SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH **TRƯỜNG PTDL HERMANN GMEINER**	**ĐỀ THI THỬ TỐT NGHIỆP THPT QUỐC GIA 2023** **Môn: TOÁN** Thời gian làm bài: 90 phút
ĐỀ CHÍNH THỨC *(Đề thi có 6 trang)*	

Họ và tên thí sinh:..

Số báo danh:..

MÃ ĐỀ: 001

Mỗi câu trả lời đúng được 0,2 điểm.

ĐỀ BÀI

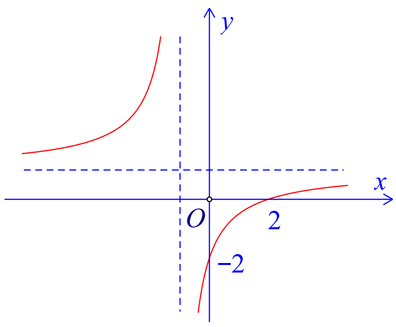
Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 3x+y-2z+1=0$. Vectơ nào sau đây là một vectơ pháp tuyến của (P)?

A. $\vec{n}_1=(1;-2;1)$. **B.** $\vec{n}_2=(3;-2;1)$. **C.** $\vec{n}_3=(-2;1;3)$. **D.** $\vec{n}_4=(3;1;-2)$.

Câu 2. Số cách xếp 4 người thành một hàng ngang là

A. A_4^2. **B.** 4^4. **C.** C_4^4. **D.** $4!$.

Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong như hình bên dưới.



Đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại điểm nào sau đây?

A. $(2;0)$. **B.** $(0;2)$. **C.** $(-2;0)$. **D.** $(0;-2)$.

Câu 4. Tập xác định của hàm số $y=x^{\sqrt{5}}$ là

A. $(0;+\infty)$. **B.** $[0;+\infty)$. **C.** $(-\infty;0)$. **D.** $(-\infty;+\infty)$.

Câu 5. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và a là số thực dương. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x=0$. **B.** $\int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x=0$. **C.** $\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x=0$. **D.** $\int_{a}^{a} f(x)\mathrm{d}x=0$.

Câu 6. Thể tích của khối cầu có bán kính R là

A. $\frac{4}{3}\pi R^3$. **B.** $\frac{1}{3}\pi R^3$. **C.** $4\pi R^3$. **D.** $\frac{4}{3}\pi R^2$.

Câu 7. Môđun của số phức $z=4-3i$ bằng

A. 5. **B.** $\sqrt{7}$. **C.** 25. **D.** 7.

Câu 8. Giá trị của $\int_2^5 \frac{1}{x}\mathrm{d}x$ bằng

A. $\ln\frac{5}{2}$. **B.** $\ln\frac{2}{5}$. **C.** $\frac{1}{3}\ln 3$. **D.** $3\ln 3$.

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng đi qua điểm $M(3;-1;2)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(4;5;-7)$ có phương trình là

A. $\frac{x+3}{4}=\frac{y-1}{5}=\frac{z+2}{-7}$. **B.** $\frac{x+4}{3}=\frac{y+5}{-1}=\frac{z-7}{2}$.

C. $\frac{x-4}{3}=\frac{y-5}{-1}=\frac{z+7}{2}$. **D.** $\frac{x-3}{4}=\frac{y+1}{5}=\frac{z-2}{-7}$.

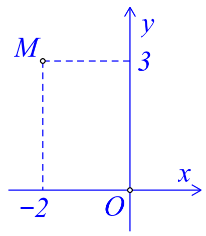
Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho hai véctơ $\vec{a}=(2;3;2)$ và $\vec{b}=(1;1;-1)$. Véctơ $\vec{a}-\vec{b}$ có toạ độ là

A. $(-1;-2;3)$. **B.** $(3;5;1)$. **C.** $(3;4;1)$. **D.** $(1;2;3)$.

Câu 11. Cho khối lăng trụ có diện tích đáy bằng B và chiều cao bằng h. Thể tích V của khối lăng trụ đã cho được tính theo công thức nào dưới đây?

A. $V=\frac{1}{2}Bh$. **B.** $V=Bh$. **C.** $V=3Bh$. **D.** $V=\frac{1}{3}Bh$.

Câu 12. Điểm M trong hình bên dưới biểu diễn số phức nào sau đây?

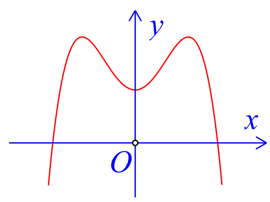


A. $z_3=-2+3i$. **B.** $z_2=2-3i$. **C.** $z_1=3+2i$. **D.** $z_4=3-2i$.

Câu 13. Thể tích của khối trụ có chiều cao $h=2$ và bán kính đáy $r=3$ là

A. 6π. **B.** 9π. **C.** 15π . **D.** 18π.

Câu 14. Hàm số nào sau đây có đồ thị là đường cong như hình bên dưới?



A. $y=x^4-2x^2+1$. **B.** $y=-x^4+2x^2+1$. **C.** $y=-x^3+3x^2+1$. **D.** $y=x^3-3x^2+1$.

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng $d:\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{2}$?

A. $N(-1;0;1)$. **B.** $Q(-2;-1;-2)$. **C.** $M(2;1;2)$. **D.** $P(1;0;-1)$.

Câu 16. Nghiệm của phương trình $3^x=7$ là

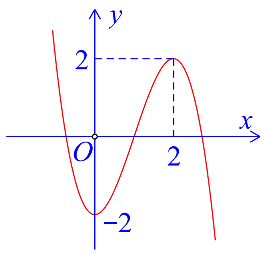
A. $x=3^7$. **B.** $x=\log_7 3$. **C.** $x=\frac{7}{3}$. **D.** $x=\log_3 7$.

Câu 17. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và k là một số thực khác 0. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int kf\left(x\right)\mathrm{d}x = k\int f\left(x\right)\mathrm{d}x$.	**B.** $\int kf\left(x\right)\mathrm{d}x = k+\int f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

C. $\int kf\left(x\right)\mathrm{d}x = \int k\,\mathrm{d}x.\int f\left(x\right)\mathrm{d}x$.	**D.** $\int kf\left(x\right)\mathrm{d}x = \dfrac{1}{k}\int f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

Câu 18. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị là đường cong như hình bên dưới.



Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào sau đây?

A. $\left(-\infty;0\right)$.	**B.** $\left(2;+\infty\right)$.	**C.** $\left(-2;2\right)$.	**D.** $\left(0;2\right)$.

Câu 19. Với a là số thực dương, $\log a^{10}$ bằng

A. $10a$.	**B.** $10+\log a$.	**C.** $10\log a$.	**D.** $\dfrac{1}{10}\log a$.

Câu 20. Cho hai số phức $z_1=2+3i$ và $z_2=3-2i$. Số phức $z_1.z_2$ bằng

A. $12+5i$.	**B.** $-5i$.	**C.** $6-6i$.	**D.** $5i$.

Câu 21. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	5	↘	-6	↗	$+\infty$

Hàm số đã cho đạt cực đại tại

A. $x=-1$.	**B.** $x=-6$.	**C.** $x=5$.	**D.** $x=2$.

Câu 22. Họ nguyên hàm của của hàm số $f\left(x\right)=x^2-3x$ là

A. $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{3x^2}{2}+C$.	**B.** $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=2x-3+C$.

C. $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=x^3-3x^2+C$.	**D.** $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=\dfrac{x^3}{3}-3x^2+C$.

Câu 23. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-4}{x+1}$ là đường thẳng có phương trình

A. $x=2$.	**B.** $x=-1$.	**C.** $x=-2$.	**D.** $x=1$.

Câu 24. Cho khối chóp có diện tích đáy $B=6$ và chiều cao $h=4$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

A. 8.	**B.** 24.	**C.** 12.	**D.** 72.

Câu 25. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu tâm $I\left(1;0;-2\right)$ và bán kính $R=4$ có phương trình là

A. $\left(x-1\right)^2+y^2+\left(z+2\right)^2=4$.	**B.** $\left(x-1\right)^2+y^2+\left(z+2\right)^2=16$.

C. $(x+1)^2+y^2+(z-2)^2=4$. **D.** $(x+1)^2+y^2+(z-2)^2=16$.

Câu 26. Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_{\frac{1}{4}}(x-1)+\log_4(14-2x)\ge 0$ là

A. 5. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 3.

Câu 27. Cho $\log_a 5=3$, khi đó giá trị của $\log_{a^2}\left(5a^3\right)$ bằng

A. 3. **B.** 8. **C.** 5. **D.** 15.

Câu 28. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;2]$ và thỏa mãn $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=6$. Giá trị của tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(2\sin x)\cos x\mathrm{d}x$ bằng

A. -6. **B.** -3. **C.** 3. **D.** 6.

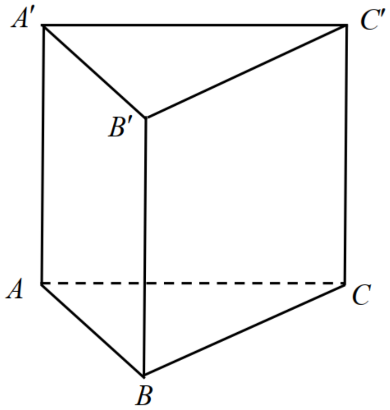
Câu 29. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=2x^3-6x$ trên đoạn $[0;2]$ bằng

A. 0. **B.** 4. **C.** -4. **D.** 2.

Câu 30. Hàm số $y=\frac{x^3}{3}-2x^2+3x+1$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;3)$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $(-3;1)$. **D.** $(1;3)$.

Câu 31. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh đều bằng 2



Khoảng cách từ B đến mặt phẳng $(ACC'A')$ bằng

A. $\sqrt{3}$. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** 2.

Câu 32. Cho số phức $z=(1+2i)^2$. Số phức $\frac{z}{i}$ bằng

A. $-3+4i$. **B.** $2-i$. **C.** $4+3i$. **D.** $4-3i$.

Câu 33. Cho cấp số cộng (u_n) biết $u_1=5, u_2=8$. Giá trị của u_4 bằng

A. 17. **B.** 11. **C.** 14. **D.** 13.

Câu 34. Tập xác định của hàm số $y=\log_3\left(x^2-1\right)$ là

A. $(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$. **B.** $(-1;1)$.

C. $(-\infty;-1]\cup[1;+\infty)$. **D.** $[-1;1]$.

Câu 35. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x-1)(x+3)$. Hàm số đạt cực đại tại điểm

A. $x=3$. **B.** $x=1$. **C.** $x=0$. **D.** $x=-3$.

Câu 36. Một hộp chứa 9 quả cầu gồm 4 quả màu xanh, 3 quả màu đỏ và 2 quả màu vàng. Lấy ngẫu nhiên 3 quả cầu từ hộp đó. Xác suất để trong 3 quả cầu lấy được có ít nhất một quả màu đỏ bằng

A. $\frac{19}{28}$. **B.** $\frac{17}{42}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{16}{21}$.

Câu 37. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-3x}}, \forall x\in\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)$ và $f(-1)=\frac{2}{3}$. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F(-1)=0$. Giá trị của $F\left(\frac{1}{4}\right)$ bằng

A. $\frac{4}{3}$. **B.** $\frac{14}{27}$. **C.** $-\frac{8}{27}$. **D.** $\frac{1}{54}$.

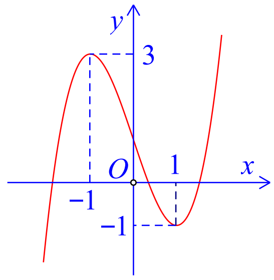
Câu 38. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB=1, AD=AA'=\sqrt{3}$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của $A'B'$ và BC. Góc giữa hai đường thẳng MN và AC bằng

A. 45^0. **B.** 60^0. **C.** 30^0. **D.** 90^0.

Câu 39. Trên tập hợp số phức, biết $z_0=3-2i$ là một nghiệm của phương trình $z^2+az+b=0$. Giá trị của $a+b$ bằng

A. 7. **B.** -19. **C.** -7. **D.** 19.

Câu 40. Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong như hình vẽ bên dưới.



Số nghiệm của phương trình $f\left[f(x)\right]=0$ là

A. 7. **B.** 8. **C.** 9. **D.** 6.

Câu 41. Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\left(9^x-10.3^{x+2}+729\right)\sqrt{2\ln 30-\ln(9x)}\ge 0$?

A. 97. **B.** 96. **C.** 98. **D.** 99.

Câu 42. Cho khối nón đỉnh S có đáy là đường tròn tâm O, bán kính R. Trên đường tròn (O) lấy hai điểm A,B sao cho tam giác OAB vuông. Biết diện tích tam giác SAB bằng $\sqrt{2}R^2$. Thể tích khối nón đã cho bằng

A. $\frac{\sqrt{14}}{6}\pi R^3$. **B.** $\frac{\sqrt{14}}{2}\pi R^3$. **C.** $\frac{\sqrt{14}}{3}\pi R^3$. **D.** $\frac{\sqrt{14}}{12}\pi R^3$.

Câu 43. Trong không gian $Oxyz$, giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha): x+2y+z-1=0$ và $(\beta): x-y-z+2=0$ có phương trình là

A. $\begin{cases} x=-1+t \\ y=1+2t \\ z=t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=-1+t \\ y=1-2t \\ z=3t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=t \\ y=-t \\ z=2-t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=-t \\ y=2t \\ z=1-3t \end{cases}$.

Câu 44. Trong không gian $Oxyz$, gọi (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng $d:\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{-1}$ và cắt trục Ox, Oy lần lượt tại A và B sao cho đường thẳng AB vuông góc với d. Phương trình của mặt phẳng (P) là

A. $x+2y+5z-4=0$. **B.** $2x-y-3=0$. **C.** $x+2y-z-4=0$. **D.** $x+2y+5z-5=0$.

Câu 45. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB=2, AD=2\sqrt{3}$, tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc đáy, khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SC bằng 3. Tính thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng

A. $16\sqrt{3}$. **B.** $\frac{16\sqrt{3}}{3}$. **C.** $24\sqrt{3}$. **D.** $8\sqrt{3}$.

Câu 46. Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2-4x+4$, trục hoành và trục tung. Đường thẳng d qua $A(0;4)$ và có hệ số góc k $(k\in\mathbb{R})$ chia hình (H) thành hai phần có diện tích bằng nhau. Giá trị của k bằng

A. -8. **B.** -2. **C.** -4. **D.** -6.

Câu 47. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=\frac{1}{2}x^2-2x+\frac{3}{2}$ và $f(0)=0$. Có bao nhiêu số nguyên $m\in(-2021;2022)$ để hàm số $g(x)=\left|f^2(x)+2f(x)+m\right|$ có đúng 3 điểm cực trị?

A. 2021. **B.** 2020. **C.** 2022. **D.** 4042.

Câu 48. Cho các số phức w,z thỏa mãn $|w+i|=\frac{3\sqrt{5}}{5}$ và $5w=(2+i)(z-4)$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=|z-1-2i|+|z-5-2i|$ bằng

A. $6\sqrt{7}$. **B.** $2\sqrt{53}$. **C.** $4\sqrt{13}$. **D.** $4+2\sqrt{13}$.

Câu 49. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x+1)^2+(y-1)^2+z^2=4$ và hai điểm $A(1;2;4)$, $B(0;0;1)$. Mặt phẳng $(P): ax+by+cz+3=0$ $(a,b,c\in\mathbb{R})$ đi qua A,B và cắt (S) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính nhỏ nhất. Giá trị của $a+b+c$ bằng

A. $-\frac{3}{4}$. **B.** $\frac{33}{5}$. **C.** $\frac{27}{4}$. **D.** $\frac{31}{5}$.

Câu 50. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $2.3^{x-1}-\log_3\left(3^{x-2}+2y\right)=6y-x+1$ và $2022^{-1}\le y\le 2022$?

A. 13. **B.** 15. **C.** 7. **D.** 6.

---------- HẾT ----------

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị không giải thích gì thêm.

Họ và tên giám thị 1: ……………………….Chữ ký: …………………………..

Họ và tên giám thị 2: ……………………….Chữ ký: …………………………..

BẢNG ĐÁP ÁN

1.D	2.D	3.A	4.A	5.D	6.A	7.A	8.A	9.D	10.D
11.B	12.A	13.D	14.B	15.D	16.D	17.A	18.D	19.C	20.A
21.A	22.A	23.B	24.A	25.B	26.B	27.A	28.C	29.B	30.D
31.A	32.C	33.C	34.A	35.C	36.D	37.A	38.B	39.A	40.A
41.D	42.A	43.B	44.A	45.D	46.D	47.A	48.B	49.A	50.C

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1. **[Mức độ 1]** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 3x+y-2z+1=0$. Vectơ nào sau đây là một vectơ pháp tuyến của (P)?

A. $\vec{n}_1=(1;-2;1)$. **B.** $\vec{n}_2=(3;-2;1)$. **C.** $\vec{n}_3=(-2;1;3)$. **D.** $\vec{n}_4=(3;1;-2)$.

Lời giải

Vectơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n}_4=(3;1;-2)$.

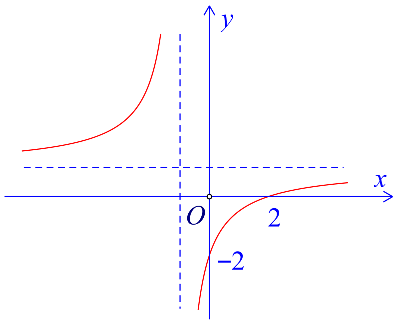
Câu 2. **[Mức độ 1]** Số cách xếp 4 người thành một hàng ngang là

A. A_4^2. **B.** 4^4. **C.** C_4^4. **D.** $4!$.

Lời giải

Số cách xếp 4 người thành một hàng ngang là số hoán vị 4 phần tử: $P_4=4!$.

Câu 3. **[Mức độ 1]** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong như hình bên dưới.



Đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại điểm nào sau đây?

A. $(2;0)$. **B.** $(0;2)$. **C.** $(-2;0)$. **D.** $(0;-2)$.

Lời giải

Quan sát hình vẽ ta thấy đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại điểm $(2;0)$.

Câu 4. **[Mức độ 1]** Tập xác định của hàm số $y=x^{\sqrt{5}}$ là

A. $(0;+\infty)$. **B.** $[0;+\infty)$. **C.** $(-\infty;0)$. **D.** $(-\infty;+\infty)$.

Lời giải

Hàm số $y=x^{\sqrt{5}}$ là hàm số lũy thừa với số mũ là $\alpha=\sqrt{5}\notin\mathbb{Z}$ nên điều kiện xác định là $x>0$.
Vậy tập xác định của hàm số đã cho là $(0;+\infty)$.

Câu 5. **[Mức độ 1]** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và a là số thực dương. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x=0$. **B.** $\int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x=0$. **C.** $\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x=0$. **D.** $\int_{a}^{a} f(x)\mathrm{d}x=0$.

Lời giải

Theo tính chất tích phân ta có $\int_{a}^{a} f(x)\mathrm{d}x=0$.

Giải thích: Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$.

Ta có: $\int\limits_a^a f\left(x\right)\mathrm{d}x = F\left(x\right)\Big|_a^a = F\left(a\right) - F\left(a\right) = 0$.

Câu 6. **[Mức độ 1]** Thể tích của khối cầu có bán kính R là

A. $\frac{4}{3}\pi R^3$. **B.** $\frac{1}{3}\pi R^3$. **C.** $4\pi R^3$. **D.** $\frac{4}{3}\pi R^2$.

Lời giải

Theo lý thuyết công thức tính thể tích khối cầu có bán kính R là $\frac{4}{3}\pi R^3$.

Câu 7. Môđun của số phức $z = 4 - 3i$ bằng

A. 5. **B.** $\sqrt{7}$. **C.** 25. **D.** 7.

Lời giải

Ta có $z = 4 - 3i \Rightarrow \left|z\right| = \sqrt{4^2 + \left(-3\right)^2} = 5$.

Câu 8. Giá trị của $\int\limits_2^5 \frac{1}{x}\mathrm{d}x$ bằng

A. $\ln\frac{5}{2}$. **B.** $\ln\frac{2}{5}$. **C.** $\frac{1}{3}\ln 3$. **D.** $3\ln 3$.

Lời giải

Ta có $\int\limits_2^5 \frac{1}{x}dx = \ln\left|x\right|\Big|_2^5 = \ln 5 - \ln 2 = \ln\frac{5}{2}$.

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng đi qua điểm $M\left(3;-1;2\right)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = \left(4;5;-7\right)$ có phương trình là

A. $\frac{x+3}{4} = \frac{y-1}{5} = \frac{z+2}{-7}$.

B. $\frac{x+4}{3} = \frac{y+5}{-1} = \frac{z-7}{2}$.

C. $\frac{x-4}{3} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z+7}{2}$.

D. $\frac{x-3}{4} = \frac{y+1}{5} = \frac{z-2}{-7}$.

Lời giải

Đường thẳng đi qua điểm $M\left(3;-1;2\right)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = \left(4;5;-7\right)$ có phương trình chính tắc là: $\frac{x-3}{4} = \frac{y+1}{5} = \frac{z-2}{-7}$.

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho hai véctơ $\vec{a} = \left(2;3;2\right)$ và $\vec{b} = \left(1;1;-1\right)$. Véctơ $\vec{a} - \vec{b}$ có toạ độ là

A. $\left(-1;-2;3\right)$. **B.** $\left(3;5;1\right)$. **C.** $\left(3;4;1\right)$. **D.** $\left(1;2;3\right)$.

Lời giải

Ta có: $\vec{a} - \vec{b} = \left(2-1;3-1;2+1\right) \Rightarrow \vec{a} - \vec{b} = \left(1;2;3\right)$.

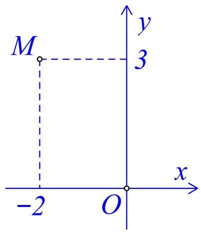
Câu 11. Cho khối lăng trụ có diện tích đáy bằng B và chiều cao bằng h. Thể tích V của khối lăng trụ đã cho được tính theo công thức nào dưới đây?

A. $V = \frac{1}{2}Bh$. **B.** $V = Bh$. **C.** $V = 3Bh$. **D.** $V = \frac{1}{3}Bh$.

Lời giải

Thể tích V của khối lăng trụ đã cho được tính theo công thức $V = Bh$.

Câu 12. Điểm M trong hình bên dưới biểu diễn số phức nào sau đây?



A. $z_3 = -2+3i$. **B.** $z_2 = 2-3i$. **C.** $z_1 = 3+2i$. **D.** $z_4 = 3-2i$.

Lời giải

Dựa vào hình vẽ ta có $M(-2;3)$, suy ra điểm $M(-2;3)$ là điểm biểu diễn của số phức $z_3 = -2+3i$.

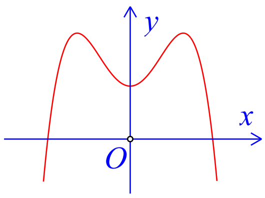
Câu 13. Thể tích của khối trụ có chiều cao $h = 2$ và bán kính đáy $r = 3$ là

A. 6π. **B.** 9π. **C.** 15π. **D.** 18π.

Lời giải

Thể tích khối trụ là $V = \pi r^2 h = \pi.3^2.2 = 18\pi$.

Câu 14. Hàm số nào sau đây có đồ thị là đường cong như hình bên dưới?



A. $y = x^4 - 2x^2 + 1$. **B.** $y = -x^4 + 2x^2 + 1$. **C.** $y = -x^3 + 3x^2 + 1$. **D.** $y = x^3 - 3x^2 + 1$.

Lời giải

Đồ thị trên là đồ thị hàm số trùng phương có hệ số $a < 0$ nên chọn đáp án B.

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{2}$?

A. $N(-1;0;1)$. **B.** $Q(-2;-1;-2)$. **C.** $M(2;1;2)$. **D.** $P(1;0;-1)$.

Lời giải

Thế tọa độ điểm $P(1;0;-1)$ vào phương trình đường thẳng d, ta có $\frac{1-1}{2} = \frac{0}{1} = \frac{-1+1}{2}$ là mệnh đề đúng nên điểm $P(1;0;-1)$ thuộc đường thẳng d.

Câu 16. Nghiệm của phương trình $3^x = 7$ là

A. $x = 3^7$. **B.** $x = \log_7 3$. **C.** $x = \frac{7}{3}$. **D.** $x = \log_3 7$.

Lời giải

Phương trình $3^x = 7 \Leftrightarrow x = \log_3 7$.

Câu 17. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và k là một số thực khác 0. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int kf(x)\mathrm{d}x = k\int f(x)\mathrm{d}x$.

B. $\int kf(x)\mathrm{d}x = k + \int f(x)\mathrm{d}x$.

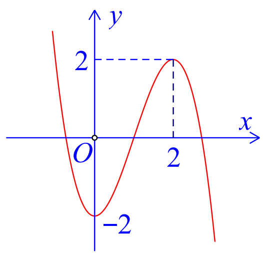
C. $\int kf(x)\mathrm{d}x = \int k\,\mathrm{d}x.\int f(x)\mathrm{d}x$.

D. $\int kf(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{k}\int f(x)\mathrm{d}x$.

Lời giải

Tính chất của nguyên hàm: $\int kf(x)\mathrm{d}x = k\int f(x)\mathrm{d}x$ với k là một số thực khác 0.

Câu 18. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong như hình bên dưới.



Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(-\infty;0)$. **B.** $(2;+\infty)$. **C.** $(-2;2)$. **D.** $(0;2)$.

Lời giải

Dựa vào đồ thị, hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0;2)$.

Câu 19. Với a là số thực dương, $\log a^{10}$ bằng

A. $10a$. **B.** $10+\log a$. **C.** $10\log a$. **D.** $\frac{1}{10}\log a$.

Lời giải

Ta có $\log a^{10} = 10\log a$ nên chọn C.

Câu 20. Cho hai số phức $z_1 = 2+3i$ và $z_2 = 3-2i$. Số phức $z_1.z_2$ bằng

A. $12+5i$. **B.** $-5i$. **C.** $6-6i$. **D.** $5i$.

Lời giải

Ta có $z_1.z_2 = (2+3i)(3-2i) = 6-4i+9i-6i^2 = 12+5i.$ Chọn A.

Câu 21. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	-6	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đã cho đạt cực đại tại

A. $x=-1$. **B.** $x=-6$. **C.** $x=5$. **D.** $x=2$.

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy hàm số đạt cực đại tại $x=-1$ nên chọn A.

Câu 22. **[Mức độ 1]** Họ nguyên hàm của của hàm số $f\left(x\right)=x^2-3x$ là

A. $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+C$.

B. $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=2x-3+C$.

C. $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=x^3-3x^2+C$.

D. $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}-3x^2+C$.

Lời giải

Họ nguyên hàm của của hàm số $f\left(x\right)=x^2-3x$ là

$$\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\left(x^2-3x\right)\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+C.$$

Câu 23. **[Mức độ 1]** Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\frac{2x-4}{x+1}$ là đường thẳng có phương trình

A. $x=2$.

B. $x=-1$.

C. $x=-2$.

D. $x=1$.

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to-1^+}\frac{2x-4}{x+1}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to-1^-}\frac{2x-4}{x+1}=+\infty$. Nên hàm số $y=\frac{2x-4}{x+1}$ có duy nhất một đường tiệm cận đứng $x=-1$.

Câu 24. **[Mức độ 1]** Cho khối chóp có diện tích đáy $B=6$ và chiều cao $h=4$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

A. 8.

B. 24.

C. 12.

D. 72.

Lời giải

Thể tích của khối chóp đã cho là $V=\frac{1}{3}Bh=\frac{1}{3}.6.4=8$.

Câu 25. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu tâm $I\left(1;0;-2\right)$ và bán kính $R=4$ có phương trình là

A. $\left(x-1\right)^2+y^2+\left(z+2\right)^2=4$.

B. $\left(x-1\right)^2+y^2+\left(z+2\right)^2=16$.

C. $\left(x+1\right)^2+y^2+\left(z-2\right)^2=4$.

D. $\left(x+1\right)^2+y^2+\left(z-2\right)^2=16$.

Lời giải

Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu tâm $I\left(1;0;-2\right)$ và bán kính $R=4$ có phương trình là

$\left(x-1\right)^2+y^2+\left(z+2\right)^2=16$.

Câu 26. Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_{\frac{1}{4}}\left(x-1\right)+\log_4\left(14-2x\right)\ge0$ là

A. 5.

B. 4.

C. 6.

D. 3.

Lời giải

Điều kiện xác định: $\begin{cases}x-1>0\\14-2x>0\end{cases}\Leftrightarrow1<x<7$.

Với điều kiện trên, ta có: $\log_{\frac{1}{4}}\left(x-1\right)+\log_4\left(14-2x\right)\ge0\Leftrightarrow-\log_4\left(x-1\right)+\log_4\left(14-2x\right)\ge0$

$\Leftrightarrow\log_4\left(14-2x\right)\ge\log_4\left(x-1\right)\Leftrightarrow14-2x\ge x-1\Leftrightarrow x\le5$.

Kết hợp với điều kiện ta thấy có 4 nghiệm nguyên của bất phương trình đã cho là $2;3;4;5$.

Câu 27. Cho $\log_a 5 = 3$, khi đó giá trị của $\log_{a^2}\left(5a^3\right)$ bằng

A. 3. **B.** 8. **C.** 5. **D.** 15.

Lời giải

$\log_{a^2}\left(5a^3\right) = \frac{1}{2}\log_a\left(5a^3\right) = \frac{1}{2}\left(\log_a 5 + \log_a a^3\right) = \frac{1}{2}\left(\log_a 5 + 3\right) = \frac{1}{2}(3+3) = 3$.

Câu 28. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;2]$ và thỏa mãn $\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x = 6$. Giá trị của tích phân $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(2\sin x)\cos x\mathrm{d}x$ bằng

A. -6. **B.** -3. **C.** 3. **D.** 6.

Lời giải

Đặt $t = 2\sin x \Rightarrow \mathrm{d}t = 2\cos x\mathrm{d}x \Leftrightarrow \frac{1}{2}\mathrm{d}t = \cos x\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 0$; $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 2$.

$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(2\sin x)\cos x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\limits_0^2 f(t)\mathrm{d}t = 3$.

Câu 29. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = 2x^3 - 6x$ trên đoạn $[0;2]$ bằng

A. 0. **B.** 4. **C.** -4. **D.** 2.

Lời giải

Hàm số $f(x) = 2x^3 - 6x$ liên tục trên đoạn $[0;2]$.

Ta có $f'(x) = 6x^2 - 6,\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \notin [0;2] \end{array}\right.$.

$f(1) = -4, f(0) = 0, f(2) = 4$. Suy ra giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[0;2]$ là $f(2) = 4$.

Câu 30. Hàm số $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;3)$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $(-3;1)$. **D.** $(1;3)$.

Lời giải

Xét hàm số $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

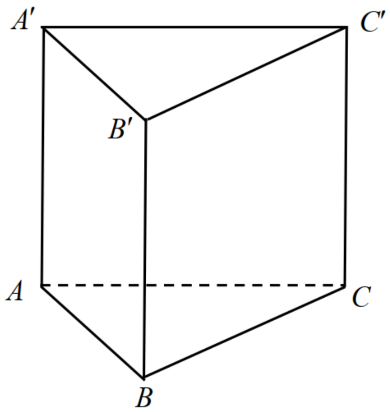
$y' = x^2 - 4x + 3,\ y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 3 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{7}{3}$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào BBT, suy ra hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;3)$.

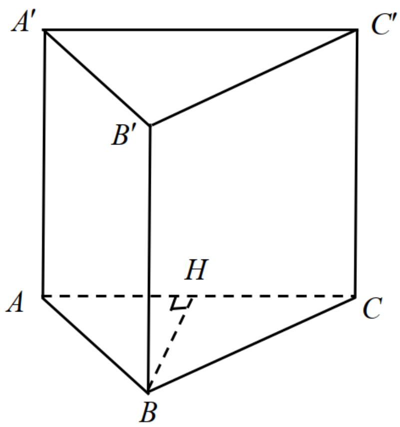
Câu 31. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh đều bằng 2 (tham khảo hình bên dưới)



Khoảng cách từ B đến mặt phẳng $(ACC'A')$ bằng

A. $\sqrt{3}$. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** 2.

Lời giải



Trong mặt phẳng (ABC) kẻ $BH \perp AC$.

Vì $ABC.A'B'C'$ là hình lăng trụ tam giác đều $A'A \perp (ABC) \Rightarrow A'A \perp BH$.

Vậy $\begin{cases} BH \perp AC,\ BH \perp A'A \\ AC, A'A \subset (ACC'A') \\ AC \cap A'A = A \end{cases} \Rightarrow BH \perp (ACC'A') \Rightarrow d\left(B,(ACC'A')\right) = BH$.

ΔABC đều cạnh bằng 2 nên $BH = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$.

Câu 32. Cho số phức $z=(1+2i)^2$. Số phức $\frac{z}{i}$ bằng

A. $-3+4i$. **B.** $2-i$. **C.** $4+3i$. **D.** $4-3i$.

Lời giải

Ta có: $z=(1+2i)^2=-3+4i\Rightarrow \frac{z}{i}=\frac{-3+4i}{i}=4+3i$.

Câu 33. Cho cấp số cộng (u_n) biết $u_1=5, u_2=8$. Giá trị của u_4 bằng

A. 17. **B.** 11. **C.** 14. **D.** 13.

Lời giải

Ta có (u_n) là cấp số cộng nên $u_2=u_1+d\Leftrightarrow 8=5+d\Leftrightarrow d=3$.

Vậy $u_4=u_1+3d=5+3.3=14$.

Câu 34. Tập xác định của hàm số $y=\log_3(x^2-1)$ là

A. $(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$. **B.** $(-1;1)$.

C. $(-\infty;-1]\cup[1;+\infty)$. **D.** $[-1;1]$.

Lời giải

TXĐ: $x^2-1>0\Leftrightarrow x<-1$ v $x>1$. Vậy tập xác định: $D=(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$.

Câu 35. **[Mức độ 2]** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x-1)(x+3)$. Hàm số đạt cực đại tại điểm

A. $x=3$. **B.** $x=1$. **C.** $x=0$. **D.** $x=-3$.

Lời giải

Ta có bảng xét dấu của $f'(x)$:

x	$-\infty$		-3		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu của $f'(x)$ ta thấy hàm số đạt cực đại tại điểm $x=0$.

Câu 36. **[Mức độ 3]** Một hộp chứa 9 quả cầu gồm 4 quả màu xanh, 3 quả màu đỏ và 2 quả màu vàng. Lấy ngẫu nhiên 3 quả cầu từ hộp đó. Xác suất để trong 3 quả cầu lấy được có ít nhất một quả màu đỏ bằng

A. $\frac{19}{28}$. **B.** $\frac{17}{42}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{16}{21}$.

Lời giải

Không gian mẫu Ω bao gồm các cách lấy ra tùy ý 3 quả cầu từ 9 quả cầu trong hộp nên ta có $n(\Omega)=C_9^3$.

Gọi A là biến cố "trong 3 quả lấy được có ít nhất một quả màu đỏ ". Khi đó ta có $\overline{A}$ là biến cố " không lấy được quả màu đỏ nào", do đó $n(\overline{A})=C_6^3$.

Từ đó $P(\overline{A})=\frac{C_6^3}{C_9^3}=\frac{5}{21}$. Suy ra $P(A)=\frac{16}{21}$.

Câu 37. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-3x}},\forall x\in\left(-\infty;\dfrac{1}{3}\right)$ và $f(-1)=\dfrac{2}{3}$. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F(-1)=0$. Giá trị của $F\left(\dfrac{1}{4}\right)$ bằng

A. $\dfrac{4}{3}$. **B.** $\dfrac{14}{27}$. **C.** $-\dfrac{8}{27}$. **D.** $\dfrac{1}{54}$.

Lời giải

Ta có $f(x)=\int\dfrac{1}{\sqrt{1-3x}}\mathrm{d}x=-\dfrac{2}{3}\sqrt{1-3x}+C_1$.

Mà $f(-1)=\dfrac{2}{3}\Leftrightarrow-\dfrac{2}{3}\sqrt{1-3(-1)}+C_1=\dfrac{2}{3}\Leftrightarrow C_1=2$.

Khi đó $f(x)=-\dfrac{2}{3}\sqrt{1-3x}+2$.

Lại có $F(x)=\int\left(-\dfrac{2}{3}\sqrt{1-3x}+2\right)\mathrm{d}x=\int\left[-\dfrac{2}{3}(1-3x)^{\frac{1}{2}}+2\right]\mathrm{d}x=\dfrac{4}{27}(1-3x)^{\frac{3}{2}}+2x+C_2$.

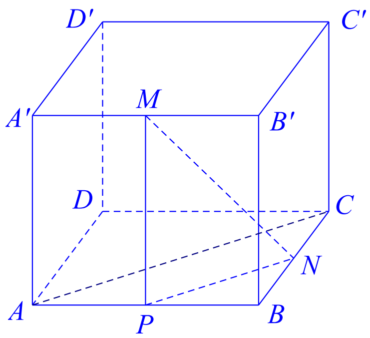
Mà $F(-1)=0\Leftrightarrow\dfrac{4}{27}(1+3)^{\frac{3}{2}}-2+C_2=0\Leftrightarrow C_2=\dfrac{22}{27}$.

Vậy $F(x)=\dfrac{4}{27}(1-3x)^{\frac{3}{2}}+2x+\dfrac{22}{27}\Rightarrow F\left(\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{4}{3}$.

Câu 38. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB=1, AD=AA'=\sqrt{3}$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của $A'B'$ và BC. Góc giữa hai đường thẳng MN và AC bằng

A. 45^0. **B.** 60^0. **C.** 30^0. **D.** 90^0.

Lời giải



Xét tam giác ABC vuông tại $B\Rightarrow AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=2$.

Gọi P là trung điểm của AB.

Khi đó NP là đường trung bình của tam giác $ABC\Rightarrow\begin{cases}NP//AC\\NP=\dfrac{1}{2}AC=1\end{cases}$.

Do $NP//AC$ nên $(\widehat{MN,AC})=(\widehat{MN,NP})=\widehat{MNP}$.

Do M,P lần lượt là trung điểm của $A'B'$ và $AB\Rightarrow MP=AA'=\sqrt{3}$.

Xét tam giác MNP vuông tại P có $\tan\widehat{MNP}=\dfrac{MP}{NP}=\sqrt{3}\Rightarrow\widehat{MNP}=60^0$.

Câu 39. **[Mức độ 2]** Trên tập hợp số phức, biết $z_0=3-2i$ là một nghiệm của phương trình $z^2+az+b=0$ (với $a,\ b\in\mathbb{R}$). Giá trị của $a+b$ bằng

A. 7.　　**B.** -19.　　**C.** -7.　　**D.** 19.

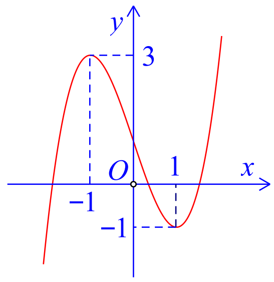
Lời giải

Phương trình $z^2+az+b=0$ với hệ số thực $a,\ b$ có nghiệm $z_1=z_0=3-2i$ thì sẽ có nghiệm $z_2=\overline{z_1}=3+2i$. Theo định lí Vi-ét ta có:

$$\begin{cases} z_1+z_2=-\dfrac{a}{1}=-a \\ z_1z_2=\dfrac{b}{1}=b \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 3-2i+3+2i=-a \\ (3-2i)(3+2i)=b \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a=-6 \\ b=13 \end{cases}.$$

Khi đó $a+b=-6+13=7$.

Câu 40. **[Mức độ 3]** Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong như hình vẽ bên dưới.

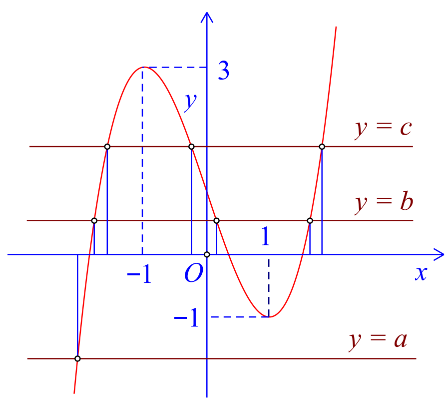


Số nghiệm của phương trình $f\left[f(x)\right]=0$ là

A. 7.　　**B.** 8.　　**C.** 9.　　**D.** 6.

Lời giải

Ta có: $f\left[f(x)\right]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} f(x)=a<-1 \\ f(x)=b\in(0;1) \\ f(x)=c\in(1;3) \end{array}\right.$.



Phương trình $f(x)=a<-1$ có 1 nghiệm.

Phương trình $f(x)=b\in(0;1)$ có 3 nghiệm.

Phương trình $f(x)=c\in(1;3)$ có 3 nghiệm.

Tất các các nghiệm này khác nhau. Vậy phương trình $f\left[f(x)\right]=0$ có 7 nghiệm.

Cách khác:

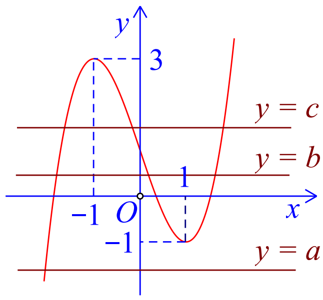
Hàm số bậc ba $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có $f'(x)=3ax^2+2bx+c$ có hai điểm cực trị là $x=\pm1$, suy ra $f'(x)=3a(x-1)(x+1)=3a\left(x^2-1\right)=3ax^2-3a\Rightarrow f(x)=ax^3-3ax+d$.

Đồ thị hàm số $y=f(x)$ đi qua điểm $A(-1;3)$ và $B(1;-1)$ nên ta có hệ

$$\begin{cases}f(-1)=3\\f(1)=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2a+d=3\\-2a+d=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\d=1\end{cases}\Rightarrow f(x)=x^3-3x+1.$$

Khi đó $f(x)=0\Leftrightarrow x^3-3x+1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=a\approx-1,8794\\x=b\approx0,3473\\x=c\approx1,5321\end{array}\right.$.

Phương trình $f\left[f(x)\right]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=a\\f(x)=b\\f(x)=c\end{array}\right.$.



Dựa vào đồ thị ta thấy phương trình $f(x)=a$ có một nghiệm, phương trình $f(x)=b$ có ba nghiệm và phương trình $f(x)=c$ có 3 nghiệm.

Vậy phương trình $f\left[f(x)\right]=0$ có tất cả 7 nghiệm.

Câu 41. Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\left(9^x-10.3^{x+2}+729\right)\sqrt{2\ln30-\ln(9x)}\ge0$?

A. 97. **B.** 96. **C.** 98. **D.** 99.

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases}x>0\\2\ln30-\ln(9x)\ge0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\x\le100\end{cases}\Leftrightarrow x\in(0;100]$.

+ Với $x=100$, khi đó $\left(9^x-10.3^{x+2}+729\right)\sqrt{2\ln30-\ln(9x)}=0$. Suy ra $x=100$ thỏa mãn.

+ Với $x\in(0;100)$, bất phương trình $\left(9^x-10.3^{x+2}+729\right)\sqrt{2\ln30-\ln(9x)}\ge0$

$$\Leftrightarrow\left(3^x\right)^2-90.3^x+729\ge0$$

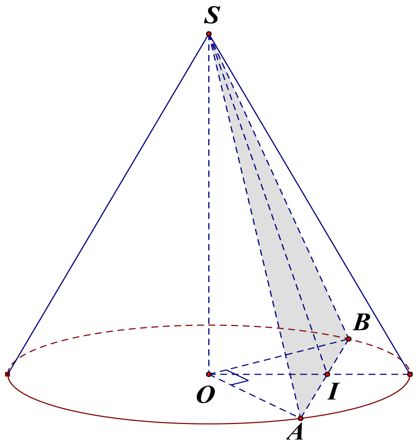
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^x \geq 81 \\ 3^x \leq 9 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq 4 \\ x \leq 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in (0;2] \cup [4;100)$.

Vậy bất phương trình đã cho có tập nghiệm là $S = (0;2] \cup [4;100]$. Suy ra có 99 số nguyên x thỏa mãn bài toán.

Câu 42. Cho khối nón đỉnh S có đáy là đường tròn tâm O, bán kính R. Trên đường tròn (O) lấy hai điểm A, B sao cho tam giác OAB vuông. Biết diện tích tam giác SAB bằng $\sqrt{2}R^2$. Thể tích khối nón đã cho bằng

A. $\frac{\sqrt{14}}{6}\pi R^3$. **B.** $\frac{\sqrt{14}}{2}\pi R^3$. **C.** $\frac{\sqrt{14}}{3}\pi R^3$. **D.** $\frac{\sqrt{14}}{12}\pi R^3$.

Lời giải



ΔOAB vuông tại $O \Rightarrow AB = \sqrt{R^2 + R^2} = R\sqrt{2}$.

Gọi I là trung điểm của AB.

Ta có ΔSAB cân tại $S \Rightarrow SI$ vuông góc với AB.

$$S_{\Delta SAB} = \frac{1}{2}.AB.SI = R^2\sqrt{2} \Rightarrow SI = \frac{2.R^2\sqrt{2}}{R\sqrt{2}} = 2R.$$

Ta lại có OI là trung tuyến của tam giác vuông OAB

$$\Rightarrow OI = \frac{AB}{2} = \frac{R\sqrt{2}}{2}.$$

$$\Delta SOI \text{ vuông tại } O \Rightarrow SO = \sqrt{SI^2 - OI^2} = \sqrt{(2R)^2 - \left(\frac{R\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{14}}{2}R.$$

$$V = \frac{1}{3}\pi.OA^2.SO = \frac{1}{3}\pi.R^2.\frac{\sqrt{14}}{2}R = \frac{\sqrt{14}}{6}\pi R^3.$$

Câu 43. Trong không gian $Oxyz$, giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha): x + 2y + z - 1 = 0$ và $(\beta): x - y - z + 2 = 0$ có phương trình là

A. $\begin{cases} x=-1+t \\ y=1+2t \\ z=t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=-1+t \\ y=1-2t \\ z=3t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=t \\ y=-t \\ z=2-t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=-t \\ y=2t \\ z=1-3t \end{cases}$.

Lời giải

Gọi $d=(\alpha)\cap(\beta)$.

Mặt phẳng (α) và (β) lần lượt có một VTPT là $\overrightarrow{n_\alpha}=(1;2;1)$ và $\overrightarrow{n_\beta}=(1;-1;-1)$.

Suy ra d có một VTPT là $\vec{n}=\left[\overrightarrow{n_\beta},\overrightarrow{n_\alpha}\right]=(1;-2;3)$.

Lấy $M\in(\alpha)\cap(\beta)\Rightarrow M(-1;1;0)\in d$.

Vậy d có phương trình là $\begin{cases} x=-1+t \\ y=1-2t \\ z=3t \end{cases}$.

Câu 44. Trong không gian $Oxyz$, gọi (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng $d:\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{-1}$ và cắt trục Ox,Oy lần lượt tại A và B sao cho đường thẳng AB vuông góc với d. Phương trình của mặt phẳng (P) là

A. $x+2y+5z-4=0$. **B.** $2x-y-3=0$. **C.** $x+2y-z-4=0$. **D.** $x+2y+5z-5=0$.

Lời giải

Ta có $d:\begin{cases} M(2;1;0)\in d \\ \overrightarrow{u_d}=(1;2;-1) \end{cases}$.

Do $A\in Ox, B\in Oy\Rightarrow AB\subset(Oxy)\Rightarrow\overrightarrow{u_{AB}}\perp\vec{k}=(0;0;1)$.

Đường thẳng $AB\perp d\Rightarrow\overrightarrow{u_{AB}}\perp\overrightarrow{u_d}$.

Suy ra $\overrightarrow{u_{AB}}=\left[\vec{k},\overrightarrow{u_d}\right]=(-2;1;0)$.

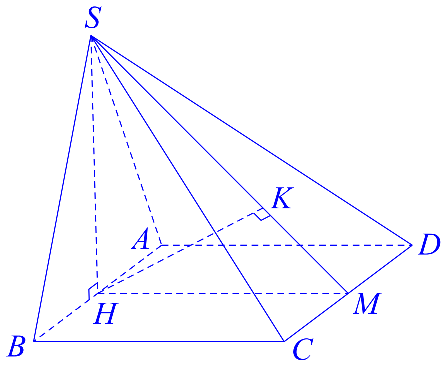
Do $\begin{cases} d\subset(P) \\ AB\subset(P) \end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{n_P}=\left[\overrightarrow{u_{AB}},\overrightarrow{u_d}\right]=(-1;-2;-5)$.

Phương trình mặt phẳng (P) qua $M(2;1;0)$ và nhận véctơ $\overrightarrow{n_P}=(-1;-2;-5)$ làm một véctơ pháp tuyến là $(P):-1(x-2)-2(y-1)-5(z-0)=0\Leftrightarrow x+2y+5z-4=0$.

Câu 45. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB=2, AD=2\sqrt{3}$, tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc đáy, khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SC bằng 3. Tính thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng

A. $16\sqrt{3}$. **B.** $\frac{16\sqrt{3}}{3}$. **C.** $24\sqrt{3}$. **D.** $8\sqrt{3}$.

. **Lời giải**



Gọi H là trung điểm của AB ta có:

$$\left.\begin{array}{l}(SAB)\perp(ABCD)\\(SAB)\cap(ABCD)=AB\\SH\subset(SAB)\\SH\perp AB\end{array}\right\}\Rightarrow SH\perp(ABCD);$$

Gọi M là trung điểm của CD, ta có:

$\left.\begin{array}{l}CD\perp HM\\CD\perp SH\end{array}\right\}\Rightarrow CD\perp(SHM);CD\subset(SCD)\Rightarrow(SHM)\perp(SCD)$ theo giao tuyến SM ;

Ta có $AB//CD\subset(SCD)\Rightarrow AB//(SCD)$;

$\Rightarrow d_{(AB,SC)}=d_{[AB,(SCD)]}=d_{[H,(SCD)]}$;

Kẻ $HK\perp SM\Rightarrow HK\perp(SCD)\Rightarrow d_{[H,(SCD)]}=HK$;

Ta có ΔSHM vuông tại H, HK là đường cao nên

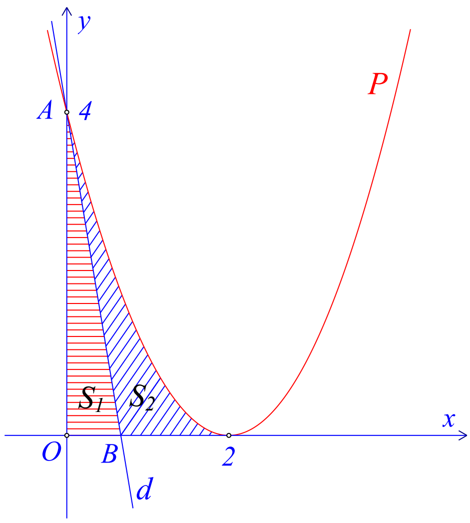
$$\frac{1}{HK^2}=\frac{1}{SH^2}+\frac{1}{HM^2}\Rightarrow\frac{1}{SH^2}=\frac{1}{9}-\frac{1}{12}=\frac{1}{36}\Rightarrow SH=6;$$

Vậy $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}.S_{ABCD}.SH=\frac{1}{3}.2.2\sqrt{3}.6=8\sqrt{3}$.

Câu 46. Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2-4x+4$, trục hoành và trục tung. Đường thẳng d qua $A(0;4)$ và có hệ số góc k $(k\in\mathbb{R})$ chia hình (H) thành hai phần có diện tích bằng nhau. Giá trị của k bằng

A. -8. **B.** -2. **C.** -4. **D.** -6.

Lời giải



Phương trình đường thẳng $d: y = kx + 4$.

Từ hình vẽ, do đường thẳng d chia hình (H) thành hai phần có diện tích bằng nhau nên d cắt trục Ox tại điểm $B\left(-\frac{4}{k};0\right)$ với điều kiện $0 < -\frac{4}{k} < 2 \Leftrightarrow k < -2$.

Với mọi $x \in [0;2]$ thì $x^2 - 4x + 4 \geq 0$.

$S = S_1 + S_2 = \int_0^2 |x^2 - 4x + 4|\,\mathrm{d}x = \frac{8}{3}$.

Do $S_1 = S_2$ nên $S_1 = \frac{4}{3}$.

Ta có: $S_1 = \frac{1}{2} OA.OB = \frac{1}{2}.4.\left|\frac{4}{-k}\right| = \frac{1}{2}.4.\frac{4}{-k} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow k = -6$.

Câu 47. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{3}{2}$ và $f(0) = 0$. Có bao nhiêu số nguyên $m \in (-2021;2022)$ để hàm số $g(x) = \left|f^2(x) + 2f(x) + m\right|$ có đúng 3 điểm cực trị?

A. 2021. **B.** 2020. **C.** 2022. **D.** 4042.

Lời giải

Ta có: $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - x^2 + \frac{3}{2}x + C$.

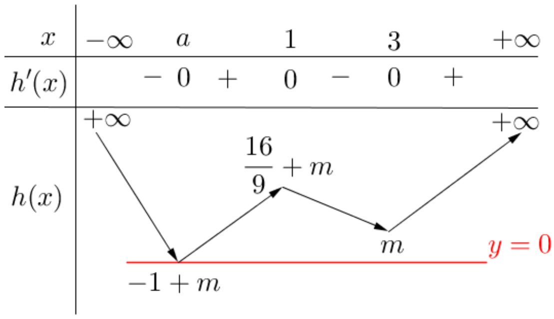
Mà $f(0) = 0 \Leftrightarrow C = 0$. Do đó, $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - x^2 + \frac{3}{2}x$.

Đặt $h(x) = f^2(x) + 2f(x) + m$.

$h'(x) = 2f'(x).f(x) + 2f'(x) = 2f'(x)\left(f(x) + 1\right)$.

$h'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x) = 0 \\ f(x) = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \ \vee \ x = 1 \\ x = a \approx -0,4920 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên của $h(x)$



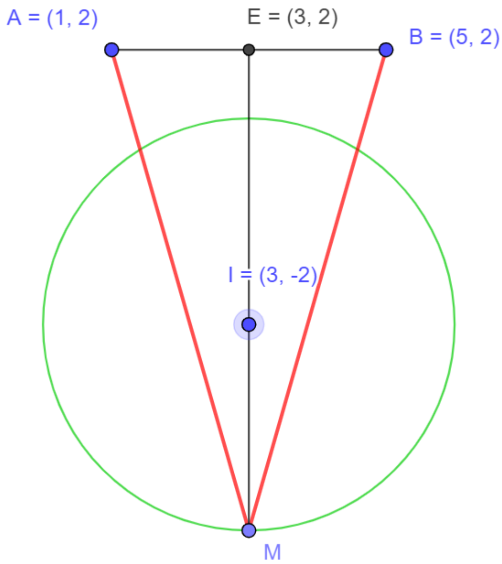
Từ bảng biến thiên, $g(x)=\left|f^2(x)+2f(x)+m\right|=\left|h(x)\right|$ có đúng 3 điểm cực trị

$\Leftrightarrow 0\le -1+m \Leftrightarrow m\ge 1$. Mà $\begin{cases} m\in\mathbb{Z} \\ m\in(-2021;2022)\end{cases}$ nên có 2021 giá trị m thỏa yêu cầu.

Câu 48. Cho các số phức w,z thỏa mãn $\left|w+i\right|=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$ và $5w=(2+i)(z-4)$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\left|z-1-2i\right|+\left|z-5-2i\right|$ bằng

A. $6\sqrt{7}$. **B.** $2\sqrt{53}$. **C.** $4\sqrt{13}$. **D.** $4+2\sqrt{13}$.

Lời giải



Gọi $z=x+yi$ $(x,y\in\mathbb{R})$ khi đó $M(x;y)$ biểu diễn cho số phức z.

Theo đề bài: $5w=(2+i)(z-4)$

$\Leftrightarrow 5(w+i)=(2+i)z-(8-i)\Leftrightarrow \left|5(w+i)\right|=\left|(2+i)z-(8-i)\right|$

$\Leftrightarrow \left|(2-i)(w+i)\right|=\left|z-(3-2i)\right|\Leftrightarrow \left|z-(3-2i)\right|=3.$

Suy ra $M(x;y)$ thuộc đường tròn tâm $I(3;-2)$ và bán kính $R=3$.

Ta có $P=\left|z-1-2i\right|+\left|z-5-2i\right|=\left|z-(1+2i)\right|+\left|z-(5+2i)\right|=MA+MB$ với $A(1;2)$ và $B(5;2)$.

Gọi E là trung điểm của đoạn thẳng AB suy ra $E(3;2)$ và $IE=4$ (E nằm ngoài (I)).

$P = MA + MB \le \sqrt{\left(1^2+1^2\right)\left(MA^2+MB^2\right)} = \sqrt{2\left(MA^2+MB^2\right)} = \sqrt{4ME^2+AB^2} = \sqrt{4ME^2+16}$.

Biểu thức P đạt giá trị lớn nhất khi độ dài ME lớn nhất hay M, I, E thẳng hàng.

Khi đó $ME_{\max} = IE + IM = 7$ và $\overrightarrow{IM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{EI} \Rightarrow M\left(3;-5\right)$.

Vậy biểu thức $P_{\max} = \sqrt{4.7^2+16} = 2\sqrt{53}$ khi $z = 3-5i$ và $w = \frac{3}{5} - \frac{11}{5}i$.

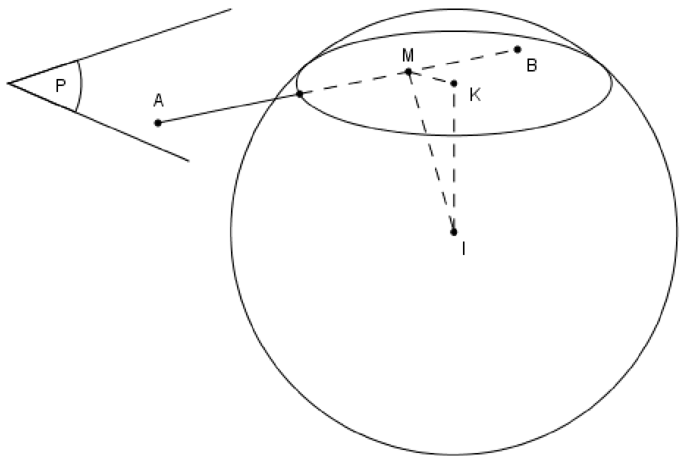
Câu 49. **[Mức độ 4]** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x+1)^2+(y-1)^2+z^2=4$ và hai điểm $A(1;2;4)$, $B(0;0;1)$. Mặt phẳng $(P): ax+by+cz+3=0$ $(a,b,c\in\mathbb{R})$ đi qua A, B và cắt (S) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính nhỏ nhất. Giá trị của $a+b+c$ bằng

A. $-\frac{3}{4}$. **B.** $\frac{33}{5}$. **C.** $\frac{27}{4}$. **D.** $\frac{31}{5}$.

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(-1;1;0)$ và bán kính $R=2$.

Ta có $IA=\sqrt{21}$, $IB=\sqrt{3}$ nên A nằm ngoài (S), B nằm trong (S). Do đó mặt phẳng (P) luôn cắt (S) theo một đường tròn (C) tâm K bán kính r.



Gọi M là hình chiếu vuông góc của I trên đường thẳng AB.

Ta có $IK = \mathrm{d}(I,(P))$ và $r^2 = R^2 - IK^2$.

Ta có $IK \perp (P) \Rightarrow IK \le IM \Rightarrow r^2 \ge R^2 - IM^2$.

Đẳng thức xảy ra khi $IM \perp (P)$. Khi đó

$\vec{n}_{(P)} = (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{IA}) \wedge \overrightarrow{AB} = (12;-18;8).$

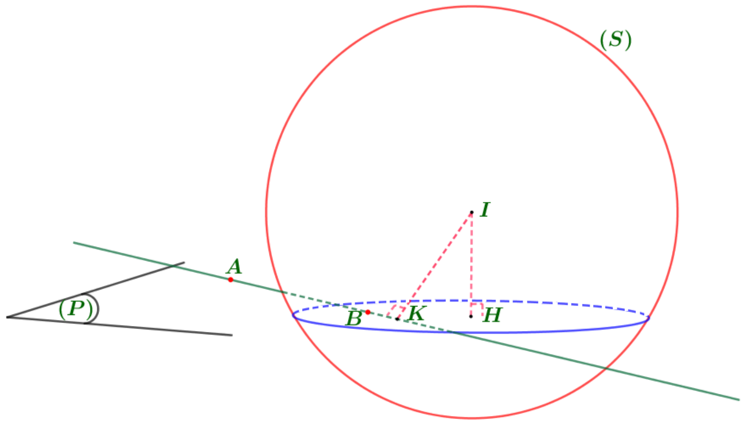
Vì $R; IM$ không đổi nên r có giá trị nhỏ nhất bằng $\sqrt{R^2-IM^2}$.

Khi đó phương trình mặt phẳng (P) là

$$12(x-0)-18(y-0)+8(z-1)=0$$
$$\Leftrightarrow 12x-18y+8z-8=0$$
$$\Leftrightarrow -\frac{9}{2}x+\frac{27}{4}y-3z+3=0.$$

Vậy $a+b+c=-\dfrac{9}{2}+\dfrac{27}{4}-3=-\dfrac{3}{4}$.

Cách 2:



Mặt cầu $(S):\begin{cases}\text{Tâm } I(-1;1;0)\\ R=2\end{cases}$.

Do $IB=\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}=\sqrt{3}<R=2$ nên mặt phẳng (P) luôn cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn giao tuyến (C).

Gọi H,K lần lượt là hình chiếu vuông góc của tâm I lên (P) và đường thẳng AB và r là bán kính đường tròn giao tuyến (C).

Ta có $r=\sqrt{R^2-IH^2}=\sqrt{R^2-\left[d\left(I,(P)\right)\right]^2}$.

Vì $d\left(I,(P)\right)=IH\le IK\Rightarrow r\ge\sqrt{R^2-IK^2}\Rightarrow r_{\min}=\sqrt{R^2-IK^2}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $H\equiv K$ hay $(P)\perp IK$.

Ta có $\overrightarrow{BA}=(1;2;3)$, suy ra $AB:\begin{cases}x=t\\ y=2t\\ z=1+3t\end{cases},(t\in\mathbb{R})$.

Do $K\in AB\Rightarrow K(t;2t;1+3t)\Rightarrow\overrightarrow{IK}=(t+1;2t-1;3t+1)$.

$IK\perp AB\Leftrightarrow\overrightarrow{IK}.\overrightarrow{BA}=0\Leftrightarrow 1(t+1)+2(2t-1)+3(3t+1)=0\Leftrightarrow t=-\dfrac{1}{7}$. Suy ra $\overrightarrow{IK}=\left(\dfrac{6}{7};-\dfrac{9}{7};\dfrac{4}{7}\right)$

Phương trình mặt phẳng (P) qua B và nhận $\overrightarrow{n_P}=(6;-9;4)=7.\overrightarrow{IK}$ làm một véctơ pháp tuyến có phương trình $6(x-0)-9(y-0)+4(z-1)=0\Leftrightarrow-\dfrac{9}{2}x+\dfrac{27}{4}y-3z+3=0$.

Khi đó $\begin{cases} a=-\dfrac{9}{2} \\ b=\dfrac{27}{4} \\ c=-3 \end{cases}$. Vậy $a+b+c=-\dfrac{3}{4}$.

Câu 50. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $2.3^{x-1}-\log_3\left(3^{x-2}+2y\right)=6y-x+1$ và $2022^{-1}\le y\le 2022$?

A. 13. **B.** 15. **C.** 7. **D.** 6.

Lời giải

+ Điều kiện $3^{x-2}+2y>0$.

+ Phương trình tương đương: $2.3^{x-1}-\log_3\left(3^{x-1}+6y\right)=6y-x\ (*)$.

+ Đặt: $u=\log_3\left(3^{x-1}+6y\right)\Rightarrow 3^{x-1}+6y=3^u\ \Rightarrow 6y=3^u-3^{x-1}$.

Ta có: $(*)\Leftrightarrow 2.3^{x-1}-u=3^u-3^{x-1}-x$

$\Leftrightarrow 3.3^{x-1}+x=3^u+u\Leftrightarrow 3^x+x=3^u+u$.

+ Hàm $f(t)=3^t+t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên

$3^x+x=3^u+u\Leftrightarrow x=u\Leftrightarrow x=\log_3\left(3^{x-1}+6y\right)$

$\Leftrightarrow 3^{x-1}+6y=3^x\Leftrightarrow y=3^{x-2}$ (thỏa đk $3^{x-2}+2y>0$).

+ Do $2022^{-1}\le y\le 2022$ nên $2022^{-1}\le 3^{x-2}\le 2022$

$\Leftrightarrow \log_3 2022^{-1}\le x-2\le \log_3 2022$

$\Leftrightarrow \log_3 2022^{-1}+2\le x\le \log_3 2022+2$

$\Rightarrow -5<x<9$.

+ Do x nguyên, suy ra $x\in\{-4;-3;....;8\}$.

$x\in\{-4;-3;-2;-1;0;1\}$ suy ra y không nguyên do $0<y=3^{x-2}<1$.

$x\in\{2;3;4;5;6;7;8\}$ suy ra y nguyên do $y\in\{3^0;3^1;3^2;3^3;3^4;3^5;3^6\}$.

+ Vậy có 7 cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa YCBT.

---HẾT---