2 - 9t + 2$$

$$\Rightarrow v(t) = S'(t) = 3t^2 - 6t - 9$$

$$v(t) = 0 \Leftrightarrow 3t^2 - 6t - 9 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 3 \end{cases}$$

$$\square S = t^3 - 3t^2 - 9t + 2$$

$$\Rightarrow a = S'' = 6t - 6$$

$$\Rightarrow a_{(t=3s)} = 6.3 - 6 = 12 \left(\text{m/s}^2 \right).$$

Câu 14: Một chất điểm chuyển động thẳng xác định bởi phương trình: $S = t^3 - 2t^2 + 4t + 1$, trong đó t tính bằng giây và S tính bằng mét. Gia tốc của chuyển động khi $t = 2$ là:

- A.** $12 \left(\text{m/s}^2 \right)$. **B.** $8 \left(\text{m/s}^2 \right)$. **C.** $7 \left(\text{m/s}^2 \right)$. **D.** $6 \left(\text{m/s}^2 \right)$.

Lời giải

CHỌN B

Gia tốc của chuyển động khi $t = 2$ bằng $S''(2)$.

$$S'(t) = 3t^2 - 4t + 4; S''(t) = 6t - 4 \text{ nên } S''(2) = 12 - 4 = 8 \left(\text{m/s}^2 \right).$$

Câu 15: Phương trình chuyển động của một chất điểm được biểu thị bởi công thức $S(t) = 4 - 2t + 4t^2 + 2t^3$, trong đó $t > 0$ và t tính bằng giây (s), $S(t)$ tính bằng mét (m). Tìm gia tốc a của chất điểm tại thời điểm $t = 5(s)$.

- A.** $a = 68$. **B.** $a = 115$. **C.** $a = 100$. **D.** $a = 225$.

Lời giải

Chọn A

Theo ứng dụng đạo hàm của hàm số có:

$$v(t) = S'(t) = -2 + 8t + 6t^2 \text{ và } a(t) = v'(t) = 8 + 12t \Rightarrow a(5) = 68 \left(\text{m/s}^2 \right).$$

Câu 16: Một vật chuyển động có phương trình $S = t^4 - 3t^3 - 3t^2 + 2t + 1$ (m), t là thời gian tính bằng giây. Gia tốc của vật tại thời điểm $t = 3s$ là

- A.** 48 m/s^2 . **B.** 28 m/s^2 . **C.** 18 m/s^2 . **D.** 54 m/s^2 .

Lời giải

Chọn A

$$S = f(t) = t^4 - 3t^3 - 3t^2 + 2t + 1$$

$$\Rightarrow f'(t) = 4t^3 - 9t^2 - 6t + 2$$

$$\Rightarrow a(t) = f''(t) = 12t^2 - 18t - 6$$

Gia tốc của vật tại thời điểm $t = 3s$ là $a(3) = 12.3^2 - 18.3 - 6 = 48 \text{ m/s}^2$.

Câu 17: Một chất điểm chuyển động có phương trình $s = -t^3 + t^2 + t + 4$ (t là thời gian tính bằng giây). Gia tốc của chuyển động tại thời điểm vận tốc đạt giá trị lớn nhất là

- A. 6. B. 0. C. 2. D. 4.

Lời giải

Chọn B

Vận tốc của chất điểm có phương trình là: $v = s' = -3t^2 + 2t + 1$.

Vận tốc của chất điểm đạt GTLN khi $t = \frac{-b}{2a} = \frac{1}{3}$.

Gia tốc của chất điểm có phương trình là: $s'' = -6t + 2$.

Tại thời điểm vận tốc đạt GTLN thì gia tốc bằng $s''\left(\frac{1}{3}\right) = 0$.

Câu 18: Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s(t) = 2t^3 - 3t^2 + 4t$, trong đó t được tính bằng giây và s được tính bằng mét. Vận tốc tức thời của vật tại thời điểm gia tốc bằng không là

- A. $-2,5 \text{ m/s}$. B. 4 m/s . C. $2,5 \text{ m/s}$. D. $8,5 \text{ m/s}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có, gia tốc tức thời của chuyển động bằng: $a(t) = s''(t) = 12t - 6$. Thời điểm gia tốc bằng không là: $a(t) = s''(t) = 12t - 6 = 0 \Leftrightarrow t = 0,5$. Vậy khi đó vận tốc tức thời của chuyển động

bằng $v(t) = s'(t) = 6t^2 - 6t + 4 \Rightarrow v(0,5) = \frac{5}{2}$. vậy chọn C

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG VII

Câu 1: Cho $u = u(x), v = v(x)$ là các hàm số có đạo hàm tại điểm x thuộc khoảng xác định. Phát biểu nào sau đây đúng?

- A. $(uv)' = u' \cdot v'$. B. $(uv)' = u \cdot v'$. C. $(uv)' = u' \cdot v$. D. $(uv)' = u' \cdot v + v' \cdot u$.

Lời giải

Chọn D

Có $(uv)' = u'v + uv'$

Câu 2: Cho $u = u(x), v = v(x)$ là các hàm số có đạo hàm tại điểm x thuộc khoảng xác định. Phát biểu nào sau đây đúng?

- A. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'}{v'}$ với $v = v(x) \neq 0, v' = v'(x) \neq 0$ B. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v}$ với $v = v(x) \neq 0$
 C. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}$ với $v = v(x) \neq 0$ D. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v'}$ với $v = v(x) \neq 0$

Lời giải

Chọn C

Có $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

Câu 3: Tìm đạo hàm của mỗi hàm số sau:

- a) $y = (x^2 + 2x)(x^3 - 3x)$; b) $y = \frac{1}{-2x + 5}$;
 c) $y = \sqrt{4x + 5}$; d) $y = \sin x \cdot \cos x$;
 e) $y = xe^x$; f) $y = \ln^2 x$.

Lời giải

a) $y = (x^2 + 2x)(x^3 - 3x)$

$$y' = (2x + 2)(x^3 - 3x) + (x^2 + 2x)(3x^2 - 3)$$

$$y' = 2x^4 - 6x^2 + 2x^3 - 6x + 3x^4 - 3x^2 + 6x^3 - 6x$$

$$y' = 5x^4 + 8x^3 - 9x^2 - 12x$$

b) $y = \frac{1}{-2x + 5}$

$$y' = \frac{2}{(-2x + 5)^2}$$

c) $y = \sqrt{4x + 5}$

$$y' = \frac{4}{2\sqrt{4x+5}}$$

d) $y = \sin x \cos x$

$$y' = \cos^2 x - \sin^2 x$$

e) $y = xe^x$

$$y' = e^x + xe^x$$

g) $y = \ln^2 x$

$$y' = \frac{2}{x} \ln x$$

Câu 4: Tìm đạo hàm cấp hai của mỗi hàm số sau:

a) $y = 2x^4 - 3x^3 + 5x^2$;

b) $y = \frac{2}{3-x}$;

c) $y = \sin 2x \cdot \cos x$;

d) $y = e^{-2x+3}$

e) $y = \ln(x+1)$

f) $y = \ln(e^x + 1)$.

Lời giải

a) $y = 2x^4 - 3x^3 + 5x^2$

$$y' = 8x^3 - 9x^2 + 10x$$

$$y'' = 24x^2 - 18x + 10$$

b) $y = \frac{2}{3-x}$

$$y' = \frac{2}{(3-x)^2}$$

$$y'' = \frac{4(3-x)}{(3-x)^4} = \frac{4}{(3-x)^3}$$

c) $y = \sin 2x \cos x$

$$y' = 2\cos(2x) \cdot \cos x + \sin 2x \cdot (-\sin x)$$

$$y'' = -4\sin(2x) \cdot \cos x + 2\cos(2x) \cdot (-\sin x) + 2\cos(2x) \cdot (-\sin x) - \sin 2x \cdot (\cos x)$$

$$y'' = \cos x (-4\sin(2x) - \sin 2x) \cdot \sin x \cdot (2\cos(2x) + 2\cos(2x))$$

$$y'' = -5\sin(2x) \cdot \cos x - 4\cos(2x) \cdot \sin x$$

d) $y = e^{-2x+3}$

$$y' = -2e^{-2x+3}$$

$$y'' = 4e^{-2x+3}$$

e) $y = \ln(x+1)$

$$y' = \frac{1}{x+1}$$

$$y'' = -\frac{1}{(x+1)^2}$$

g) $y = \ln(e^x + 1)$

$$y' = \frac{e^x}{e^x + 1}$$

$$y'' = \frac{e^x}{e^x + 1} + \frac{-e^{2x}}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}$$

Câu 5: Vận tốc của một chất điểm chuyển động được biểu thị bởi công thức $v(t) = 2t + t^2$, trong đó $t > 0$, t tính bằng giây và $v(t)$ tính bằng m/s . Tìm gia tốc tức thời của chất điểm:

a) Tại thời điểm $t = 3 (s)$;

b) Tại thời điểm mà vận tốc chất điểm bằng $8 m/s$.

Lời giải

$$a(t) = v'(t) = 2t + 2$$

a) Gia tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t = 3 (s)$ là:

$$a(3) = 2.3 + 2 = 8 (m/s^2)$$

b) Vận tốc chất điểm bằng $8 m/s$

$$v(t) = 2t + t^2 = 8$$

$$\Leftrightarrow t = 2(s)$$

Gia tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t = 2 (s)$ là:

$$a(2) = 2.2 + 2 = 6 (m/s^2)$$

Câu 6: Một con lắc lò xo dao động điều hòa theo phương ngang trên mặt phẳng không ma sát, có phương trình chuyển động $x = 4 \cos\left(\pi t - \frac{2\pi}{3}\right) + 3$, trong đó t tính bằng giây và x tính bằng centimet.

a) Tìm vận tốc tức thời và gia tốc tức thời của con lắc lò xo tại thời điểm $t = 3 (s)$.

b) Tìm thời điểm mà vận tốc của con lắc bằng 0.

Lời giải

$$v = x' = -4\pi \sin\left(\pi t - \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$a = v' = -4\pi^2 \cos\left(\pi t - \frac{2\pi}{3}\right)$$

a) Vận tốc tức thời của con lắc lò xo tại thời điểm $t = 3 (s)$ là:

$$v = -4\pi \sin\left(\pi \cdot 3 - \frac{2\pi}{3}\right) = -2\sqrt{3}\pi (cm/s)$$

Gia tốc tức thời của con lắc lò xo tại thời điểm $t = 3 (s)$ là:

$$a = -4\pi^2 \cos\left(3\pi - \frac{2\pi}{3}\right) = -2\pi^2 (cm/s^2)$$

b) vận tốc của con lắc bằng 0 $\Rightarrow v = -4\pi \sin\left(\pi t - \frac{2\pi}{3}\right) = 0 \Rightarrow t = \frac{2\pi}{3}s$

BÀI TẬP TỔNG ÔN CHƯƠNG IX

A. TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Trong các phát biểu sau phát biểu nào là đúng?

- A.** Nếu hàm số $y = f(x)$ không liên tục tại x_0 thì nó có đạo hàm tại điểm đó.
- B.** Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì nó không liên tục tại điểm đó.
- C.** Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì nó liên tục tại điểm đó.
- D.** Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục tại x_0 thì nó có đạo hàm tại điểm đó.

Lời giải

Chọn C

Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì nó liên tục tại điểm đó còn nếu hàm số liên tục tại điểm x_0 thì nó chưa chắc có đạo hàm tại điểm đó.

Câu 2: Cho f là hàm số liên tục tại x_0 . Đạo hàm của f tại x_0 là:

- A.** $f(x)$
- B.** $\frac{f(x_0 + h) - f(x)}{h}$.
- C.** $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x)}{h}$ (nếu tồn tại giới hạn).
- D.** $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{h}$ (nếu tồn tại giới hạn).

Lời giải

Chọn C

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x)}{h}.$$

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 là $f'(x_0)$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- A.** $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.
- B.** $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.
- C.** $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$.
- D.** $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x + x_0) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

và $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ là những khẳng định đúng.

Khẳng định **sai** là $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x + x_0) - f(x_0)}{x - x_0}$

Câu 4: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{3 - \sqrt{4 - x}}{4} & \text{khi } x \neq 0 \\ \frac{1}{4} & \text{khi } x = 0 \end{cases}$. Tính $f'(0)$.

- A.** $f'(0) = \frac{1}{4}$. **B.** $f'(0) = \frac{1}{16}$. **C.** $f'(0) = \frac{1}{32}$. **D.** Không tồn tại.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 - \sqrt{4 - x}}{4x}$ (không tồn tại giới hạn)

Do đó không tồn tại $f'(0)$.

Câu 5: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ bởi $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 4x^2 + 3x}{x^2 - 3x + 2} & \text{khi } x \neq 1 \\ 0 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$. Tính $f'(1)$.

- A.** $f'(1) = \frac{3}{2}$. **B.** $f'(1) = 1$. **C.** $f'(1) = 0$. **D.** không tồn tại.

Lời giải

Chọn D

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{x^3 - 4x^2 + 3x}{x^2 - 3x + 2} - 0}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x^3 - 4x^2 + 3x)}{(x-1)(x-1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)(x^2 + x + 3)}{(x-1)^2(x-2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x^2 + x + 3)}{(x-1)(x-2)} \rightarrow \text{Không tồn tại.} \end{aligned}$$

Câu 6: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{khi } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$

Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. Hàm số không liên tục tại $x = 0$.

B. Hàm số có đạo hàm tại $x = 2$.

C. Hàm số liên tục tại $x = 2$.

D. Hàm số có đạo hàm tại $x = 0$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = -1$

Mặt khác $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$ do đó hàm số không liên tục tại điểm $x = 0$ nên hàm số không đạo hàm tại $x = 0$.

Câu 7: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} mx^2 + 2x + 2 & \text{khi } x > 0 \\ nx + 1 & \text{khi } \leq 0 \end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của các tham số m, n sao cho $f(x)$ có đạo hàm tại điểm $x = 0$.

A. Không tồn tại m, n .

B. $m = 2, \forall n$.

C. $n = 2, \forall m$.

D. $m = n = 2$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) = 1, \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (mx^2 + 2x + 2) = 2$

Do đó hàm số không liên tục tại điểm $x = 0$ nên hàm số không thể có đạo hàm tại điểm $x = 0$.

Câu 8: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} & \text{khi } x \leq 1 \\ ax + b & \text{khi } > 1 \end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của các tham số a, b sao cho $f(x)$ có đạo hàm tại điểm $x = 1$.

A. $a = 1, b = -\frac{1}{2}$.

B. $a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}$.

C. $a = \frac{1}{2}, b = -\frac{1}{2}$.

D. $a = 1, b = \frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) = \frac{1}{2}, \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (ax + b) = a + b$

Hàm số liên tục tại điểm $x = 1$ khi và chỉ khi $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \Leftrightarrow a + b = \frac{1}{2}$

Mặt khác $f'(x) = \begin{cases} x & \text{khi } x < 1 \\ ax & \text{khi } x > 1 \end{cases} \Rightarrow f'(1^-) = 1, f'(1^+) = a$

Suy ra hàm số có đạo hàm tại điểm $x = 1 \Rightarrow \begin{cases} a + b = \frac{1}{2} \\ a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -\frac{1}{2} \end{cases}$

- Câu 9:** Cho $f(x) = x^{2018} - 1009x^2 + 2019x$. Giá trị của $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x + 1) - f(1)}{\Delta x}$ bằng
- A.** 1009. **B.** 1008. **C.** 2018. **D.** 2019.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x + 1) - f(1)}{\Delta x} = f'(1)$$

$$\text{Mặt khác } f'(x) = 2018x^{2017} - 2018x + 2019 \text{ suy ra } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x + 1) - f(1)}{\Delta x} = f'(1) = 2019.$$

- Câu 10:** Cho hàm số $f(x) = \frac{x}{(x-1)(x-2)\dots(x-2019)}$. Giá trị của $f'(0)$ là

- A.** $-\frac{1}{2019!}$. **B.** $\frac{1}{2019!}$. **C.** $-2019!$. **D.** $2019!$.

Lời giải

Chọn A

$$\begin{aligned} \text{Ta có } f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{(x-1)(x-2)\dots(x-2019)}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(x-1)(x-2)\dots(x-2019)} = \frac{1}{-2019!}. \end{aligned}$$

- Câu 11:** Cho $f(x) = x(x+1)(x+2)(x+3)\dots(x+n)$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Tính $f'(0)$.

- A.** $f'(0) = 0$. **B.** $f'(0) = n$. **C.** $f'(0) = n!$. **D.** $f'(0) = \frac{n(n+1)}{2}$.

Lời giải

Chọn C

$$\begin{aligned} \text{Ta có } f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x+1)\dots(x+n)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (x+1)(x+2)\dots(x+n) \\ &= 1.2\dots n = n!. \end{aligned}$$

- Câu 12:** Cho hàm số $f(x) = |x-2|$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

- A.** $f(2) = 0$. **B.** $f(x)$ nhận giá trị không âm.
C. $f(x)$ liên tục tại $x = 2$. **D.** $f(x)$ có đạo hàm tại $x = 2$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } f(x) = |x-2| = \begin{cases} x-2 & \text{khi } x \geq 2 \\ -x+2 & \text{khi } x < 2 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{khi } x > 2 \\ -1 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$$

Do $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 0$ nên hàm số liên tục tại điểm $x = 2$.

Mặt khác $f'(2^+) \neq f'(2^-)$ nên hàm số không có đạo hàm tại điểm $x = 2$.

Câu 13: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm thỏa mãn $f'(6) = 2$. Tính giá trị của biểu thức $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{f(x) - f(6)}{x - 6}$.

- A. 2. B. $\frac{1}{3}$. C. $\frac{1}{2}$. D. 12.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 6} \frac{f(x) - f(6)}{x - 6} = f'(6) = 2.$$

Câu 14: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm $x_0 = 2$. Tìm $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2f(x) - xf(2)}{x - 2}$.

- A. 0. B. $f'(2)$. C. $2f'(2) - f(2)$. D. $f(2) - 2f'(2)$.

Lời giải

Chọn C

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2f(x) - xf(2)}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x[f(x) - f(2)] + 2f(x) - xf(x)}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x[f(x) - f(2)]}{x - 2} + \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)(2 - x)}{x - 2} = 2f'(2) + \lim_{x \rightarrow 2} [-f(x)] = 2f'(2) - 2f(2). \end{aligned}$$

Câu 15: Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2\sqrt{2}x^2 + 8x - 1$, có đạo hàm là $f'(x)$. Tập hợp những giá trị của x để $f'(x) = 0$ là

- A. $\{-2\sqrt{2}\}$ B. $\{2; \sqrt{2}\}$ C. $\{-4\sqrt{2}\}$ D. $\{2\sqrt{2}\}$

Lời giải

Chọn D

$$f'(x) = x^2 - 4\sqrt{2}x + 8, \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4\sqrt{2}x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = 2\sqrt{2}.$$

Câu 16: Cho hàm số $y = 3x^3 + x^2 + 1$, có đạo hàm là y' . Để $y' \leq 0$ thì x nhận các giá trị thuộc tập nào sau đây?

- A. $\left[-\frac{2}{9}; 0\right]$ B. $\left[-\frac{9}{2}; 0\right]$

C. $\left(-\infty; -\frac{9}{2}\right] \cup [0; +\infty)$

D. $\left(-\infty; -\frac{2}{9}\right] \cup [0; +\infty)$

Lời giải

Chọn A

$$y' = 9x^2 + 2x; y' \leq 0 \Leftrightarrow 9x^2 + 2x \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{9} \leq x \leq 0. \text{ Vậy } S = \left[-\frac{2}{9}; 0\right].$$

Câu 17: Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = -x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 2x + 1$ tại điểm $x = -1$.

A. $f'(-1) = 4$

B. $f'(-1) = 14$

C. $f'(-1) = 15$

D. $f'(-1) = 24$

Lời giải

Chọn D

$$f'(x) = -4x^3 + 12x^2 - 6x + 2 \Rightarrow f'(-1) = 24.$$

Câu 18: Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - (2m+1)x^2 - mx - 4$, có đạo hàm là y' . Tìm tất cả các giá trị của m để $y' \geq 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$.

A. $m \in \left(-1; -\frac{1}{4}\right)$

B. $m \in \left[-1; -\frac{1}{4}\right]$

C. $m \in (-\infty; -1] \cup \left[-\frac{1}{4}; +\infty\right)$

D. $m \in \left[-1; \frac{1}{4}\right]$

Lời giải

Chọn B

$$y' = x^2 - 2(2m+1)x - m$$

$$\text{Khi đó } y' \geq 0; \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta' = (2m+1)^2 + m \leq 0 \Leftrightarrow 4m^2 + 5m + 1 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq m \leq -\frac{1}{4}$$

$$\text{Vậy } m \in \left[-1; -\frac{1}{4}\right] \text{ là giá trị thỏa mãn bài toán.}$$

Câu 19: Biết hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a > 0$) có đạo hàm là $f'(x) > 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $b^2 - 3ac > 0$

B. $b^2 - 3ac \geq 0$

C. $b^2 - 3ac < 0$

D. $b^2 - 3ac \leq 0$

Lời giải

Chọn C

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c > 0; \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b^2 - 3ac < 0 \end{cases}$$

Câu 20: Hàm số $y = \sqrt{x^3 + x}$ có đạo hàm bằng

A. $\frac{3x^2 + 1}{2\sqrt{x^3 + x}}$

B. $\frac{3x^2 + 1}{\sqrt{x^3 + x}}$

C. $\frac{3x^2 + x}{2\sqrt{x^3 + x}}$

D. $\frac{x^3 + x}{2\sqrt{x^3 + x}}$

Lời giải

Chọn A

$$y' = \frac{(x^3 + x)'}{2\sqrt{x^3 + x}} = \frac{3x^2 + 1}{2\sqrt{x^3 + x}}.$$

Câu 21: Tính đạo hàm của hàm số $y = (7x - 5)^4$

- A. $y' = 4(7x - 5)^3$ B. $y' = -28(7x - 5)^3$ C. $y' = -28(5 - 7x)^3$ D. $y' = 28(5 - 7x)^3$

Lời giải

Chọn C

$$y' = 4 \cdot (7x - 5)' \cdot (7x - 5)^3 = 28(7x - 5)^3.$$

Câu 22: Tính đạo hàm của hàm số $y = (1 - x^3)^5$

- A. $y' = 5x^2(1 - x^3)^4$ B. $y' = -15x^2(1 - x^3)^4$
 C. $y' = -3x^2(1 - x^3)^4$ D. $y' = -5x^2(1 - x^3)^4$

Lời giải

Chọn B

$$y' = 5 \cdot (1 - x^3)' \cdot (1 - x^3)^4 = -15x^2(1 - x^3)^4.$$

Câu 23: Tính đạo hàm của hàm số $y = (x^3 - 2x^2)^{2016}$

- A. $y' = 2016(x^3 - 2x^2)^{2015}$ B. $y' = 2016(x^3 - 2x^2)^{2015}(3x^2 - 4x)$
 C. $y' = 2016(x^3 - 2x^2)^{2015}(3x^2 - 4x)$ D. $y' = 2016(x^3 - 2x^2)(3x^2 - 2x)$

Lời giải

Chọn B

$$y' = 2016 \cdot (x^3 - 2x^2)' \cdot (x^3 - 2x^2)^{2015} = 2016 \cdot (3x^2 - 4x) \cdot (x^3 - 2x^2)^{2015}.$$

Câu 24: Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = x(x-1)(x-2)\dots(x-2018)$ tại điểm $x = 0$

- A. $f'(0) = 0$ B. $f'(0) = -2018!$ C. $f'(0) = 2018!$ D. $f'(0) = 2018$

Lời giải

Chọn C

$$f'(x) = (x-1)(x-2)\dots(x-2018) + x(x-2)\dots(x-2018) + \dots + x(x-1)\dots(x-2017)$$

$$\text{Suy ra } f'(0) = (0-1) \cdot (0-2) \cdot \dots \cdot (0-2018) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2018 = 2018!.$$

Câu 25: Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = x(x+1)(x+2)\dots(x+2018)$ tại điểm $x = -1004$

A. $f'(-1004) = 0$

B. $f'(-1004) = 1004!$

C. $f'(-1004) = -1004!$

D. $f'(-1004) = (1004!)^2$

Lời giải

Chọn D

$$f'(x) = (x+1)(x+2)\dots(x+2018) + x(x+2)\dots(x+2018) + \dots + x(x+1)\dots(x+2017)$$

Suy ra $f'(-1004) = x.(x+1).(x+2)\dots(x+1003).(x+1005)\dots(x+2018)|_{x=-1004}$

$$= (-1004).(-1003).(-1002)\dots(-1).(-2)\dots 1003.1004 = (1004!)^2$$

Câu 26: Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{x^2 + 2x - 3}{x + 2}$

A. $y' = 1 + \frac{3}{(x+2)^2}$

B. $y' = \frac{x^2 + 6x + 7}{(x+2)^2}$

C. $y' = \frac{x^2 + 4x + 5}{(x+2)^2}$

D. $y' = \frac{x^2 + 8x + 1}{(x+2)^2}$

Lời giải

Chọn A

$$y' = \frac{(2x+2).(x+2) - (x^2 + 2x - 3)}{(x+2)^2} = \frac{2x^2 + 6x + 4 - x^2 - 2x + 3}{(x+2)^2} = \frac{x^2 + 4x + 7}{(x+2)^2}$$

Câu 27: Đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{3x^2 + 4}$ là

A. $y' = \frac{1}{2\sqrt{3x^2 + 4}}$

B. $y' = \frac{x}{\sqrt{3x^2 + 4}}$

C. $y' = \frac{6x}{\sqrt{3x^2 + 4}}$

D. $y' = \frac{3x}{\sqrt{3x^2 + 4}}$

Lời giải

Chọn D

$$y' = \frac{(3x^2 + 4)'}{2\sqrt{3x^2 + 4}} = \frac{6x}{2\sqrt{3x^2 + 4}} = \frac{3x}{\sqrt{3x^2 + 4}}$$

Câu 28: Đạo hàm của hàm số $y = (2x-1)\sqrt{x^2 + x}$ là

A. $y' = \frac{8x^2 + 4x - 1}{2\sqrt{x^2 + x}}$

B. $y' = \frac{8x^2 + 4x + 1}{2\sqrt{x^2 + x}}$

C. $y' = \frac{4x + 1}{2\sqrt{x^2 + x}}$

D. $y' = \frac{6x^2 + 2x - 1}{2\sqrt{x^2 + x}}$

Lời giải

Chọn D

$$\begin{aligned} y' &= (2x-1)' \cdot \sqrt{x^2 + x} + (2x-1) \cdot \frac{(x^2 + x)'}{2\sqrt{x^2 + x}} \\ &= 2\sqrt{x^2 + x} + \frac{(2x-1).(2x+1)}{2\sqrt{x^2 + x}} = \frac{2x^2 + 2x + 4x^2 - 1}{2\sqrt{x^2 + x}} = \frac{6x^2 + 2x - 1}{2\sqrt{x^2 + x}} \end{aligned}$$

Câu 29: Đạo hàm của hàm số $y = \left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^3$ bằng

A. $y' = 3\left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^2$

B. $y' = 6\left(x - \frac{1}{x^2}\right)\left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^2$

C. $y' = 6\left(x + \frac{1}{x^2}\right)\left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^2$

D. $y' = 6\left(x - \frac{1}{x}\right)\left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^2$

Lời giải

Chọn C

$$y' = 3\left(x^2 - \frac{2}{x}\right)' \left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^2 = 3\left(2x + \frac{2}{x^2}\right)\left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^2$$

Câu 30: Tính đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{\frac{2x-1}{x+2}}$

A. $y' = \frac{5}{(2x-1)^2} \cdot \sqrt{\frac{x+2}{2x-1}}$

B. $y' = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{(2x-1)^2} \cdot \sqrt{\frac{x+2}{2x-1}}$

C. $y' = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{x+2}{2x-1}}$

D. $y' = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{(x+2)^2} \cdot \sqrt{\frac{x+2}{2x-1}}$

Lời giải

Chọn D

$$y' = \frac{\left(\frac{2x-1}{x+2}\right)'}{2\sqrt{\frac{2x-1}{x+2}}} = \frac{\frac{5}{(x+2)^2}}{2\sqrt{\frac{2x-1}{x+2}}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{(x+2)^2} \cdot \sqrt{\frac{x+2}{2x-1}}$$

Câu 31: Cho hàm số $y = \sqrt{x + \sqrt{x^2 + 1}}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $y' \sqrt{x^2 + 1} = y$

B. $2y' \sqrt{x^2 + 1} = y$

C. $y' \sqrt{x^2 + 1} = 2y$

D. $2y \sqrt{x^2 + 1} = y'$

Lời giải

Chọn B

$$y' = \frac{\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)'}{2\sqrt{x + \sqrt{x^2 + 1}}} = \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}}}{2y} = \frac{\frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1}}}{2y} = \frac{y^2}{2y\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{y}{2\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\text{Do đó } 2y' \sqrt{x^2 + 1} = y.$$

Câu 32: Cho hàm số $f(x) = \frac{x^3}{x-1}$. Phương trình $f'(x) = 0$ có tập nghiệm S là

A. $S = \left\{0; \frac{2}{3}\right\}$

B. $S = \left\{-\frac{2}{3}; 0\right\}$

C. $S = \left\{0; \frac{3}{2}\right\}$

D. $S = \left\{-\frac{3}{2}; 0\right\}$

Lời giải

Chọn C

$$f'(x) = \frac{3x^2(x-1) - x^3}{(x-1)^2} = \frac{2x^3 - 3x^2}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Câu 33: Cho hàm số $y = -2\sqrt{x} + 3x$. Tập nghiệm S của bất phương trình $y' > 0$ là

- A.** $S = (-\infty; +\infty)$ **B.** $S = \left(-\infty; \frac{1}{9}\right)$ **C.** $S = \left(\frac{1}{9}; +\infty\right)$ **D.** $S = \emptyset$

Lời giải

Chọn C

$$y' = -2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} + 3 = \frac{-1}{\sqrt{x}} + 3 = \frac{-1 + 3\sqrt{x}}{\sqrt{x}} > 0$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{x} > 1 \Leftrightarrow x > \frac{1}{9}.$$

Câu 34: Cho hàm số $f(x) = \sqrt{-5x^2 + 14x - 9}$. Tập hợp các giá trị của x để $f'(x) < 0$ là

- A.** $\left(\frac{7}{5}; +\infty\right)$ **B.** $\left(-\infty; \frac{7}{5}\right)$ **C.** $\left(\frac{7}{5}; \frac{9}{5}\right)$ **D.** $\left(1; \frac{7}{5}\right)$

Lời giải

Chọn C

$$\text{Điều kiện } -5x^2 + 14x - 9 > 0 \Leftrightarrow 1 < x < \frac{9}{5}$$

$$\text{Khi đó } f'(x) < 0 \Leftrightarrow -5x + 7 < 0 \Leftrightarrow x > \frac{7}{5}$$

$$\text{Vậy tập nghiệm của bất phương trình là } \left(\frac{7}{5}; \frac{9}{5}\right).$$

Câu 35: Cho hàm số $f(x) = x + x^2 + x^3 + \dots + x^{2018}$. Tính $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$

- A.** $2017 \cdot 2^{2018} + 1$ **B.** $2019 \cdot 2^{2017} + 1$ **C.** $2017 \cdot 2^{2018} - 1$ **D.** $2018 \cdot 2^{2017} + 1$

Lời giải

Chọn A

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = f'(2)$$

$$\text{Mặt khác } f(x) = x + x^2 + x^3 + \dots + x^{2018} = x \cdot \frac{1 - x^{2018}}{1 - x} = \frac{x - x^{2019}}{1 - x}$$

$$\text{Do đó } f'(x) = \frac{(1 - 2019x^{2018})(1 - x) + (x - x^{2019})}{(1 - x)^2} \Rightarrow f'(2) = \frac{2019 \cdot 2^{2018} - 1 + 2 - 2^{2019}}{1}$$

$$= 2017.2^{2018} + 1.$$

Câu 36: Cho $f(x)$ là hàm số thỏa mãn $f(1) = f'(1) = 1$. Giả sử $g(x) = x^2 f(x)$. Tính $g'(1)$

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

Lời giải

Chọn D

$$g'(x) = 2x.f(x) + x^2.f'(x)$$

$$\text{Suy ra } g'(1) = 2f(1) + f'(1) = 3.$$

Câu 37: Tính đạo hàm của hàm số $y = \sin\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right)$.

A. $y' = 3 \cos\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right)$.

B. $y' = -3 \cos\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right)$.

C. $y' = \cos\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right)$.

D. $y' = -3 \sin\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right)$.

Lời giải

Chọn B

$$y' = \left(\frac{\pi}{6} - 3x\right)' \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right) = -3 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right).$$

Câu 38: Tính đạo hàm của hàm số $y = -\frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{3} - x^2\right)$.

A. $y' = x \cos\left(\frac{\pi}{3} - x^2\right)$.

B. $y' = \frac{1}{2} x^2 \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$.

C. $y' = \frac{1}{2} x \cos\left(\frac{\pi}{3} - 3x\right)$.

D. $y' = \frac{1}{2} x \cos\left(\frac{\pi}{3} - x^2\right)$.

Lời giải

Chọn A

$$y' = -\frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{3} - x^2\right)' \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} - x^2\right) = -\frac{1}{2} \cdot (-2x) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} - x^2\right) = x \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} - x^2\right).$$

Câu 39: Tính đạo hàm của hàm số $y = x^2 \tan x + \sqrt{x}$.

A. $y' = 2x \tan x + \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

B. $y' = 2x \tan x + \frac{1}{\sqrt{x}}$.

C. $y' = 2x \tan x + \frac{x^2}{\cos^2 x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

D. $y' = 2x \tan x + \frac{x^2}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Lời giải

Chọn C

$$y' = (x^2)' \tan x + (\tan x)' \cdot x^2 + (\sqrt{x})' = 2x \tan x + \frac{x^2}{\cos^2 x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Câu 40: Tính đạo hàm của hàm số $y = 2 \cos x^2$.

- A.** $y' = -2 \sin x^2$. **B.** $y' = -4x \cos x^2$. **C.** $y' = -2x \sin x^2$. **D.** $y' = -4x \sin x^2$.

Lời giải

Chọn D

$$y' = -2 \cdot (x^2)' \cdot \sin x^2 = -2 \cdot 2x \cdot \sin x^2 = -4x \cdot \sin x^2.$$

Câu 41: Tính đạo hàm của hàm số $y = \tan \frac{x+1}{2}$.

- A.** $y' = \frac{1}{2 \cos^2 \frac{x+1}{2}}$. **B.** $y' = \frac{1}{\cos^2 \frac{x+1}{2}}$. **C.** $y' = -\frac{1}{2 \cos^2 \frac{x+1}{2}}$. **D.** $y' = -\frac{1}{\cos^2 \frac{x+1}{2}}$.

Lời giải

Chọn A

$$y' = \left(\tan \frac{x+1}{2} \right)' = \frac{\left(\frac{x+1}{2} \right)'}{\cos^2 \frac{x+1}{2}} = \frac{1}{2 \cos^2 \frac{x+1}{2}}.$$

Câu 42: Tính đạo hàm của hàm số $y = \sin \sqrt{2+x^2}$.

- A.** $y' = \frac{2x+2}{\sqrt{2+x^2}} \cos \sqrt{2+x^2}$. **B.** $y' = -\frac{x}{\sqrt{2+x^2}} \cos \sqrt{2+x^2}$.
C. $y' = \frac{x}{\sqrt{2+x^2}} \cos \sqrt{2+x^2}$. **D.** $y' = \frac{x+1}{\sqrt{2+x^2}} \cos \sqrt{2+x^2}$.

Lời giải

Chọn C

$$y' = \left(\sqrt{2+x^2} \right)' \cos \sqrt{2+x^2} = \frac{(2+x^2)'}{2\sqrt{2+x^2}} \cos \sqrt{2+x^2} = \frac{x}{\sqrt{2+x^2}} \cos \sqrt{2+x^2}.$$

Câu 43: Tính đạo hàm của hàm số $y = \cos \sqrt{2x+1}$.

- A.** $y' = -\frac{\sin \sqrt{2x+1}}{\sqrt{2x+1}}$. **B.** $y' = \frac{\sin \sqrt{2x+1}}{\sqrt{2x+1}}$. **C.** $y' = -\sin \sqrt{2x+1}$. **D.** $y' = -\frac{\sin \sqrt{2x+1}}{2\sqrt{2x+1}}$.

Lời giải

Chọn A

$$y' = -\left(\sqrt{2x+1} \right)' \sin \sqrt{2x+1} = -\frac{(2x+1)'}{2\sqrt{2x+1}} \sin \sqrt{2x+1} = -\frac{\sin \sqrt{2x+1}}{\sqrt{2x+1}}.$$

Câu 44: Tính đạo hàm của hàm số $y = \cot \sqrt{x^2 + 1}$.

A. $y' = -\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1} \sin^2 \sqrt{x^2 + 1}}$.

B. $y' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1} \sin^2 \sqrt{x^2 + 1}}$.

C. $y' = -\frac{1}{\sin^2 \sqrt{x^2 + 1}}$.

D. $y' = \frac{1}{\sin^2 \sqrt{x^2 + 1}}$.

Lời giải

Chọn A

$$y' = -\frac{(\sqrt{x^2 + 1})'}{\sin^2 \sqrt{x^2 + 1}} = -\frac{\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}}{\sin^2 \sqrt{x^2 + 1}} = -\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1} \cdot \sin^2 \sqrt{x^2 + 1}}.$$

Câu 45: Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$.

A. $y' = -\frac{\sin 2x}{(\sin x - \cos x)^2}$.

B. $y' = \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{(\sin x - \cos x)^2}$.

C. $y' = \frac{2 - 2 \sin 2x}{(\sin x - \cos x)^2}$.

D. $y' = -\frac{2}{(\sin x - \cos x)^2}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } y = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} = \frac{\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{-\sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} = -\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

$$\text{Suy ra } y' = -\frac{1}{\cos^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} = -\frac{1}{\left(\frac{\cos x - \sin x}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{-2}{(\sin x - \cos x)^2}.$$

Câu 46: Tính đạo hàm của hàm số $y = -\frac{2}{\tan(1-2x)}$.

A. $y' = \frac{4}{\sin^2(1-2x)}$.

B. $y' = -\frac{4}{\sin(1-2x)}$.

C. $y' = -\frac{4x}{\sin^2(1-2x)}$.

D. $y' = -\frac{4}{\sin^2(1-2x)}$.

Lời giải

Chọn A

$$y' = -\frac{-2(\tan(1-2x))'}{\tan^2(1-2x)} = \frac{-4 \cdot \frac{1}{\cos^2 x(1-2x)}}{\tan^2(1-2x)} = \frac{-4}{\sin^2(1-2x)}.$$

Câu 47: Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = 5 \sin x - 3 \cos x$ tại điểm $x = \frac{\pi}{2}$.

A. $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3.$ **B.** $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -3.$ **C.** $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -5.$ **D.** $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 5.$

Lời giải

Chọn A

$$f'(x) = (5 \sin x - 3 \cos x)' = 5(\sin x)' - 3(\cos x)' = 5 \cos x + 3 \sin x$$

$$\text{Suy ra } f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 5 \cos \frac{\pi}{2} + 3 \sin \frac{\pi}{2} = 3.$$

Câu 48: Hàm số nào dưới đây thỏa mãn hệ thức $y' + 2y^2 + 2 = 0$?

A. $y = \sin 2x.$ **B.** $y = \tan 2x.$ **C.** $y = \cos 2x.$ **D.** $y = \cot 2x.$

Lời giải

Chọn D

$$\text{Với } y = \tan 2x \Rightarrow y' = \frac{1}{\cos^2 2x} \cdot 2$$

$$\text{Do đó } y' + 2y^2 + 2 = \frac{2}{\cos^2 2x} + 2 \tan^2 2x + 2 = \frac{4}{\cos^2 2x}$$

$$\text{Với } y = \cot 2x \Rightarrow y' = \frac{-1}{\sin^2 2x} \cdot 2 \text{ suy ra } y' + 2y^2 + 2 = \frac{-2}{\sin^2 2x} + 2 \cot^2 2x + 2 = 0.$$

Câu 49: Cho $f(x) = \sin^3 ax$, $a > 0$. Tính $f'(\pi)$.

A. $f'(\pi) = 2 \sin^2(a\pi) \cos(a\pi).$ **B.** $f'(\pi) = 0.$
C. $f'(\pi) = 3a \sin^2(a\pi).$ **D.** $f'(\pi) = 3a \sin^2(a\pi) \cos(a\pi).$

Lời giải

Chọn D

$$f'(x) = 3 \sin^2(ax) (\sin ax)' = 3 \sin^2(ax) (a \cos ax)$$

Câu 50: Cho hàm số $y = \sin^2 x$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $2y' + y'' = \sqrt{2} \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right).$ **B.** $4y - y'' = 2.$
C. $4y + y'' = 2.$ **D.** $2y' + y' \cdot \tan x = 0.$

Lời giải

Chọn C

$$y' = 2 \sin x \cdot \cos x = 2 \sin 2x, y'' = 2 \cos 2x = 2(1 - 2 \sin^2 x) = 2 - 4 \sin^2 x$$

$$\text{Do đó } 4y + y'' = 4 \sin^2 x + 2 - 4 \sin^2 x = 2.$$

Câu 51: Xét hàm số $y = \frac{1 - \cos x}{x^2}$ khi $x \neq 0$ và $f(x) = 0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.** $f(x)$ là một hàm số lẻ. **B.** $f(x)$ là một hàm tuần hoàn chu kì 2π .
- C.** $f(x)$ có đạo hàm tại $x=0$ bằng 0. **D.** $f(x)$ không có đạo hàm tại $x=0$.

Lời giải

Chọn D

$$y(-x) = \frac{1 - \cos(-x)}{(-x)^2} = \frac{1 - \cos x}{x^2} \text{ khi } x \neq 0 \text{ và } f(0) = 0. \text{ Do đó, } f(x) \text{ là một hàm số chẵn,}$$

$f(x)$ không là hàm số tuần hoàn

Mặt khác $\lim_{x \rightarrow 0} y = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{4 \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}$ nên hàm số không liên tục tại

điểm $x=0$ do đó $f(x)$ không có đạo hàm tại $x=0$.

Câu 52: Đạo hàm của hàm số $y = \log_3(4x+1)$ là

A. $y' = \frac{\ln 3}{4x+1}$. **B.** $y' = \frac{4}{(4x+1)\ln 3}$. **C.** $y' = \frac{1}{(4x+1)\ln 3}$. **D.** $y' = \frac{4\ln 3}{4x+1}$.

Lời giải

Chọn B

$$y' = \frac{(4x+1)'}{(4x+1)\ln 3} = \frac{4}{(4x+1)\ln 3}.$$

Câu 53: Đạo hàm của hàm số $y = 2017^x$ là

A. $y' = x \cdot 2017^{x-1}$ **B.** $y' = 2017^x$ **C.** $y' = \frac{2017^x}{\ln 2017}$ **D.** $y' = 2017^x \cdot \ln 2017$

Lời giải

Chon D

Ta có $y' = 2017^x \cdot \ln 2017$.

Câu 54: Cho hàm số $f(x) = (x+1)e^x$. Tính $f'(0)$

A. $2e^-$. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2

Lời giải

Chọn D

Ta có: $f(x) = (x+1)e^x \Rightarrow f'(x) = (x+2)e^x \Rightarrow f'(0) = 2$.

Câu 55: Tính đạo hàm của hàm số $y = 3^x + \log x$.

A. $y' = 3^x \ln 3 + \frac{1}{x \ln 10}$.

B. $y' = \log_3 x + \frac{1}{x \ln 3}$.

C. $y' = \log_3 x + \ln 3$.

D. $y' = \frac{1 - \ln x}{\ln 3}$.

Lời giải

Chọn A

$$y = 3^x + \log x.$$

$$y' = 3^x \ln 3 + \frac{1}{x \ln 10}.$$

Câu 56: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \sqrt{4 - \log_2^2 x}$.

A. $D = [-2; 2]$.

B. $D = (0; 16]$.

C. $D = (0; 4]$.

D. $D = \left[\frac{1}{4}; 4\right]$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Hàm số có nghĩa} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \log_2^2 x \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ -2 \leq \log_2 x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \frac{1}{4} \leq x \leq 4 \end{cases}.$$

Câu 57: Cho hàm số $f(x) = \ln(x^4 + 1)$. Đạo hàm $f'(1)$ bằng.

A. 2.

B. $\frac{\ln 2}{2}$.

C. 1.

D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } f'(x) = \frac{4x^3}{x^4 + 1} \Rightarrow f'(1) = 2.$$

Câu 58: Tính đạo hàm của hàm số $y = (x^2 - 2x + 2)3^x$.

A. $y' = (2x - 2)3^x + (x^2 - 2x + 2)3^x \ln 3$.

B. $y' = (2x - 2)3^x \ln 3$.

C. $y' = x^2 \cdot 3^x$.

D. $y' = (2x - 2)3^x$.

Lời giải

Chọn A

$$y' = (2x - 2)3^x + (x^2 - 2x + 2)3^x \ln 3.$$

Câu 59: Đạo hàm của hàm số $y = \frac{1}{2^x}$ là.

A. $y' = 2^{-x} \ln 2$.

B. $y' = -\frac{1}{2^x}$.

C. $y' = -\frac{\ln 2}{2^x}$.

D. $y' = -\frac{1}{(2^x)^2}$.

Lời giải

Chọn C

$$y = \frac{1}{2^x} = 2^{-x} \Rightarrow y' = -2^{-x} \cdot \ln 2 = -\frac{\ln 2}{2^x}.$$

Câu 60: Tính đạo hàm của hàm số $y = 2^{\sqrt{1-x}}$.

A. $y' = \frac{2^{\sqrt{1-x}}}{2\sqrt{1-x}}$. **B.** $y' = \frac{\ln 2}{2\sqrt{1-x}} 2^{\sqrt{1-x}}$. **C.** $y' = \frac{-\ln 2}{2\sqrt{1-x}} 2^{\sqrt{1-x}}$. **D.** $y'' = \frac{-2^{\sqrt{1-x}}}{2\sqrt{1-x}}$.

Lời giải

Chọn C

$$y' = (\sqrt{1-x})' \cdot 2^{\sqrt{1-x}} \cdot \ln 2 = \frac{-\ln 2}{2\sqrt{1-x}} 2^{\sqrt{1-x}}.$$

Câu 61: Tính đạo hàm của hàm số $y = 2^{\tan x}$.

A. $y' = \frac{\tan x \cdot 2^{\tan x-1}}{\ln 2}$. **B.** $y' = \tan x \cdot 2^{\tan x-1} \ln 2$.
C. $y' = \frac{2^{\tan x} \ln 2}{\sin^2 x}$. **D.** $y' = \frac{2^{\tan x} \ln 2}{\cos^2 x}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } y' = 2^{\tan x} \ln 2 (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} 2^{\tan x} \ln 2.$$

Câu 62: Cho hàm số $y = f(x) = \ln(2e^x + m)$ có $f'(-\ln 2) = \frac{3}{2}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $m \in (1; 3)$. **B.** $m \in (-5; -2)$. **C.** $m \in (1; +\infty)$. **D.** $m \in (-\infty; 3)$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Điều kiện: } 2e^x + m > 0.$$

$$\text{Ta có } f'(x) = \frac{2e^x}{2e^x + m}.$$

$$\text{Theo đề bài ta có } f'(-\ln 2) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{2e^{-\ln 2}}{2e^{-\ln 2} + m} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{1+m} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow m = -\frac{1}{3}.$$

$$\text{Vậy } m \in (-\infty; 3).$$

Câu 63: Cho hàm số $y = \ln(e^x + m^2)$. Với giá trị nào của m thì $y'(1) = \frac{1}{2}$.

A. $m = e$. **B.** $m = -e$. **C.** $m = \frac{1}{e}$. **D.** $m = \pm\sqrt{e}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } y' = \frac{e^x}{e^x + m^2} \Rightarrow y'(1) = \frac{e}{e + m^2}.$$

$$\text{Khi đó } y'(1) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{e}{e + m^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2e = e + m^2 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{e}.$$

Câu 64: Hàm số $y = \ln(x^2 - 2mx + 4)$ có tập xác định $D = \mathbb{R}$ khi các giá trị của tham số m là:

- A.** $m < 2$. **B.** $m < -2$ hoặc $m > 2$.
C. $m = 2$. **D.** $-2 < m < 2$.

Lời giải

Chọn D

Hàm số $y = \ln(x^2 - 2mx + 4)$ có tập xác định $\mathbb{R}$ khi $x^2 - 2mx + 4 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ (1)

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 > 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow -2 < m < 2.$$

Câu 65: Ông Tú dự định gửi vào ngân hàng một số tiền với lãi suất 6,5% một năm. Biết rằng, cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu. Tính số tiền tối thiểu x (triệu đồng, $x \in \mathbb{N}$) ông Tú gửi vào ngân hàng để sau 3 năm số tiền lãi đủ mua một chiếc xe gắn máy giá trị 30 triệu đồng.

- A.** 145 triệu đồng **B.** 154 triệu đồng **C.** 150 triệu đồng **D.** 140 triệu đồng

Lời giải

Chọn A

Theo công thức lãi kép, số tiền lãi ông Tú nhận được sau 3 năm là: $y = x \left(1 + \frac{6,5}{100} \right)^3 - x$
 $= \left[(1,065)^3 - 1 \right] x$.

Ta có: $\left[(1,065)^3 - 1 \right] x = 30 \Leftrightarrow x = \frac{30}{(1,065)^3 - 1} \approx 144,27$ triệu.

Vậy ông Tú cần gửi ít nhất 145 triệu để sau 3 năm số tiền lãi đủ mua một chiếc xe gắn máy giá trị 30 triệu đồng.

Câu 66: Hàm số $y = \log_2(4^x - 2^x + m)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$ khi

- A.** $m < \frac{1}{4}$. **B.** $m > 0$. **C.** $m \geq \frac{1}{4}$. **D.** $m > \frac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $4^x - 2^x + m > 0$.

Hàm số đã cho có tập xác định là $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $4^x - 2^x + m > 0$ (*) $\forall x \in \mathbb{R}$.

Đặt $t = 2^x$ với $t > 0$, khi đó bất phương trình (*) trở thành: $t^2 - t + m > 0 \quad \forall t > 0$.

Xét hàm số $f(t) = t^2 - t, \forall t > 0$ ta có $f'(t) = 2t - 1; f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$.

Lập bảng biến thiên ta tìm được $\min_{(0; +\infty)} f(t) = f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$.

Để bất phương trình $t^2 - t + m > 0, \forall t > 0$ thì $-m < -\frac{1}{4} \Leftrightarrow m > \frac{1}{4}$.

Cách khác:

➤ Trường hợp 1: $\Delta = 1 - 4m < 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{4}$ thì $t^2 - t + m > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$ (thỏa mãn yêu cầu bài toán)

➤ Trường hợp 2: $\Delta = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{4}$ thì phương trình $t^2 - t + \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$ (không thỏa mãn yêu cầu bài toán).

➤ Trường hợp 3: $\Delta > 0 \Leftrightarrow m < \frac{1}{4}$. Ta thấy $-\frac{b}{a} = 1 > 0$ nên phương trình $t^2 - t + m = 0$ không thể có hai nghiệm âm. Tức là $t^2 - t + m$ không thể luôn dương với mọi $t > 0$.

Vậy $m > \frac{1}{4}$.

B. TỰ LUẬN

Câu 67: Cho hàm số $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$. Giải bất phương trình $f'(x) \geq f(x)$

Lời giải

$$f'(x) \geq f(x) \Leftrightarrow \frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x}} > \sqrt{x^2-2x} \quad (\text{với } x^2 - 2x > 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x < 0 \\ x-1 > x^2-2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x < 0 \\ 0 > x^2-x+1 \end{cases} \quad (\text{vô nghiệm}).$$

Câu 68: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Xét các hàm số $g(x) = f(x) - f(2x)$ và $h(x) = f(x) - f(4x)$. Biết rằng $g'(1) = 18$ và $g'(2) = 1000$. Tính $h'(1)$

Lời giải

$$g'(x) = f'(x) - 2f'(2x) \text{ và } h'(x) = f'(x) - 4f'(4x)$$

$$\text{Do } g'(1) = 18 \text{ và } g'(2) = 1000 \text{ nên } \begin{cases} f'(1) - 2f'(2) = 18 \\ f'(2) - 2f'(4) = 1000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f'(1) - 2f'(2) = 18 \\ 2f'(2) - 4f'(4) = 2000 \end{cases}$$

Cộng vế theo vế ta được $f'(1) - 4f'(4) = 2018 \Rightarrow h'(1) = 2018$.

Câu 69: Cho hàm số $y = f(x) = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}}$. Tính giá trị của biểu thức

$$P = f'(1) + f'(2) + \dots + f'(2018)$$

Lời giải

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{x+1-x} = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$$

$$\text{Suy ra } f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}} \right)$$

$$\text{Khi đó } P = \frac{-1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2018}} - \frac{1}{\sqrt{2019}} \right) = -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2019}} \right) = \frac{1 - \sqrt{2019}}{2\sqrt{2019}}$$

Câu 70: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = ax + \frac{b}{x^2}$, $f(-1) = 2$, $f(1) = 4$, $f'(1) = 0$.

Viết $f(x) = \frac{ax^2}{2} - \frac{b}{x} + c$. Tính abc

Lời giải

$$\text{Ta có } \begin{cases} f'(1) = a + b = 0 \\ f(-1) = \frac{a}{2} - \frac{b}{-1} + c = 2 \\ f(1) = \frac{a}{2} - \frac{b}{1} + c = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow abc = -\frac{5}{2}.$$

Câu 71: Cho $y = \sqrt{x^2 - 2x + 3}$, $y' = \frac{ax + b}{\sqrt{x^2 - 2x + 3}}$. Khi đó giá trị $a.b$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

$$y' = \frac{(x^2 - 2x + 3)'}{2\sqrt{x^2 - 2x + 3}} = \frac{2x - 2}{2\sqrt{x^2 - 2x + 3}} = \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x + 3}}$$

Do đó $a = 1, b = -1 \Rightarrow ab = -1$.

Câu 72: Cho hàm số $f(x) = \frac{\sin 4x}{4} + \cos x - \sqrt{3} \left(\sin x + \frac{\cos 4x}{4} \right)$. Tìm nghiệm của phương trình

$$f'(x) = 0 \text{ thuộc } \left[0; \frac{\pi}{2} \right]$$

Lời giải

$$f'(x) = \frac{\cos 4x \cdot 4}{4} - \sin x - \sqrt{3} \left(\cos x + \frac{-\sin 4x \cdot 4}{4} \right)$$

$$= \cos 4x - \sin x - \sqrt{3} \cos x + \sqrt{3} \sin 4x$$

$$\text{Khi đó } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3} \sin 4x + \cos 4x = \sin x + \sqrt{3} \cos x \Leftrightarrow 2 \sin \left(4x + \frac{\pi}{6} \right) = 2 \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x + \frac{\pi}{6} = x + \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 4x + \frac{\pi}{6} = \pi - \left(x + \frac{\pi}{3} \right) + l.2\pi \end{cases} \begin{cases} x = \frac{\pi}{18} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{10} + \frac{l.2\pi}{5} \end{cases}$$

$$\text{Kết hợp } x \in \left[0; \frac{\pi}{2} \right] \Rightarrow x = \left\{ \frac{\pi}{18}; \frac{\pi}{2} \right\}.$$

Câu 73: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \log(x^2 - 2mx + 4)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$

Lời giải

Điều kiện: $x^2 - 2mx + 4 > 0$ (*)

Để (*) đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$ thì $\Delta' = m^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow -2 < m < 2$.

Câu 74: Một người gửi số tiền 100 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 7% / năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu (người ta gọi đó là lãi kép). Để người đó lãnh được số tiền 250 triệu thì người đó cần gửi trong khoảng thời gian ít nhất bao nhiêu năm? (nếu trong khoảng thời gian này không rút tiền ra và lãi suất không thay đổi).

Lời giải

Ta có công thức tính $A = a(1+r)^n$ với A là số tiền gửi sau n tháng, a là số tiền gửi ban đầu, r là lãi suất.

$$250.10^6 = 100.10^6 (1+0,07)^n \Leftrightarrow 1,07^n = 2,5 \Leftrightarrow n = \log_{1,07} 2,5 = 13,542.$$

Câu 75: Cho hình vuông $ABCD$ có diện tích bằng 36, $\overline{AB}$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng $y = 0$. Các điểm A, B, C lần lượt nằm trên đồ thị hàm số $y = \log_a x$; $y = 2 \log_a x$; $y = 3 \log_a x$. Tìm a .

Lời giải

Do diện tích hình vuông là 36 $\Rightarrow$ cạnh bằng 6

Gọi $A(m; \log_a m) \in y = \log_a x \Rightarrow B(m-6; \log_a m)$ và $C(m-6; 6 + \log_a m)$

Vì $B(m-6; \log_a m) \in y = 2 \log_a x \Rightarrow \log_a m = 2 \log_a (m-6)$ (1)

Vì $C(m-6; 6 + \log_a m) \in y = 3 \log_a x \Rightarrow 6 + \log_a m = 3 \log_a (m-6)$ (2)

Giải (1) $\Rightarrow m = 9$ Thay vào (2) $\Rightarrow a = \sqrt[6]{3}$

Câu 76: Cho hàm số $f(x) = \frac{2^x}{2^x + 2}$. Tính $f(0) + f\left(\frac{1}{10}\right) + \dots + f\left(\frac{19}{10}\right)$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Với } a+b=2, \text{ ta có } f(a) + f(b) &= \frac{2^a}{2^a + 2} + \frac{2^b}{2^b + 2} \\ &= \frac{2^a \cdot 2^b + 2 \cdot 2^a + 2^a \cdot 2^b + 2 \cdot 2^b}{(2^a + 2)(2^b + 2)} = \frac{2^{a+b} + 2 \cdot 2^a + 2^{a+b} + 2 \cdot 2^b}{2^{a+b} + 2 \cdot 2^a + 2 \cdot 2^b + 4} = \frac{4 + 2 \cdot 2^a + 4 + 2 \cdot 2^b}{4 + 2 \cdot 2^a + 2 \cdot 2^b + 4} = 1. \end{aligned}$$

Do đó với $a+b=2$ thì $f(a) + f(b) = 1$.

$$\begin{aligned} \text{Áp dụng ta được } f(0) + f\left(\frac{1}{10}\right) + \dots + f\left(\frac{19}{10}\right) \\ &= f(0) + \left[f\left(\frac{1}{10}\right) + f\left(\frac{19}{10}\right) \right] + \left[f\left(\frac{2}{10}\right) + f\left(\frac{18}{10}\right) \right] + \dots + \left[f\left(\frac{9}{10}\right) + f\left(\frac{11}{10}\right) \right] + f(1) \\ &= \frac{1}{3} + 9 \cdot 1 + \frac{2}{4} = \frac{59}{6}. \end{aligned}$$