

NEW

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

**TRẮC NGHIỆM NÂNG CAO
NGUYÊN HÀM - TÍCH PHÂN
VÀ ỨNG DỤNG**

(CHINH PHỤC ĐIỂM 8, 9, 10)

ÔN THI THPT QUỐC GIA

MỤC LỤC

NGUYÊN HÀM NÂNG CAO.....	3
A – LÝ THUYẾT CHUNG.....	3
B – BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.....	4
TÍCH PHÂN NÂNG CAO	15
A – LÝ THUYẾT CHUNG.....	15
B – BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.....	16
ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN NÂNG CAO	55
A – LÝ THUYẾT CHUNG.....	55
B – BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.....	55
ỨNG DỤNG THỰC TẾ	87

NGUYÊN HÀM NÂNG CAO

A – LÝ THUYẾT CHUNG

1. Định nghĩa

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập K (khoảng, nửa khoảng, đoạn của R). Nếu Ta có hàm số $F(x)$ xác định trên K sao cho $F'(x) = f(x)$ thì $F(x)$ được gọi là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K.

Định lí 1. Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K thì với mỗi hằng số C, hàm số $G(x) = F(x) + C$ cũng là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K.

Định lí 2. Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K thì mọi nguyên hàm của $f(x)$ trên K đều có dạng $G(x) = F(x) + C$ với C là hằng số.

Định lí 3. Mọi hàm số $f(x)$ liên tục trên K đều có nguyên hàm trên K.

2. Tính chất:

$$\int f'(x) dx = f(x) + C \text{ với } C \text{ là hằng số.}$$

$$\int kf(x) dx = k \int f(x) dx \text{ với } k \text{ là hằng số khác } 0.$$

$$\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

Bảng nguyên hàm

Chú ý: công thức tính vi phân của $f(x)$ là $d[f(x)] = f'(x)dx$

Nguyên hàm cơ bản	Nguyên hàm của hàm hợp
$\int 0 dx = C$	$\int 0 du = C$
$\int dx = x + C$	$\int du = u + C$
$\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C (\alpha \neq -1)$	$\int u^\alpha du = \frac{1}{\alpha+1} u^{\alpha+1} + C (\alpha \neq -1)$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$	$\int \frac{1}{u} du = \ln u + C$

$\int e^x dx = e^x + C$	$\int e^u du = e^u + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$
$\int \cos x dx = \sin x + C$	$\int \cos u du = \sin u + C$
$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\int \sin u du = -\cos u + C$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$	$\int \frac{1}{\cos^2 u} du = \tan u + C$
$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$	$\int \frac{1}{\sin^2 u} du = -\cot u + C$

B – BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{e^x + 3}$ và $F(0) = -\frac{1}{3} \ln 4$. Tập nghiệm S của phương trình $3F(x) + \ln(x^3 + 3) = 2$ là:

- A.** $S = \{2\}$. **B.** $S = \{-2; 2\}$. **C.** $S = \{1; 2\}$. **D.** $S = \{-2; 1\}$.

Hướng dẫn giải:

$$\text{Ta có: } F(x) = \int \frac{dx}{e^x + 3} = \frac{1}{3} \int \left(1 - \frac{e^x}{e^x + 3} \right) dx = \frac{1}{3} (x - \ln(e^x + 3)) + C.$$

$$\text{Do } F(0) = -\frac{1}{3} \ln 4 \text{ nên } C = 0. \text{ Vậy } F(x) = \frac{1}{3} (x - \ln(e^x + 3)).$$

$$\text{Do đó: } 3F(x) + \ln(e^x + 3) = 2 \Leftrightarrow x = 2$$

Chọn A.

Câu 2: Cho $F(x) = x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)e^{2x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x)e^{2x}$.

- A.** $\int f'(x)e^{2x} dx = -x^2 + 2x + C$ **B.** $\int f'(x)e^{2x} dx = -x^2 + x + C$

C. $\int f'(x)e^{2x} dx = 2x^2 - 2x + C$

D. $\int f'(x)e^{2x} dx = -2x^2 + 2x + C$

Hướng dẫn giải:

Từ giả thiết $\Rightarrow F'(x) = f(x).e^{2x} \Leftrightarrow (x^2)' = f(x).e^{2x} \Leftrightarrow 2x = f(x).e^{2x}$ (1)

Đặt $A = \int f'(x).e^{2x} dx$. Đặt $u = e^{2x} \Rightarrow du = 2e^{2x} dx, dv = f'(x)dx$ chọn $v = f(x)$

$\Rightarrow A = e^{2x}.f(x) - 2 \int f(x).e^{2x} dx = 2x - 2F(x) + C = -2x^2 + 2x + C$

Chọn D.

Câu 3: Cho $F(x) = (x-1)e^x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)e^{2x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x)e^{2x}$.

A. $\int f'(x)e^{2x} dx = (4-2x)e^x + C$

B. $\int f'(x)e^{2x} dx = \frac{2-x}{2}e^x + C$

C. $\int f'(x)e^{2x} dx = (2-x)e^x + C$

D. $\int f'(x)e^{2x} dx = (x-2)e^x + C$

Hướng dẫn giải:

Từ giả thiết $\Rightarrow F'(x) = f(x).e^{2x} \Leftrightarrow [(x-1).e^x]' = f(x).e^{2x}$

$\Leftrightarrow x.e^x = f(x).e^{2x} \Leftrightarrow f(x) = \frac{x.e^x}{e^{2x}} = \frac{x}{e^x} \Rightarrow f'(x) = \left(\frac{x}{e^x}\right)' = \dots = \frac{1-x}{e^x}$

Đặt $A = \int f'(x).e^{2x} dx = \int \frac{1-x}{e^x}.e^{2x} dx = \int (1-x)e^x dx$

Đặt $\begin{cases} u = 1-x \Rightarrow du = -dx \\ dv = e^x dx \text{ chọn } v = e^x \end{cases} \Rightarrow A = (1-x)e^x + \int e^x dx = (1-x)e^x + e^x + C = e^x(2-x) + C$

Chọn C.

Câu 4: Cho $F(x) = -\frac{1}{3x^3}$ là một nguyên hàm của hàm số $\frac{f(x)}{x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x)\ln x$.

A. $\int f'(x)\ln x dx = \frac{\ln x}{x^3} + \frac{1}{5x^5} + C$

B. $\int f'(x)\ln x dx = \frac{\ln x}{x^3} - \frac{1}{5x^5} + C$

C. $\int f'(x)\ln x dx = \frac{\ln x}{x^3} + \frac{1}{3x^3} + C$

D. $\int f'(x)\ln x dx = -\frac{\ln x}{x^3} + \frac{1}{3x^3} + C$

Hướng dẫn giải:

$$\begin{aligned} \text{Từ giả thiết } \Rightarrow F'(x) = \frac{f(x)}{x} &\Leftrightarrow \left(-\frac{1}{3x^3}\right)' = \frac{f(x)}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{x^4} = \frac{f(x)}{x} \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{x^3} \\ \Rightarrow f'(x) &= -3 \cdot \frac{1}{x^4} \end{aligned}$$

$$\text{Đặt } A = \int f'(x) \cdot \ln x \cdot dx = \int \frac{-3 \ln x}{x^4} dx = -3 \int \frac{\ln x}{x^4} dx$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ dv = \frac{1}{x^4} dx \text{ chọn } v = -\frac{1}{3x^3} \end{cases} \Rightarrow A = -3 \left(-\frac{1}{3x^3} \ln x + \frac{1}{3} \int \frac{1}{x^4} dx \right) = \frac{\ln x}{x^3} + \frac{1}{3x^3} + C$$

Chọn C.

Câu 5: Cho $F(x) = \frac{1}{2x^2}$ là một nguyên hàm của hàm số $\frac{f(x)}{x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x) \ln x$

A. $\int f'(x) \ln x dx = -\left(\frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{2x^2}\right) + C$

B. $\int f'(x) \ln x dx = \frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{x^2} + C$

C. $\int f'(x) \ln x dx = -\left(\frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{x^2}\right) + C$

D. $\int f'(x) \ln x dx = \frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{2x^2} + C$

Hướng dẫn giải:

$$\begin{aligned} \text{Từ giả thiết } \Rightarrow F'(x) = \frac{f(x)}{x} &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2x^2}\right)' = \frac{f(x)}{x} \Leftrightarrow -\frac{1}{x^3} = \frac{f(x)}{x} \Leftrightarrow f(x) = -\frac{1}{x^2} \\ \Rightarrow f'(x) &= \left(-\frac{1}{x^2}\right)' = \frac{2}{x^3} \end{aligned}$$

$$\text{Đặt } A = \int f'(x) \cdot \ln x \cdot dx = \int \frac{2}{x^3} \cdot \ln x \cdot dx = 2 \int \frac{\ln x}{x^3} dx$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ dv = \frac{1}{x^3} dx \text{ chọn } v = -\frac{1}{2x^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow A = 2 \left(-\frac{\ln x}{2x^2} + \int \frac{1}{2x^3} dx \right) = 2 \left(-\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} \right) + C = -\left(\frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{2x^2} \right) + C$$

Chọn A.

Câu 6: Hàm số nào dưới đây là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ trên khoảng $(-\infty; +\infty)$?

A. $F(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C.$

B. $F(x) = \ln(1 + \sqrt{1+x^2}) + C.$

C. $F(x) = \sqrt{1+x^2} + C.$

D. $F(x) = \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} + C$

Hướng dẫn giải:

Ta có bài toán gốc sau:

Bài toán gốc: Chứng minh $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln|x + \sqrt{x^2+a}| + c (a \in \mathbb{R})$

$$\text{Đặt } t = x + \sqrt{x^2+a} \Rightarrow dt = \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+a}}\right) dx \Leftrightarrow dt = \frac{x + \sqrt{x^2+a}}{\sqrt{x^2+a}} dx \Leftrightarrow dt = \frac{tdx}{\sqrt{x^2+a}} \\ \Leftrightarrow \frac{dt}{t} = \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}$$

Vậy khi đó $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + c = \ln|x + \sqrt{x^2+a}| + c$ (điều phải chứng minh).

Khi đó áp dụng công thức vừa chứng minh ta có

$$F(x) = \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \ln|x + \sqrt{1+x^2}| + c = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + c.$$

Chọn A.

Câu 7: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = \frac{\tan x}{\cos x \sqrt{1+a \cos^2 x}}$, biết $F(0) = 0$, $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$.

Tính $F\left(\frac{\pi}{3}\right) - F\left(\frac{\pi}{4}\right)$?

A. $\sqrt{5} - \sqrt{3}.$

B. $\sqrt{5} - 1.$

C. $\sqrt{3} + \sqrt{5}.$

D. $\sqrt{5} - \sqrt{2}$

Hướng dẫn giải:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{\cos x \sqrt{1+a \cos^2 x}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{\cos^2 x \sqrt{\tan^2 x + 1+a}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2\sqrt{\tan^2 x + 1+a}} d\sqrt{\tan^2 x + 1+a}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\tan^2 \frac{\pi}{4} + 1+a} - \sqrt{\tan^2 0 + 1+a} = \sqrt{3} - \sqrt{2}.$$

$$\Rightarrow \sqrt{a+2} = \sqrt{a+1} + \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow a+2=a+1+2\sqrt{a+1}(\sqrt{3}-\sqrt{2})+5-2\sqrt{6}$$

$$\Rightarrow \frac{3-\sqrt{6}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\sqrt{a+1} \Rightarrow a=1$$

$$\text{Do đó } F\left(\frac{\pi}{3}\right)-F\left(\frac{\pi}{4}\right)=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\tan x}{\cos x \sqrt{1+\cos^2 x}} dx = \sqrt{\tan^2 \frac{\pi}{3}+2}-\sqrt{\tan^2 \frac{\pi}{4}+2}=\sqrt{5}-\sqrt{3}.$$

Chọn A.

Câu 8: Biết $\int (\cos^2 x - \sin^2 x)^5 \cdot \sin 4x dx = -\frac{\cos^7 2x}{a} + C$. Với a là số nguyên. Tìm a ?

A. $a=6$.

B. $a=12$.

C. $a=7$.

D. $a=14$.

Hướng dẫn giải:

Đặt $f(x) = \int (\cos^2 x - \sin^2 x)^5 \cdot \sin 4x dx$, Ta có:

$$\begin{aligned} f(x) &= \int (\cos^2 x - \sin^2 x)^5 \cdot \sin 4x dx = \int (\cos 2x)^5 \cdot 2 \sin 2x \cdot \cos 2x \\ &= 2 \int \cos^6 2x \cdot \sin 2x dx \end{aligned}$$

$$\text{Đặt } t = \cos 2x \Rightarrow dt = -2 \sin 2x dx$$

$$\text{Vậy } F(x) = -\int t^6 dt = -\frac{t^7}{7} + C = -\frac{\cos^7 2x}{7} + C$$

Chọn C.

Câu 9: Biết $\int \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} dx = a \ln |\sin x - \cos x| + C$. Với a là số nguyên. Tìm a ?

A. $a=1$.

B. $a=2$.

C. $a=3$.

D. $a=4$.

Hướng dẫn giải:

$$\text{Vì } \int a [\ln |\sin x - \cos x| + C]' = \frac{(\sin x - \cos x)'}{\sin x - \cos x} = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} \text{ nên}$$

$$\text{Nguyên hàm của: } \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} \text{ là: } \ln |\sin x - \cos x| + C.$$

Chọn A.

Câu 10: Tìm một nguyên hàm của: $1 + 4 \cdot \frac{\tan^2 \frac{x}{2}}{\left(\tan^2 \frac{x}{2} - 1\right)^2}$ biết nguyên hàm này bằng 3 khi $x = \frac{\pi}{4}$.

A. $\frac{1}{\cos^2 x} + 3.$

B. $\frac{1}{\sin^2 x} + 3.$

C. $\tan x + 2.$

D. $\cot x + 2.$

Hướng dẫn giải:

$$f(x) = 1 + 4 \cdot \frac{\tan^2 \frac{x}{2}}{\left(\tan^2 \frac{x}{2} - 1\right)^2} = 1 + \left(\frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}\right)^2 = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Nguyên hàm của $F(x) = \tan x + C$

Ta có: $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3 \Rightarrow \tan \frac{\pi}{4} + C = 3 \Rightarrow C = 2 \Rightarrow F(x) = \tan x + 2$

Chọn C.

Câu 11: $F(x) = x + \ln|2 \sin x - \cos x|$ là nguyên hàm của:

A. $\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + 3 \cos x}.$

B. $\frac{\sin x + 2 \cos x}{2 \sin x - \cos x}.$

C. $\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + 3 \cos x}.$

D. $\frac{3 \sin x + \cos x}{2 \sin x - \cos x}.$

Hướng dẫn giải:

Ta chỉ cần đạo hàm của $F(x)$, rồi sau đó quan sát kết quả đúng.

Ta có: $F'(x) = 1 + \frac{(2 \sin x - \cos x)'}{2 \sin x - \cos x} = 1 + \frac{2 \sin x + \cos x}{2 \sin x - \cos x} = \frac{3 \sin x + \cos x}{2 \sin x - \cos x}$

$\Rightarrow F(x)$ là một nguyên hàm của $\frac{3 \sin x + \cos x}{2 \sin x - \cos x}.$

Chọn D.

Câu 12: Biết $\int \frac{1}{(25x^2 - 20x + 4)} dx = -\frac{1}{a(5x - 2)^5} + C.$ Với a là số nguyên. Tìm a ?

A. $a = 4.$

B. $a = 100.$

C. $a = 5.$

D. $a = 25.$

Hướng dẫn giải:

Chú ý nếu chúng ta biến đổi:

$$\int \frac{1}{(25x^2 - 20x + 4)^3} dx = \int (25x^2 - 20x + 4)^{-3} dx = \frac{(25x^2 - 20x + 4)^{-4}}{-4} + C. \text{ Là sai}$$

Điều sau đây mới đúng: $\int (25x^2 - 20x + 4)^{-3} d(25x^2 - 20x + 4) = \frac{(25x^2 - 20x + 4)^{-4}}{-4} + C$

Trở lại bài, ta sẽ biến đổi biểu thức $(25x^2 - 20x + 4)^3$ về dạng $(ax + b)^n$ như sau:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(25x^2 - 20x + 4)^3} dx &= \int \frac{1}{(5x - 2)^6} dx = \int (5x - 2)^{-6} dx \\ &= \frac{1}{5} \frac{(5x - 2)^{-5}}{-5} + C = -\frac{1}{25(5x - 2)^5} + C\end{aligned}$$

Chọn D.

Câu 13: Biết $\int \frac{1+x}{2x^2-5x-7} dx = \frac{a}{b} \ln|2x-7| + C$, với a, b là các số nguyên. Tính $S = a + b$?

A. $S = 4$.

B. $S = 2$.

C. $S = 3$.

D. $S = 5$.

Hướng dẫn giải:

Ta quan sát mẫu số có thể phân tích được thành nhân tử, sử dụng MTCT bấm giải phương trình bậc 2:

$$2x^2 - 5x - 7 = 0 \text{ thấy có hai nghiệm là: } x = -1, x = \frac{7}{2}.$$

Áp dụng công thức $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ với x_1, x_2 là hai nghiệm ta có:

$$2x^2 - 5x - 7 = (x + 1)(2x - 7)$$

Do đó:

$$\int \frac{1+x}{2x^2-5x-7} dx = \int \frac{x+1}{(x+1)(2x-7)} dx = \int \frac{1}{2x-7} dx = \frac{1}{2} \ln|2x-7| + C$$

Chọn C.

Câu 14: Biết $\int (\sin 2x - \cos 2x)^2 dx = x + \frac{a}{b} \cos 4x + C$, với a, b là các số nguyên. Tính $S = a + b$?

A. $S = 4$.

B. $S = 2$.

C. $S = 3$.

D. $S = 5$.

Hướng dẫn giải:

Nếu áp dụng ngay: $\int t^n dt = \frac{t^{n+1}}{n+1} + C$ thì ta có:

$$\int (\sin 2x - \cos 2x)^2 dx = \frac{(\sin 2x - \cos 2x)^3}{3} + C. \text{ Là sai.}$$

Ta phải khai triển $(\sin 2x - \cos 2x)^2$ để xem thử

$$\int (\sin 2x - \cos 2x)^2 dx = \int (1 - \sin 4x) dx = x - \frac{1}{4} \cos 4x + C$$

Chọn D.

Câu 15: Biết $\int \frac{1}{1+\cos x} dx = a \tan \frac{x}{b} + C$, với a, b là các số nguyên. Tính $S = a + b$?

- A. $S = 4$. B. $S = 2$. C. $S = 3$. D. $S = 5$.

Hướng dẫn giải:

Chưa áp dụng ngay được công thức nguyên hàm cơ bản, ta quan sát mẫu và thấy rằng có thể biến đổi $1 + \cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2}$ dựa trên công thức hạ bậc: $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$. Do đó:

$$\int \frac{1}{1+\cos x} dx = \int \frac{1}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} dx = \tan \frac{x}{2} + C.$$

Ta thấy rằng $a = 1, b = 2$ do đó $S = 3$.

Chọn C.

Câu 16: Biết $\int \frac{1}{1+\sin 2x} dx = \frac{a}{b} \tan \left(x - \frac{\pi}{4} \right) + C$, với a, b là các số nguyên. Tính $S = a + b$?

- A. $S = 4$. B. $S = 2$. C. $S = 3$. D. $S = 5$.

Hướng dẫn giải:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{1+\sin 2x} dx &= \int \frac{1}{1+\cos \left(\frac{\pi}{2} - 2x \right)} dx = \int \frac{1}{2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - x \right)} dx = \\ &= -\frac{1}{2} \tan \left(\frac{\pi}{4} - x \right) + C = \frac{1}{2} \tan \left(x - \frac{\pi}{4} \right) + C \end{aligned}$$

Ta thấy $a=1, b=2$ suy ra $S=3$

Chọn C.

Câu 17: Cho $f(x) = 8 \sin^2 \left(x + \frac{\pi}{12} \right)$. Một nguyên hàm $F(x)$ của $f(x)$ thỏa $F(0) = 8$ là:

- A. $4x + 2 \sin \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) + 9$. B. $4x - 2 \sin \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) + 9$.
C. $4x + 2 \sin \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) + 7$. D. $4x - 2 \sin \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) + 7$.

Hướng dẫn giải:

Ta cần phải tính $\int f(x) dx = \int 8 \sin^2 \left(x + \frac{\pi}{12} \right) dx$. Đầu tiên sử dụng công thức hạ bậc để đổi $f(x)$ như sau:

$$f(x) = 8\sin^2\left(x + \frac{\pi}{12}\right) = 8\left(\frac{1 - \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)}{2}\right)$$

$$f(x) = 4 - 4\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow F(x) = 4x - 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + C$$

$$f(0) = 8 \Leftrightarrow -2\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + C = 8 \Leftrightarrow C = 9$$

Chọn B.

Câu 18: Cho $f(x) = 1 + |x|$. Một nguyên hàm $F(x)$ của $f(x)$ thỏa $F(1) = 1$ là:

A. $x^2 + x + 1$

B. $\begin{cases} x + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} & \text{khi } x \geq 0 \\ x - \frac{x^2}{2} + C_2 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$

C. $\begin{cases} \frac{x^2}{2} - x + C_1 & \text{khi } x \geq 0 \\ x - \frac{x^2}{2} + C_2 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$

D. $\begin{cases} -x^2 + x + C_1 & \text{khi } x \geq 0 \\ x - \frac{x^2}{2} + C_2 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$

Hướng dẫn giải:

$$\text{Ta có: } f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{khi } x \geq 0 \\ 1-x & \text{khi } x < 0 \end{cases} \Rightarrow F(x) = \begin{cases} x + \frac{x^2}{2} + C_1 & \text{khi } x \geq 0 \\ x - \frac{x^2}{2} + C_2 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$$

$$\text{Theo đề } F(1) = 1 \Rightarrow C_1 = -\frac{1}{2} \text{ do đó: } \begin{cases} x + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} & \text{khi } x \geq 0 \\ x - \frac{x^2}{2} + C_2 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$$

Chọn B.

Câu 19: Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $\int \frac{5x^2 + 8x - 4}{x^2(1-x)^2} dx$ với $0 < x < 1$ và $F\left(\frac{1}{2}\right) = 26$. Giá trị nhỏ nhất của $F(x)$ là:

A. 24.

B. 20.

C. 25.

D. 26.

Hướng dẫn giải:

Ta có:

$$F(x) = \int \frac{5x^2 + 8x - 4}{x^2(1-x)^2} dx = \int \frac{9x^2 - 4(x^2 - 2x + 1)}{x^2(1-x^2)} dx$$
$$= \int \left[\frac{9}{(1-x^2)} - \frac{4}{x^2} \right] dx = \frac{4}{x} + \frac{9}{(1-x)} + C$$

$$\text{Vì } F\left(\frac{1}{2}\right) = 26 \text{ nên } \frac{4}{\frac{1}{2}} + \frac{9}{\left(1-\frac{1}{2}\right)} + C = 26 \Leftrightarrow C = 0$$

Lúc này $F(x) = \frac{4}{x} + \frac{9}{(1-x)}$ với $0 < x < 1$. Sử dụng MTCT bấm Mode 7 chọn start 0 end 1

Step 0.1:

Quan sát bảng giá trị ta thấy giá trị nhỏ nhất của $F(x)$ là 25 xảy ra khi $x = 0,4$

Chọn C.

Câu 20: Khi tính nguyên hàm $\int \frac{1}{\sqrt{(2x+1)(x+1)^3}} dx$ người ta đặt $t = g(x)$ (một hàm biểu diễn theo

biến x) thì nguyên hàm trở thành $\int 2dt$. Biết $g(4) = \frac{3}{\sqrt{5}}$, giá trị của $g(0) + g(1)$ là:

A. $\frac{3+\sqrt{6}}{2}$.

B. $\frac{1+\sqrt{6}}{2}$.

C. $\frac{2+\sqrt{6}}{2}$.

D. $\frac{2+3\sqrt{6}}{2}$.

Hướng dẫn giải:

Đối với bài này HS cần phải nắm được kỹ thuật biến đổi khi tính nguyên hàm. HS cần phải dự đoán phép đặt ẩn phụ, đầu tiên ta thấy nguyên hàm có thể biến đổi thành:

$$\int \frac{1}{\sqrt{(2x+1)(x+1)^3}} dx = \int \frac{1}{(x+1)^2 \sqrt{\frac{2x+1}{x+1}}} dx$$

Do đó ta đặt:

$$t = \sqrt{\frac{2x+1}{x+1}} \Rightarrow dt = \frac{dx}{2(x+1)^2 \sqrt{\frac{2x+1}{x+1}}} \Leftrightarrow 2dt = \frac{dx}{(x+1)^2 \sqrt{\frac{2x+1}{x+1}}}$$

$$\text{Vì vậy suy ra } \int \frac{1}{\sqrt{(2x+1)(x+1)^3}} dx = \int 2dt$$

Tuy nhiên đây là lời giải sai, ta có thể thấy khi đặt

$$t = \sqrt{\frac{2x+1}{x+1}} + C \Rightarrow dt = \frac{dx}{2(x+1)^2 \sqrt{\frac{2x+1}{x+1}}} \Leftrightarrow 2dt = \frac{dx}{(x+1)^2 \sqrt{\frac{2x+1}{x+1}}}$$

Với C là hằng số, kết quả không thay đổi. Vì vậy chính xác ở đây là:

$$t = \sqrt{\frac{2x+1}{x+1}} + C = g(x). \text{ Theo đề } g(4) = \frac{3}{\sqrt{5}} \text{ suy ra } C=0.$$

$$\text{Cuối cùng ta được } g(x) = \sqrt{\frac{2x+1}{x+1}} \text{ vì vậy } g(0) + g(1) = \frac{2+\sqrt{6}}{2}$$

Chọn C.

Chú ý: Bài toán này hoàn toàn có thể dùng MTCT để chọn kết quả, Ta có:

$$\begin{aligned} \int 2dt &= \int \frac{1}{\sqrt{(2x+1)(x+1)^3}} dx \Rightarrow t = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{(2x+1)(x+1)^3}} dx \\ \Rightarrow g(x) &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{(2x+1)(x+1)^3}} dx \end{aligned}$$

Do đó $g(x)$ là nguyên hàm của $\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{(2x+1)(x+1)^3}}$. Suy ra:

$$g(0) - g(4) = \int_4^0 \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{(2x+1)(x+1)^3}} dx \Rightarrow g(0) = \int_4^0 \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{(2x+1)(x+1)^3}} dx + g(4)$$

Và:

$$g(1) - g(4) = \int_4^1 \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{(2x+1)(x+1)^3}} dx \Rightarrow g(1) = \int_4^1 \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{(2x+1)(x+1)^3}} dx + g(4)$$

Sử dụng MTCT bấm:

$$\int_4^0 \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{(2x+1)(x+1)^3}} dx + g(4) + \int_4^1 \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{(2x+1)(x+1)^3}} dx + g(4)$$

Là kết quả **C**.

TÍCH PHÂN NÂNG CAO

A – LÝ THUYẾT CHUNG

1. Định nghĩa

Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa:

+ Liên tục trên đoạn $[a; b]$.

+ $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$.

Lúc đó hiệu số $F(b) - F(a)$ được gọi là tích phân từ a đến b và kí hiệu $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$

Chú ý:

+ a, b được gọi là 2 cận của tích phân.

+ $a = b$ thì $\int_a^b f(x) dx = 0$.

+ $a > b$ thì $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$.

+ Tích phân không phụ thuộc vào biến số, tức là $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$.

2. Tính chất

+ $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx, (a < c < b)$.

+ $\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$, với k là hằng số khác 0.

+ $\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$.

Chú ý:

Để tính tích phân từ a đến b , ta tiến hành tìm nguyên hàm rồi sau đó thay cận vào theo công thức

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

B – BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Xét tích phân $A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{3\sin^2 x - 2\cos^2 x - 2} dx$. Bằng cách đặt $t = \tan x$, tích phân A được biến đổi thành tích phân nào sau đây.

A. $\int_0^1 \frac{1}{t^2 - 4} dt$.

B. $\int_0^1 \frac{1}{t^2 + 4} dt$.

C. $\int_0^1 \frac{1}{t^2 - 2} dt$.

D. $\int_0^1 \frac{1}{t^2 + 2} dt$.

Hướng dẫn giải:

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } 3\sin^2 x - 2\cos^2 x - 2 &= \cos^2 x \left(3\tan^2 x - 2 - \frac{2}{\cos^2 x} \right) \\ &= \cos^2 x \left[3\tan^2 x - 2 - 2(1 + \tan^2 x) \right] = \cos^2 x (\tan^2 x - 4) \end{aligned}$$

Vậy: $A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x (\tan^2 x - 4)} dx$, lúc này đặt $t = \tan x$ và đổi cận ta đc:

$$A = \int_0^1 \frac{dt}{t^2 - 4} dx.$$

Chọn A.

Câu 2: Đặt $t = \tan \frac{x}{2}$ thì $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos^6 \frac{x}{2}} dx$ được biến đổi thành $2 \int_0^1 f(t) dt$. Hãy xác định $f(t)$:

A. $f(t) = 1 - 2t^2 + t^4$. **B.** $f(t) = 1 + 2t^2 + t^4$. **C.** $f(t) = 1 + t^2$. **D.** $f(t) = 1 - t^2$.

Hướng dẫn giải:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} \right)^2 \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \tan^2 \frac{x}{2} \right) \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} dx$$

$$\text{Đặt } t = \tan \frac{x}{2} \Rightarrow \begin{cases} dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} dx \\ x = 0 \Rightarrow t = 0; x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1 \end{cases}$$

Vậy: $I = \int_0^1 (1+t^2)^2 \cdot 2dt = 2 \int_0^1 (1+2t^2+t^4) dt \Rightarrow f(t) = 1+2t^2+t^4$

Chọn B.

Câu 3: Biết rằng $\int_0^1 3e^{\sqrt{1+3x}} dx = \frac{a}{5}e^2 + \frac{b}{3}e + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$). Tính $T = a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3}$.

A. $T = 6$.

B. $T = 9$.

C. $T = 10$.

D. $T = 5$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Đặt $t = \sqrt{1+3x} \Rightarrow t^2 = 1+3x \Rightarrow 2tdt = 3dx$

Đổi cận: $+ x = 0 \Rightarrow t = 1$

$+ x = 1 \Rightarrow t = 2$

$\Rightarrow \int_0^1 3e^{\sqrt{1+3x}} dx = 2 \int_1^2 te^t dt = 2 \left(te^t \Big|_1^2 - \int_1^2 e^t dt \right) = 2 \left(te^t \Big|_1^2 - e^t \Big|_1^2 \right) = 2(2e^2 - e - e^2 + e) = 2e^2$.

$\Rightarrow \begin{cases} a = 10 \\ b = c = 0 \end{cases} \Rightarrow T = 10$ nên câu C đúng.

Câu 4: Biết $I = \int_1^5 \frac{2|x-2|+1}{x} dx = 4 + a \ln 2 + b \ln 5$, với a, b là các số nguyên. Tính $S = a - b$.

A. $S = 9$.

B. $S = 11$.

C. $S = 5$.

D. $S = -3$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có: $I = \int_1^5 \frac{2|x-2|+1}{x} dx = \int_1^2 \frac{2|x-2|+1}{x} dx + \int_2^5 \frac{2|x-2|+1}{x} dx$
 $= \int_1^2 \frac{2(2-x)+1}{x} dx + \int_2^5 \frac{2(x-2)+1}{x} dx = \int_1^2 \frac{5-2x}{x} dx + \int_2^5 \frac{2x-3}{x} dx$
 $= \int_1^2 \left(\frac{5}{x} - x \right) dx + \int_2^5 \left(2 - \frac{3}{x} \right) dx = (5 \ln |x| - x) \Big|_1^2 + (2x - 3 \ln |x|) \Big|_2^5$
 $= 8 \ln 2 - 3 \ln 5 + 4 \Rightarrow \begin{cases} a = 8 \\ b = -3 \end{cases} \Rightarrow a - b = 11$.

Câu 5: Biết $I = \int_0^4 x \ln(2x+1) dx = \frac{a}{b} \ln 3 - c$, trong đó a, b, c là các số nguyên dương và $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản. Tính $S = a + b + c$.

A. $S = 60$.

B. $S = 70$.

C. $S = 72$.

D. $S = 68$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$$\text{Ta có } I = \int_0^4 x \ln(2x+1) dx. \text{ Đặt } \begin{cases} u = \ln(2x+1) \\ dv = x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{2}{2x+1} dx \\ v = \frac{x^2}{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^4 x \ln(2x+1) dx = \frac{x^2 \ln(2x+1)}{2} \Big|_0^4 - \int_0^4 \frac{x^2}{2x+1} dx \\ &= 8 \ln 9 - \int_0^4 \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4(2x+1)} \right) dx = 16 \ln 3 - \left(\frac{x^2}{4} - \frac{1}{4}x + \frac{1}{8} \ln |2x+1| \right) \Big|_0^4 = \frac{63}{4} \ln 3 - 3 \\ &\Rightarrow \frac{a}{b} \ln 3 - c = \frac{63}{4} \ln 3 - 3 \Rightarrow \begin{cases} a = 63 \\ b = 4 \\ c = 3 \end{cases} \Rightarrow S = 70. \end{aligned}$$

Câu 6: Giả sử tích phân $\int_0^1 x \cdot \ln(2x+1)^{2017} dx = a + \frac{b}{c} \ln 3$. Với phân số $\frac{b}{c}$ tối giản. Lúc đó

A. $b+c = 6057$.

B. $b+c = 6059$.

C. $b+c = 6058$.

D. $b+c = 6056$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$$\text{Ta có } I = \int_0^1 x \cdot \ln(2x+1)^{2017} dx = 2017 \int_0^1 x \cdot \ln(2x+1) dx.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln(2x+1) \\ dv = x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{2}{2x+1} dx \\ v = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{8} \end{cases}$$

$$\text{Do đó } \int_0^1 x \cdot \ln(2x+1) dx = (\ln(2x+1)) \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{8} \right) \Big|_0^1 - \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{8} \right) \frac{2}{2x+1} dx$$

$$= \frac{3}{8} \ln 3 - \left(\frac{x^2 - x}{4} \right) \Big|_0^1 = \frac{3}{8} \ln 3$$

$$\Rightarrow I = \int_0^1 x \cdot \ln(2x+1)^{2017} dx = 2017 \left(\frac{3}{8} \ln 3 \right) = \frac{6051}{8} \ln 3.$$

Khi đó $b+c = 6059$.

Chọn A

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = \frac{dx}{1 + \cos 2x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{2} \tan x \end{cases} . \text{ Ta có}$$

$$I = \frac{1}{2} x \tan x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2} \ln |\cos x| \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2} \ln \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \ln 2 \Rightarrow a = \frac{1}{8}, b = -\frac{1}{4}$$

Do đó, $16a - 8b = 4$.

Câu 9: Cho biết tích phân $I = \int_1^e x(2x^2 + \ln x) dx = \frac{a.e^4 + b.e^2 + c}{4}$ với a, b, c là các ước nguyên của 4.
Tổng $a + b + c = ?$

A. 2.

B. 4.

C. 3.

D. 1

Hướng dẫn giải

$$I = \int_1^e x(2x^2 + \ln x) dx = 2 \int_1^e x^3 dx + \int_1^e x \ln x dx .$$

$$2 \int_1^e x^3 dx = \frac{1}{2} x^4 \Big|_1^e = \frac{1}{2} (e^4 - 1)$$

$$\text{Ta có } \int_1^e x \ln x dx = \frac{1}{2} \left[x^2 \ln x \Big|_1^e - \int_1^e x^2 \frac{1}{x} dx \right] = \frac{1}{2} \left[e^2 - \frac{1}{2} x^2 \Big|_1^e \right] = \frac{e^2 + 1}{4}$$

$$I = \int_1^e x(2x^2 + \ln x) dx = \frac{1}{2} (e^4 - 1) + \frac{e^2 + 1}{4} = \frac{2e^4 + e^2 - 1}{4}$$

Chọn A.

Câu 10: Tích phân $\int_0^{\ln 2} \frac{e^{2x+1} + 1}{e^x} dx = e + \frac{a}{b}$. Tính tích $a.b$.

A. 1.

B. 2.

C. 6.

D. 12.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$$\int_0^{\ln 2} \frac{e^{2x+1} + 1}{e^x} dx = \int_0^{\ln 2} e^{x+1} dx + \int_0^{\ln 2} e^{-x} dx = \int_0^{\ln 2} e^{x+1} d(x+1) - \int_0^{\ln 2} e^{-x} d(-x)$$

$$= e^{(x+1)} \Big|_0^{\ln 2} - e^{-x} \Big|_0^{\ln 2} = (2e - e) - \left(\frac{1}{2} - 1 \right) = e + \frac{1}{2} \Rightarrow a = 1, b = 2 \Rightarrow ab = 2 .$$

Câu 11: Biết $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\sqrt{1+x^6}+x^3} dx = \frac{\pi^3}{a} + \frac{\sqrt{3}\pi^2}{b} + c\pi + d\sqrt{3}$ với a, b, c, d là các số nguyên. Tính $a+b+c+d$.

- A.** $a+b+c+d=28$. **B.** $a+b+c+d=16$. **C.** $a+b+c+d=14$. **D.** $a+b+c+d=22$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$$I = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\sqrt{1+x^6}+x^3} dx = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{(\sqrt{1+x^6}-x^3)\sin x}{1+x^6-x^6} dx = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (\sqrt{1+x^6}-x^3)\sin x dx.$$

$$\text{Đặt } t = -x \Rightarrow dt = -dx. \text{ Đổi cận } \begin{cases} x = -\frac{\pi}{3} \Rightarrow t = \frac{\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow t = -\frac{\pi}{3} \end{cases}.$$

$$I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{-\frac{\pi}{3}} (\sqrt{1+t^6}+t^3)\sin(-t)(-dt) = -\int_{\frac{\pi}{3}}^{-\frac{\pi}{3}} (\sqrt{1+t^6}+t^3)\sin t dt = -\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (\sqrt{1+x^6}+x^3)\sin x dx$$

$$\text{Suy ra } 2I = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (-2x^3 \sin x) dx \Leftrightarrow I = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} x^3 \sin x dx.$$

$$\begin{array}{l} x^3 (+) + \sin x \\ \swarrow \\ 3x^2 (-) - \cos x \\ \swarrow \\ 6x (+) - \sin x \\ \swarrow \\ 6 (-) + \cos x \\ \swarrow \\ 0 + \sin x \end{array}$$

$$I = (-x^3 \sin x + 3x^2 \cos x + 6x \sin x - 6 \sin x) \Big|_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi^3}{27} - \frac{\sqrt{3}\pi^2}{3} - 2\pi + 6\sqrt{3}$$

Suy ra: $a=27, b=-3, c=-2, d=6$. Vậy $a+b+c+d=28$.

Câu 12: Với các số nguyên a, b thỏa mãn $\int_1^2 (2x+1) \ln x dx = a + \frac{3}{2} + \ln b$. Tính tổng $P = a+b$.

- A.** $P=27$. **B.** $P=28$. **C.** $P=60$. **D.** $P=61$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln x \\ dv = (2x+1)dx \end{cases} \text{ ta có } \begin{cases} du = \frac{1}{x}dx \\ v = x^2 + x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_1^2 (2x+1) \ln x dx &= (x^2 + x) \ln x \Big|_1^2 - \int_1^2 (x^2 + x) \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= 6 \ln 2 - \int_1^2 (x+1) dx = 6 \ln 2 - \left(\frac{x^2}{2} + x \right) \Big|_1^2 = 6 \ln 2 - \left(4 - \frac{3}{2} \right) = -4 + \frac{3}{2} + \ln 64 \end{aligned}$$

$$P = a + b = -4 + 64 = 60.$$

Câu 13: Biết $\int_0^2 e^x (2x + e^x) dx = a.e^4 + b.e^2 + c$ với a, b, c là các số hữu tỷ. Tính $S = a + b + c$

A. $S = 2$.

B. $S = -4$.

C. $S = -2$.

D. $S = 4$

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } I = \int_0^2 e^x (2x + e^x) dx = \int_0^2 e^{2x} dx + \int_0^2 2x.e^x dx = \frac{e^{2x}}{2} \Big|_0^2 + 2 \int_0^2 x e^x dx = \frac{e^4}{2} - \frac{1}{2} + 2 \int_0^2 x e^x dx$$

$$\begin{aligned} \text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = e^x dx \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases} \Rightarrow I = \frac{e^4}{2} - \frac{1}{2} + (2x.e^x) \Big|_0^2 - 2 \int_0^2 e^x dx \\ &= \frac{e^4}{2} - \frac{1}{2} + (2x.e^x) \Big|_0^2 - (2e^x) \Big|_0^2 = \frac{e^4}{2} + 2e^2 + \frac{3}{2} \\ \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2}; c = \frac{3}{2} \\ b = 2 \end{cases} &\Rightarrow S = a + b + c = 4 \end{aligned}$$

Chọn D.

Câu 14: Cho hàm số $f(x) = a \sin 2x - b \cos 2x$ thỏa mãn $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2$ và $\int_a^b adx = 3$. Tính tổng $a + b$ bằng:

A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. 8.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$$f'(x) = 2a \cos 2x + 2b \sin 2x$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2 \Leftrightarrow -2a = -2 \Leftrightarrow a = 1$$

$$\int_a^b adx = \int_1^b dx = 3 \Leftrightarrow b - 1 = 3 \Leftrightarrow b = 4$$

Vậy $a + b = 1 + 4 = 5$.

Câu 15: Có bao nhiêu giá trị của a trong đoạn $\left[\frac{\pi}{4}; 2\pi\right]$ thỏa mãn $\int_0^a \frac{\sin x}{\sqrt{1+3\cos x}} dx = \frac{2}{3}$.

A. 2.

B. 1.

C. 4.

D. 3.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Đặt $t = \sqrt{1+3\cos x} \Rightarrow t^2 = 1+3\cos x \Rightarrow 2t dt = -3\sin x dx$.

Đổi cận: + Với $x = 0 \Rightarrow t = 2$

+ Với $x = a \Rightarrow t = \sqrt{1+3\cos a} = A$.

Khi đó

$$\int_0^a \frac{\sin x}{\sqrt{1+3\cos x}} dx = \int_A^2 \frac{2}{3} dt = \frac{2}{3} t \Big|_A^2 = \frac{2}{3} (2 - A) = \frac{2}{3} \Leftrightarrow A = 1 \Rightarrow \sqrt{1+3\cos a} = 1 \Rightarrow \cos a = 0$$

$$\Rightarrow a = \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}). \text{ Do } a \in \left[\frac{\pi}{4}; 2\pi\right] \Rightarrow \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{2} + k\pi \leq 2\pi \Leftrightarrow -\frac{1}{4} \leq k \leq \frac{3}{2} \Rightarrow \begin{cases} k = 0 \\ k = 1 \end{cases}.$$

Bình luận: Khi cho $a = \frac{\pi}{2} + \pi$ thì tích phân không xác định vì mẫu thức không xác định

(trong căn bị âm). Vậy đáp án phải là B, nghĩa là chỉ chấp nhận $a = \frac{\pi}{2}$.

Câu 16: Có bao nhiêu số $a \in (0; 20\pi)$ sao cho $\int_0^a \sin^5 x \sin 2x dx = \frac{2}{7}$.

A. 20.

B. 19.

C. 9.

D. 10.

Hướng dẫn giải

Chọn D

$$\text{Ta có } \int_0^a \sin^5 x \sin 2x dx = 2 \int_0^a \sin^6 x \cos x dx = 2 \int_0^a \sin^6 x d(\sin x) = \frac{2}{7} \sin^7 x \Big|_0^a = \frac{2}{7} \sin^7 a = \frac{2}{7}.$$

Do đó $\sin^7 a = 1 \Leftrightarrow \sin a = 1 \Leftrightarrow a = \frac{\pi}{2} + k2\pi$. Vì $a \in (0; 20\pi)$ nên

$$0 < \frac{\pi}{2} + k2\pi < 20\pi \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < k < 10 \text{ và } k \in \mathbb{Z} \text{ nên có 10 giá trị của } k$$

Câu 17: Nếu $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^n x \cos x dx = \frac{1}{64}$ thì n bằng

A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. 6.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Đặt $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$. Đổi cận: khi $x = 0 \Rightarrow t = 0; x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow t = \frac{1}{2}$

$$\text{Khi đó: } I = \int_0^{\frac{1}{2}} t^n dt = \frac{t^{n+1}}{n+1} \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{n+1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \frac{1}{64}.$$

Suy ra $\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \frac{n+1}{64}$ có nghiệm duy nhất $n=3$ (tính đơn điệu).

Câu 18: Giá trị của $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_n^{n+1} \frac{1}{1+e^x} dx$ bằng

A. -1.

B. 1.

C. e .

D. 0.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

$$\text{Ta có: } I = \int_n^{n+1} \frac{1}{1+e^x} dx$$

Đặt $t = 1+e^x \Rightarrow dt = e^x dx$. Đổi cận: Khi $x = n \Rightarrow t = 1+e^n; x = n+1 \Rightarrow t = 1+e^{n+1}$

$$\text{Khi đó: } I = \int_{1+e^n}^{1+e^{n+1}} \frac{1}{t(t-1)} dt = \int_{1+e^n}^{1+e^{n+1}} \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t} \right) dt = (\ln|t-1| - \ln|t|) \Big|_{1+e^n}^{1+e^{n+1}} = 1 + \ln \frac{1+e^n}{1+e^{n+1}}$$

$$\text{Mà } \frac{1+e^n}{1+e^{n+1}} = \frac{\left(\frac{1}{e}\right)^n + 1}{\left(\frac{1}{e}\right)^n + e} \rightarrow \frac{1}{e} \text{ khi } n \rightarrow +\infty, \text{ Do đó, } \lim_{n \rightarrow +\infty} I = 1 + \ln \frac{1}{e} = 0$$

Câu 19: Cho các tích phân $I = \int_0^\alpha \frac{1}{1+\tan x} dx$ và $J = \int_0^\alpha \frac{\sin x}{\cos x + \sin x} dx$ với $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right)$, khẳng định sai là

A. $I = \int_0^\alpha \frac{\cos x}{\cos x + \sin x} dx.$

B. $I - J = \ln|\sin \alpha + \cos \alpha|.$

C. $I = \ln|1 + \tan \alpha|.$

D. $I + J = \alpha.$

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có $\frac{1}{1+\tan \alpha} = \frac{1}{1+\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}} = \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha}$ nên A đúng.

$$I - J = \int_0^{\alpha} \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} dx = \int_0^{\alpha} \frac{d(\cos x + \sin x)}{\cos x + \sin x} = \ln |\cos x + \sin x| \Big|_0^{\alpha} = \ln |\cos \alpha + \sin \alpha| \quad \text{B đúng}$$

$$I + J = \int_0^{\alpha} dx = x \Big|_0^{\alpha} = \alpha \quad \text{D đúng.}$$

Câu 20: Giả sử $\int x(1-x)^{2017} dx = \frac{(1-x)^a}{a} - \frac{(1-x)^b}{b} + C$ với a, b là các số nguyên dương. Tính $2a-b$ bằng:

A. 2017. B. 2018. C. 2019. D. 2020.

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$\int x(1-x)^{2017} dx = \int (x-1+1)(1-x)^{2017} dx = \int \left((1-x)^{2017} - (1-x)^{2018} \right) dx = -\frac{(1-x)^{2018}}{2018} + \frac{(1-x)^{2019}}{2019} + C$$

Vậy $a = 2019, b = 2018 \Rightarrow 2a - b = 2020$.

Chọn D.

Câu 21: Tích phân $I = \int_1^2 \frac{x^{2001}}{(1+x^2)^{1002}} dx$ có giá trị là

A. $\frac{1}{2002 \cdot 2^{1001}}$. B. $\frac{1}{2001 \cdot 2^{1001}}$. C. $\frac{1}{2001 \cdot 2^{1002}}$. D. $\frac{1}{2002 \cdot 2^{1002}}$.

Hướng dẫn giải

$$I = \int_1^2 \frac{x^{2004}}{x^3(1+x^2)^{1002}} dx = \int_1^2 \frac{1}{x^3 \left(\frac{1}{x^2} + 1 \right)^{1002}} dx. \text{ Đặt } t = \frac{1}{x^2} + 1 \Rightarrow dt = -\frac{2}{x^3} dx.$$

Câu 22: Cho tích phân $C = \int_a^b \frac{e^x}{\sqrt{e^x + 3}} dx$ trong đó a là nghiệm của phương trình $2^{x^2+1} = 2$, b là một số dương và $b > a$. Gọi $A = \int_1^2 x^2 dx$. Tìm chữ số hàng đơn vị của b sao cho $C = 3A$.

A. 3. B. 2. C. 4. D. 5

Hướng dẫn giải

Giải phương trình $2^{x^2+1} = 2 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow a = 0$

Tính tích phân **C.** Đặt: $t = \sqrt{e^x + 3} \Rightarrow t^2 = e^x + 3 \Rightarrow 2tdt = e^x dx$

$$C = \int_2^{\sqrt{e^b+3}} \frac{2t}{t} dt = \int_2^{\sqrt{e^b+3}} 2dt = 2t \Big|_2^{\sqrt{e^b+3}} = 2\sqrt{e^b+3} - 4$$

Tính tích phân A ta có $A = \frac{7}{3}$

Theo giả thiết

$$C = 3A \Leftrightarrow 2\sqrt{e^b+3} - 4 = 3 \cdot \frac{7}{3} \Leftrightarrow \sqrt{e^b+3} = \frac{11}{2} \Leftrightarrow e^b = \frac{109}{4} \Leftrightarrow b = \ln \frac{109}{4} \approx 3,305053521$$

Chọn A.

Câu 23: Biết tích phân $\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+2^x} dx = \frac{a\pi+b}{8}$ trong đó $a, b \in \mathbb{N}$. Tính tổng $a+b$?

A. 0.

B. 1.

C. 3.

D. -1

Hướng dẫn giải

$$I = \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+2^x} dx = \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^0 \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+2^x} dx + \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+2^x} dx = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{1-x^2} dx$$

$$\text{Đặt } x = \sin t \Rightarrow I = \frac{\pi+2}{8}.$$

Chọn C.

Câu 24: Biết rằng: $\int_0^{\ln 2} \left(x + \frac{1}{2e^x+1} \right) dx = \frac{1}{2} \ln^a 2 + b \ln 2 + c \ln \frac{5}{3}$. Trong đó a, b, c là những số nguyên.

Khi đó $S = a+b-c$ bằng:

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 5.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$$\int_0^{\ln 2} \left(x + \frac{1}{2e^x+1} \right) dx = \int_0^{\ln 2} x dx + \int_0^{\ln 2} \frac{1}{2e^x+1} dx.$$

$$\text{Tính } \int_0^{\ln 2} x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^{\ln 2} = \frac{\ln^2 2}{2}$$

$$\text{Tính } \int_0^{\ln 2} \frac{1}{2e^x+1} dx$$

Đặt $t = 2e^x + 1 \Rightarrow dt = 2e^x dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{t-1}$. Đổi cận: $x = \ln 2 \Rightarrow t = 5, x = 0 \Rightarrow t = 3$.

$$\int_0^{\ln 2} \frac{1}{2e^x + 1} dx = \int_3^5 \frac{dt}{t(t-1)} = \int_3^5 \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t} \right) dt = \left(\ln|t-1| - \ln|t| \right) \Big|_3^5 = \ln 4 - \ln 5 - \ln 2 + \ln 3 = \ln 2 - \ln \frac{5}{3}$$

.

$$\int_0^{\ln 2} \left(x + \frac{1}{2e^x + 1} \right) dx = \frac{1}{2} \ln^2 2 + \ln 2 - \ln \frac{5}{3} \Rightarrow a = 2, b = 1, c = -1$$

Vậy $a + b - c = 4$.

Câu 25: Trong các số dưới đây, số nào ghi giá trị của $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2^{x-1} \cdot \cos x}{1 + 2^x} dx = \frac{a}{b}, a, b \in \mathbb{N}$. Khi đó $a.b$ bằng

A. $\frac{1}{2}$.

B. 0.

C. 2.

D. 1

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2^{x-1} \cos x}{1 + 2^x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2^x \cos x}{(1 + 2^x) \cdot 2} dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2^x \cos x}{(1 + 2^x) \cdot 2} dx \quad (1)$$

Đặt $x = -t$ ta có $x = 0$ thì $t = 0, x = \frac{\pi}{2}$ thì $t = \frac{\pi}{2}$ và $dx = -dt$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2^x \cos x}{(1 + 2^x) \cdot 2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2^{-t} \cos(-t)}{(1 + 2^{-t}) \cdot 2} d(-t) = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{(1 + 2^t) \cdot 2} dt = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{(1 + 2^x) \cdot 2} dx$$

Thay vào (1) có

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2^{x-1} \cos x}{1 + 2^x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2^x \cos x}{(1 + 2^x) \cdot 2} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{(1 + 2^x) \cdot 2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1 + 2^x) \cos x}{(1 + 2^x) \cdot 2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2} dx = \frac{\sin x}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Vậy } \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2^{x-1} \cos x}{1 + 2^x} dx = \frac{1}{2}$$

Chọn C.

Câu 26: Trong các số dưới đây, số nào ghi giá trị của $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2^{x-1} \cdot \cos x}{1 + 2^x} dx$

A. $\frac{1}{2}$.

B. 0.

C. 2.

D. 1.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có:
$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2^{x-1} \cos x}{1+2^x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2^x \cos x}{(1+2^x).2} dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2^x \cos x}{(1+2^x).2} dx \quad (1)$$

Đặt $x = -t$ ta có $x = 0$ thì $t = 0$, $x = -\frac{\pi}{2}$ thì $t = \frac{\pi}{2}$ và $dx = -dt$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2^x \cos x}{(1+2^x).2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2^{-t} \cos(-t)}{(1+2^{-t}).2} d(-t) = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{(1+2^t).2} dt = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{(1+2^x).2} dx$$

Thay vào (1) có

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2^{x-1} \cos x}{1+2^x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2^x \cos x}{(1+2^x).2} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{(1+2^x).2} dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1+2^x) \cos x}{(1+2^x).2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2} dx = \frac{\sin x}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}$$

Vậy
$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2^{x-1} \cos x}{1+2^x} dx = \frac{1}{2}$$

Câu 27: Cho $\int_0^1 f(x) dx = 5$. Tính $I = \int_0^1 f(1-x) dx$

A. 5.

B. 10.

C. $\frac{1}{5}$.

D. $\sqrt{5}$

Hướng dẫn giải

Đặt $t = 1 - x \Rightarrow dt = -dx$, $\begin{matrix} x = 0 \Rightarrow t = 1 \\ x = 1 \Rightarrow t = 0 \end{matrix}$

$$I = -\int_1^0 f(t) dt = 5$$

Chọn A.

Câu 28: Giả sử $\int_0^1 f(x)dx = 3$ và $\int_0^5 f(z)dz = 9$. Tổng $\int_1^3 f(t)dt + \int_3^5 f(t)dt$ bằng

A. 12.

B. 5.

C. 6.

D. 3.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$$\text{Ta có } \int_0^1 f(x)dx = 3 \Rightarrow \int_0^1 f(t)dt = 3; \int_0^5 f(z)dz = 9 \Rightarrow \int_0^5 f(t)dt = 9$$

$$\begin{aligned} 9 &= \int_0^5 f(t)dt = \int_0^1 f(t)dt + \int_1^3 f(t)dt + \int_3^5 f(t)dt = 3 + \int_1^3 f(t)dt + \int_3^5 f(t)dt \\ &\Rightarrow \int_1^3 f(t)dt + \int_3^5 f(t)dt = 6. \end{aligned}$$

Câu 29: Cho $f(x), g(x)$ là các hàm số liên tục trên đoạn $[2;6]$ và thỏa mãn $\int_2^3 f(x)dx = 3; \int_3^6 f(x)dx = 7; \int_3^6 g(x)dx = 5$. Hãy tìm mệnh đề KHÔNG đúng.

A. $\int_3^6 [3g(x) - f(x)]dx = 8$

B. $\int_2^3 [3f(x) - 4]dx = 5$

C. $\int_2^{\ln e^6} [2f(x) - 1]dx = 16$

D. $\int_3^{\ln e^6} [4f(x) - 2g(x)]dx = 16$

Hướng dẫn giải

$$\int_2^3 f(x)dx + \int_3^6 f(x)dx = \int_2^6 f(x)dx = 10$$

$$\text{Ta có: } \int_3^6 [3g(x) - f(x)]dx = 3 \int_3^6 g(x)dx - \int_3^6 f(x)dx = 15 - 7 = 8 \text{ nên A đúng}$$

$$\int_2^3 [3f(x) - 4]dx = 3 \int_2^3 f(x)dx - 4 \int_2^3 dx = 9 - 4 = 5 \text{ nên B đúng}$$

$$\int_2^{\ln e^6} [2f(x) - 1]dx = \int_2^6 [2f(x) - 1]dx = 2 \int_2^6 f(x)dx - 1 \int_2^6 dx = 20 - 4 = 16 \text{ nên C đúng}$$

$$\int_3^{\ln e^6} [4f(x) - 2g(x)]dx = \int_3^6 [4f(x) - 2g(x)]dx = 4 \int_3^6 f(x)dx - 2 \int_3^6 g(x)dx = 28 - 10 = 18$$

Nên D sai

Chọn D.

Câu 30: Cho hàm số $f(x) = \int_1^{\sqrt{x}} (4t^3 - 8t) dt$. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[0; 6]$. Tính $M - m$.

A. 18

B. 12

C. 16

D. 9

Hướng dẫn giải

$$f(x) = \int_1^{\sqrt{x}} (4t^3 - 8t) dt = \left(t^4 - 4t^2 \right) \Big|_1^{\sqrt{x}} = x^2 - 4x + 3, \text{ với } x \geq 0.$$

$$f'(x) = 2x - 4; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \in [1; 6].$$

$$f(0) = 3; f(2) = -1; f(6) = 15. \text{ Suy ra } M = 15, m = -1. \text{ Suy ra } M - m = 16.$$

Chọn C.

Câu 31: Nếu $f(0) = 1$, $f'(x)$ liên tục và $\int_0^3 f'(x) dx = 9$ thì giá trị của $f(3)$ là:

A. 3.

B. 9.

C. 10.

D. 5.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } \int_0^3 f'(x) dx = f(x) \Big|_0^3 = f(3) - f(0) = 9 \Leftrightarrow f(3) - 1 = 9 \Leftrightarrow f(3) = 10$$

Chọn C

Câu 32: Cho $f(x)$ và $g(x)$ là hai hàm số liên tục trên $[-1, 1]$ và $f(x)$ là hàm số chẵn, $g(x)$ là hàm số lẻ. Biết $\int_0^1 f(x) dx = 5$ và $\int_0^1 g(x) dx = 7$. Mệnh đề nào dưới đây sai?

A. $\int_{-1}^1 f(x) dx = 10.$

B. $\int_{-1}^1 g(x) dx = 14.$

C. $\int_{-1}^1 [f(x) + g(x)] dx = 10.$

D. $\int_{-1}^1 [f(x) - g(x)] dx = 10.$

Hướng dẫn giải

Nhớ 2 tích chất sau để làm trắc nghiệm nhanh:

1. Nếu hàm $f(x)$ CHẼN thì $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$ 2. Nếu hàm $f(x)$ LẼ thì

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0$$

Nếu chứng minh thì như sau:

$$\text{Đặt } A = \int_{-1}^1 f(x) dx = \underbrace{\int_{-1}^0 f(x) dx}_{A_1} + \underbrace{\int_0^1 f(x) dx}_{A_2}$$

$$A_1 = \int_{-1}^0 f(x) dx. \text{ Đặt } t = -x \Rightarrow dt = -dx$$

Đổi cận:

$$\Rightarrow A_1 = \int_1^0 f(-t) \cdot (-dt) = \int_0^1 f(-t) dt = \int_0^1 f(-x) dx \quad (\text{Do tích phân xác định không phụ thuộc vào biến số tích phân}) = \int_0^1 f(x) dx \quad (\text{Do } f(x) \text{ là hàm chẵn} \Rightarrow f(-x) = f(x))$$

$$\text{Vậy } A = \int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx = 10 \quad (1)$$

$$\text{Đặt } B = \int_{-1}^1 g(x) dx = \underbrace{\int_{-1}^0 g(x) dx}_{B_1} + \underbrace{\int_0^1 g(x) dx}_{B_2}$$

$$B_1 = \int_{-1}^0 g(x) dx. \text{ Đặt } t = -x \Rightarrow dt = -dx$$

Đổi cận:

$$\Rightarrow B_1 = \int_1^0 g(-t) \cdot (-dt) = \int_0^1 g(-t) dt = \int_0^1 g(-x) dx \quad (\text{Do tích phân xác định không phụ thuộc vào biến số tích phân}) = -\int_0^1 g(x) dx \quad (\text{Do } f(x) \text{ là hàm lẻ} \Rightarrow g(-x) = -g(x))$$

$$\text{Vậy } B = \int_{-1}^1 g(x) dx = -\int_0^1 g(x) dx + \int_0^1 g(x) dx = 0 \quad (2)$$

Từ (1) và (2)

Chọn B

Câu 33: Cho tích phân $\int_0^6 f(x) dx = 20$. Tính tích phân $I = \int_0^3 f(2x) dx$.

A. $I = 40$.

B. $I = 10$.

C. $I = 20$.

D. $I = 5$.

Hướng dẫn giải

$$I = \int_0^3 f(2x) dx \quad \text{Đặt } t = 2x \Rightarrow dt = 2dx \quad \text{Đổi cận:}$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2} \int_0^6 f(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^6 f(x) dx \quad (\text{Do tích phân xác định không phụ thuộc vào biến số tích phân})$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 20 = 10$$

Chọn B

Câu 34: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 6]$ thỏa mãn $\int_0^6 f(x) dx = 10$ và $\int_2^4 f(x) dx = 6$. Tính giá trị của biểu thức $P = \int_0^2 f(x) dx + \int_4^6 f(x) dx$.

- A.** $P = 4$. **B.** $P = 16$. **C.** $P = 8$. **D.** $P = 10$.

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } P &= \int_0^2 f(x) dx + \int_4^6 f(x) dx = \left(\int_0^6 f(x) dx + \int_6^2 f(x) dx \right) + \int_4^6 f(x) dx \\ &= \int_0^6 f(x) dx + \left(\int_6^4 f(x) dx + \int_4^2 f(x) dx \right) + \int_4^6 f(x) dx = \int_0^6 f(x) dx + \int_4^2 f(x) dx = 10 - 6 = 4 \end{aligned}$$

Chọn A

Câu 35: Cho tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot f(\sin x) dx = 8$. Tính tích phân $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot f(\cos x) dx$.

- A.** $K = -8$. **B.** $K = 4$. **C.** $K = 8$. **D.** $K = 16$.

Hướng dẫn giải

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot f(\sin x) dx \quad \text{Đặt } t = \frac{\pi}{2} - x \Rightarrow dt = -dx \quad \text{Đổi cận:}$$

$$\Rightarrow I = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) \cdot f\left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right] \cdot (-dt) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cdot f(\cos t) \cdot dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot f(\cos x) \cdot dx \quad (\text{Tích}$$

phân xác định không phụ thuộc vào biến số tích phân) $= K \Rightarrow K = I = 8$

Chọn C

Câu 36: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 1]$ và có $\int_0^1 [3 - 2f(x)] dx = 5$. Tính $\int_0^1 f(x) dx$.

- A.** -1 . **B.** 2 . **C.** 1 . **D.** -2 .

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned}\text{Ta có: } \int_0^1 [3 - 2f(x)] dx &= 5 \Leftrightarrow \int_0^1 3dx - 2 \int_0^1 f(x) dx = 5 \Leftrightarrow 3x \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 f(x) dx = 5 \\ &\Leftrightarrow -2 \int_0^1 f(x) dx = 5 - 3 = 2 \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = -1\end{aligned}$$

Chọn A

Câu 37: Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 1]$, có $\int_0^1 f(x) dx = 4$ và $\int_0^1 g(x) dx = -2$

. Tính tích phân $I = \int [f(x) - 3g(x)] dx$.

A. -10. **B.** 10. **C.** 2. **D.** -2.

Hướng dẫn giải

$$I = \int_0^1 [f(x) - 3g(x)] dx = \int_0^1 f(x) dx - 3 \int_0^1 g(x) dx = 4 - 3(-2) = 10$$

Chọn B

Câu 38: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 1]$ và $f(1) = 2$. Biết

$\int_0^1 f(x) dx = 1$, tính tích phân $I = \int_0^1 x \cdot f'(x) dx$.

A. $I = 1$. **B.** $I = -1$. **C.** $I = 3$. **D.** $I = -3$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } I = \int_0^1 x \cdot f'(x) dx$$

Đặt $u = x \Rightarrow du = dx$, $dv = f'(x) dx$ Chọn $v = \int f'(x) dx = f(x)$

$$\Rightarrow I = x \cdot f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 f(x) dx = 1 \cdot f(1) - 0 \cdot f(0) - \int_0^1 f(x) dx = 2 - 1 = 1$$

Chọn A

Câu 39: Cho biết $\int_{-1}^5 f(x) dx = 15$. Tính giá trị của $P = \int_0^2 [f(5-3x) + 7] dx$

A. $P = 15$ **B.** $P = 37$ **C.** $P = 27$ **D.** $P = 19$

Hướng dẫn giải

$$t = 5 - 3x \Rightarrow dx = -\frac{dt}{3}$$

Để tính P ta đặt $x = 0 \Rightarrow t = 5$ nên

$$x = 2 \Rightarrow t = -1$$

$$\begin{aligned} P &= \int_5^{-1} [f(t) + 7] \left(-\frac{dt}{3}\right) = \frac{1}{3} \int_{-1}^5 [f(t) + 7] dt = \frac{1}{3} \left(\int_{-1}^5 f(t) dt + 7 \int_{-1}^5 dt \right) \\ &= \frac{1}{3} \cdot 15 + \frac{1}{3} \cdot 7 \cdot (6) = 19 \end{aligned}$$

Chọn D.

Câu 40: Cho $y = f(x)$ là hàm số chẵn, có đạo hàm trên đoạn $[-6;6]$. Biết rằng $\int_{-1}^2 f(x) dx = 8$ và

$$\int_1^3 f(-2x) dx = 3. \text{ Tính } I = \int_{-1}^6 f(x) dx$$

A. $I = 11$.

B. $I = 5$.

C. $I = 2$.

D. $I = 14$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

$$\text{Vì } f(x) \text{ là hàm số chẵn nên } \int_{-a}^a f(x) dx = 0 \Rightarrow \int_{-1}^2 f(x) dx = \int_1^2 f(x) dx = 8$$

$$\int_1^3 f(-2x) dx = \int_1^3 f(2x) dx = 3$$

$$\text{Xét tích phân } K = \int_1^3 f(2x) dx = 3$$

$$\text{Đặt } u = 2x \Rightarrow du = 2dx \Rightarrow dx = \frac{du}{2}$$

$$\text{Đổi cận: } x = 1 \Rightarrow u = 2; \quad x = 3 \Rightarrow u = 6.$$

$$K = \frac{1}{2} \int_2^6 f(u) du = \frac{1}{2} \int_2^6 f(x) dx = 3 \Rightarrow \int_2^6 f(x) dx = 6$$

$$\text{Vậy } I = \int_{-1}^6 f(x) dx = \int_1^6 f(x) dx = \int_1^2 f(x) dx + \int_2^6 f(x) dx = 8 + 6 = 14.$$

Câu 41: Cho f, g là hai hàm liên tục trên $[1;3]$ thỏa: $\int_1^3 [f(x) + 3g(x)] dx = 10$.

$$\int_1^3 [2f(x) - g(x)] dx = 6. \text{ Tính } \int_1^3 [f(x) + g(x)] dx.$$

A. 8.

B. 9.

C. 6.

D. 7.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

□ Ta có $\int_1^3 [f(x) + 3g(x)] dx = 10 \Leftrightarrow \int_1^3 f(x) dx + 3 \int_1^3 g(x) dx = 10.$

□ Tương tự $\int_1^3 [2f(x) - g(x)] dx = 6 \Leftrightarrow 2 \int_1^3 f(x) dx - \int_1^3 g(x) dx = 6.$

□ Xét hệ phương trình $\begin{cases} u + 3v = 10 \\ 2u - v = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 4 \\ v = 2 \end{cases}$, trong đó $u = \int_1^3 f(x) dx$, $v = \int_1^3 g(x) dx.$

□ Khi đó $\int_1^3 [f(x) + g(x)] dx = \int_1^3 f(x) dx + \int_1^3 g(x) dx = 4 + 2 = 6.$

Câu 42: Cho hàm số $f(x) = \ln|x + \sqrt{x^2 + 1}|$. Tính tích phân $I = \int_0^1 f'(x) dx$.

A. $I = \ln \sqrt{2}.$

B. $I = \ln(1 + \sqrt{2}).$

C. $I = \ln 2$

D. $I = 2 \ln 2$

Hướng dẫn giải

Ta có: $I = \int_0^1 f'(x) dx = f(x) \Big|_0^1 = \ln|x + \sqrt{x^2 + 1}| \Big|_0^1 = \ln(1 + \sqrt{2})$

Chọn B

Câu 43: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1; \ln 3]$ và thỏa mãn $f(1) = e^2$, $\int_1^{\ln 3} f'(x) dx = 9 - e^2$. Tính $I = f(\ln 3)$.

A. $I = 9 - 2e^2.$

B. $I = 9.$

C. $I = -9.$

D. $I = 2e^2 - 9.$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\int_1^{\ln 3} f'(x) dx = f(x) \Big|_1^{\ln 3} = f(\ln 3) - f(1) = 9 - e^2$ (gt)

$\Rightarrow f(\ln 3) - e^2 = 9 - e^2 \Rightarrow f(\ln 3) = 9$

Chọn B

Câu 44: Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0; 1]$ và thỏa mãn $\int_0^1 f'(x).g(x) dx = 1$, $\int_0^1 f(x).g'(x) dx = -1$. Tính $I = \int_0^1 [f(x).g(x)]' dx$.

A. $I = -2.$

B. $I = 0.$

C. $I = 3.$

D. $I = 2.$

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 [f(x) \cdot g(x)]' dx = \int_0^1 [f(x) \cdot g'(x) + f'(x) \cdot g(x)] dx \\ &= \int_0^1 f(x) \cdot g'(x) dx + \int_0^1 f'(x) \cdot g(x) dx = 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

Chọn B

Câu 45: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbf{R}$, thỏa mãn $\int_0^1 f(x) dx = 1$. Tính

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan^2 x + 1) \cdot f(\tan x) dx.$$

A. $I = 1$. **B.** $I = -1$. **C.** $I = \frac{\pi}{4}$. **D.** $I = -\frac{\pi}{4}$.

Hướng dẫn giải

Đặt $t = \tan x \Rightarrow dt = (1 + \tan^2 x) dx$. Đổi cận:

$$\Rightarrow I = \int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 f(x) dx \text{ (Tích phân xác định không phụ thuộc vào biến số tích phân)} = 1$$

Chọn A

Câu 46: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và thỏa mãn $f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 3x$ với $x \in \left[\frac{1}{2}; 2\right]$. Tính

$$\int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{f(x)}{x} dx.$$

A. $\frac{9}{2}$. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** $-\frac{9}{2}$. **D.** $-\frac{3}{2}$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Đặt } A = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{f(x)}{x} dx \text{ (1) Đặt } t = \frac{1}{x} \Rightarrow dt = -\frac{1}{x^2} dx \Rightarrow -\frac{dt}{t^2} = dx \text{ Đổi cận:}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow A &= \int_2^{\frac{1}{2}} \frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{\frac{1}{t^2}} (-dt) = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{t} dt = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{2} dx \text{ (Tích phân xác định không phụ thuộc vào} \\ &\text{biến số tích phân) (2)} \end{aligned}$$

$$\text{Ta có: } (1) + 2(2) \Rightarrow 3A = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right)}{x} dx = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{3x}{x} dx = \int_{\frac{1}{2}}^2 3dx = 3x \Big|_{\frac{1}{2}}^2 \Rightarrow 3A = \frac{9}{2} \Rightarrow A = \frac{3}{2}$$

Chọn B

Câu 47: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbf{R}$ và thỏa mãn $f(x) + f(-x) = \sqrt{2 + 2\cos 2x}$. Tính

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx.$$

A. $I = -1$.

B. $I = 1$.

C. $I = -2$.

D. $I = 2$.

Hướng dẫn giải

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx \quad (1) \text{ Đặt } t = -x \Rightarrow dt = -dx \text{ Đổi cận:}$$

$$\Rightarrow I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} f(-t) \cdot (-dt) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(-t) dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(-x) dx \quad (2) \text{ (Tích phân xác định không phụ thuộc vào biến số tích phân)}$$

$$(1) + (2) \Rightarrow 2I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [f(x) + f(-x)] dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2 + 2\cos 2x} dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2(1 + \cos 2x)} dx =$$

$$\sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2\cos^2 x} dx = 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\cos x| dx = 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 2 \sin x \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2[1 - (-1)] = 4$$

$$\Rightarrow I = 2$$

Chọn D

Câu 48: Biết hàm số $y = f\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ là hàm số chẵn trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ và

$$f(x) + f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin x + \cos x. \text{ Tính } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx.$$

A. $I = 0$.

B. $I = 1$.

C. $I = \frac{1}{2}$.

D. $I = -1$.

Hướng dẫn giải

Đặt $t = \frac{\pi}{2} - x \Rightarrow dt = -dx$ Đổi cận:

$$\Rightarrow I = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 f\left(\frac{\pi}{2} - t\right) \cdot (-dt) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{\pi}{2} - t\right) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx \quad (\text{Tích phân xác định không phụ}$$

thuộc vào biến số tích phân) $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{\pi}{2} + x\right) dx$ (Vì $f\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ là hàm số chẵn

$$\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\text{Vậy } 2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[f(x) + f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \right] dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x) dx = (\cos x - \sin x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -1 - 1 = -2$$

$$\Rightarrow I = -1$$

Chọn D

Câu 49: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbf{R}$, thỏa mãn $f(-x) + 2018f(x) = e^x$. Tính

$$I = \int_{-1}^1 f(x) dx.$$

A. $I = \frac{e^2 - 1}{2019e}.$

B. $I = \frac{e^2 - 1}{2018e}.$

C. $I = 0.$

D. $I = \frac{e^2 - 1}{e}.$

Hướng dẫn giải

$$I = \int_{-1}^1 f(x) dx \quad (1) \text{ Đặt } t = -x \Rightarrow dt = -dx \text{ Đổi cận:}$$

$$\Rightarrow I = \int_1^{-1} f(-t)(-dt) = \int_{-1}^1 f(-t) dt = \int_{-1}^1 f(-x) dx \quad (2) \quad (\text{Tích phân xác định không phụ thuộc}$$

vào biến số tích phân). Ta có: $(1) + 2018(2) = I + 2018I = \int_{-1}^1 [f(x) + 2018f(-x)] dx$

$$\Leftrightarrow 2019I = \int_{-1}^1 e^x dx = e^x \Big|_{-1}^1 = e - \frac{1}{e} = \frac{e^2 - 1}{e} \Rightarrow I = \frac{e^2 - 1}{2019e}$$

Chọn A

Câu 50: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int_0^1 (x+1)f'(x) dx = 10$ và $2f(1) - f(0) = 2$. Tính

$$I = \int_0^1 f(x) dx.$$

A. $I = 8.$

B. $I = -8.$

C. $I = 4.$

D. $I = -4.$

Hướng dẫn giải

$$A = \int_0^1 (x+1) f'(x) dx \text{ Đặt } u = x+1 \Rightarrow du = dx, dv = f'(x) dx \text{ Chọn } v = f(x)$$

$$\Rightarrow A = (x+1) \cdot f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 f(x) dx = 2f(1) - f(0) - \int_0^1 f(x) dx = 2 - \int_0^1 f(x) dx = 10 \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = -8$$

Chọn B

Câu 51: Cho hàm số $f(x)$ thỏa $f(0) = f(1) = 1$. Biết $\int_0^1 e^x [f(x) + f'(x)] dx = ae + b$. Tính biểu thức $Q = a^{2018} + b^{2018}$.

A. $Q = 8$.

B. $Q = 6$.

C. $Q = 4$.

D. $Q = 2$.

Hướng dẫn giải

$$A = \int_0^1 e^x [f(x) + f'(x)] dx = \underbrace{\int_0^1 e^x f(x) dx}_{A_1} + \underbrace{\int_0^1 e^x f'(x) dx}_{A_2}$$

$$A_1 = \int_0^1 e^x f(x) dx$$

$$\text{Đặt } u = f(x) \Rightarrow du = f'(x) dx, dv = e^x dx \text{ Chọn } v = e^x \Rightarrow A_1 = e^x \cdot f(x) \Big|_0^1 - \underbrace{\int_0^1 e^x f'(x) dx}_{A_2}$$

$$\text{Vậy } A = e^x f(x) \Big|_0^1 - A_2 + A_2 = e^x f(x) \Big|_0^1 = e \cdot f(1) - f(0) = e - 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases} \Rightarrow a^{2018} + b^{2018} = 1 + 1 = 2$$

Chọn D

Câu 52: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $(0; +\infty)$ và thỏa $\int_0^{x^2} f(t) dt = x \cdot \cos \pi x$. Tính $f(4)$.

A. $f(4) = 123$.

B. $f(4) = \frac{2}{3}$.

C. $f(4) = \frac{3}{4}$.

D. $f(4) = \frac{1}{4}$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } F(t) = \int f(t) dt \Rightarrow F'(t) = f(t)$$

$$\text{Đặt } G(x) = \int_0^{x^2} f(t) dt = F(x^2) - F(0)$$

$$\Rightarrow G'(x) = [F(x^2)]' = 2x \cdot f(x^2) \quad (\text{Tính chất đạo hàm hợp: } f'[u(x)] = f'(u) \cdot u'(x))$$

$$\text{Mặt khác, từ gt: } G(x) = \int_0^{x^2} f(t) dt = x \cdot \cos \pi x$$

$$\Rightarrow G'(x) = (x \cdot \cos \pi x)' = -x\pi \sin \pi x + \cos \pi x$$

$$\Rightarrow 2x \cdot f(x^2) = -x\pi \sin \pi x + \cos \pi x \quad (1)$$

Tính $f(4) \Rightarrow$ ứng với $x = 2$

$$\text{Thay } x = 2 \text{ vào (1)} \Rightarrow 4 \cdot f(4) = -2\pi \sin 2\pi + \cos 2\pi = 1 \Rightarrow f(4) = \frac{1}{4}$$

Chọn D

Câu 53: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int_0^{f(x)} t^2 \cdot dt = x \cdot \cos \pi x$. Tính $f(4)$.

$$\text{A. } f(4) = 2\sqrt{3}. \quad \text{B. } f(4) = -1. \quad \text{C. } f(4) = \frac{1}{2}. \quad \text{D. } f(4) = \sqrt[3]{12}.$$

Hướng dẫn giải

$$\int_0^{f(x)} t^2 dt = \frac{t^3}{3} \Big|_0^{f(x)} = \frac{[f(x)]^3}{3} = x \cos \pi x \Rightarrow [f(x)]^3 = 3x \cdot \cos \pi x$$

$$\Rightarrow f(x) = \sqrt[3]{3x \cos \pi x} \Rightarrow f(4) = \sqrt[3]{12}$$

Chọn D

Câu 54: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1, 2]$ và thỏa mãn $f(x) > 0$ khi $x \in [1, 2]$.

$$\text{Biết } \int_1^2 f'(x) dx = 10 \text{ và } \int_1^2 \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln 2. \text{ Tính } f(2).$$

$$\text{A. } f(2) = -10. \quad \text{B. } f(2) = 20. \quad \text{C. } f(2) = 10. \quad \text{D. } f(2) = -20.$$

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } \int_1^2 f'(x) dx = f(x) \Big|_1^2 = f(2) - f(1) = 10 \quad (\text{gt})$$

$$\int_1^2 \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln [f(x)] \Big|_1^2 = \ln [f(2)] - \ln [f(1)] = \ln \frac{f(2)}{f(1)} = \ln 2 \quad (\text{gt})$$

$$\text{Vậy ta có hệ: } \begin{cases} f(2) - f(1) = 10 \\ \frac{f(2)}{f(1)} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(2) = 20 \\ f(1) = 10 \end{cases}$$

Chọn B

Câu 55: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[-1; 1]$, thỏa mãn $f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbf{R}$ và $f'(x) + 2f(x) = 0$. Biết $f(1) = 1$, tính $f(-1)$.

A. $f(-1) = e^{-2}$. **B.** $f(-1) = e^3$. **C.** $f(-1) = e^4$. **D.** $f(-1) = 3$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Từ gt: } f'(x) + 2f(x) = 0 \Rightarrow f'(x) = -2f(x) \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = -2$$

$$\Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int -2 dx \Rightarrow \ln[f(x)] = -2x + C \Rightarrow f(x) = e^{-2x+C}$$

$$\text{Có } f(1) = 1 \Leftrightarrow e^{-2+C} = 1 = e^0 \Rightarrow C = 2 \Rightarrow f(x) = e^{-2x+2} \Rightarrow f(-1) = e^4$$

Chọn C

Câu 56: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbf{R}$, nhận giá trị dương trên khoảng $(0; +\infty)$ và thỏa $f(1) = 1$, $f(x) = f'(x)\sqrt{3x+1}$. Mệnh đề nào đúng?

A. $1 < f(5) < 2$. **B.** $4 < f(5) < 5$. **C.** $2 < f(5) < 3$. **D.** $3 < f(5) < 4$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Từ gt: } f(x) = f'(x)\sqrt{3x+1} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3x+1}} = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$\Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int \frac{1}{\sqrt{3x+1}} dx \Rightarrow \ln[f(x)] = \frac{2}{3}\sqrt{3x+1} + C \Rightarrow f(x) = e^{\frac{2}{3}\sqrt{3x+1} + C}$$

$$\text{Vì } f(1) = 1 \Leftrightarrow e^{\frac{2}{3}\sqrt{3+1} + C} = 1 = e^0 \Rightarrow C = -\frac{4}{3} \Rightarrow f(x) = e^{\frac{2}{3}\sqrt{3x+1} - \frac{4}{3}} \Rightarrow f(5) = e^{\frac{4}{3}} \approx 3,79$$

Chọn D

Câu 57: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbf{R}$ và $f(x) > 0$ khi $x \in [0; a]$ ($a > 0$). Biết $f(x) \cdot f(a-x) = 1$, tính tích phân $I = \int_0^a \frac{dx}{1+f(x)}$.

A. $I = \frac{a}{2}$. **B.** $I = 2a$. **C.** $I = \frac{a}{3}$. **D.** $I = \frac{a}{4}$.

Hướng dẫn giải

$$I = \int_0^a \frac{dx}{1+f(x)} \quad (1) \text{ Đặt } t = a - x \Rightarrow dt = -dx \text{ Đổi cận:}$$

$$\Rightarrow I = \int_a^0 -\frac{dt}{1+f(a-t)} = \int_0^a \frac{1}{1+f(a-t)} dt = \int_0^a \frac{1}{1+f(a-x)} dx \quad (2) \text{ (Tích phân xác định không phụ thuộc vào biến số tích phân)}$$

$$\begin{aligned} (1) + (2) &\Rightarrow 2I = \int_0^a \left[\frac{1}{1+f(x)} + \frac{1}{1+f(a-x)} \right] dx \\ &= \frac{1+f(a-x)+1+f(x)}{1+f(x) \cdot f(a-x) + f(x) + f(a-x)} dx = \int_0^a \frac{2+f(a-x)+f(x)}{2+f(a-x)+f(x)} dx = \int_0^a dx = a \Rightarrow I = \frac{a}{2} \end{aligned}$$

Chọn A

Câu 58: Cho hàm số $G(x) = \int_0^x t \cdot \cos(x-t) \cdot dt$. Tính $G'\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

A. $G'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$. **B.** $G'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$. **C.** $G'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. **D.** $G'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$.

Hướng dẫn giải

Cách 1: Ta có: $F(t) = \int t \cdot \cos(x-t) dt \Rightarrow F'(x) = t \cdot \cos(x-t)$

Đặt $G(x) = \int_0^x t \cdot \cos(x-t) dt = F(x) - F(0)$

$$\Rightarrow G'(x) = [F(x) - F(0)]' = F'(x) - F'(0) = [x \cos(x-x) - 0]' = x' = 1 \Rightarrow G'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

Chọn B

Cách 2: Ta có $G(x) = \int_0^x t \cdot \cos(x-t) dt$. Đặt $u = t \Rightarrow du = dt$, $dv = \cos(x-t) dx$ **Chọn**

$$v = -\sin(x-t)$$

$$\Rightarrow G(x) = -t \cdot \sin(x-t) \Big|_0^x + \int_0^x \sin(x-t) dt = \int_0^x \sin(x-t) dt = \cos(x-t) \Big|_0^x = \cos 0 - \cos x = 1 - \cos x$$

$$\Rightarrow G'(x) = \sin x \Rightarrow G'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

Chọn B

Câu 59: Cho hàm số $G(x) = \int_0^{x^2} \cos \sqrt{t} dt$ ($x > 0$). Tính $G'(x)$.

- A. $G'(x) = x^2 \cdot \cos x$. B. $G'(x) = 2x \cdot \cos x$. C. $G'(x) = \cos x$. D. $G'(x) = \cos x - 1$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } F(t) = \int \cos \sqrt{t} dt \Rightarrow F'(t) = \cos \sqrt{t} \Rightarrow G(x) = \int_0^{x^2} \cos \sqrt{t} dt = F(x^2) - F(0)$$

$$\Rightarrow G'(x) = [F(x^2) - F(0)]' = [F(x^2)]' - [F(0)]' = [F(x^2)]' = 2x \cdot F'(x^2) = 2x \cdot \cos \sqrt{x^2} = 2x \cdot \cos x$$

Chọn B

Câu 60: Tìm giá trị lớn nhất của $G(x) = \int_1^x (t^2 + t) dt$ trên đoạn $[-1; 1]$.

- A. $\frac{1}{6}$. B. 2. C. $-\frac{5}{6}$. D. $\frac{5}{6}$.

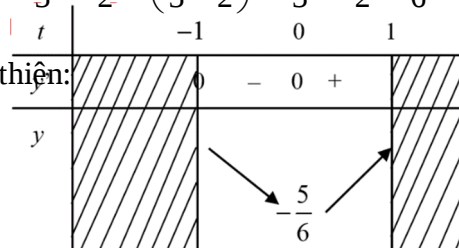
Hướng dẫn giải

$$G(x) = \int_1^x (t^2 + t) dt = \left(\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} \right) \Big|_1^x = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - \frac{5}{6}$$

$$\Rightarrow G'(x) = x^2 + x \Rightarrow \text{bảng biến thiên:}$$

Từ bảng biến thiên

Chọn C



Câu 61: Cho hàm số $G(x) = \int_1^x \sqrt{1+t^2} dt$. Tính $G'(x)$.

- A. $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. B. $\sqrt{1+x^2}$. C. $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. D. $(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Đặt } F(t) = \int \sqrt{1+t^2} dt \Rightarrow F'(t) = \sqrt{1+t^2}$$

$$G(x) = \int_1^x \sqrt{1+t^2} dt = F(x) - F(1) \Rightarrow G'(x) = F'(x) - F'(1) = F'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

Chọn A

Câu 62: Cho hàm số $F(x) = \int_1^{\sqrt{x}} \sin t^2 dt$ ($x > 0$). Tính $F'(x)$.

- A.** $\sin x$. **B.** $\frac{\sin x}{2\sqrt{x}}$. **C.** $\frac{2\sin x}{\sqrt{x}}$. **D.** $\sin \sqrt{x}$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Đặt } F(t) = \int \sin t^2 dt, G(x) = \int_1^{\sqrt{x}} \sin t^2 dt = F(\sqrt{x}) - F(1)$$

$$\Rightarrow G'(x) = F'(\sqrt{x}) - F'(1) = F'(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})' \cdot \sin(\sqrt{x})^2 = \frac{\sin x}{2\sqrt{x}}$$

Chọn B

Câu 63: Tính đạo hàm của $f(x)$, biết $f(x)$ thỏa $\int_0^x t e^{f(t)} dt = e^{f(x)}$.

- A.** $f'(x) = x$. **B.** $f'(x) = x^2 + 1$. **C.** $f'(x) = \frac{1}{x}$. **D.** $f'(x) = \frac{1}{1-x}$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Đặt } F(t) = \int t e^{f(t)} dt \Rightarrow F'(t) = t e^{f(t)} \Rightarrow G(x) = \int_0^x t e^{f(t)} dt = F(x) - F(0)$$

$$\Rightarrow G'(x) = F'(x) = e^{f(x)} \text{ (gt)} \Leftrightarrow x e^{f(x)} = e^{f(x)} \Rightarrow [x e^{f(x)}]' = [e^{f(x)}]'$$

$$\Rightarrow e^{f(x)} + x \cdot f'(x) \cdot e^{f(x)} = f'(x) \cdot e^{f(x)} \Rightarrow 1 + x \cdot f'(x) = f'(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1-x}$$

Chọn D

Câu 64: Cho $y = f(x)$ là hàm số chẵn, có đạo hàm trên đoạn $[-6; 6]$. Biết rằng $\int_{-1}^2 f(x) dx = 8$ và

$$\int_1^3 f(-2x) dx = 3. \text{ Tính } \int_{-1}^6 f(x) dx.$$

- A.** $I = 11$. **B.** $I = 5$. **C.** $I = 2$. **D.** $I = 14$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Xét tích phân } K = \int_1^3 f(-2x) dx$$

$$\text{Đặt } u = -2x \Rightarrow du = -2dx \Rightarrow dx = -\frac{du}{2}$$

$$\text{Đổi cận: Khi } x=1 \Rightarrow u=-2; x=3 \Rightarrow u=-6$$

Vậy, $K = -\frac{1}{2} \int_{-2}^{-6} f(u) du = \frac{1}{2} \int_{-6}^{-2} f(x) dx$. Mà $K = 3$, nên $\int_{-6}^{-2} f(x) dx = 6$.

Vì f là hàm chẵn trên $[-6; 6]$ nên $\int_2^6 f(x) dx = \int_{-6}^{-2} f(x) dx = 6$.

Từ đó suy ra $I = \int_{-1}^6 f(x) dx = \int_{-1}^2 f(x) dx + \int_2^6 f(x) dx = 8 + 6 = 14$.

Chọn D.

Câu 65: Cho hàm số $f(x) = \frac{a}{(x+1)^3} + b.xe^x$. Biết rằng $f'(0) = -22$ và $\int_0^1 f(x) dx = 5$. Khi đó tổng $a+b$ bằng?

A. $\frac{-146}{13}$.

B. $\frac{26}{11}$.

C. $\frac{-26}{11}$.

D. $\frac{146}{13}$.

Hướng dẫn giải

$$f'(x) = \frac{-3a}{(x+1)^4} + be^x(1+x)$$

$$f'(0) = -22 \Leftrightarrow -3a + b = -22 \quad (1)$$

$$\int_0^1 f(x) dx = 5 \Leftrightarrow a \int_0^1 \frac{1}{(x+1)^3} dx + b \int_0^1 xe^x dx = 5$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{4} + b = 5 \quad (2)$$

$$\text{Giải hệ (1) và (2) ta được: } a = \frac{108}{13}, \quad b = \frac{38}{13}.$$

Chọn D.

Câu 66: Cho f, g là hai hàm liên tục trên $[1; 3]$ thỏa: $\int_1^3 [f(x) + 3g(x)] dx = 10$.

$$\int_1^3 [2f(x) - g(x)] dx = 6. \text{ Tính } \int_1^3 [f(x) + g(x)] dx.$$

A. 8.

B. 9.

C. 6.

D. 7.

Hướng dẫn giải

$$+ \text{Ta có } \int_1^3 [f(x) + 3g(x)] dx = 10 \Leftrightarrow \int_1^3 f(x) dx + 3 \int_1^3 g(x) dx = 10.$$

$$+ \text{Tương tự } \int_1^3 [2f(x) - g(x)] dx = 6 \Leftrightarrow 2 \int_1^3 f(x) dx - \int_1^3 g(x) dx = 6.$$

+ Xét hệ phương trình $\begin{cases} u+3v=10 \\ 2u-v=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=4 \\ v=2 \end{cases}$, trong đó $u = \int_1^3 f(x) dx$, $v = \int_1^3 g(x) dx$.

+ Khi đó $\int_1^3 [f(x) + g(x)] dx = \int_1^3 f(x) dx + \int_1^3 g(x) dx = 4 + 2 = 6$.

Nên ta có hệ phương trình sau: $\begin{cases} 0 = a.(10)^2 + \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{40} \\ b = \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow (P_2): y = -\frac{1}{40}x^2 + \frac{5}{2}$

Ta có thể tích của bê tông là: $V = 5.2 \left[\int_0^{10} \left(-\frac{1}{40}x^2 + \frac{5}{2} \right) dx - \int_0^{\frac{19}{2}} \left(-\frac{8}{361}x^2 + 2 \right) dx \right] = 40m^3$.

Câu 67: Cho $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-1}$. **B.** $I_n = \frac{n-2}{n} I_{n-2}$. **C.** $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$. **D.** $I_n = 2I_{n-2}$

Hướng dẫn giải

Với $I_0 = \frac{\pi}{2}$; $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 1$.

Đặt $u = \cos^{n-1} x \Rightarrow du = -(n-1) \cos^{n-2} x \cdot \sin x dx$.

$dv = \cos x dx$ **Chọn** $v = \sin x$.

Suy ra $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \cos^{n-1} x \cdot \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} x \cdot \sin^2 x dx$
 $= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} x \cdot (1 - \cos^2 x) dx = (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} x dx - (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$.
 Do đó $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \frac{n-1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} x dx$.

Chọn C.

Câu 68: Rút gọn biểu thức: $T = C_n^0 + \frac{1}{2} C_n^1 + \frac{1}{3} C_n^2 + \dots + \frac{1}{n+1} C_n^n, n \in \mathbb{N}^*$.

A. $T = \frac{2^n}{n+1}$. **B.** $T = 2^{n+1}$. **C.** $T = \frac{2^n - 1}{n+1}$. **D.** $T = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}$

Hướng dẫn giải

Ta có

$T = C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 + \dots + \frac{1}{n+1}C_n^n$. Nhận thấy các số $\frac{1}{1}; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \dots; \frac{1}{n+1}$ thay đổi ta nghĩ ngay đến biểu thức $\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$.

Ở đây ta sẽ có lời giải như sau: $(1+x)^n = C_n^0 + xC_n^1 + x^2C_n^2 + x^3C_n^3 + \dots + x^nC_n^n$.

Khi đó ta suy ra $\int_0^1 (1+x)^n dx = \int_0^1 (C_n^0 + xC_n^1 + x^2C_n^2 + x^3C_n^3 + \dots + x^nC_n^n) dx$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n+1}(x+1)^{n+1} \Big|_0^1 = \left(C_n^0 x + \frac{x^2}{2}C_n^1 + \frac{x^3}{3}C_n^2 + \dots + \frac{x^{n+1}}{n+1}C_n^n \right) \Big|_0^1$$

$$\Leftrightarrow \frac{2^{n+1}-1}{n+1} = C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + \dots + \frac{1}{n+1}C_n^n.$$

Chọn D.

Câu 69: Nếu a là một số thỏa mãn các điều kiện sau: $a \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right]$ và $\int_0^a \cos(x+a^2) dx = \sin a$ thì:

A. $a = \pi$. **B.** $a = \sqrt{\pi}$. **C.** $a = 2\sqrt{\pi}$. **D.** $a = \sqrt{2\pi}$.

Hướng dẫn giải:

$$\int_0^a \cos(x+a^2) dx \Leftrightarrow \sin(x+a^2) \Big|_0^a = \sin a \Leftrightarrow \sin(a+a^2) - \sin a^2 = \sin a$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos \frac{a+2a^2}{2} \cdot \sin \frac{a}{2} = 2 \sin \frac{a}{2} \cdot \cos \frac{a}{2} \quad (1)$$

Vì $a \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right]$ nên $\frac{a}{2} \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4} \right] \Rightarrow \sin \frac{a}{2} > 0$, vậy:

$$(1) \Leftrightarrow \cos \frac{a+2a^2}{2} = \cos \frac{a}{2} \Leftrightarrow \cos \frac{a+a^2}{2} - \cos \frac{a}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow -2 \sin \frac{a^2+a}{2} \cdot \sin \frac{a^2}{2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin \frac{a^2+a}{2} = 0 \\ \sin \frac{a^2}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a^2+a}{2} = k\pi & (1) \\ \frac{a^2}{2} = l\pi & (2) \end{cases} \quad (k, l \in \mathbb{Z}).$$

Vì $k \in \mathbb{Z}$ nên (1) không thỏa mãn với mọi $a \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$, hoặc thay 4 vào đáp án (1) ta thấy đều không thỏa.

Đối với (2). Vì $a \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ nên **Chọn** $l=1$ lúc đó $a = \sqrt{2\pi}$.

Chọn D.

Câu 70: Gọi S là tập hợp tất cả các số nguyên dương k thỏa mãn điều kiện $\int_1^e \ln \frac{k}{x} dx < e - 2$. Khi đó:

A. $S = \{1\}$.

B. $S = \{2\}$.

C. $S = \{1, 2\}$

D. $S = \emptyset$.

Hướng dẫn giải:

$$\int_1^e \ln \frac{k}{x} dx$$

Dùng phương pháp tích phân từng phần

$$\begin{cases} u = \ln \frac{k}{x} = \ln k - \ln x \Rightarrow du = -\frac{1}{x} dx \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{cases}$$

$$\Rightarrow I = x \ln \frac{k}{x} \Big|_1^e + \int_1^e dx = e \ln \frac{k}{e} - \ln k + (e - 1)$$

$$\text{Vậy } \int_1^e \ln \frac{k}{x} dx < e - 2 \Leftrightarrow e \ln \frac{k}{e} - \ln k + (e - 1) < e - 2$$

$$\Leftrightarrow e(\ln k - 1) - \ln k < -1 \Leftrightarrow (e - 1) \ln k < e - 1 \Leftrightarrow \ln k < 1$$

$$\Leftrightarrow k < e \text{ mà } k \text{ là số nguyên dương nên } \text{Chọn } k \in \{1; 2\}.$$

Chọn C.

Câu 71: Biết $\int_0^3 f(x) dx = \frac{5}{3}$ và $\int_0^4 f(t) dt = \frac{3}{5}$. Tính $\int_3^4 f(u) du$.

A. $\frac{8}{15}$.

B. $\frac{14}{15}$.

C. $-\frac{17}{15}$.

D. $-\frac{16}{15}$.

Hướng dẫn giải:

$$\int_0^4 f(u) du = \int_0^3 f(u) du + \int_3^4 f(u) du.$$

$$\text{Mà } \int_0^3 f(u)du = \int_0^3 f(x)dx = \frac{5}{3} \text{ và } \int_0^4 f(u)du = \int_0^4 f(t)dt = \frac{3}{5}$$

$$\text{Nên: } \frac{3}{5} = \frac{5}{3} + \int_3^4 f(u)du \Rightarrow \int_3^4 f(u)du = \frac{3}{5} - \frac{5}{3} = -\frac{16}{15}$$

Chọn D.

Chú ý: tích phân không phụ thuộc vào biến số.

Câu 72: Biết $\int_0^1 \frac{x^2}{1+e^{-x}}dx = a$. Tính giá trị của $I = \int_0^1 \frac{x^2}{1+e^x}dx$.

A. $I = \frac{1}{2} - a$.

B. $I = 1 - a$.

C. $I = \frac{1}{3} - a$.

D. $I = 1 + a$.

Hướng dẫn giải:

$$\text{Sử dụng phân tích } \int_0^1 \frac{x^2}{1+e^{-x}}dx + \int_0^1 \frac{x^2}{1+e^x}dx = \int_0^1 x^2 dx .$$

Hoặc máy tính cầm tay để kiểm tra kết quả.

Chọn C.

Câu 73: Đặt $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$. Khi đó:

A. $I_{n+1} < I_n$.

B. $I_{n+1} > I_n$.

C. $I_{n+1} \geq I_n$.

D. $I_{n+1} = I_n$.

Hướng dẫn giải:

Khi $0 < x < \frac{\pi}{2}$ thì $0 < \sin x < 1$. Do đó với $0 < x < \frac{\pi}{2}$ Ta có:

$$\sin^{n+1} x < \sin^n x \Rightarrow I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1} x dx < I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx, \text{ tức là: } I_{n+1} < I_n.$$

Chọn A.

Câu 74: Cho $I_n = \int_0^1 x^2 (1-x^2)^n dx$ và $J_n = \int_0^1 x (1-x^2)^n dx$. Xét các câu:

(1) $I_n \leq \frac{1}{2(n+1)}$ với mọi n .

$$(2) J_n > \frac{1}{2(n+1)} \text{ với mọi } n.$$

$$(3) I_n \leq J_n = \frac{1}{2(n+1)} \text{ với mọi } n.$$

A. (1) đúng. **B.** (1) và (2) đúng. **C.** Tất cả đều sai. **D.** cả (1) và (3) đúng.

Hướng dẫn giải:

Chỉ (1) và (3) đúng. Khẳng định (2) sai.

$$\text{Ta đặt } x = \cos t \text{ để tính } J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t (1 - \cos^2 t)^n \cos t dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} t \cdot \cos t dt.$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} t d(\sin t) = \frac{\sin^{2n+2} t}{2n+2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2(n+1)}.$$

Như vậy khẳng định (2) sai. Ngoài ra, để thấy rằng với mọi $x \in [0;1]$

$$x \leq x^2 \text{ nên suy ra với mọi } n \text{ ta có } I_n \leq J_n = \frac{1}{2(n+1)}.$$

Vậy: (1) và (3) cùng đúng.

Chọn D.

Câu 75: Tìm số nguyên dương k nhỏ nhất, thỏa mãn $\int_0^1 \frac{dx}{2x+k} \geq 0$.

A. $k = 3$. **B.** $k = 4$. **C.** $k = 1$. **D.** $k = 2$.

Hướng dẫn giải:

$$\forall x \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0;1], 2x+k > 0 \text{ do đó: } \int_0^1 \frac{dx}{2x+k} \geq 0, \forall x \in \mathbb{N}^*.$$

Suy ra số nguyên dương k nhỏ nhất thỏa mãn ycbt là $k=1$

Chọn C.

Câu 76: Cho $f(x), g(x)$ là các hàm liên tục trên $[a; b]$.

$$(1) \text{ Với mọi số thực } y, \text{ ta có: } y^2 \int_a^b f^2(x) dx + 2y \int_a^b f(x) \cdot g(x) dx + \int_a^b g^2(x) dx \geq 0.$$

$$(2) \left(\int_a^b f(x).g(x)dx \right)^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(x)dx.$$

Trong hai khẳng định trên:

A. Chỉ có (1) đúng.

B. Chỉ có (2) đúng.

C. Cả hai khẳng định đều đúng.

D. Cả hai khẳng định đều sai.

Hướng dẫn giải:

Với mọi số thực y ta có: $0 \leq [y.f(x) + g(x)]^2$

$= y^2.f^2(x) + 2y.f(x).g(x) + g^2(x)$ từ đó suy ra (1) đúng:

$$y^2 \int_a^b f^2(x)dx + 2y \int_a^b f(x).g(x)dx + \int_a^b g^2(x)dx \geq 0$$

Vì vế trái của Bất đẳng thức trên là tam thức bậc hai đối với y , nên theo định thức về dấu của tam thức bậc hai, Ta có:

$$\Delta' = \left(\int_a^b f(x).g(x)dx \right)^2 - \int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(x)dx \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\int_a^b f(x).g(x)dx \right)^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(x)dx \text{ ((2) đúng)}.$$

Chọn C.

Câu 77: Cho $f(x), g(x)$ là các hàm liên tục trên $[a; b]$.

$$f(x) \neq 0, \forall x \in [a; b] \text{ và } m \leq \frac{g(x)}{f(x)} \leq M, \forall x \in [a; b].$$

Căn cứ vào giả thiết đó, một học sinh lập luận:

(1) Ta có bất đẳng thức

$$0 \leq \left(\frac{g(x)}{f(x)} - m \right) \left(M - \frac{g(x)}{f(x)} \right) \cdot f^2(x), \forall x \in [a; b]. (*)$$

(2) Biến đổi, (*) trở thành

$$0 \leq -g^2(x) + (M + m).f(x).g(x) - M.m.f^2(x), \forall x \in [a; b].$$

$$(3) \text{ suy ra } \int_a^b g^2(x)dx + M.m \int_a^b f^2(x)dx \leq (M + m) \int_a^b f(x).g(x)dx.$$

Lập luận trên:

A. Đúng hoàn toàn. **B.** Sai từ (1). **C.** Sai từ (2). **D.** Sai từ (3).

Hướng dẫn giải:

Lập luận đúng hoàn toàn. Bất đẳng thức sau cùng được gọi là bất đẳng thức Diza

Chọn A.

Câu 78: Cho hai hàm $f(x), g(x)$ cùng đồng biến và liên tục trên $[a; b]$. Với $a < b$. Khi đó, xét khẳng định sau đây:

$$(1) \forall x \in [a; b]. \text{ Ta có: } \int_a^b f(a)dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b f(b)dx.$$

$$(2) \int_a^b f(x)dx \leq f(b).$$

$$(3) \text{ Tồn tại } x_0 \in [a; b] \text{ sao cho } f(x_0) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx.$$

Các khẳng định đúng trong 3 khẳng định trên là:

A. Chỉ (1) và (2). **B.** Chỉ (2) và (3).
C. Chỉ (1) và (3). **D.** Cả (1), (2) và (3).

Hướng dẫn giải:

Chỉ (1) và (3) đúng. Khẳng định (2) sai:

Do tính đồng biến nên $\forall a \leq x \leq b$ ta có $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$, tức là:

$$\int_a^b f(a)dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b f(b)dx \text{ vậy (1) đúng}$$

$$\text{Suy ra: } (b-a) \cdot f(a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq (b-a) \cdot f(b)$$

Do đó $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ nên tồn tại $x_0 \in [a; b]$ sao cho:

$$f(x_0) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx. \text{ Vậy (3) đúng.}$$

Chọn C.

$$\max[f(x), g(x)] = \begin{cases} f(x) & \text{khi } f(x) \geq g(x) \\ g(x) & \text{khi } g(x) \geq f(x) \end{cases}.$$

Câu 79: Ta định nghĩa:

Cho $f(x) = x^2$ và $g(x) = 3x - 2$.

Như thế $\int_0^2 \max[f(x), g(x)] dx$ bằng:

- A.** $\int_0^2 x^2 dx$. **B.** $\int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 (3x - 2) dx$.
- C.** $\int_0^2 (3x - 2) dx$. **D.** 15.

Hướng dẫn giải:

Hoành độ giao điểm của hai đường thẳng là $x = 1; x = 2$

Xét $x^2 - (3x - 2)$ và vẽ Bảng xét dấu để xem trên đoạn nào thì $f(x) = x^2$ và $g(x) = 3x - 2$ hàm có Giá trị lớn hơn.

x	0	1	2
$x^2 - 3x + 2$	+	0	-

$$\text{Do đó } \int_0^2 \max[f(x), g(x)] dx = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 (3x - 2) dx$$

Chọn B.

Câu 80: Biết $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 x}{1 + 3^{-x}} dx = m$. Tính giá trị của $I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 x}{1 + 3^x} dx$.

- A.** $\pi - m$. **B.** $\frac{\pi}{4} + m$. **C.** $\pi + m$. **D.** $\frac{\pi}{4} - m$.

Hướng dẫn giải:

$$\text{Sử dụng phân tích: } \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 x}{1 + 3^{-x}} dx + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 x}{1 + 3^x} dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x dx = \pi$$

$$(\text{sử dụng MTCT để tính } \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x dx = \pi)$$

$$\text{Do đó: } I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 x}{1 + 3^x} dx = \pi - m.$$

Chọn A.

Câu 81: Cho $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2x+m}}$, với $m > 0$. Tìm các giá trị của tham số m để $I \geq 1$.

- A.** $0 < m \leq \frac{1}{4}$. **B.** $m > \frac{1}{4}$. **C.** $\frac{1}{8} \leq m \leq \frac{1}{4}$. **D.** $m > 0$.

Hướng dẫn giải:

Tính tích phân theo tham số m bằng cách đặt $t = \sqrt{2x+m}$, sau đó tìm m từ Bất phương trình $I \geq 1$.

Chọn A.

Câu 82: Cho m là một số dương và $I = \int_0^m (4^x \ln 4 - 2^x \ln 2) dx$. Tìm m khi $I = 12$.

- A.** $m = 4$. **B.** $m = 3$. **C.** $m = 1$. **D.** $m = 2$.

Hướng dẫn giải:

Tính tích phân theo tham số m ta được: $I = \int_0^m (4^x \ln 4 - 2^x \ln 2) dx = (4^x - 2^x) \Big|_0^m = 4^m - 2^m$,
sau đó tìm m từ phương trình $I = 12$.

Chọn D.

ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN NÂNG CAO

A – LÝ THUYẾT CHUNG

1. Diện tích hình phẳng

Nếu có hình phẳng giới hạn bởi các đường
$$\begin{cases} y = f_1(x) \\ y = f_2(x) \\ x = a \\ x = b \end{cases}.$$

(Trong đó $f_1(x), f_2(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$),

thì diện tích S được tính theo công thức
$$S = \int_a^b |f_1(x) - f_2(x)| dx.$$

2. Thể tích khối tròn xoay

Quay quanh trục Ox: Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường
$$\begin{cases} y = f(x) \\ Ox \\ x = a \\ x = b \end{cases}.$$

(Trong đó $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$), quay quanh trục Ox, ta được khối tròn xoay.

Thể tích V_x của khối tròn xoay được tính theo công thức
$$V_x = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx.$$

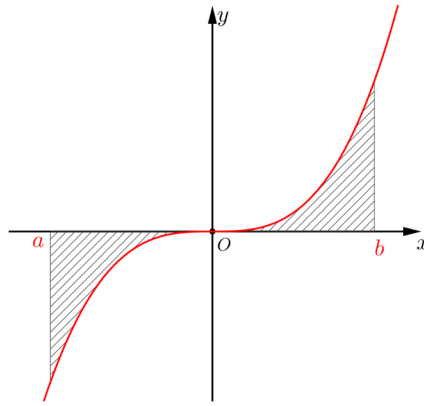
Quay quanh trục Oy: Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường
$$\begin{cases} x = f(y) \\ Oy \\ x = a \\ x = b \end{cases}.$$

(Trong đó $f(y)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$), quay quanh trục Oy, ta được khối tròn xoay.

Thể tích V_y của khối tròn xoay được tính theo công thức
$$V_y = \pi \int_a^b [f(y)]^2 dy.$$

B – BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Gọi D là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $(C): y = f(x)$, trục hoành, hai đường thẳng $x = a, x = b$ (như hình vẽ dưới đây).



Giả sử S_D là diện tích hình phẳng D . Chọn công thức đúng trong các phương án A, B, C, D cho dưới đây?

A. $S_D = \int_a^0 f(x) dx + \int_0^b f(x) dx.$

B. $S_D = -\int_a^0 f(x) dx + \int_0^b f(x) dx.$

C. $S_D = \int_a^0 f(x) dx - \int_0^b f(x) dx.$

D. $S_D = -\int_a^0 f(x) dx - \int_0^b f(x) dx.$

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

+ Nhìn đồ thị ta thấy:

- ☐ Đồ thị (C) cắt trục hoành tại $O(0;0)$
- ☐ Trên đoạn $[a;0]$, đồ thị (C) ở dưới trục hoành nên $|f(x)| = -f(x)$
- ☐ Trên đoạn $[0;b]$, đồ thị (C) ở trên trục hoành nên $|f(x)| = f(x)$

+ Do đó: $S_D = \int_a^b |f(x)| dx = \int_a^0 |f(x)| dx + \int_0^b |f(x)| dx = -\int_a^0 f(x) dx + \int_0^b f(x) dx$

Câu 2: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{1}{2}(x^2 - 4x + 3)$ và hai tiếp tuyến của (C) xuất phát từ $M(3; -2)$ là

A. $\frac{8}{3}.$

B. $\frac{5}{3}.$

C. $\frac{13}{3}.$

D. $\frac{11}{3}.$

Hướng dẫn giải:

Chọn A

Ta có $y' = \frac{1}{2}(2x - 4) = x - 2.$

Gọi $(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm. Khi đó, $y_0 = \frac{1}{2}(x_0^2 - 4x_0 + 3)$ và $y'(x_0) = x_0 - 2$.

Phương trình của tiếp tuyến của (C) tại điểm có tọa độ $(x_0; y_0)$ là

$$y = (x_0 - 2)(x - x_0) + \frac{1}{2}(x_0^2 - 4x_0 + 3)$$

Vì tiếp tuyến đi qua điểm $M(3; -2)$ nên

$$-2 = (x_0 - 2)(3 - x_0) + \frac{1}{2}(x_0^2 - 4x_0 + 3) \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \Rightarrow y = -x + 1 \\ x_0 = 5 \Rightarrow y = 3x - 11 \end{cases}$$

Diện tích hình phẳng cần tìm

$$S = \left| \int_1^3 \left[\frac{1}{2}(x^2 - 4x + 3) - (-x + 1) \right] dx \right| + \left| \int_3^5 \left[\frac{1}{2}(x^2 - 4x + 3) - (3x - 11) \right] dx \right| = \frac{8}{3}$$

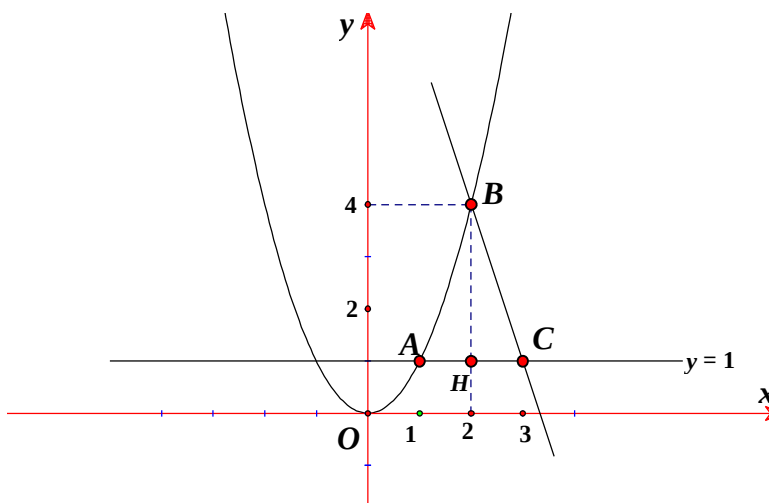
Câu 3: Gọi D là miền được giới hạn bởi các đường $y = -3x + 10$, $y = 1$, $y = x^2$ và D nằm ngoài parabol $y = x^2$. Khi cho D quay xung quanh trục Ox , ta nhận được vaath thể tròn xoay có thể tích là:

A. 11π .

B. $\frac{56}{5}\pi$.

C. 12π .

D. $\frac{25}{3}\pi$.



Hướng dẫn giải:

Gọi $V_1; V_2$ lần lượt là thể tích tam giác cong ABH và tam giác HBC tạo nên khi xoay quanh trục Ox , phần diện tích được biểu diễn qua đồ thị sau:

$$\text{Vậy } V = V_1 + V_2 = \pi \int_1^2 [(x^2)^2 - 1^2] dx + \pi \int_2^3 [(-3x + 10)^2 - (1)^2] dx = \frac{56\pi}{5} \text{ (dvtt)}$$

Chọn B.

Câu 4: Gọi d là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \ln x$ tại giao điểm của đồ thị đó với trục Ox. Diện tích của hình tam giác tạo bởi hai trục tọa độ và đường thẳng d được xác định bởi tích phân:

A. $\int_0^1 \ln x dx$.

B. $\int_0^1 \frac{\ln x}{x} dx$.

C. $\int_0^1 (x-1)dx$.

D. $\int_0^1 (x-1)dx$

Hướng dẫn giải:

Tọa độ giao điểm của đồ thị $y = \ln x$ với trục Ox là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} y = \ln x \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

Ta có: $y' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$, $y'(1) = 1$.

Vậy phương trình của tiếp tuyến d là: $y - 0 = 1(x - 1) \Leftrightarrow y = x - 1$.

Diện tích phải tìm: $S = \int_0^1 |x - 1| dx = \int_0^1 (1 - x) dx = \left(x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2}$.

Chọn D.

Câu 5: 1) cho $y_1 = f_1(x)$ và $y_2 = f_2(x)$ là hai hàm số liên tục trên đoạn $[a; b]$. Giả sử: α và β , với $a \leq \alpha < \beta \leq b$, là các nghiệm của phương trình $f_1(x) - f_2(x) = 0$. Khi đó diện tích của hình phẳng giới hạn bởi 2 đường thẳng và đồ thị của hàm số được cho bởi công thức

$$S = \int_a^\alpha |f_1(x) - f_2(x)| dx + \int_\alpha^\beta |f_1(x) - f_2(x)| dx + \int_\beta^b |f_1(x) - f_2(x)| dx.$$

(2) Cũng với giả thiết như (1), nhưng:

$$S = \left| \int_a^\alpha (f_1(x) - f_2(x)) dx \right| + \left| \int_\alpha^\beta (f_1(x) - f_2(x)) dx \right| + \left| \int_\beta^b (f_1(x) - f_2(x)) dx \right|.$$

A. (1) đúng nhưng (2) sai.

B. (2) đúng nhưng (1) sai.

C. Cả (1) và (2) đều đúng.

D. Cả (1) và (2) đều sai.

Hướng dẫn giải:

Chú ý rằng với mọi $x \in (\alpha; \beta)$, $f_1(x) - f_2(x) \neq 0$ và $f_1(x)$ và $f_2(x)$ đều liên tục trên khoảng $(\alpha; \beta)$, nên $f_1(x) - f_2(x)$ giữ nguyên dấu.

Nếu $f_1(x) - f_2(x) > 0$ thì ta có:

$$\int_\alpha^\beta |f_1(x) - f_2(x)| dx = \int_\alpha^\beta (f_1(x) - f_2(x)) dx = \left| \int_\alpha^\beta (f_1(x) - f_2(x)) dx \right|$$

Nếu $f_1(x) - f_2(x) < 0$ thì ta có:

$$\int_{\alpha}^{\beta} |f_1(x) - f_2(x)| dx = \int_{\alpha}^{\beta} (f_2(x) - f_1(x)) dx = \left| \int_{\alpha}^{\beta} (f_1(x) - f_2(x)) dx \right|$$

Vậy trong mọi trường hợp ta đều có:

$$\int_{\alpha}^{\beta} |f_1(x) - f_2(x)| dx = \left| \int_{\alpha}^{\beta} (f_1(x) - f_2(x)) dx \right|$$

Tương tự như thế đối với 2 tích phân còn lại. vì vậy, hai công thức (1) và (2) là như nhau:

Chọn C.

Câu 6: Gọi S_a là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = e^{2x} - 2e^x$, trục Ox và đường thẳng $x = a$ với $a < \ln 2$. Kết quả giới hạn $\lim_{a \rightarrow -\infty} S_a$ là:

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4

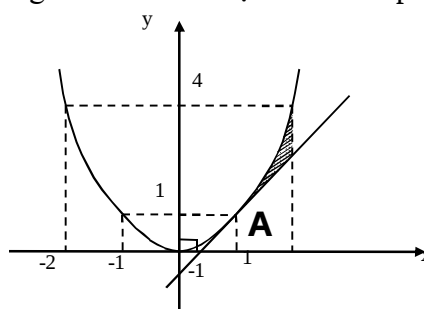
Hướng dẫn giải:

$$\text{Ta có } S_a = \int_a^{\ln 2} (e^{2x} - 2e^x) dx = \frac{1}{2}e^{2a} - 2e^a + 2$$

$$\text{Suy ra } \lim_{a \rightarrow -\infty} S_a = 2,$$

Chọn B.

Câu 7: Phần bôi đen trên hình vẽ là hình phẳng (D) giới hạn giữa parabol (P) và tiếp tuyến d của (P) tại điểm A(1;1) và đường thẳng $x = 2$. Tính diện tích hình phẳng (D).



A. $\frac{1}{3}$.

B. $\frac{2}{3}$.

C. $\frac{4}{3}$.

D. $\frac{3}{5}$

Hướng dẫn giải:

Vì parabol (P) nhận gốc O làm đỉnh và đối xứng qua Oy nên phương trình parabol (P) có dạng $y = ax^2$ ($a \neq 0$).

Vì (P) đi qua A(1;1) nên $a = 1$, suy ra phương trình (P): $y = x^2$

Đường thẳng d là tiếp tuyến của (P) tại A nên có phương trình: $y = 2x - 1$

Diện tích hình phẳng (D) là: $S = \int_1^2 [x^2 - (2x - 1)] dx = \int_1^2 (x - 1)^2 dx = \frac{1}{3}(x - 1)^3 \Big|_1^2 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$.

Chọn A

Lưu ý: Bài này cần phải tìm phương trình của các đường dựa trên hình vẽ.

Câu 8: Diện tích miền phẳng giới hạn bởi các đường: $y = 2^x$, $y = -x + 3$ và $y = 1$ là:

A. $S = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{2}$.

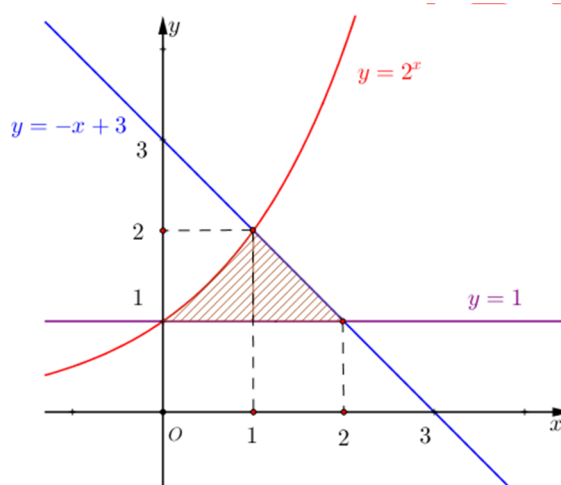
B. $S = \frac{1}{\ln 2} + 1$.

C. $S = \frac{47}{50}$.

D. $S = \frac{1}{\ln 2} + 3$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.



Xét phương trình hoành độ giao điểm của các đường. Ta có:

☐ $2^x = -x + 3 \Leftrightarrow x = 1$

☐ $2^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$

☐ $-x + 3 = 1 \Leftrightarrow x = 2$

Diện tích cần tìm là:

$$S = \int_0^1 (2^x - 1) dx + \int_1^2 (-x + 3 - 1) dx = \left(\frac{2^x}{\ln 2} - x \right) \Big|_0^1 + \left(-\frac{x^2}{2} + 2x \right) \Big|_1^2 = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{2}$$

Câu 9: Cho a, b là hai số thực dương. Gọi (K) là hình phẳng nằm trong góc phần tư thứ hai, giới hạn bởi parabol $y = ax^2$ và đường thẳng $y = -bx$. Biết thể tích khối tròn xoay tạo được khi quay (K) xung quanh trục hoành là một số không phụ thuộc vào giá trị của a và b . Khẳng định nào sau đây là đúng?

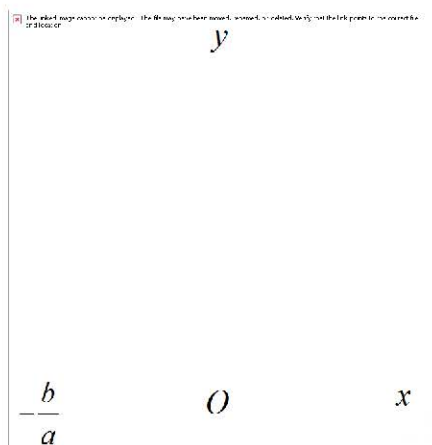
A. $b^4 = 2a^5$.

B. $b^4 = 2a^2$.

C. $b^3 = 2a^5$.

D. $b^5 = 2a^3$.

Hướng dẫn giải:



- Gọi V_1 là thể tích khối tròn xoay giới hạn bởi các đường $y = -bx$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0, x = -\frac{b}{a}$. Khi đó, $V_1 = \pi \int_{-\frac{b}{a}}^0 (-bx)^2 dx = \pi b^2 \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_{-\frac{b}{a}}^0 = \frac{\pi b^5}{3a^3}$

- Gọi V_2 là thể tích khối tròn xoay giới hạn bởi các đường $y = ax^2$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0, x = -\frac{b}{a}$. Khi đó, $V_2 = \pi \int_{-\frac{b}{a}}^0 (ax^2)^2 dx = \pi a^2 \cdot \frac{x^5}{5} \Big|_{-\frac{b}{a}}^0 = \frac{\pi b^5}{5a^3}$

- Suy ra, thể tích khối tròn xoay khi quay hình (K) quanh trục Ox là :

$$V = V_1 - V_2 = \frac{\pi b^5}{3a^3} - \frac{\pi b^5}{5a^3} = \frac{2\pi}{15} \frac{b^5}{a^3}$$

- Để thể tích không phụ thuộc vào a và b thì tỉ số $\frac{b^5}{a^3}$ cố định.

Chọn D.

Câu 10: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = |x^2 - 1|$ và $y = k, 0 < k < 1$. Tìm k để diện tích của hình phẳng (H) gấp hai lần diện tích hình phẳng được kẻ sọc trong hình vẽ bên.

A. $k = \sqrt[3]{4}$.

B. $k = \sqrt[3]{2} - 1$.

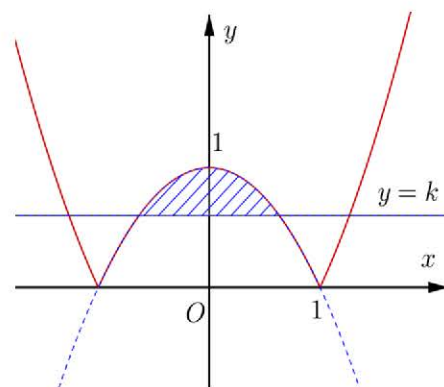
C. $k = \frac{1}{2}$.

D. $k = \sqrt[3]{4} - 1$.

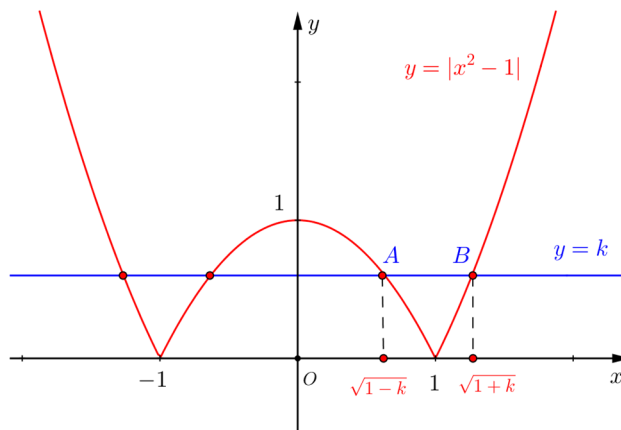
Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Do đồ thị nhận trục Oy làm trục đối xứng nên yêu cầu bài toán trở thành:



Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = 1 - x^2$, $y = k$, $x = 0$ bằng diện tích hình phẳng giới hạn bởi: $y = 1 - x^2$, $y = x^2 - 1$, $y = k$, $x > 0$.



$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{1-k}} (1-x^2-k) dx &= \int_{\sqrt{1-k}}^1 (k-1+x^2) dx + \int_1^{\sqrt{1+k}} (k-x^2+1) dx \Leftrightarrow (1-k)\sqrt{1-k} - \frac{1}{3}(1-k)\sqrt{1-k} \\ &= \frac{1}{3} - (1-k) - \frac{1}{3}(1-k)\sqrt{1-k} + (1-k)\sqrt{1-k} + (1+k)\sqrt{1+k} - \frac{1}{3}(1+k)\sqrt{1+k} - (1+k) + \frac{1}{3} \\ &\Leftrightarrow \frac{2}{3}(1+k)\sqrt{1+k} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow (\sqrt{1+k})^3 = 2 \Leftrightarrow k = \sqrt[3]{4} - 1. \end{aligned}$$

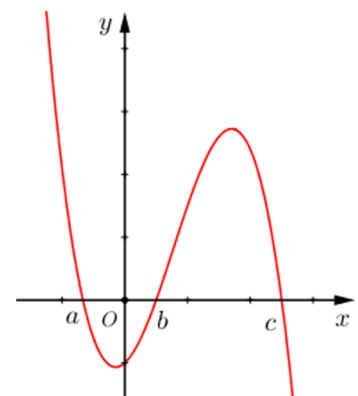
Câu 11: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $y = f'(x)$ cắt trục Ox tại ba điểm có hoành độ $a < b < c$ như hình vẽ. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

- A. $f(c) > f(a) > f(b)$.
- B. $f(c) > f(b) > f(a)$.
- C. $f(a) > f(b) > f(c)$.
- D. $f(b) > f(a) > f(c)$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên các đoạn $[a; b]$ và $[b; c]$, lại có $f(x)$ là một nguyên hàm của $f'(x)$.



Do đó diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường: $\begin{cases} y = f'(x) \\ y = 0 \\ x = a \\ x = b \end{cases}$ là:

$$S_1 = \int_a^b |f'(x)| dx = - \int_a^b f'(x) dx = -f(x) \Big|_a^b = f(a) - f(b).$$

$$\text{Vì } S_1 > 0 \Rightarrow f(a) > f(b) \quad (1)$$

Tương tự: diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường: $\begin{cases} y = f'(x) \\ y = 0 \\ x = b \\ x = c \end{cases}$ là:

$$S_2 = \int_b^c |f'(x)| dx = \int_b^c f'(x) dx = f(x) \Big|_b^c = f(c) - f(b).$$

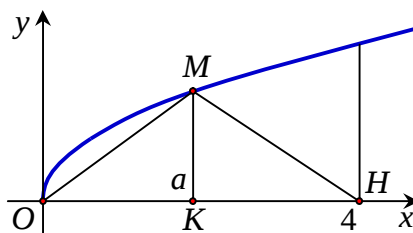
$$S_2 > 0 \Rightarrow f(c) > f(b) \quad (2).$$

Mặt khác, dựa vào hình vẽ ta có: $S_1 < S_2 \Leftrightarrow f(a) - f(b) < f(c) - f(b) \Leftrightarrow f(a) < f(c)$ (3).

Từ (1), (2) và (3) ta **chọn đáp án A**.

(có thể so sánh $f(a)$ với $f(b)$ dựa vào dấu của $f'(x)$ trên đoạn $[a; b]$ và so sánh $f(b)$ với $f(c)$ dựa vào dấu của $f'(x)$ trên đoạn $[b; c]$).

Câu 12: Gọi V là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x}$, $y = 0$ và $x = 4$ quanh trục Ox . Đường thẳng $x = a$ ($0 < a < 4$) cắt đồ thị hàm $y = \sqrt{x}$ tại M (hình vẽ bên). Gọi V_1 là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay tam giác OMH quanh trục Ox . Biết rằng $V = 2V_1$. Khi đó



- A.** $a = 2$. **B.** $a = 2\sqrt{2}$. **C.** $a = \frac{5}{2}$. **D.** $a = 3$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Ta có $\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Khi đó $V = \pi \int_0^4 x dx = 8\pi$

Ta có $M(a; \sqrt{a})$

Khi quay tam giác OMH quanh trục Ox tạo thành hai hình nón có chung đáy:

- Hình nón (N_1) có đỉnh là O , chiều cao $h_1 = OK = a$, bán kính đáy $R = MK = \sqrt{a}$;

□ Hình nón (N_2) thứ 2 có đỉnh là H , chiều cao $h_2 = HK = 4 - a$, bán kính đáy $R = MK = \sqrt{a}$

$$\text{Khi đó } V_1 = \frac{1}{3}\pi R^2 h_1 + \frac{1}{3}\pi R^2 h_2 = \frac{4}{3}\pi a$$

$$\text{Theo đề bài } V = 2V_1 \Leftrightarrow 8\pi = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi a \Rightarrow a = 3.$$

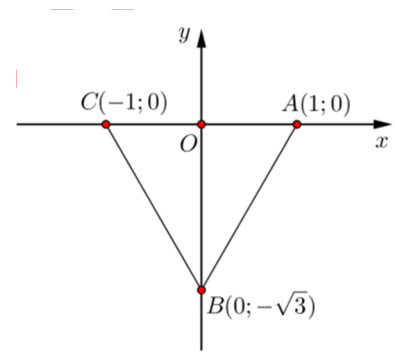
Câu 13: Cho tam giác đều ABC có diện tích bằng $\sqrt{3}$ quay xung quanh cạnh AC của nó. Tính thể tích V của khối tròn xoay được tạo thành.

- A.** $V = 2\pi$. **B.** $V = \pi$. **C.** $V = \frac{7}{4}\pi$. **D.** $V = \frac{7}{8}\pi$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A

$S_{ABC} = \sqrt{3} \Rightarrow AB = BC = CA = 2$. Chọn hệ trục vuông góc Oxy sao cho $O(0;0)$, $A(1;0)$, $B(0;-\sqrt{3})$ với O là trung điểm AC . Phương trình đường thẳng AB là $y = \sqrt{3}(x-1)$, thể tích khối tròn xoay khi quay ABO quanh trục AC (trùng Ox) tính bởi



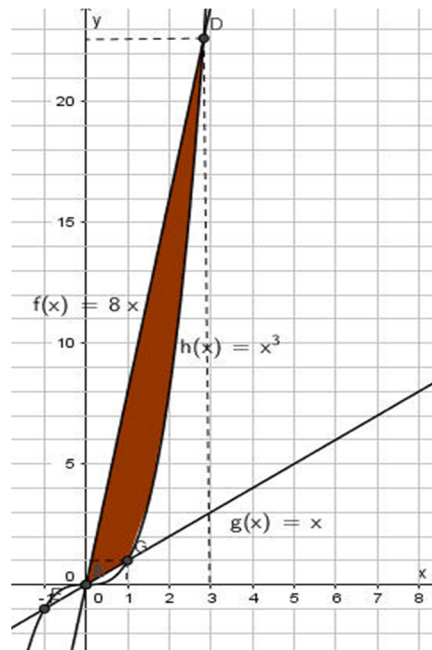
$$V' = \pi \int_0^1 \sqrt{3}(x-1) dx = \pi. \text{ Vậy thể tích cần tìm } V = 2V' = 2\pi.$$

Câu 14: Diện tích hình phẳng nằm trong góc phần tư thứ nhất, giới hạn bởi các đường thẳng $y = 8x$, $y = x$ và đồ thị hàm số $y = x^3$ là $\frac{a}{b}$, trong đó a, b là các số nguyên, $\frac{a}{b}$ tối giản. Khi đó $a + b$ bằng

- A.** 68. **B.** 67. **C.** 66. **D.** 65

Hướng dẫn giải:

Ta có



$$8x - x = 0 \Rightarrow x = 0; 8x - x^3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2\sqrt{2} \end{cases}; x - x^3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$\text{Nên } S = \int_0^1 (8x - x) dx + \int_1^{2\sqrt{2}} (8x - x^3) dx = \frac{63}{4}.$$

Câu 15: Thể tích V của khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi đường tròn $(C): x^2 + (y-3)^2 = 1$ xung quanh trục hoành là

A. $V = 6\pi$.

B. $V = 6\pi^3$.

C. $V = 3\pi^2$.

D. $V = 6\pi^2$.

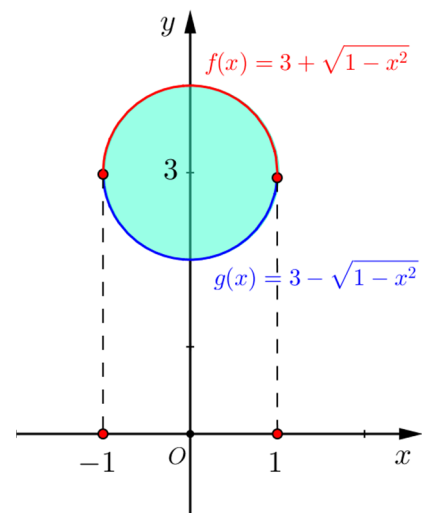
Hướng dẫn giải:

Chọn D.

$$x^2 + (y-3)^2 = 1 \Leftrightarrow y = 3 \pm \sqrt{1-x^2}.$$

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-1}^1 \left[\left(3 + \sqrt{1-x^2} \right)^2 - \left(3 - \sqrt{1-x^2} \right)^2 \right] dx \\ &= 12\pi \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx \end{aligned}$$

$$\text{Đặt } x = \sin t \Rightarrow dx = \cos t \cdot dt. \text{ Với } \begin{cases} x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} \\ x = -1 \Rightarrow t = -\frac{\pi}{2} \end{cases}.$$



$$\Rightarrow V = 12\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 t} \cdot \cos t dt = 12\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = 6\pi^2.$$

Câu 16: Trong mặt phẳng tọa độ Oxyz cho (E) có phương trình $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, (a, b > 0)$ và đường tròn (C): $x^2 + y^2 = 7$. Để diện tích elip (E) gấp 7 lần diện tích hình tròn (C) khi đó

- A.** $ab = 7$. **B.** $ab = 7\sqrt{7}$. **C.** $ab = \sqrt{7}$. **D.** $ab = 49$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, (a, b > 0) \Rightarrow y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

$$\text{Diện tích (E) là } S_{(E)} = 4 \int_0^a \frac{b\sqrt{a^2 - x^2} dx}{a} = 4 \frac{b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx$$

$$\text{Đặt } x = a \sin t, t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow dx = a \cos t dt.$$

$$\text{Đổi cận: } x = 0 \Rightarrow t = 0; x = a \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$$

$$S_{(E)} = 4 \frac{b}{a} \int_0^a a^2 \cdot \cos^2 t dt = 2ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt = \pi ab$$

$$\text{Mà ta có } S_{(C)} = \pi \cdot R^2 = 7\pi.$$

$$\text{Theo giả thiết ta có } S_{(E)} = 7 \cdot S_{(C)} \Leftrightarrow \pi ab = 49\pi \Leftrightarrow ab = 49.$$

Câu 17: Gọi $S(t)$ là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \frac{1}{(x+1)(x+2)^2}, y = 0, x = 0,$

$x = t (t > 0)$. Tìm $\lim_{t \rightarrow +\infty} S(t)$.

- A.** $-\ln 2 - \frac{1}{2}$. **B.** $\ln 2 - \frac{1}{2}$. **C.** $\frac{1}{2} - \ln 2$. **D.** $\ln 2 + \frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Cách 1:

$$\text{*Tìm } a, b, c \text{ sao cho } \frac{1}{(x+1)(x+2)^2} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{(x+2)^2}$$

$$\Leftrightarrow 1 = a(x+2)^2 + (bx+c)(x+1) \Leftrightarrow 1 = ax^2 + 4ax + 4a + bx^2 + bx + cx + c$$

$$\Leftrightarrow 1 = (a+b)x^2 + (4a+b+c)x + 4a+c \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ 4a+b+c=0 \\ 4a+c=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ c=-3 \end{cases}$$

*Vì trên $[0;t]$, $y = \frac{1}{(x+1)(x+2)^2} > 0$ nên ta có:

$$\begin{aligned} \text{Diện tích hình phẳng: } S(t) &= \int_0^t \left(\frac{1}{(x+1)(x+2)^2} \right) dx = \int_0^t \left(\frac{1}{x+1} - \frac{x+3}{(x+2)^2} \right) dx \\ &= \int_0^t \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} - \frac{1}{(x+2)^2} \right) dx = \left(\ln \frac{x+1}{x+2} + \frac{1}{x+2} \right) \Big|_0^t \\ &= \ln \frac{t+1}{t+2} + \frac{1}{t+2} + \ln 2 - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$*\text{Vì } \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{t+1}{t+2} \right) = 1 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{t+1}{t+2} \right) = 0 \text{ và } \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t+2} = 0$$

$$\text{Nên } \lim_{t \rightarrow +\infty} S(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\ln \frac{t+1}{t+2} + \frac{1}{t+2} + \ln 2 - \frac{1}{2} \right) = \ln 2 - \frac{1}{2}.$$

Cách 2: Dùng Máy tính cầm tay.

$$\text{Diện tích hình phẳng: } S(t) = \int_0^t \left(\frac{1}{(x+1)(x+2)^2} \right) dx$$

$$\text{Cho } t=100 \text{ ta bấm máy } = \int_0^{100} \left(\frac{1}{(x+1)(x+2)^2} \right) dx \approx 0,193$$

Dùng máy tính kiểm tra 4 kết quả ta được đáp án **B**.

Câu 18: Gọi H là phần mặt phẳng giới hạn bởi đường thẳng $y = mx$ với $m < 2$ và parabol (P) có phương trình $y = x(2-x)$. H có diện tích:

A. $\frac{(2-m)^2(2-5m)}{6}$.

B. $\frac{(2-m)^2(5-2m)}{6}$.

C. $\frac{(2-m)^2}{6}$.

D. $\frac{(m-2)^2}{6}$.

Hướng dẫn giải:

Gọi diện tích cần tính là S , Ta có: $S = \int_1^e \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x} dx$

Đặt $u = 1 + \ln x$, khi $x = 1$ thì $u = 1$, $x = e$ thì $u = 2$, $du = \frac{1}{x} dx$

$$S = \int_1^2 \sqrt{u} du = \left[\frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \right]_1^2 = \frac{2}{3} (2\sqrt{2} - 1).$$

Chọn C.

Câu 19: Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $2my = x^2$, $mx = \frac{1}{2}y^2$, ($m > 0$). Tìm giá trị của m để $S = 3$.

A. $m = \frac{3}{2}$.

B. $m = 2$.

C. $m = 3$.

D. $m = \frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Ta có $2my = x^2 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2m}x^2 > 0$ (do $m > 0$).

$$\text{và } mx = \frac{1}{2}y^2 \Leftrightarrow y^2 = 2mx \Leftrightarrow \begin{cases} y = \sqrt{2mx} \geq 0 \\ y = -\sqrt{2mx} < 0 \end{cases}.$$

Xét phương trình hoành độ giao điểm của $2my = x^2$ và $mx = \frac{1}{2}y^2$ ta có

$$\frac{1}{2m}x^2 = \sqrt{2mx} \Leftrightarrow x^2 = 2m\sqrt{2mx} \Leftrightarrow x^4 - 8m^3x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2m \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó } S = \int_0^{2m} \left| \frac{1}{2m}x^2 - \sqrt{2mx} \right| dx = \left| \int_0^{2m} \left(\frac{1}{2m}x^2 - \sqrt{2mx} \right) dx \right|$$

$$= \left| \frac{1}{2m} \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{2\sqrt{2m}}{3} x\sqrt{x} \right|_0^{2m} = \frac{4m^2}{3}.$$

$$\text{Để } S = 3 \Leftrightarrow \frac{4m^2}{3} = 3 \Leftrightarrow m^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow m = \frac{3}{2} \text{ (do } m > 0 \text{)}.$$

Câu 20: Gọi S_1 là diện tích của mặt phẳng giới hạn bởi đường thẳng $y = mx$ với $m < 2$ và parabol (P) có phương trình $y = x(2-x)$. Gọi S_2 là diện tích giới hạn bởi (P) và Ox. Với trị số nào của m thì $S_1 = \frac{1}{2}S_2$?

A. $2 - \sqrt[3]{4}$.

B. $2 + \sqrt[3]{2}$.

C. $\frac{2}{5}$.

D. $\frac{1}{4}$.

Hướng dẫn giải:

Ta tính S_2 trước, phương trình hoành độ giao điểm:

$$x(2-x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}, \text{ do đó } S_2 = \int_0^2 |2x - x^2| dx = \frac{4}{3}.$$

Ta tính S_1 , phương trình hoành độ giao điểm:

$$mx = 2x - x^2 \Leftrightarrow x^2 + (m-2)x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2-m \end{cases}, \text{ do đó:}$$

$$S_1 = \int_0^{2-m} |2x - x^2 - mx| dx = \int_0^{2-m} (-x^2 + (2-m)x) dx = \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{(2-m)x^2}{2} \right) \Big|_0^{2-m}.$$

$$= \frac{(2-m)^3}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \Leftrightarrow m = 2 - \sqrt[3]{4}$$

(**Chú ý:** muốn đường thẳng cắt parabol tại 2 điểm phân biệt thì trong tình huống này parabol phải có phần chứa đỉnh nằm trên đường thẳng).

Chọn A.

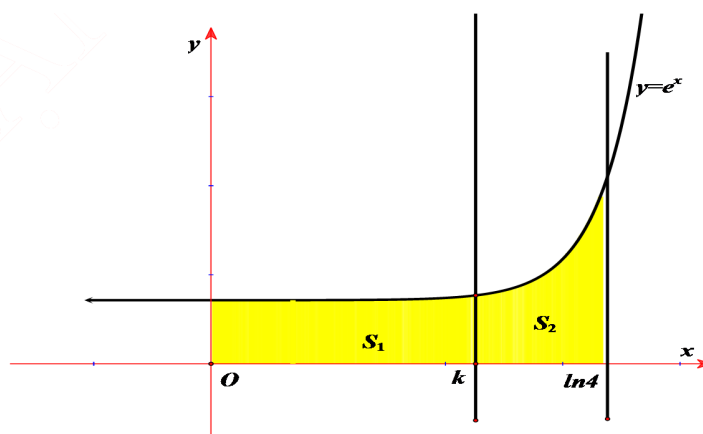
Câu 21: Cho hình thang cong (H) giới hạn bởi các đường $y = e^x$; $y = 0$; $x = 0$ và $x = \ln 4$. Đường thẳng $x = k$, ($0 < k < \ln 4$) chia (H) thành hai phần có diện tích S_1 và S_2 như hình vẽ bên. Tìm k để $S_1 = 2S_2$.

A. $k = \frac{2}{3} \ln 4$.

B. $k = \ln 2$.

C. $k = \ln \frac{8}{3}$.

D. $k = \ln 3$.



Trích đề Minh họa 2 - 2017

Hướng dẫn giải:

Ta có: $S_1 = \int_0^k e^x dx = e^x \Big|_0^k = e^k - 1, S_2 = \int_k^{\ln 4} e^x dx = e^x \Big|_k^{\ln 4} = 4 - e^k$

Do đó: $S_1 = 2S_2 \Leftrightarrow e^k - 1 = 2(4 - e^k) \Leftrightarrow e^k = \frac{9}{3} = 3 \Leftrightarrow k = \ln 3.$

Chọn D.

Câu 22: Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số: $y = x^2 - 4x + 4$, trục tung và trục hoành. Xác định k để đường thẳng (d) đi qua điểm $A(0;4)$ có hệ số góc k chia (H) thành hai phần có diện tích bằng nhau.

A. $k = -4.$

B. $k = -8.$

C. $k = -6.$

D. $k = -2.$

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^2 - 4x + 4$ và trục hoành là:
 $x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2.$

Diện tích hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số: $y = x^2 - 4x + 4$, trục tung và trục hoành là: $S = \int_0^2 |x^2 - 4x + 4| dx = \int_0^2 (x^2 - 4x + 4) dx = \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x \right) \Big|_0^2 = \frac{8}{3}.$

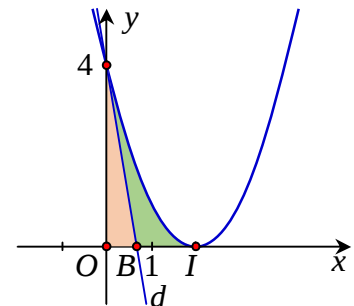
Phương trình đường thẳng (d) đi qua điểm $A(0;4)$

có hệ số góc k có dạng: $y = kx + 4.$

Gọi B là giao điểm của (d) và trục hoành. Khi đó $B\left(\frac{-4}{k}; 0\right).$

Đường thẳng (d) chia (H) thành hai phần có diện tích

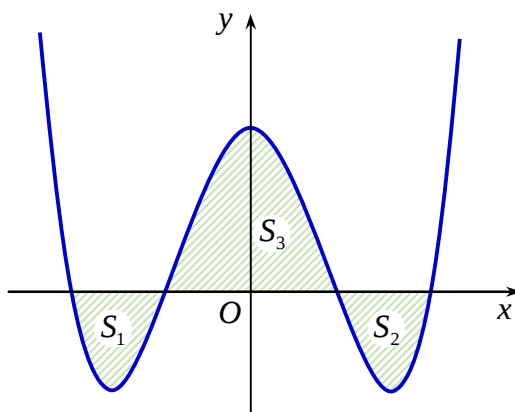
bằng nhau khi $B \in OI$ và $S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2} S = \frac{4}{3}.$



$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < \frac{-4}{k} < 2 \\ S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2} OA \cdot OB = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{-4}{k} = \frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k < -2 \\ k = -6 \end{cases} \Leftrightarrow k = -6.$$

Câu 23: Cho hàm số $y = x^4 - 3x^2 + m$ có đồ thị (C_m) với m là tham số thực. Giả sử (C_m) cắt trục Ox tại bốn điểm phân biệt như hình vẽ :

(C_m)



Gọi S_1 , S_2 và S_3 là diện tích các miền gạch chéo được cho trên hình vẽ. Tìm m để $S_1 + S_2 = S_3$.

A. $m = -\frac{5}{2}$.

B. $m = -\frac{5}{4}$.

C. $m = \frac{5}{2}$.

D. $m = \frac{5}{4}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D

Giả sử $x = b$ là nghiệm dương lớn nhất của phương trình $x^4 - 3x^2 + m = 0$. Khi đó ta có

$$b^4 - 3b^2 + m = 0 \quad (1)$$

Nếu xảy ra $S_1 + S_2 = S_3$ thì

$$\int_0^b (x^4 - 3x^2 + m) dx = 0 \Rightarrow \frac{b^5}{5} - b^3 + mb = 0 \Rightarrow \frac{b^4}{5} - b^2 + m = 0 \quad (2) \quad (\text{do } b > 0)$$

Từ (1) và (2), trừ vế theo vế ta được $\frac{4}{5}b^4 - 2b^2 = 0 \Rightarrow b^2 = \frac{5}{2}$ (do $b > 0$).

Thay trở ngược vào (1) ta được $m = \frac{5}{4}$.

Câu 24: Tìm giá trị của tham số m sao cho: $y = x^3 - 3x + 2$ và $y = m(x+2)$ giới hạn bởi hai hình phẳng có cùng diện tích

A. $0 < m < 1$.

B. $m = 1$.

C. $1 < m < 9$.

D. $m = 9$

Hướng dẫn giải:

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^3 - 3x + 2 = m(x + 2)$

$$\Leftrightarrow x = -2 \text{ hoặc } x = 1 \pm \sqrt{m}, m \geq 0.$$

Điều kiện d: $y = m(x+2)$ và (C): $y = x^3 - 3x + 2$ giới hạn 2 hình phẳng: $0 < m \neq 9$.

Gọi S_1 , S_2 lần lượt là diện tích các hình phẳng nhận được theo thứ tự từ trái sang phải.

Nếu $m = 1$: d đi qua điểm uốn $(0;2)$ của (C) . Khi đó $S_1 = S_2 = \int_{-2}^0 (x^3 - 4x)dx = 4$

Nếu $0 < m < 1$: $S_1 > 4 > S_2$

Nếu $1 < m < 9$: $S_1 < 4 < S_2$

Nếu $m > 9 \Rightarrow 1 - \sqrt{m} < -2; 1 + \sqrt{m} > 4$. Khi đó:

$$S_1 = \int_{1-\sqrt{m}}^{-2} |x^3 - 3x + 2 - m(x+2)|dx; \quad S_2 = \int_{-2}^{1+\sqrt{m}} |x^3 - 3x + 2 - m(x+2)|dx$$

$$S_2 - S_1 = 2m\sqrt{m} > 0$$

Vậy $m = 1$ thỏa yêu cầu bài toán.

Chọn B.

Câu 25: Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 - 2x - 2m - \frac{1}{3}$ có đồ thị (C) . Tìm $m \in \left(0; \frac{5}{6}\right)$ sao cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) và các đường thẳng $x=0, x=2, y=0$ và có diện tích bằng 4.

A. $m = \frac{1}{4}$.

B. $m = \frac{1}{3}$.

C. $m = \frac{1}{2}$.

D. $m = 1$

Hướng dẫn giải:

Xét hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 - 2x - 2m - \frac{1}{3}$ trên $[0;2]$. Ta có $y' = x^2 + 2mx - 2$,

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -m - \sqrt{m^2 + 2} \\ x = -m + \sqrt{m^2 + 2} \end{cases}. \text{ Do } m \in \left(0; \frac{5}{6}\right) \text{ nên}$$

$$-m - \sqrt{m^2 + 2} < 0, \quad 0 < -m + \sqrt{m^2 + 2} < 2$$

$$\text{và } y(0) = -2m - \frac{1}{3} < 0, \quad y(2) = 2m - \frac{5}{3} < 0.$$

Ta có bảng biến thiên trong $[0;2]$

x	0	$-m + \sqrt{m^2 + 2}$	2
y'	-	0	+
y	$y(0)$		$y(2)$

Dựa vào BBT suy ra $y < 0, \forall x \in (0; 2)$

Gọi S là diện tích hình phẳng cần tìm. Ta có:

$$\begin{aligned} S = 4 &\Leftrightarrow \int_0^2 \left| \frac{1}{3}x^3 + mx^2 - 2x - 2m - \frac{1}{3} \right| dx = 4 \\ &\Leftrightarrow -\int_0^2 \left(\frac{1}{3}x^3 + mx^2 - 2x - 2m - \frac{1}{3} \right) dx = 4 \Leftrightarrow \frac{4m+10}{3} = 4 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Chọn C.

Câu 26: Cho hàm số $y = \frac{x^4}{2} - 2m^2x^2 + 2$. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho đồ thị của hàm số đã cho có cực đại và cực tiểu, đồng thời đường thẳng cùng phương với trục hoành qua điểm cực đại tạo với đồ thị một hình phẳng có diện tích bằng $\frac{64}{15}$ là

- A.** $\emptyset$. **B.** $\{\pm 1\}$. **C.** $\left\{ \pm \frac{\sqrt{2}}{2}; \pm 1 \right\}$. **D.** $\left\{ \pm \frac{1}{2}; \pm 1 \right\}$.

Hướng dẫn giải:

Tập xác định $D = \mathbb{R}$

$$y' = 2x^3 - 4m^2x = 2x(x^2 - 2m^2); \quad y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \sqrt{2}m \\ x = -\sqrt{2}m \end{cases}$$

Đồ thị của hàm số đã cho có cực đại và cực tiểu $\Leftrightarrow m \neq 0$

Vì $a = \frac{1}{2} > 0$ nên hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ suy ra điểm cực đại của đồ thị hàm số là $A(0; 2)$

Đường thẳng cùng phương với trục hoành qua điểm cực đại có phương trình là $d: y = 2$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và d là:

$$\frac{x^4}{2} - 2m^2x^2 + 2 = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \\ x^2 = 4m^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2|m| \\ x = -2|m| \end{cases}$$

Diện tích hình phẳng cần tìm là: (chú ý rằng hàm số đã cho là hàm chẵn)

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2|m|}^{2|m|} \left| \frac{x^4}{2} - 2m^2 x^2 \right| dx = 2 \int_0^{2|m|} \left| \frac{x^4}{2} - 2m^2 x^2 \right| dx = 2 \left| \int_0^{2|m|} \left(\frac{x^4}{2} - 2m^2 x^2 \right) dx \right| \\ &= 2 \left| \left(\frac{x^5}{10} - \frac{2}{3} m^2 x^3 \right) \right|_0^{2|m|} = \frac{64}{15} |m|^5 \end{aligned}$$

$$\text{Ta có } S = \frac{64}{15} \Leftrightarrow |m| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -1 \end{cases}$$

Chọn B.

Câu 27: Trong hệ trục Oxy, cho tam giác OAB vuông ở A, điểm B nằm trong góc phần tư thứ nhất. A nằm trên trục hoành, OB = 2017. Góc $\widehat{AOB} = \alpha$, $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{3} \right)$. Khi quay tam giác đó quanh trục Ox ta được khối nón tròn xoay. Thể tích của khối nón lớn nhất khi:

A. $\sin \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$. **B.** $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\cos \alpha = \frac{1}{2}$. **D.** $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}$

Hướng dẫn giải:

Phương trình đường thẳng OB: $y = x \tan \alpha$, $OA = 2017 \cos \alpha$

Khi đó thể tích nón tròn xoay là:

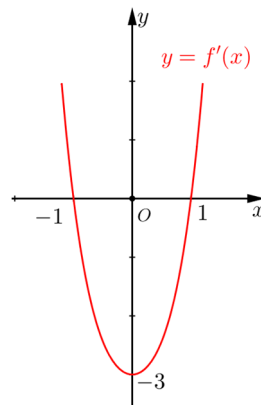
$$V = \pi \int_0^{2017 \cos \alpha} x^2 \tan^2 \alpha \cdot dx = \frac{2017^3 \cdot \pi}{3} \cdot \cos \alpha \cdot \sin^2 \alpha = \frac{2017^3 \cdot \pi}{3} \cdot \cos \alpha (1 - \cos^2 \alpha).$$

Đặt $t = \cos \alpha \Rightarrow t \in \left(0; \frac{1}{2} \right)$. Xét hàm số $f(t) = t(1 - t^2)$, $t \in \left(0; \frac{1}{2} \right)$.

Ta tìm được $f(t)$ lớn nhất khi $t = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Chọn A.

Câu 28: Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, ($a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$) có đồ thị (C). Biết rằng đồ thị (C) tiếp xúc với đường thẳng $y = 4$ tại điểm có hoành độ âm và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ cho bởi hình vẽ dưới đây:



Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) và trục hoành.

- A.** $S = 9$. **B.** $S = \frac{27}{4}$. **C.** $\frac{21}{4}$. **D.** $\frac{5}{4}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Từ đồ thị suy ra $f'(x) = 3x^2 - 3$.

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int (3x^2 - 3) dx = x^3 - 3x + C.$$

Do (C) tiếp xúc với đường thẳng $y = 4$ tại điểm có hoành độ x_0 âm nên

$$f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow 3x_0^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x_0 = -1.$$

Suy ra $f(-1) = 4 \Leftrightarrow C = 2 \Rightarrow (C): y = x^3 - 3x + 2$

$$\text{Xét phương trình } x^3 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \end{cases}.$$

$$\text{Diện tích hình phẳng cần tìm là: } \int_{-2}^1 (x^3 - 3x + 2) dx = \frac{27}{4}.$$

Câu 29: Đường cong được cho bởi phương trình $x = g(y)$, với đạo hàm $g'(y)$ là hàm liên tục, gọi m, n ($m < n$) tương ứng là tung độ các điểm M và N thuộc đồ thị $x = g(y)$. Độ dài đường cong $x = g(y)$ từ điểm M tới điểm N là: $\int_m^n \sqrt{1 + (g'(y))^2} dy$. Áp dụng tính độ dài đường cong $y = x^2$ từ $(1;1)$ đến $(\sqrt{2};2)$.

- A.** 1,07. **B.** 1,06. **C.** 1. **D.** 2.

Hướng dẫn giải:

$$\text{Ta có: } y = x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{y} \Rightarrow x' = \frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

Do đó độ dài cần tính: $\int_1^2 \sqrt{1 + \frac{1}{4y^2}} dy \approx 1.06$.

Chọn B.

Câu 30: Đường cong được cho bởi phương trình $x = g(y)$, với đạo hàm $g'(y)$ là hàm liên tục, gọi m, n ($m < n$) tương ứng là tung độ các điểm M và N thuộc đồ thị $x = g(y)$. Độ dài đường cong $x = g(y)$ từ điểm M tới điểm N là: $\int_m^n \sqrt{1 + (g'(y))^2} dy$. Áp dụng tính độ dài đường cong $x = y^2$ từ (1;1) đến (4;2).

A. 1,07.

B. 7,27.

C. 7,2

D. 2.

Hướng dẫn giải:

Ta có: $x' = 2y$

Độ dài cần tính là: $\int_1^2 \sqrt{1 + 2y} dy \approx 7.27$.

Chọn B.

Câu 31: Đường cong được cho bởi phương trình $x = g(y)$, với đạo hàm $g'(y)$ là hàm liên tục, gọi m, n ($m < n$) tương ứng là hoành độ các điểm M và N thuộc đồ thị. Độ dài đường cong $y = g(x)$ từ điểm M tới điểm N là: $\int_m^n \sqrt{1 + (g'(x))^2} dx$. Tìm độ dài của đường cong $y = 4x^3$ từ điểm (0;0) đến điểm $(2; 4\sqrt{2})$. Tích phân cần tính để giải bài này là:

A. $\int_0^{4\sqrt{2}} \sqrt{1 + 9x} dx$.

B. $\int_0^2 \sqrt{1 + 9x} dx$.

C. $\int_0^{4\sqrt{2}} \sqrt{1 + 4x^3} dx$.

D. $\int_0^{25} \sqrt{1 + 4x^3} dx$.

Hướng dẫn giải:

Cung cần tính là phần của đường cong nằm trong góc vuông thứ nhất. Ta có:

$y = 2x^{\frac{3}{2}}$ nên $y' = 3x^{\frac{1}{2}}$. Độ dài cung cần tìm bằng:

$$\int_0^2 \sqrt{1 + y'^2} dx = \int_0^2 \sqrt{1 + 9x} dx.$$

Chọn D.

Câu 32: Xét hàm số $y = f(x)$ liên tục trên miền $D = [a; b]$ có đồ thị là một đường cong C . Gọi S là phần giới hạn bởi C và các đường thẳng $x = a$, $x = b$. Người ta chứng minh được rằng diện tích mặt cong tròn xoay tạo thành khi xoay S quanh Ox bằng $S = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$. Theo kết quả trên, tổng diện tích bề mặt của khối tròn xoay

tạo thành khi xoay phần hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x) = \frac{2x^2 - \ln x}{4}$ và các đường thẳng $x = 1$, $x = e$ quanh Ox là

A. $\frac{2e^2 - 1}{8} \pi$. **B.** $\frac{4e^4 - 9}{64} \pi$. **C.** $\frac{4e^4 + 16e^2 + 7}{16} \pi$. **D.** $\frac{4e^4 - 9}{16} \pi$.

Hướng dẫn giải:

Ta có

$$f(x) = \frac{2x^2 - \ln x}{4} = \frac{x^2}{2} - \frac{\ln x}{4} \Rightarrow f'(x) = x - \frac{1}{4x} \Rightarrow (f'(x))^2 = \left(x - \frac{1}{4x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{16x^2} - \frac{1}{2}$$

Lại có $f'(x) = x - \frac{1}{4x} > 0, \forall x \in (1; e)$, nên $f(x)$ đồng biến trên $[1; e]$. Suy ra

$$f(x) \geq f(1) = \frac{1}{2} > 0, \forall x \in [1; e].$$

Từ đây ta thực hiện phép tính như sau

$$S = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = 2\pi \int_1^e \left(\frac{x^2}{2} - \frac{\ln x}{4}\right) \sqrt{1 + \left(x^2 + \frac{1}{16x^2} - \frac{1}{2}\right)} dx$$

$$S = 2\pi \int_1^e \left(\frac{x^2}{2} - \frac{\ln x}{4}\right) \sqrt{x^2 + \frac{1}{16x^2} + \frac{1}{2}} dx = 2\pi \int_1^e \left(\frac{x^2}{2} - \frac{\ln x}{4}\right) \sqrt{\left(x + \frac{1}{4x}\right)^2} dx$$

$$= 2\pi \int_1^e \left(\frac{x^2}{2} - \frac{\ln x}{4}\right) \left(x + \frac{1}{4x}\right) dx$$

$$= 2\pi \int_1^e \left(\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{8}x - \frac{1}{4}x \ln x - \frac{1}{16} \frac{\ln x}{x}\right) dx$$

$$= 2\pi (I_1 + I_2 + I_3)$$

$$\text{Với } I_1 = \int_1^e \left(\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{8}x\right) dx = \left(\frac{x^4}{8} + \frac{x^2}{16}\right) \Big|_1^e = \frac{2e^4 + e^2 - 3}{16}$$

$$I_2 = \int_1^e \left(-\frac{1}{4}x \ln x\right) dx = -\frac{1}{4} \frac{1}{4} x^2 (2 \ln x - 1) \Big|_1^e = -\frac{1}{16} e^2 - \frac{1}{16}$$

$$I_3 = \int_1^e \left(-\frac{1}{16} \frac{\ln x}{x} \right) dx = -\frac{1}{32} \ln^2 x \Big|_1^e = -\frac{1}{32}.$$

Chọn D.

Câu 33: Tính độ dài đường cong $y = \frac{4\sqrt{2}}{3} x^{\frac{3}{2}} - 1$, từ điểm A có hoành độ $a = 0$ đến điểm B có hoành độ $b = 1$. Kết quả là:

A. $\frac{13}{6}$.

B. $\frac{21}{4}$.

C. $\frac{3}{2}$.

D. $\frac{14}{3}$.

Hướng dẫn giải:

Ta có: $f'(x) = 2\sqrt{2x} \Rightarrow (f'(x))^2 = 8x$. thay vào Công thức ta được

$$T = \int_0^1 \sqrt{1+8x} dx. \text{ Đổi biến } u = 1+8x. \text{ Ta có:}$$

$$\text{Khi } \begin{cases} x=0 \Rightarrow u=1. \\ x=1 \Rightarrow u=9 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } T = \frac{1}{8} \int_1^9 \sqrt{u} du = \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \Big|_1^9 = \frac{13}{6}.$$

Chọn A.

Câu 34: Cho hai mặt cầu $(S_1), (S_2)$ có cùng bán kính R thỏa mãn tính chất: tâm của (S_1) thuộc (S_2) và ngược lại. Tính thể tích phần chung V của hai khối cầu tạo bởi (S_1) và (S_2) .

A. $V = \pi R^3$.

B. $V = \frac{\pi R^3}{2}$.

C. $V = \frac{5\pi R^3}{12}$.

D. $V = \frac{2\pi R^3}{5}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C

$$(C): x^2 + y^2 = R^2$$

Gắn hệ trục Oxy như hình vẽ

Khối cầu $S(O, R)$ chứa một đường tròn lớn là

$$(C): x^2 + y^2 = R^2$$

Dựa vào hình vẽ, thể tích cần tính là

$$V = 2\pi \int_{\frac{R}{2}}^R (R^2 - x^2) dx = 2\pi \left(R^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{\frac{R}{2}}^R = \frac{5\pi R^3}{12}.$$

O $\frac{R}{2}$ R x

Câu 35: Gọi V là thể tích khối tròn xoay tạo thành do quay xung quanh trục hoành một elip có phương trình $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$. V có giá trị gần nhất với giá trị nào sau đây?

- A.** 550. **B.** 400. **C.** 670. **D.** 335.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

$$\text{Ta có } \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1 \Leftrightarrow y = \pm \frac{4}{5} \sqrt{25 - x^2}.$$

Do elip nhận Ox , Oy làm các trục đối xứng nên thể tích V cần tính bằng 4 lần thể tích hình sinh bởi hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y = \frac{4}{5} \sqrt{25 - x^2}$, $y = 0$ và các đường thẳng $x = 0$, $x = 5$ quay xung quanh Ox .

$$V = 4\pi \int_0^5 \left(\frac{4}{5} \sqrt{25 - x^2} \right)^2 dx = \frac{640\pi}{3} \approx 670,2.$$

Câu 36: Gọi V_x và V_y lần lượt là thể tích khối tròn xoay tạo nên bởi phép quay hình elip $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$ ($a < b$). Xung quanh trục Ox , Oy . Hỏi khẳng định nào dưới đây đúng?

- A.** $V_x > V_y$. **B.** $V_x < V_y$. **C.** $V_x = V_y$. **D.** $V_x \geq V_y$.

Hướng dẫn giải:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) \\ x^2 = a^2 \left(1 - \frac{y^2}{b^2} \right) \end{cases}$$

$$V_x = 2\pi \int_0^a y^2 dx = 2\pi b^2 \int_0^a \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) dx = 2\pi b^2 \left(x - \frac{x^3}{3a^2} \right) \Big|_0^a = \frac{4\pi ab^2}{3} = \frac{4\pi ab}{3} \cdot b$$

$$V_y = V_x = 2\pi \int_0^b x^2 dy = 2\pi a^2 \int_0^b \left(1 - \frac{y^2}{b^2} \right) dy = 2\pi a^2 \left(y - \frac{y^3}{3b^2} \right) \Big|_0^b = \frac{4\pi a^2 b}{3} = \frac{4\pi ab}{3} \cdot a$$

Vì $b > a$ nên $V_x > V_y$.

Chọn A.

Câu 37: Cho hàm số $y = x^4 - 4x^2 + m$ có đồ thị là (C). Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) với $y < 0$ và trục hoành, S' là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) với $y > 0$ và trục hoành. Với giá trị nào của m thì $S = S'$?

- A.** $m = 2$ **B.** $m = \frac{2}{9}$ **C.** $m = \frac{20}{9}$ **D.** $m = 1$

Hướng dẫn giải

Phương trình hoành độ giao điểm $x^4 - 4x^2 + m = 0$ (*)

Đặt $x^2 = t$; $t \geq 0$, phương trình trở thành: $t^2 - 4t + m = 0$ (**)

Để $S > 0$, $S' > 0$ thì $0 < m < 4$. Khi đó (*) có 4 nghiệm phân biệt $-\sqrt{t_2}; -\sqrt{t_1}; \sqrt{t_1}; \sqrt{t_2}$ với $t_1; t_2, (t_1 < t_2)$ là hai nghiệm dương phân biệt của (**)

Do ĐTHS hàm bậc 4 nhận Oy làm trục đối xứng nên

$$\begin{aligned} S = S' &\Leftrightarrow \int_0^{\sqrt{t_1}} (x^4 - 4x^2 + m) dx = \int_{\sqrt{t_2}}^{\sqrt{t_1}} (x^4 - 4x^2 + m) dx \\ &\Leftrightarrow \int_0^{\sqrt{t_2}} (x^4 - 4x^2 + m) dx = 0 \Leftrightarrow \frac{t_2^2}{5} - \frac{4t_2}{3} + m = 0 \end{aligned}$$

Kết hợp với (**) ta được $m = \frac{20}{9}$.

Chọn C.

Câu 38: Cho parabol (P): $y = x^2 + 1$ và đường thẳng $d: y = mx + 2$. Biết rằng tồn tại m để diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) và d đạt giá trị nhỏ nhất, tính diện tích nhỏ nhất đó.

- A.** $S = 0$. **B.** $S = \frac{4}{3}$. **C.** $S = \frac{2}{3}$. **D.** $S = 4$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và d là $x^2 + 1 = mx + 2 \Leftrightarrow x^2 - mx - 1 = 0$ (*)

Ta có $\Delta = m^2 + 4 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$. Nên phương trình (*) luôn có 2 nghiệm phân biệt $x = a$ và $x = b$ ($a < b$). Do đó (P) luôn cắt d tại 2 điểm phân biệt $A(a; ma + 2)$ và $B(b; mb + 2)$.

Với mọi m , đường thẳng d luôn đi qua điểm $M(0; 2)$. Mà $y_{CT} = 1$.

Suy ra $mx + 2 \geq x^2 + 1, \forall x \in [a; b]$.

Do đó diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) và d là

$$\begin{aligned} S &= \int_a^b \left(mx + 2 - (x^2 + 1) \right) dx = \int_a^b (mx + 1 - x^2) dx = \left(\frac{mx}{2} + x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_a^b \\ &= (b-a) \left[\frac{m}{2}(b+a) + 1 - \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + ab) \right] = (b-a) \left[\frac{m}{2}(b+a) + 1 - \frac{1}{3}(a+b)^2 + \frac{1}{3}ab \right] \\ \Rightarrow S^2 &= (b-a)^2 \left[\frac{m}{2}(b+a) + 1 - \frac{1}{3}(a+b)^2 + \frac{1}{3}ab \right]^2 \\ &= \left[(b+a)^2 - 4ab \right] \left[\frac{m}{2}(b+a) + 1 - \frac{1}{3}(a+b)^2 + \frac{1}{3}ab \right]^2 \end{aligned}$$

Vì a, b là nghiệm của phương trình $(*)$ nên ta có $\begin{cases} a+b=m \\ ab=-1 \end{cases}$.

$$\text{Khi đó } S^2 = (m^2 + 4) \left(\frac{m^2}{6} + \frac{2}{3} \right)^2 \geq 4 \cdot \frac{4}{9} = \frac{16}{9}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $m=0$. Vậy $S_{\min} = \frac{4}{3}$.

Câu 39: Cho parabol (P) $y = x^2$ và hai điểm A, B thuộc (P) sao cho $AB = 2$. Tìm A, B sao cho diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) và đường thẳng AB đạt giá trị lớn nhất

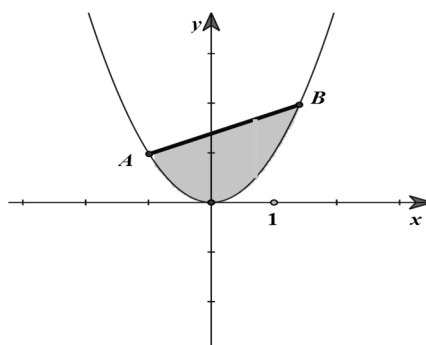
A. $\frac{4}{3}$

B. $\frac{3}{4}$

C. $\frac{2}{3}$

D. $\frac{3}{2}$

Hướng dẫn giải



Giả sử $A(a; a^2), B(b; b^2) \in (P) (b > a)$ sao cho $AB = 2$

Phương trình đường thẳng AB : $y = (b+a)x - ab$

Gọi S là diện tích hình phẳng cần tìm, ta có

$$S = \int_a^b |(b+a)x - ab - x^2| dx = \int_a^b [(b+a)x - ab - x^2] dx = \frac{1}{6}(b-a)^3$$

Vì $AB = 2$ nên $|b-a| = b-a \leq 2$

$$\Rightarrow S \leq \frac{4}{3}$$

Chọn B.

Câu 40: Parabol $y = \frac{x^2}{2}$ chia hình tròn có tâm là gốc tọa độ, bán kính bằng $2\sqrt{2}$ thành hai phần có diện tích là S_1 và S_2 , trong đó $S_1 < S_2$. Tìm tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$.

A. $\frac{3\pi+2}{21\pi-2}$.

B. $\frac{3\pi+2}{9\pi-2}$.

C. $\frac{3\pi+2}{12\pi}$.

D. $\frac{9\pi-2}{3\pi+2}$.

Hướng dẫn giải:

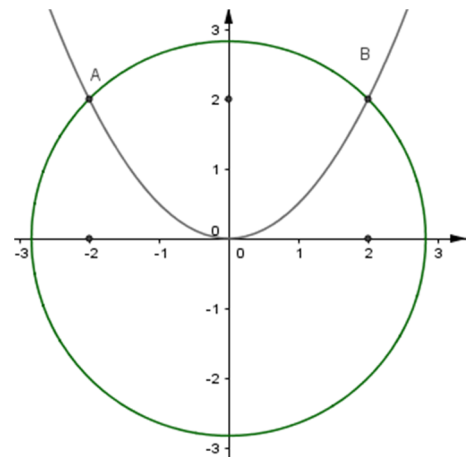
Chọn B.

Diện tích hình tròn là $S = \pi r^2 = 8\pi$.

$$\text{Ta có } S_1 = \int_{-2}^2 \left| \sqrt{8-x^2} - \frac{x^2}{2} \right| dx = 2\pi + \frac{4}{3}$$

$$\text{Suy ra } S_2 = S - S_1 = 6\pi - \frac{4}{3}$$

$$\text{Vậy } \frac{S_1}{S_2} = \frac{3\pi+2}{9\pi-2}.$$



Câu 41: Xét hàm số $y = f(x)$ liên tục trên miền $D = [a; b]$ có đồ thị là một đường cong C . Gọi S là phần giới hạn bởi C và các đường thẳng $x = a$, $x = b$. Người ta chứng minh được rằng diện tích mặt cong tròn xoay tạo thành khi xoay S quanh Ox bằng $S = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$. Theo kết quả trên, tổng diện tích bề mặt của khối tròn xoay tạo thành khi xoay phần hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x) = \frac{2x^2 - \ln x}{4}$ và các đường thẳng $x = 1$, $x = e$ quanh Ox là

A. $\frac{2e^2-1}{8}\pi$.

B. $\frac{4e^4-9}{64}\pi$.

C. $\frac{4e^4+16e^2+7}{16}\pi$.

D. $\frac{4e^4-9}{16}\pi$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Cách 1. (Giải tự luận)

Ta có

$$f(x) = \frac{2x^2 - \ln x}{4} = \frac{x^2}{2} - \frac{\ln x}{4} \Rightarrow f'(x) = x - \frac{1}{4x} \Rightarrow (f'(x))^2 = \left(x - \frac{1}{4x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{16x^2} - \frac{1}{2}$$

Lại có $f'(x) = x - \frac{1}{4x} > 0, \forall x \in (1; e)$, nên $f(x)$ đồng biến trên $[1; e]$. Suy ra

$$f(x) \geq f(1) = \frac{1}{2} > 0, \forall x \in [1; e].$$

Từ đây ta thực hiện phép tính như sau

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = 2\pi \int_1^e \left(\frac{x^2}{2} - \frac{\ln x}{4}\right) \sqrt{1 + \left(x^2 + \frac{1}{16x^2} - \frac{1}{2}\right)} dx \\ S &= 2\pi \int_1^e \left(\frac{x^2}{2} - \frac{\ln x}{4}\right) \sqrt{x^2 + \frac{1}{16x^2} + \frac{1}{2}} dx = 2\pi \int_1^e \left(\frac{x^2}{2} - \frac{\ln x}{4}\right) \sqrt{\left(x + \frac{1}{4x}\right)^2} dx \\ &= 2\pi \int_1^e \left(\frac{x^2}{2} - \frac{\ln x}{4}\right) \left(x + \frac{1}{4x}\right) dx \\ &= 2\pi \int_1^e \left(\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{8}x - \frac{1}{4}x \ln x - \frac{1}{16} \frac{\ln x}{x}\right) dx \\ &= 2\pi (I_1 + I_2 + I_3) \end{aligned}$$

$$\text{Với } I_1 = \int_1^e \left(\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{8}x\right) dx = \left(\frac{x^4}{8} + \frac{x^2}{16}\right) \Big|_1^e = \frac{2e^4 + e^2 - 3}{16}$$

$$I_2 = \int_1^e \left(-\frac{1}{4}x \ln x\right) dx = -\frac{1}{4} \frac{1}{4} x^2 (2 \ln x - 1) \Big|_1^e = -\frac{1}{16}e^2 - \frac{1}{16}$$

$$I_3 = \int_1^e \left(-\frac{1}{16} \frac{\ln x}{x}\right) dx = -\frac{1}{32} \ln^2 x \Big|_1^e = -\frac{1}{32}.$$

Cách 2.

Học sinh có thể trực tiếp bấm máy tính tích phân $S = 2\pi \int_1^e \left|\frac{x^2}{2} - \frac{\ln x}{4}\right| \sqrt{1 + \left(x^2 + \frac{1}{16x^2} - \frac{1}{2}\right)} dx$

để có kết quả

Câu 42: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hàm số $y = x^2\sqrt{x^2+1}$, trục Ox và đường thẳng $x=1$ bằng $\frac{a\sqrt{b} - \ln(1+\sqrt{b})}{c}$ với a, b, c là các số nguyên dương. Khi đó giá trị của $a+b+c$ là

- A.** 11. **B.** 12. **C.** 13. **D.** 14.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Cách 1 (dùng máy tính):

Phương trình hoành độ giao điểm $x^2\sqrt{x^2+1} = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Diện tích hình phẳng cần tìm là $S = \int_0^1 x^2\sqrt{x^2+1}dx$ vì $x^2\sqrt{x^2+1} \geq 0, \forall x \in [0;1]$.

$$\int_0^1 x^2\sqrt{x^2+1}dx = \frac{a\sqrt{b} - \ln(1+\sqrt{b})}{c}$$

Bước 1: Bấm máy tính tích phân $S = \int_0^1 x^2\sqrt{x^2+1}dx = 0,4201583875$ (**Lưu D**)

Bước 2: Cơ sở: Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$D = \frac{a\sqrt{b} - \ln(1+\sqrt{b})}{c} \Leftrightarrow c = \frac{a\sqrt{b} - \ln(1+\sqrt{b})}{D}$ (coi $c = f(x)$, $a = x$, $b \in \mathbb{Z}$ và ta thử các giá trị $b = \dots -5; -4; \dots 0; 1; 2; 3; 4; \dots$)

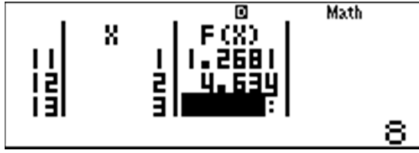
Thử với $b = 1$:

Thử với $b = 2$: Mode + 7

$$F(X) = \frac{X\sqrt{2} - \ln(1+\sqrt{2})}{D};$$

Start?	-9
End?	9
Step?	1

Kết quả: $a = 3; c = 8, b = 2$



Cách 2 (giải tự luận):

Phương trình hoành độ giao điểm $x^2\sqrt{x^2+1} = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Diện tích hình phẳng cần tìm là $S = \int_0^1 x^2\sqrt{x^2+1}dx$ vì $x^2\sqrt{x^2+1} \geq 0, \forall x \in [0;1]$.

Đặt $x = \tan t \Rightarrow dx = (1 + \tan^2 t)dt$

Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = 0; x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}$

$$\text{Khi đó } S = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 t \sqrt{1 + \tan^2 t} (1 + \tan^2 t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} \frac{1}{\cos t} \cdot \frac{1}{\cos^2 t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 t \cdot \cos t}{(\cos^2 t)^3} dt$$

Đặt $u = \sin t \Rightarrow du = \cos t dt$

Đổi cận $t = 0 \Rightarrow u = 0; t = \frac{\pi}{4} \Rightarrow u = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$S = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{u^2}{(1-u^2)^3} du = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1-(1-u^2)}{(1-u^2)^3} du = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\frac{1}{(1-u^2)^3} - \frac{1}{(1-u^2)^2} \right) du$$

$$\text{Ta có } H = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{(1-u^2)^3} du = \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\frac{1-u+1+u}{(1-u)(1+u)} \right)^3 du = \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\frac{1}{1+u} + \frac{1}{1-u} \right)^3 du$$

$$= \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\frac{1}{(1+u)^3} + \frac{1}{(1-u)^3} + \frac{3}{1-u^2} \left(\frac{1}{1-u} + \frac{1}{1+u} \right) \right) du = \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\frac{1}{(1+u)^3} + \frac{1}{(1-u)^3} + \frac{6}{(1-u^2)^2} \right) du$$

$$= \left(\frac{-1}{16(1+u)^2} + \frac{1}{16(1-u)^2} \right) \Big|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{6}{(1-u^2)^2} du = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{6}{(1-u^2)^2} du$$

$$\text{Tính } K = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{6}{(1-u^2)^2} du$$

$$K = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{6}{(1-u^2)^2} du = \frac{3}{2} \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\frac{1-u+1+u}{(1-u)(1+u)} \right)^2 du = \frac{3}{2} \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\frac{1}{1-u} + \frac{1}{1+u} \right)^2 du$$
$$= \frac{3}{2} \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\frac{1}{(1-u)^2} + \frac{1}{(1+u)^2} + \frac{2}{(1-u)(1+u)} \right) du = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{1-u} - \frac{1}{1+u} + \ln \left| \frac{1+u}{1-u} \right| \right) \bigg|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 3\sqrt{2} + 3\ln(1+\sqrt{2})$$

$$\text{Vậy } H = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2} + 3\ln(1+\sqrt{2})}{8} = \frac{7\sqrt{2} + 3\ln(1+\sqrt{2})}{8}$$

$$\text{Khi đó } S = \frac{7\sqrt{2} + 3\ln(1+\sqrt{2})}{8} - \frac{1}{6}K$$
$$= \frac{7\sqrt{2} + 3\ln(1+\sqrt{2})}{8} - \frac{1}{6}(3\sqrt{2} + 3\ln(1+\sqrt{2})) = \frac{3\sqrt{2} - \ln(1+\sqrt{2})}{8}$$

ỨNG DỤNG THỰC TẾ

Câu 1: Một vật chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = 160 - 10t$ (m/s). Quãng đường mà vật chuyển động từ thời điểm $t = 0$ (s) đến thời điểm mà vật dừng lại là

- A.** 1028 m. **B.** 1280 m. **C.** 1308 m. **D.** 1380 m.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Khi vật dừng lại thì $v(t) = 160 - 10t = 0 \Leftrightarrow t = 16$

$$\text{Suy ra: } s = \int_0^{16} v(t) dt = \int_0^{16} (160 - 10t) dt = (160t - 5t^2) \Big|_0^{16} = 1280 \text{ m.}$$

Câu 2: Một chiếc ô tô chuyển động với vận tốc $v(t)$ (m/s), có gia tốc $a(t) = v'(t) = \frac{3}{2t+1}$, (m/s²) . Vận tốc của ô tô sau 10 giây (làm tròn đến hàng đơn vị) là

- A.** 4,6 m/s. **B.** 7,2 m/s. **C.** 1,5 m/s. **D.** 2,2 m/s.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$$\text{Vận tốc của ô tô sau 10 giây là: } v = \int_0^{10} \frac{3}{2t+1} dt = \frac{3}{2} \ln|2t+1| \Big|_0^{10} = \frac{3}{2} \ln 21 \approx 4,6 \text{ (m/s).}$$

Câu 3: Một hạt proton di chuyển trong điện trường có biểu thức gia tốc (theo cm/s²) là $a(t) = \frac{-20}{(1+2t)^2}$ (với t tính bằng giây). Tìm hàm vận tốc v theo t , biết rằng khi $t=0$ thì $v=30$ (cm/s).

- A.** $\frac{10}{1+2t}$ **B.** $\frac{10}{1+2t} + 20$ **C.** $(1+2t)^{-3} + 30$ **D.** $\frac{-20}{(1+2t)^2} + 30$

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$$\bullet \quad v(t) = \int a(t) dt = \int \frac{-20}{(1+2t)^2} dt = \frac{10}{1+2t} + C$$

$$\bullet \quad \text{Do } v(0) = 30, \text{ suy ra } \frac{10}{1+2 \cdot 0} + C = 30 \Leftrightarrow C = 20$$

$$\bullet \quad \text{Vậy, hàm } v(t) = \frac{10}{1+2t} + 20.$$

Câu 4: Một vật chuyển động với vận tốc $v(t) = 1 - 2\sin 2t$ (m/s). Quãng đường mà vật chuyển động trong khoảng thời gian $t = 0$ (s) đến thời điểm $t = \frac{3\pi}{4}$ (s) là

A. $\frac{3\pi}{4} - 1$.

B. $\frac{3\pi - 1}{4}$.

C. $\frac{3\pi + 1}{4}$.

D. $\frac{3\pi}{4} + 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$$\text{Quãng đường cần tìm } s = \int_0^{\frac{3\pi}{4}} (1 - 2\sin 2t) dt = (t + \cos 2t) \Big|_0^{\frac{3\pi}{4}} = \frac{3\pi}{4} - 1.$$

Câu 5: Một người lái xe ô tô đang chạy với vận tốc 20 m/s thì người lái xe phát hiện có hàng rào ngăn đường ở phía trước cách 45 m (tính từ vị trí đầu xe đến hàng rào) vì vậy, người lái xe đạp phanh. Từ thời điểm đó xe chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -5t + 20$ (m/s), trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, xe ô tô còn cách hàng rào ngăn cách bao nhiêu mét (tính từ vị trí đầu xe đến hàng rào)?

A. 5 m .

B. 4 m .

C. 6 m .

D. 3 m .

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Xe đang chạy với vận tốc $v = 20 \text{ m/s}$ tương ứng với thời điểm $t = 0$ (s)

Xe dừng lại tương ứng với thời điểm $t = 4$ (s).

$$\text{Quãng đường xe đã đi là } S = \int_0^4 (-5t + 20) dt = \left(-\frac{5}{2}t^2 + 20t \right) \Big|_0^4 = 40 \text{ (m)}.$$

Vậy ô tô cách hàng rào một đoạn $45 - 40 = 5$ (m).

Câu 6: Một vật chuyển động với vận tốc 10 m/s thì tăng tốc với gia tốc $a(t) = 3t + t^2$. Tính quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian 10 giây kể từ lúc bắt đầu tăng tốc.

A. $\frac{4300}{3} \text{ m}$.

B. 4300 m .

C. 430 m .

D. $\frac{430}{3} \text{ m}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

• Hàm vận tốc $v(t) = \int a(t) dt = \int (3t + t^2) dt = \frac{3t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + C$

- Lấy mốc thời gian lúc tăng tốc $\Rightarrow v(0) = 10 \Rightarrow C = 10$

Ta được: $v(t) = \frac{3t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + 10$

- Sau 10 giây, quãng đường vật đi được là:

$$s = \int_0^{10} \left(\frac{3t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + 10 \right) dt = \left(\frac{t^3}{2} + \frac{t^4}{12} + 10t \right) \Big|_0^{10} = \frac{4300}{3} \text{ m.}$$

Câu 7: Một ô tô bắt đầu chuyển động nhanh dần đều với vận tốc $v_1(t) = 7t$ (m/s). Đi được 5(s), người lái xe phát hiện chướng ngại vật và phanh gấp, ô tô tiếp tục chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a = -70$ (m/s²). Tính quãng đường S (m) đi được của ô tô từ lúc bắt đầu chuyển bánh cho đến khi dừng hẳn.

- A.** $S = 95,70$ (m). **B.** $S = 87,50$ (m). **C.** $S = 94,00$ (m). **D.** $S = 96,25$ (m).

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Quãng đường ô tô đi được từ lúc xe lăn bánh đến khi được phanh:

$$S_1 = \int_0^5 v_1(t) dt = \int_0^5 7t dt = 7 \frac{t^2}{2} \Big|_0^5 = 87,5 \text{ (m).}$$

Vận tốc $v_2(t)$ (m/s) của ô tô từ lúc được phanh đến khi dừng hẳn thỏa mãn

$$v_2(t) = \int (-70) dt = -70t + C, \quad v_2(5) = v_1(5) = 35 \Rightarrow C = 385. \text{ Vậy } v_2(t) = -70t + 385.$$

Thời điểm xe dừng hẳn tương ứng với t thỏa mãn $v_2(t) = 0 \Leftrightarrow t = 5,5$ (s).

Quãng đường ô tô đi được từ lúc xe được phanh đến khi dừng hẳn:

$$S_2 = \int_5^{5,5} v_1(t) dt = \int_5^{5,5} (-70t + 385) dt = 8,75 \text{ (m).}$$

Quãng đường cần tính $S = S_1 + S_2 = 96,25$ (m).

Câu 8: Một ô tô đang chạy đều với vận tốc 15 m/s thì phía trước xuất hiện chướng ngại vật nên người lái đạp phanh gấp. Kể từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với gia tốc $-a$ m/s². Biết ô tô chuyển động thêm được 20m thì dừng hẳn. Hỏi a thuộc khoảng nào dưới đây.

- A.** (3;4). **B.** (4;5). **C.** (5;6). **D.** (6;7).

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Gọi $x(t)$ là hàm biểu diễn quãng đường, $v(t)$ là hàm vận tốc.

$$\text{Ta có: } v(t) - v(0) = \int_0^t (-a) dt = -at \Rightarrow v(t) = -at + 15.$$

$$x(t) - x(0) = \int_0^t v(t) dt = \int_0^t (-at + 15) dt = -\frac{1}{2}at^2 + 15t$$

$$x(t) = -\frac{1}{2}at^2 + 15t$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} v(t) = 0 \\ x(t) = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -at + 15 = 0 \\ -\frac{1}{2}at^2 + 15t = 20 \end{cases} \Rightarrow -\frac{15}{2}t + 15t = 20 \Rightarrow t = \frac{8}{3} \Rightarrow a = \frac{45}{8}.$$

Câu 9: Một ô tô đang chạy với vận tốc 18 m/s thì người lái hãm phanh. Sau khi hãm phanh, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -36t + 18 \text{ (m/s)}$ trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc bắt đầu hãm phanh. Quãng đường ô tô di chuyển được kể từ lúc hãm phanh đến khi dừng hẳn là bao nhiêu mét?

A. $5,5 \text{ m}$. **B.** $3,5 \text{ m}$. **C.** $6,5 \text{ m}$. **D.** $4,5 \text{ m}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Lấy mốc thời gian là lúc ô tô bắt đầu hãm phanh. Gọi T là thời điểm ô tô dừng. Ta có $v(T) = 0$. Suy ra $-36T + 18 = 0 \Rightarrow T = 0,5 \text{ (s)}$

Khoảng thời gian từ lúc hãm phanh đến lúc dừng hẳn ô tô là $0,5 \text{ s}$. Trong khoảng thời gian đó, ô tô di chuyển được quãng đường là $s = \int_0^{0,5} (-36t + 18) dt = (-18t^2 + 18t) \Big|_0^{0,5} = 4,5(m)$.

Câu 10: Một vật di chuyển với gia tốc $a(t) = -20(1 + 2t)^{-2} \text{ (m/s}^2\text{)}$. Khi $t = 0$ thì vận tốc của vật là 30 m/s . Tính quãng đường vật đó di chuyển sau 2 giây (làm tròn kết quả đến chữ số hàng đơn vị).

A. $S = 106 \text{ m}$. **B.** $S = 107 \text{ m}$. **C.** $S = 108 \text{ m}$. **D.** $S = 109 \text{ m}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Ta có $v(t) = \int a(t) dt = \int -20(1+2t)^{-2} dt = \frac{10}{1+2t} + C$. Theo đề ta có

$v(0) = 30 \Leftrightarrow C + 10 = 30 \Leftrightarrow C = 20$. Vậy quãng đường vật đó đi được sau 2 giây là:

$$S = \int_0^2 \left(\frac{10}{1+2t} + 20 \right) dt = \left(5 \ln(1+2t) + 20t \right) \Big|_0^2 = 5 \ln 5 + 100 \approx 108m.$$

Câu 11: Một vật chuyển động với vận tốc $v(t) = 1,5 + \frac{t^2 + 2}{t + 2}$ (m/s). Quãng đường vật đó đi được trong 4 giây đầu tiên bằng bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

- A.** 12,60 m. **B.** 12,59 m. **C.** 0,83 m. **D.** 6,59 m.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

- Quãng đường trong 4 giây đầu tiên (từ $t = 0$ đến $t = 4$) là

$$s = \int_0^4 \left(1,5 + \frac{t^2 + 2}{t + 2} \right) dt = \int_0^4 \left(1,5 + t - 2 + \frac{6}{t + 2} \right) dt = \left(1,5t + \frac{t^2}{2} - 2t + 6 \ln|t + 2| \right) \Big|_0^4 \approx 12,59 m.$$

Câu 12: Một tia lửa được bắn thẳng đứng từ mặt đất với vận tốc 15 m/s. Hỏi sau 2,5 giây, tia lửa ấy cách mặt đất bao nhiêu mét, biết gia tốc là 9,8 m/s²?

- A.** 30,625 m. **B.** 37,5 m. **C.** 68,125 m. **D.** 6,875 m.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

- Hàm vận tốc $v(t) = v_0 + at = 15 + 9,8t$
- Quãng đường tia lửa đi được sau 2,5 giây là:

$$s = \int_0^{2,5} (15 + 9,8t) dt = \left(15t + 4,9t^2 \right) \Big|_0^{2,5} = 68,125 m.$$

Câu 13: Một viên đạn được bắn lên theo phương thẳng đứng với vận tốc ban đầu là 24,5(m/s) và gia tốc trọng trường là 9,8(m/s²). Quãng đường viên đạn đi từ lúc bắn lên cho tới khi rơi xuống đất là (coi như viên đạn được bắn lên từ mặt đất)

- A.** 61,25 (m). **B.** 30,625 (m). **C.** 29,4 (m). **D.** 59,5 (m)

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Chọn chiều dương từ mặt đất hướng lên trên, mốc thời gian $t = 0$ bắt đầu từ khi vật chuyển động.

Ta có vận tốc viên đạn theo thời gian t là $v(t) = v_0 - gt = 24,5 - 9,8t \quad (m/s)$

Khi vật ở vị trí cao nhất thì có vận tốc bằng 0 tương ứng tại thời điểm $t = \frac{5}{2}$

Quãng đường viên đạn đi được từ mặt đất đến vị trí cao nhất là

$$S(t) = \int_0^{\frac{5}{2}} |v(t)| dt = \int_0^{\frac{5}{2}} |24,5 - 9,8t| dt = \frac{245}{8}$$

Vậy quãng đường viên đạn đi từ lúc bắn lên cho tới khi rơi xuống đất là $2 \cdot \frac{245}{8} = 61,25 \quad (m)$.

Câu 14: Một lực 50 N cần thiết để kéo căng một chiếc lò xo có độ dài tự nhiên 5 cm đến 10 cm. Hãy tìm công sinh ra khi kéo lò xo từ độ dài từ 10 cm đến 13 cm?

A. 1,95J.

B. 1,59 J.

C. 1000 J.

D. 10000 J

Hướng dẫn giải

Theo định luật Hooke, khi chiếc lò xo bị kéo căng thêm x m so với độ dài tự nhiên thì chiếc lò xo trở lại với một lực $f(x) = kx$. Khi kéo căng lò xo từ 5 cm đến 10 cm, thì nó bị kéo căng thêm 5 cm = 0,05 m. Bằng cách này, ta được $f(0,05) = 50$ bởi vậy:

$$0,05k = 50 \Rightarrow k = \frac{50}{0,05} = 1000$$

Do đó: $f(x) = 1000x$ và công được sinh ra khi kéo căng lò xo từ 10 cm đến 13 cm là:

$$W = \int_{0,05}^{0,08} 1000x dx = 1000 \frac{x^2}{2} \Big|_{0,05}^{0,08} = 1,95J$$

Chọn A.

Câu 15: Một ô tô đang chạy đều với vận tốc 15 m/s thì phía trước xuất hiện chướng ngại vật nên người lái đạp phanh gấp. Kể từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với gia tốc $-a \text{ m/s}^2$. Biết ô tô chuyển động thêm được 20m thì dừng hẳn. Hỏi a thuộc khoảng nào dưới đây.

A. (3;4).

B. (4;5).

C. (5;6).

D. (6;7).

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Gọi $x(t)$ là hàm biểu diễn quãng đường, $v(t)$ là hàm vận tốc.

$$\text{Ta có: } v(t) - v(0) = \int_0^t (-a) dt = -at \Rightarrow v(t) = -at + 15.$$

$$x(t) - x(0) = \int_0^t v(t) dt = \int_0^t (-at + 15) dt = -\frac{1}{2}at^2 + 15t$$

$$x(t) = -\frac{1}{2}at^2 + 15t$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} v(t) = 0 \\ x(t) = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -at + 15 = 0 \\ -\frac{1}{2}at^2 + 15t = 20 \end{cases} \Rightarrow -\frac{15}{2}t + 15t = 20 \Rightarrow t = \frac{8}{3} \Rightarrow a = \frac{45}{8}.$$

Câu 16: Tại một nơi không có gió, một chiếc khí cầu đang đứng yên ở độ cao 162 (mét) so với mặt đất đã được phi công cài đặt cho nó chế độ chuyển động đi xuống. Biết rằng, khí cầu đã chuyển động theo phương thẳng đứng với vận tốc tuân theo quy luật $v(t) = 10t - t^2$, trong đó t (phút) là thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động, $v(t)$ được tính theo đơn vị mét/phút (m/p). Nếu như vậy thì khi bắt đầu tiếp đất vận tốc v của khí cầu là

- A.** $v = 5(m/p)$. **B.** $v = 7(m/p)$. **C.** $v = 9(m/p)$. **D.** $v = 3(m/p)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Gọi thời điểm khí cầu bắt đầu chuyển động là $t = 0$, thời điểm khinh khí cầu bắt đầu tiếp đất là t_1 .

Quãng đường khí cầu đi được từ thời điểm $t = 0$ đến thời điểm khinh khí cầu bắt đầu tiếp đất là t_1 là

$$\int_0^{t_1} (10t - t^2) dt = 5t_1^2 - \frac{t_1^3}{3} = 162$$

$$\Leftrightarrow t \approx -4,93 \vee t \approx 10,93 \vee t = 9$$

Do $v(t) \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq t \leq 10$ nên chọn $t = 9$.

Vậy khi bắt đầu tiếp đất vận tốc v của khí cầu là $v(9) = 10.9 - 9^2 = 9(m/p)$

Câu 17: Một ô tô đang chạy với vận tốc $10m/s$ thì người lái đạp phanh, từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -5t + 10(m/s)$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét?

A. $0,2m$.

B. $2m$.

C. $10m$.

D. $20m$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có ô tô đi được thêm 2 giây nữa với vận tốc chậm dần đều $v(t) = -5t + 10 (m/s)$

ứng dụng tích phân, ta có quãng đường cần tìm là:

$$S = \int_0^2 v(t) dt = \int_0^2 (-5t + 10) dt = \left(-\frac{5}{2}t^2 + 10t \right) \Big|_0^2 = 10(m)$$

* Lúc dừng thì ta có: $v(t) = 0 \Rightarrow -5t + 10 = 0 \Rightarrow t = 2$

Từ lúc đạp phanh đến lúc dừng hẳn, ô tô đi được quãng đường: $S = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$

$$\text{Với } \begin{cases} a = -5 \\ t = 2 \\ v_0 = 10 \end{cases} \Rightarrow S = 10.2 + \frac{1}{2}(-5).2^2 = 10(m)$$

* Áp dụng công thức lý 10 ta có: $v_2^2 - v_1^2 = 2.a.s$

Ta còn có công thức liên hệ giữa vận tốc và gia tốc: $v = v_0 + a.t$

Dựa vào phương trình chuyển động thì $a = -5 (m/s^2)$

Khi dừng hẳn thì ta có $v_2 = 0 (m/s)$

Theo công thức ban đầu, ta được $s = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2a} = \frac{0 - 10^2}{2.(-5)} = 10(m)$.

Câu 18: Một bác thợ xây bơm nước vào bể chứa nước. Gọi $h(t)$ là thể tích nước bơm được sau t giây. Cho $h'(t) = 3at^2 + bt$ và ban đầu bể không có nước. Sau 5 giây thì thể tích nước trong bể là $150m^3$. Sau 10 giây thì thể tích nước trong bể là $1100m^3$. Hỏi thể tích nước trong bể sau khi bơm được 20 giây là bao nhiêu.

A. $8400m^3$.

B. $2200m^3$.

C. $6000m^3$.

D. $4200m^3$

Hướng dẫn giải

Ta có $h(t) = \int (3at^2 + bt) dt = at^3 + \frac{bt^2}{2}$.

Khi đó ta có hệ:
$$\begin{cases} 5^3 \cdot a + \frac{1}{2} \cdot b \cdot 5^2 = 150 \\ 10^3 \cdot a + \frac{1}{2} \cdot b \cdot 10^2 = 1100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$$

Khi đó $h(t) = t^3 + t^2$.

Vậy thể tích nước trong bể sau khi bơm được 20 giây là $h(20) = 8400m^3$.

Chọn A.

Câu 19: Gọi $h(t)$ (cm) là mức nước trong bồn chứa sau khi bơm được t giây. Biết rằng $h'(t) = \frac{1}{5}\sqrt[3]{t+8}$ và lúc đầu bồn không có nước. Tìm mức nước ở bồn sau khi bơm nước được 6 giây (chính xác đến 0,01 cm)

A. 2,67 cm.

B. 2,66 cm.

C. 2,65 cm.

D. 2,68 cm.

Chọn B.

• Hàm $h(t) = \int \frac{1}{5}\sqrt[3]{t+8} dt = \frac{3}{20}(t+8)\sqrt[3]{t+8} + C$

• Lúc $t = 0$, bồn không chứa nước. Suy ra $h(0) = 0 \Rightarrow \frac{12}{5} + C = 0 \Leftrightarrow C = -\frac{12}{5}$

Vậy, hàm $h(t) = \frac{3}{20}(t+8)\sqrt[3]{t+8} - \frac{12}{5}$

• Mức nước trong bồn sau 6 giây là $h(6) \approx 2,66$ cm.

Câu 20: Khi quan sát một đám vi khuẩn trong phòng thí nghiệm người ta thấy tại ngày thứ x có số lượng là $N(x)$. Biết rằng $N'(x) = \frac{2000}{1+x}$ và lúc đầu số lượng vi khuẩn là 5000 con. Vậy ngày thứ 12 số lượng vi khuẩn là?

A. 10130.

B. 5130.

C. 5154.

D. 10129.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Thực chất đây là một bài toán tìm nguyên hàm. Cho $N'(x)$ và đi tìm $N(x)$.

Ta có $\int \frac{2000}{1+x} dx = 2000 \cdot \ln|1+x| + 5000$ (Do ban đầu khối lượng vi khuẩn là 5000). Với $x=12$ thì số lượng vi khuẩn là ≈ 10130 con.

Câu 21: Một đám vi trùng tại ngày thứ t có số lượng là $N(t)$. Biết rằng $N'(t) = \frac{4000}{1+0,5t}$ và lúc đầu đám vi trùng có 250000 con. Hỏi sau 10 ngày số lượng vi trùng gần với số nào sau đây nhất?

- A.** 251000 con. **B.** 264334 con. **C.** 261000 con. **D.** 274334 con.

Chọn B.

- $N(t) = \int \frac{4000}{1+0,5t} dt = 8000 \cdot \ln|1+0,5t| + C$
- Lúc đầu có 250000 con, suy ra $N(0) = 250000 \Rightarrow C = 250000$
- Vậy $N(t) = 8000 \cdot \ln|1+0,5t| + 250000 \Rightarrow N(10) \approx 264334,0758$.

Câu 22: Một đám vi trùng tại ngày thứ t có số lượng $N(t)$, biết rằng $N'(t) = \frac{7000}{t+2}$ và lúc đầu đám vi trùng có 300000 con. Sau 10 ngày, đám vi trùng có khoảng bao nhiêu con?

- A.** 302542 con. **B.** 322542 con. **C.** 312542 con. **D.** 332542 con.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$$\text{Ta có } N(t) = \int N'(t) dt = \int \frac{7000}{t+2} dt = 7000 \ln|t+2| + C$$

$$\text{Do } N(0) = 300000 \Rightarrow C = 300000 - 7000 \ln 2$$

$$\text{Khi đó } N(10) = 7000 \ln 12 + 300000 - 7000 \ln 2 = 312542. \text{ Chọn C}$$

Câu 23: Tốc độ phát triển của số lượng vi khuẩn trong hồ bơi được mô hình bởi hàm số $B'(t) = \frac{1000}{(1+0,3t)^2}, t \geq 0$, trong đó $B(t)$ là số lượng vi khuẩn trên mỗi ml nước tại ngày thứ t . Số lượng vi khuẩn ban đầu là 500 con trên một ml nước. Biết rằng mức độ an toàn cho người sử dụng hồ bơi là số vi khuẩn phải dưới 3000 con trên mỗi ml nước. Hỏi vào ngày thứ bao nhiêu thì nước trong hồ không còn an toàn nữa?

- A.** 9 **B.** 10. **C.** 11. **D.** 12.

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \int B'(t) dt = \int \frac{1000}{(1+0,3t)^2} dt = -\frac{1000}{0,3(1+0,3t)} + C$$

$$\text{Mà } B(0) = 500 \Leftrightarrow -\frac{10000}{3(1+0,3.0)} + C = 500 \Leftrightarrow C = \frac{11500}{3}$$

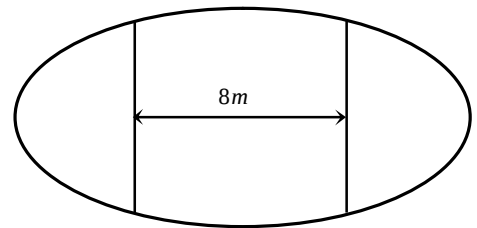
$$\text{Do đó: } B(t) = -\frac{10000}{3(1+0,3t)} + \frac{11500}{3}$$

Nước trong hồ vẫn an toàn khi chỉ khi

$$B(t) < 3000 \Leftrightarrow -\frac{10000}{3(1+0,3t)} + \frac{11500}{3} < 3000 \Leftrightarrow t < 10$$

Vậy kể từ ngày thứ 10, nước hồ không còn an toàn.

Câu 24: Ông An có một mảnh vườn hình elip có độ dài trục lớn bằng $16m$ và độ dài trục bé bằng $10m$. Ông muốn trồng hoa trên một dải đất rộng $8m$ và nhận trục bé của elip làm trục đối xứng (như hình vẽ). Biết kinh phí để trồng hoa là 100.000 đồng/ m^2 . Hỏi ông An cần bao nhiêu tiền để trồng hoa trên dải đất đó? (Số tiền được làm tròn đến hàng nghìn).



A. 7.862.000 đồng. **B.** 7.653.000 đồng. **C.** 7.128.000 đồng. **D.** 7.826.000 đồng.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Giả sử elip có phương trình $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, với $a > b > 0$.

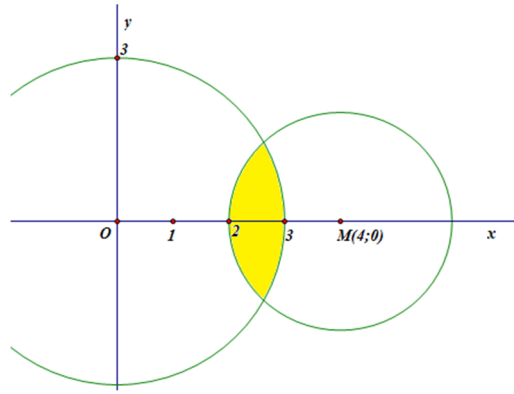
Từ giả thiết ta có $2a = 16 \Rightarrow a = 8$ và $2b = 10 \Rightarrow b = 5$

Câu 25: Trên cánh đồng cỏ có 2 con bò được cột vào 2 cây cọc khác nhau. Biết khoảng cách giữa 2 cọc là 4 mét còn 2 sợi dây cột 2 con bò dài 3 mét và 2 mét. Tính phần diện tích mặt cỏ lớn nhất mà 2 con bò có thể ăn chung (lấy giá trị gần đúng nhất).

A. $1,034 m^2$ **B.** $1,574 m^2$ **C.** $1,989 m^2$ **D.** $2,824 m^2$

Hướng dẫn giải

Diện tích mặt cỏ ăn chung sẽ lớn nhất khi 2 sợi dây được kéo căng và là phần giao của 2 đường tròn.



Xét hệ trục tọa độ như hình vẽ, gọi O, M là vị trí của cọc. Bài toán đưa về tìm diện tích phần được tô màu.

Ta có phương trình đường tròn tâm $(O): x^2 + y^2 = 3^2$ và phương trình đường tròn tâm $(M): (x-4)^2 + y^2 = 2^2$

Phương trình các đường cong của đường tròn nằm phía trên trục Ox là: $y = \sqrt{9-x^2}$ và $y = \sqrt{4-(x-4)^2}$

Phương trình hoành độ giao điểm: $\sqrt{4-(x-4)^2} = \sqrt{9-x^2} \Leftrightarrow 4+8x-16=9 \Leftrightarrow x = \frac{21}{8}$

Diện tích phần được tô màu là: $S = 2 \left[\int_2^{\frac{21}{8}} \sqrt{4-(x-4)^2} dx + \int_{\frac{21}{8}}^3 \sqrt{9-x^2} dx \right] \approx 1,989$. Ta có thể

giải tích phân này bằng phép thế lượng giác, tuy nhiên để tiết kiệm thời gian nên bấm máy. Chọn **C**.

Vậy phương trình của elip là $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{25} = 1 \Rightarrow \begin{cases} y = -\frac{5}{8}\sqrt{64-y^2} & (E_1) \\ y = \frac{5}{8}\sqrt{64-y^2} & (E_2) \end{cases}$

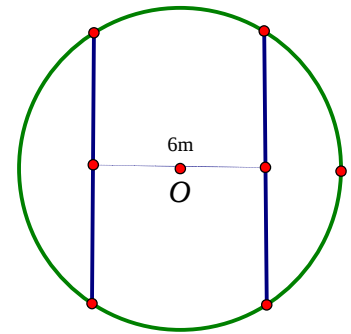
Khi đó diện tích dải vườn được giới hạn bởi các đường $(E_1); (E_2); x = -4; x = 4$ và diện

tích của dải vườn là $S = 2 \int_{-4}^4 \frac{5}{8} \sqrt{64-x^2} dx = \frac{5}{2} \int_0^4 \sqrt{64-x^2} dx$

Tính tích phân này bằng phép đổi biến $x = 8 \sin t$, ta được $S = 80 \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right)$

Khi đó số tiền là $T = 80 \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right) \cdot 100000 = 7652891,82 \approx 7.653.000$.

Câu 26: Một mảnh vườn hình tròn tâm O bán kính $6m$. Người ta cần trồng cây trên dải đất rộng $6m$ nhận O làm tâm đối xứng, biết kinh phí trồng cây là 70000 đồng/ m^2 . Hỏi cần bao nhiêu tiền để trồng cây trên dải đất đó (số tiền được làm tròn đến hàng đơn vị)



- A. 8412322 đồng. B. 8142232 đồng.
C. 4821232 đồng. D. 4821322 đồng.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Xét hệ trục tọa độ oxy đặt vào tâm khu vườn, khi đó phương trình đường tròn tâm O là

$x^2 + y^2 = 36$. Khi đó phần nửa cung tròn phía trên trục Ox có phương trình

$$y = \sqrt{36 - x^2} = f(x)$$

Khi đó diện tích S của mảnh đất bằng 2 lần diện tích hình phẳng giới hạn bởi trục hoành, đồ thị $y = f(x)$ và hai đường thẳng $x = -3$; $x = 3$

$$\Rightarrow S = 2 \int_{-3}^3 \sqrt{36 - x^2} dx$$

Đặt $x = 6 \sin t \Rightarrow dx = 6 \cos t dt$. Đổi cận: $x = -3 \Rightarrow t = -\frac{\pi}{6}$; $x = 3 \Rightarrow t = \frac{\pi}{6}$

$$\Rightarrow S = 2 \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} 36 \cos^2 t dt = 36 \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} (\cos 2t + 1) dt = 18(\sin 2t + 2t) \Big|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} = 18\sqrt{3} + 12\pi$$

Do đó số tiền cần dùng là $70000.S \approx 4821322$ đồng

Câu 27: Một thùng rượu có bán kính các đáy là $30cm$, thiết diện vuông góc với trục và cách đều hai đáy có bán kính là $40cm$, chiều cao thùng rượu là $1m$ (hình vẽ). Biết rằng mặt phẳng chứa trục và cắt mặt xung quanh thùng rượu là các đường parabol, hỏi thể tích của thùng rượu (đơn vị lít) là bao nhiêu?



A. 425,2 lit.

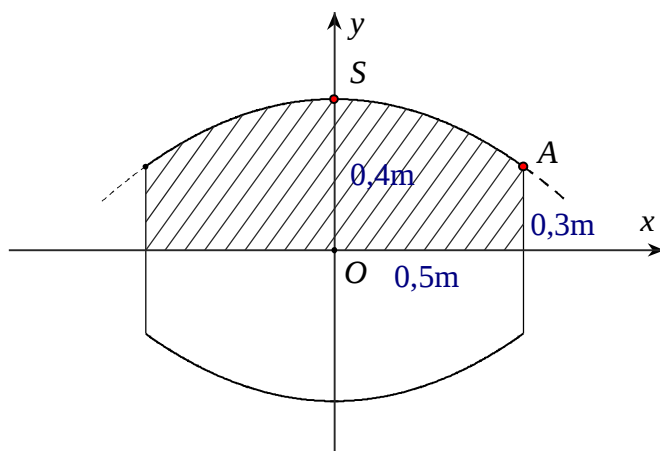
B. 425162 lit.

C. 212581 lit.

D. 212,6 lit.

Hướng dẫn giải

Chọn A.



- Gọi $(P): y = ax^2 + bx + c$ là parabol đi qua điểm $A(0,5; 0,3)$ và có đỉnh $S(0; 0,4)$ (hình vẽ). Khi đó, thể tích thùng rượu bằng thể tích khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi (P) , trục hoành và hai đường thẳng $x = \pm 0,5$ quay quanh trục Ox .

- Dễ dàng tìm được $(P): y = -\frac{2}{5}x^2 + 0,4$

- Thể tích thùng rượu là:

$$V = \pi \int_{-0,5}^{0,5} \left(-\frac{2}{5}x^2 + 0,4 \right)^2 dx = 2\pi \int_0^{0,5} \left(-\frac{2}{5}x^2 + 0,4 \right)^2 dx = \frac{203\pi}{1500} \approx 425,5 \text{ (l)}$$

Câu 28: Một bồn hình trụ đang chứa dầu, được đặt nằm ngang, có chiều dài bồn là 5m, có bán kính đáy 1m, với nắp bồn đặt trên mặt nằm ngang của mặt trụ. Người ta đã rút dầu trong bồn tương ứng với 0,5m của đường kính đáy. Tính thể tích gần đúng nhất của khối dầu còn lại trong bồn (theo đơn vị m^3)

A. 11,781 m^3 .

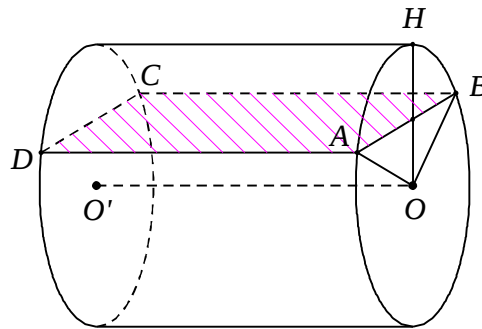
B. 12,637 m^3 .

C. 114,923 m^3 .

D. 8,307 m^3 .

Hướng dẫn giải

Chọn B.



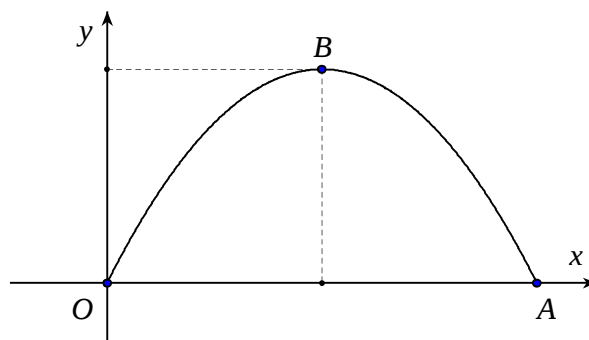
- Thể tích của bồn (hình trụ) đựng dầu là: $V = \pi r^2 h = \pi \cdot 1^2 \cdot 5 = 5\pi \text{ (m}^3\text{)}$
- Thể tích phần đã rút dầu ra (phần trên mặt (ABCD)) là: $V_1 = \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) \cdot 5 \approx 3,070 \text{ (m}^3\text{)}$
- Vậy thể tích cần tìm là: $V_2 = V - V_1 = 5\pi - 3,07 \approx 12,637 \text{ (m}^3\text{)}$.

Câu 29: Bác Năm làm một cái cửa nhà hình parabol có chiều cao từ mặt đất đến đỉnh là 2,25 mét, chiều rộng tiếp giáp với mặt đất là 3 mét. Giá thuê mỗi mét vuông là 1500000 đồng. Vậy số tiền bác Năm phải trả là:

- A.** 33750000 đồng. **B.** 12750000 đồng. **C.** 6750000 đồng. **D.** 3750000 đồng.

Hướng dẫn giải

Chọn C.



- Gắn parabol (P) và hệ trục tọa độ sao cho (P) đi qua $O(0;0)$

- Gọi phương trình của parabol là $(P): (P): y = ax^2 + bx + c$

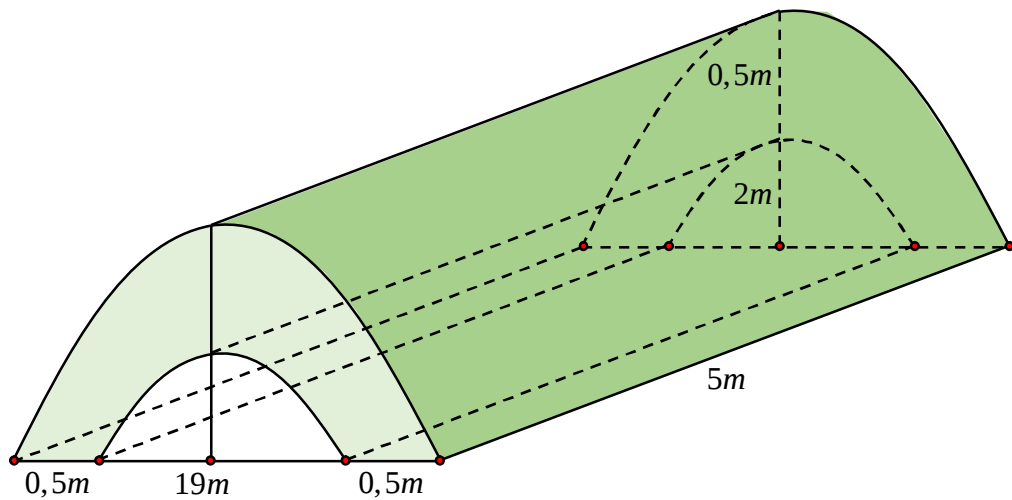
Theo đề ra, (P) đi qua ba điểm $O(0;0)$, $A(3;0)$, $B(1,5; 2,25)$.

Từ đó, suy ra $(P): y = -x^2 + 3x$

- Diện tích phần Bác Năm xây dựng: $S = \int_0^3 |-x^2 + 3x| dx = \frac{9}{2}$

- Vậy số tiền bác Năm phải trả là: $\frac{9}{2} \cdot 1500000 = 6750000 \text{ (đồng)}$

Câu 30: Trong chương trình nông thôn mới, tại một xã X có xây một cây cầu bằng bê tông như hình vẽ. Tính thể tích khối bê tông để đổ đủ cây cầu. (Đường cong trong hình vẽ là các đường Parabol).



A. $19m^3$.

B. $21m^3$.

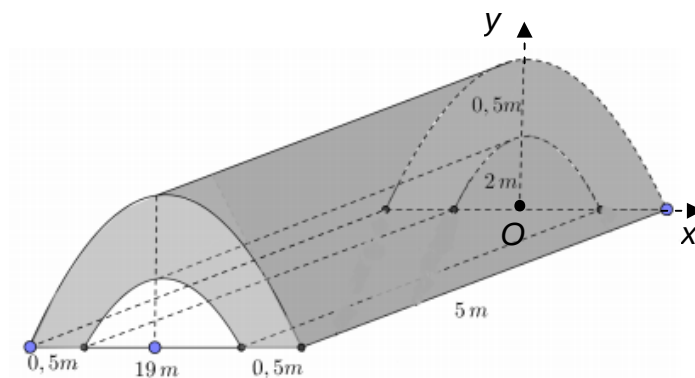
C. $18m^3$.

D. $40m^3$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Chọn hệ trục Oxy như hình vẽ.



Gọi $(P_1): y = ax^2 + c$ là Parabol đi qua hai điểm $A\left(\frac{19}{2}; 0\right), B(0; 2)$

Nên ta có hệ phương trình sau:
$$\begin{cases} 0 = a \cdot \left(\frac{19}{2}\right)^2 + 2 \\ 2 = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{8}{361} \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow (P_1): y = -\frac{8}{361}x^2 + 2$$

Gọi $(P_2): y = ax^2 + c$ là Parabol đi qua hai điểm $C(10; 0), D\left(0; \frac{5}{2}\right)$

Nên ta có hệ phương trình sau:
$$\begin{cases} 0 = a \cdot (10)^2 + \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{40} \\ b = \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow (P_2): y = -\frac{1}{40}x^2 + \frac{5}{2}$$

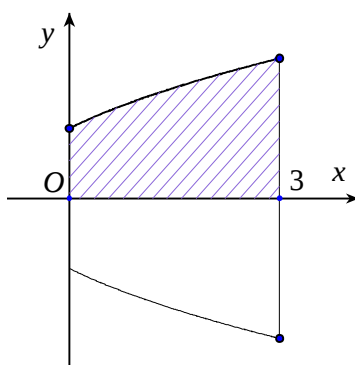
Ta có thể tích của bê tông là:
$$V = 5.2 \left[\int_0^{10} \left(-\frac{1}{40}x^2 + \frac{5}{2} \right) dx - \int_0^{\frac{19}{2}} \left(-\frac{8}{361}x^2 + 2 \right) dx \right] = 40m^3$$

Câu 31: Một Bác thợ gốm làm một cái lọ có dạng khối tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x+1}$ và trục Ox quay quanh trục Ox biết đáy lọ và miệng lọ có đường kính lần lượt là $2dm$ và $4dm$, khi đó thể tích của lọ là:

- A.** $8\pi \text{ dm}^2$. **B.** $\frac{15}{2}\pi \text{ dm}^3$. **C.** $\frac{14}{3}\pi \text{ dm}^2$. **D.** $\frac{15}{2} \text{ dm}^2$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.



- $r_1 = y_1 = 1 \Rightarrow x_1 = 0$
- $r_2 = y_2 = 2 \Rightarrow x_2 = 3$

Suy ra:
$$V = \pi \int_0^3 y^2 dx = \pi \int_0^3 (x+1) dx = \pi \left(\frac{x^2}{2} + x \right) \Big|_0^3 = \frac{15}{2}\pi$$

Câu 32: Hạt electron có điện tích âm là $1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$. Nếu tách hai hạt electron từ $1pm$ đến $4pm$ thì công W sinh ra là

- A.** $W = 3,194 \cdot 10^{-28} \text{ J}$. **B.** $W = 1,728 \cdot 10^{-16} \text{ J}$.
C. $W = 1,728 \cdot 10^{-28} \text{ J}$. **D.** $W = 3,194 \cdot 10^{-16} \text{ J}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

- Áp dụng công thức
$$A = \int_a^b \frac{kq_1 q_2}{x^2} dx.$$

Trong đó: $k = 9.10^9$; $a = 1 \text{ pm} = 10^{-12} \text{ m}$; $b = 4 \text{ pm} = 4.10^{-12} \text{ m}$; $q_1 = q_2 = 1,6.10^{-19} \text{ C}$

• Suy ra: $A = \int_{10^{-12}}^{4.10^{-12}} \frac{9.10^9 \cdot (1,6.10^{-19})^2}{x^2} dx = 2,304.10^{-28} \left(-\frac{1}{x} \right) \Big|_{10^{-12}}^{4.10^{-12}} = 1,728.10^{-16} \text{ J}.$

Câu 33: Trong mạch máy tính, cường độ dòng điện (đơn vị mA) là một hàm số theo thời gian t , với $I(t) = 0,3 - 0,2t$. Hỏi tổng điện tích đi qua một điểm trong mạch trong $0,05$ giây là bao nhiêu?

- A.** $0,29975 \text{ mC}.$ **B.** $0,29 \text{ mC}.$ **C.** $0,01525 \text{ mC}.$ **D.** $0,01475 \text{ mC}.$

Hướng dẫn giải

Chọn D.

$$q = \int_0^{0,05} I(t) dt = \int_0^{0,05} (0,3 - 0,2t) dt = \left(0,3t - \frac{t^2}{10} \right) \Big|_0^{0,05} = 0,01475 \text{ mC}.$$

Câu 34: Dòng điện xoay chiều hình sin chạy qua một đoạn mạch LC có biểu thức cường độ là $i(t) = I_0 \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$. Biết $i = q'$ với q là điện tích tức thời ở tụ điện. Tính từ lúc $t = 0$, điện lượng chuyển qua tiết diện thẳng của dây dẫn của đoạn mạch đó trong thời gian bằng $\frac{\pi}{\omega}$ là

- A.** $\frac{\pi\sqrt{2}I_0}{\omega}.$ **B.** $0.$ **C.** $\frac{2I_0}{\omega}.$ **D.** $\frac{\pi I_0}{\omega\sqrt{2}}.$

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Điện lượng chuyển qua tiết diện của dây dẫn của đoạn mạch trong thời gian từ 0 đến $\frac{\pi}{\omega}$ là

$$q = \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} i(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} I_0 \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) dt = \frac{I_0}{\omega} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \Big|_0^{\frac{\pi}{\omega}} = \frac{2I_0}{\omega}$$

Câu 35: Khi một chiếc lò xo bị kéo căng thêm $x(m)$ so với độ dài tự nhiên là $0,15(m)$ của lò xo thì chiếc lò xo trở lại (chống lại) với một lực $f(x) = 800x$. Hãy tìm công W sinh ra khi kéo lò xo từ độ dài từ $0,15(m)$ đến $0,18(m)$.

- A.** $W = 36.10^{-2} \text{ J}.$ **B.** $W = 72.10^{-2} \text{ J}.$ **C.** $W = 36 \text{ J}.$ **D.** $W = 72 \text{ J}.$

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Công được sinh ra khi kéo căng lò xo từ $0,15\text{m}$ đến $0,18\text{m}$ là:

$$W = \int_0^{0,03} 800x \cdot dx = 400x^2 \Big|_0^{0,03} = 36 \cdot 10^{-2} J.$$

Chú ý: Nếu lực là một giá trị biến thiên (như nén lò xo) và được xác định bởi hàm $F(x)$ thì công sinh ra theo trục Ox từ a tới b là $A = \int_a^b F(x) dx$.

Câu 36: Một dòng điện xoay chiều $i = I_0 \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right)$ chạy qua một mạch điện có điện trở thuần R . Hãy tính nhiệt lượng Q tỏa ra trên đoạn mạch đó trong thời gian một chu kì T .

A. $\frac{RI_0^2}{2}T$. **B.** $\frac{RI_0^2}{3}T$. **C.** $\frac{RI_0^2}{4}T$. **D.** $\frac{RI_0^2}{5}T$

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } Q &= \int_0^T Ri^2 dt = \int_0^T RI_0^2 \sin^2\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right) dt = RI_0^2 \int_0^T \frac{1 - \cos 2\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right)}{2} dt \\ &= \frac{RI_0^2}{2} \left(t - \frac{T}{4\pi} \sin 2\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right) \right) \Big|_0^T = \frac{RI_0^2}{2} T. \end{aligned}$$

Câu 37: Đặt vào một đoạn mạch hiệu điện thế xoay chiều $u = U_0 \sin \frac{2\pi}{T}t$. Khi đó trong mạch có dòng điện xoay chiều $i = I_0 \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right)$ với φ là độ lệch pha giữa dòng điện và hiệu điện thế. Hãy Tính công của dòng điện xoay chiều thực hiện trên đoạn mạch đó trong thời gian một chu kì.

A. $\frac{U_0 I_0}{2} \cos \varphi$. **B.** $\frac{U_0 I_0}{2} T \sin \varphi$. **C.** $\frac{U_0 I_0}{2} T \cos(\varphi + \pi)$. **D.** $\frac{U_0 I_0}{2} T \cos \varphi$

Lời giải

Ta có:

$$A = \int_0^T u i dt = \int_0^T U_0 I_0 \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right) \sin \frac{2\pi}{T}t dt = U_0 I_0 \int_0^T \frac{1}{2} \left(\cos \varphi - \cos\left(\frac{4\pi}{T}t + \varphi\right) \right) dt$$

$$= \frac{U_0 I_0}{2} \int_0^T \frac{1}{2} \left(\cos \varphi - \cos \left(\frac{4\pi}{T} t + \varphi \right) \right) dt$$

$$= \frac{U_0 I_0}{2} \left(t \cos \varphi - \frac{T}{4\pi} \sin \left(\frac{4\pi}{T} t + \varphi \right) \right) \Big|_0^T = \frac{U_0 I_0}{2} T \cos \varphi.$$

Hướng dẫn giải

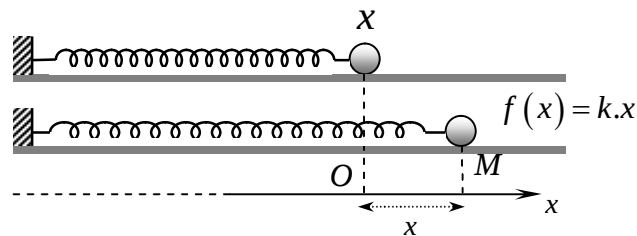
Chọn D.

Câu 38: Để kéo căng một lò xo có độ dài tự nhiên từ 10cm đến 15cm cần lực 40N . Tính công (A) sinh ra khi kéo lò xo có độ dài từ 15cm đến 18cm .

A. $A = 1,56 \text{ (J)}$. **B.** $A = 1 \text{ (J)}$. **C.** $A = 2,5 \text{ (J)}$. **D.** $A = 2 \text{ (J)}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.



Theo Định luật Hooke, lực cần dùng để giữ lò xo giãn thêm x mét từ độ dài tự nhiên là $f(x) = kx$, với $k(N/m)$ là độ cứng của lò xo. Khi lò xo được kéo giãn từ độ dài 10cm đến 15cm , lượng kéo giãn là $5\text{ cm} = 0,05\text{ m}$. Điều này có nghĩa $f(0,05) = 40$, do đó:

$$0,05k = 40 \Leftrightarrow k = \frac{40}{0,05} = 800 \text{ (N/m)}$$

Vậy $f(x) = 800x$ và công cần để kéo dãn lò xo từ 15cm đến 18cm là:

$$A = \int_{0,05}^{0,08} 800 dx = 400x^2 \Big|_{0,05}^{0,08} = 400 \left[(0,08)^2 - (0,05)^2 \right] = 1,56 \text{ (J)}$$

Câu 39: Một thanh AB có chiều dài là $2a$ ban đầu người ta giữ thanh ở góc nghiêng $\alpha = \alpha_0$, một đầu thanh tựa không ma sát với bức tường thẳng đứng. Khi buông thanh, nó sẽ trượt xuống dưới tác dụng của trọng lực. Hãy biểu diễn góc α theo thời gian t (Tính bằng công thức tính phân)

A. $t = - \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{d\alpha}{\sqrt{\frac{3}{2a}} (\sin \alpha_0 - \sin \alpha)}$.

B. $t = - \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{d\alpha}{\sqrt{\frac{3g}{2a}} (\sin \alpha_0 + \sin \alpha)}$.

C. $t = - \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{d\alpha}{\sqrt{\frac{3g}{a} (\sin \alpha_0 - \sin \alpha)}}$

D. $t = - \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{d\alpha}{\sqrt{\frac{3g}{2a} (\sin \alpha_0 - \sin \alpha)}}$

Hướng dẫn giải

Do trượt không ma sát nên cơ năng của thanh được bảo toàn

$$mga \sin \alpha_0 = mga \sin \alpha + K_q + K_t \quad (1)$$

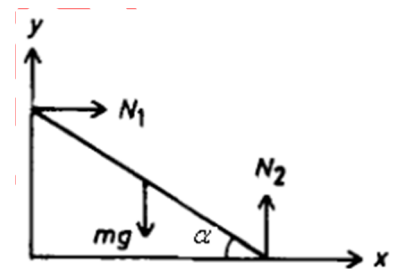
Do khối tâm chuyển động trên đường tròn tâm O bán kính a nên: $K_t = \frac{ma^2 \omega^2}{2} = \frac{1}{2} ma^2 \alpha'^2$

Động năng quay quanh khối tâm: $K_q = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{12} m(2a)^2 \alpha'^2 = \frac{1}{6} ma^2 \alpha'^2$

Thay vào (1) ta được: $\frac{2}{3} a \alpha'^2 = g(\sin \alpha_0 - \sin \alpha)$

$$\alpha' = - \sqrt{\frac{3g}{2a} (\sin \alpha_0 - \sin \alpha)}$$

$$t = - \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{d\alpha}{\sqrt{\frac{3g}{2a} (\sin \alpha_0 - \sin \alpha)}}$$



Chọn D.

Câu 40: Trong kinh tế học, thặng dư tiêu dùng của hàng hóa được tính bằng công thức

$$I = \int_0^a [p(x) - P] \cdot dx.$$

Với $p(x)$ là hàm biểu thị giá mà một công ty đưa ra để bán được x đơn vị hàng hóa. a là số lượng sản phẩm đã bán ra, $P = p(a)$ là mức giá bán ra ứng với số lượng sản phẩm là a .

Cho $p = 1200 - 0,2x - 0,0001x^2$, (đơn vị tính là USD). Tìm thặng dư tiêu dùng khi số lượng sản phẩm bán là 500.

A. 1108333,3 USD. **B.** 570833,3 USD. **C.** 33333,3 USD. **D.** Đáp án khác.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Áp dụng công thức trên với $a = 500$; $P = p(a) = p(500) = 1075$.

$$\text{Suy ra } I = \int_0^{500} (1200 - 0,2x - 0,0001x^2 - 1075) dx = \left(125x - \frac{x^2}{10} - \frac{x^3}{30000} \right) \Big|_0^{500} \approx 33333,3 \text{ USD}$$

Câu 41: Một khối cầu có bán kính $5dm$, người ta cắt bỏ 2 phần bằng 2 mặt phẳng vuông góc bán kính và cách tâm $3dm$ để làm một chiếc lu đựng. Tính thể tích mà chiếc lu chứa được.

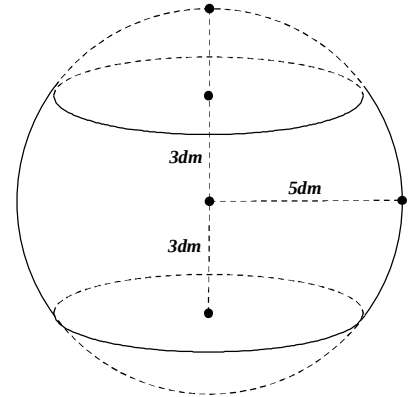
- A. $132\pi (dm^3)$. B. $41\pi (dm^3)$. C. $\frac{100}{3}\pi (dm^3)$. D. $43\pi (dm^3)$

Hướng dẫn giải:

Đặt hệ trục với tâm O , là tâm của mặt cầu; đường thẳng đứng là Ox , đường ngang là Oy ; đường tròn lớn có phương trình $x^2 + y^2 = 25$.

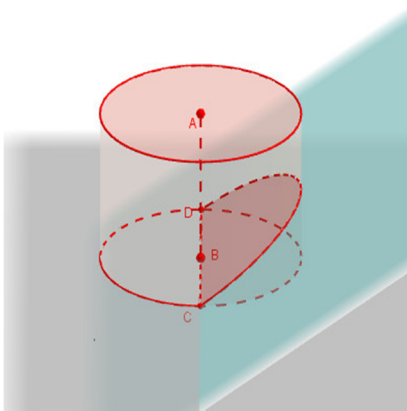
Thể tích là do hình giới hạn bởi Ox , đường cong $y = \sqrt{25 - x^2}$, $x = 3, x = -3$ quay quanh Ox .

$$V = \pi \int_{-3}^3 (25 - x^2) dx = 132\pi \text{ (bấm máy).}$$

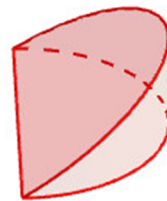


Chọn A.

Câu 42: Từ một khúc gỗ hình trụ có đường kính $30cm$, người ta cắt khúc gỗ bởi một mặt phẳng đi qua đường kính đáy và nghiêng với đáy một góc 45° để lấy một hình nêm (xem hình minh họa dưới đây)



Hình 1



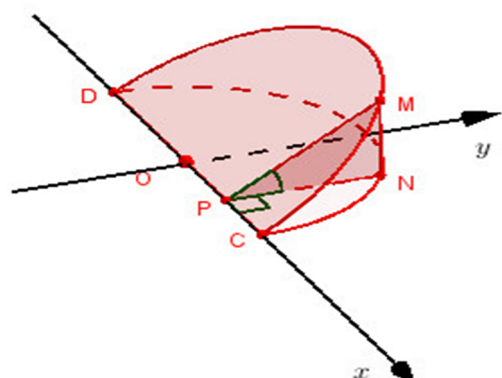
Hình 2

Kí hiệu V là thể tích của hình nêm (Hình 2). Tính V .

- A. $V = 2250 (cm^3)$. B. $V = \frac{225\pi}{4} (cm^3)$. C. $V = 1250 (cm^3)$. D. $V = 1350 (cm^3)$

Hướng dẫn giải

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ. Khi đó hình nêm có đáy



là nửa hình tròn có phương trình: $y = \sqrt{225 - x^2}, x \in [-15; 15]$

Một mặt phẳng cắt vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ $x, (x \in [-15; 15])$

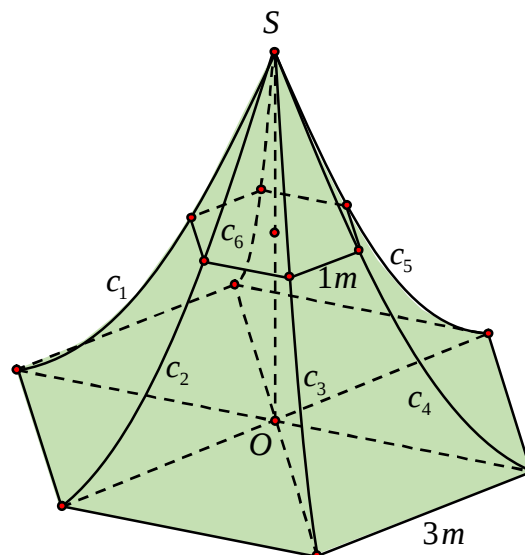
cắt hình nêm theo thiết diện có diện tích là $S(x)$ (xem hình).

Dễ thấy $NP = y$ và $MN = NP \tan 45^\circ = y = \sqrt{225 - x^2}$ khi đó

$$S(x) = \frac{1}{2} MN \cdot NP = \frac{1}{2} \cdot (225 - x^2) \text{ suy ra thể tích hình nêm là: } V = \int_{-15}^{15} S(x) dx \\ = \frac{1}{2} \int_{-15}^{15} (225 - x^2) dx = 2250 (cm^3).$$

Chọn A.

Câu 43: Người ta dựng một cái lều vải (H) có dạng hình “chóp lục giác cong đều” như hình vẽ bên. Đáy của (H) là một hình lục giác đều cạnh $3m$. Chiều cao $SO = 6m$ (SO vuông góc với mặt phẳng đáy). Các cạnh bên của (H) là các sợi dây $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$ nằm trên các đường parabol có trục đối xứng song song với SO . Giả sử giao tuyến (nếu có) của (H) với mặt phẳng (P) vuông góc với SO là một lục giác đều và khi (P) qua trung điểm của SO thì lục giác đều có cạnh $1m$. Tính thể tích phần không gian nằm bên trong cái lều (H) đó.



A. $\frac{135\sqrt{3}}{5} (m^3).$

B. $\frac{96\sqrt{3}}{5} (m^3).$

C. $\frac{135\sqrt{3}}{4} (m^3).$

D. $\frac{135\sqrt{3}}{8} (m^3).$

Hướng dẫn giải

Đặt **hệ** trục tọa độ như hình vẽ, ta có parabol cần tìm đi qua 3 điểm có tọa độ lần lượt là

$A(0;6), B(1;3), C(3;0)$ nên có phương trình là $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{2}x + 6$

Theo **hình** vẽ ta có cạnh của “**thiết diện lục giác**” là

BM . Nếu ta đặt $t = OM$ thì $BM = \frac{7}{2} - \sqrt{2t + \frac{1}{4}}$ (chú

ý là ta phải lấy giá trị có dấu “ $-$ ” trước dấu căn và cho B chạy từ C đến A).

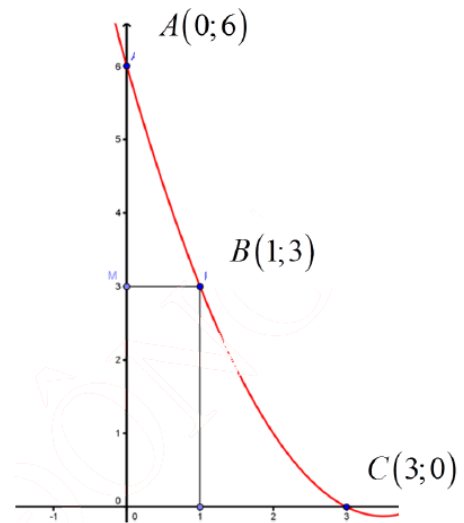
Khi đó, diện **tích** của “**thiết diện lục giác**” bằng

$$S(t) = 6 \cdot \frac{BM^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \left(\frac{7}{2} - \sqrt{2t + \frac{1}{4}} \right)^2 \text{ với}$$

$$t \in [0;6].$$

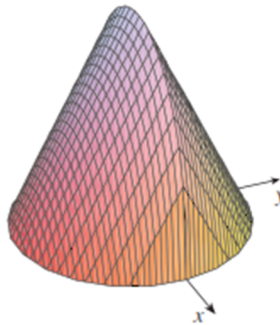
Vậy thể tích của “túp lều” theo đề bài là:

$$V = \int_0^6 S(t) dt = \int_0^6 \frac{3\sqrt{3}}{2} \left(\frac{7}{2} - \sqrt{2t + \frac{1}{4}} \right)^2 dt = \dots = \frac{135\sqrt{3}}{8}$$



Chọn D.

Câu 44: Một vật có kích thước và hình dáng như hình vẽ dưới đây. Đáy là hình tròn bán kính 4 cắt vật bởi các mặt phẳng vuông góc với trục Ox ta được thiết diện là tam giác đều. Thể tích của vật thể là:



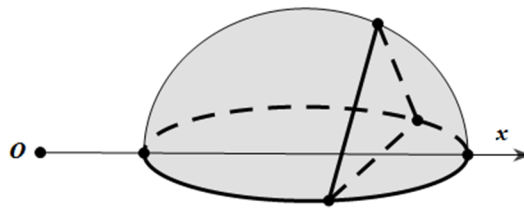
A. $V = \frac{256}{3}.$

B. $V = \frac{64}{3}.$

C. $V = \frac{256\sqrt{3}}{3}.$

D. $V = \frac{32\sqrt{3}}{3}.$

Hướng dẫn giải



Chọn tâm đường tròn làm gốc.

$$\text{Diện tích thiết diện là } S = \frac{\sqrt{3}}{4} AB^2 = \sqrt{3}(4 - x^2)$$

$$V = \int_{-2}^2 S(x)dx = \sqrt{3} \int_{-2}^2 (4 - x^2)dx = \frac{32\sqrt{3}}{3}.$$

Chọn D.

Câu 45: Một người có mảnh đất hình tròn có bán kính 5m, người này tính trồng cây trên mảnh đất đó, biết mỗi mét vuông trồng cây thu hoạch được giá 100 nghìn. Tuy nhiên cần có khoảng trống để dựng chòi và đồ dùng nên người này căng sợi dây 6m sao cho 2 đầu mút dây nằm trên đường tròn xung quanh mảnh đất. Hỏi người này thu hoạch được bao nhiêu tiền (tính theo đơn vị nghìn và bỏ phần số thập phân).

A. 3722.

B. 7445.

C. 7446.

D. 3723

Hướng dẫn giải

Đặt hệ trục tọa độ 4349582 như hình vẽ.

Phương trình đường tròn của miếng đất sẽ là $x^2 + y^2 = 25$

Diện tích cần tính sẽ bằng 2 lần diện tích phần tô đậm phía trên.

Phần tô đậm được giới hạn bởi đường cong có

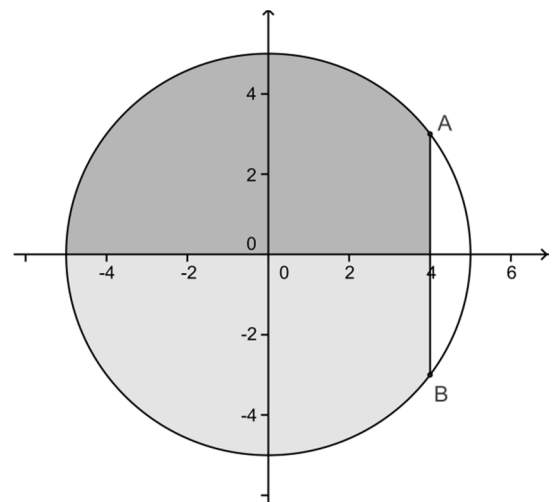
phương trình là $y = \sqrt{25 - x^2}$, trục

Ox ; $x = -5$; $x = 4$ (trong đó giá trị 4 có được dựa vào bán kính bằng 5 và độ dài dây cung bằng 6)

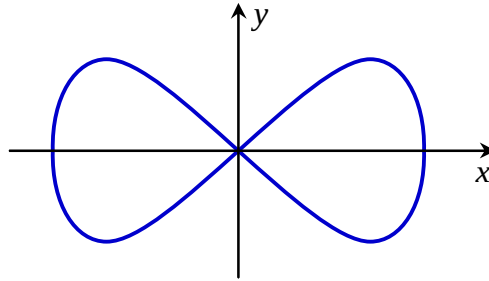
Vậy diện tích cần tính là

$$S = 2 \int_{-5}^4 \sqrt{25 - x^2} dx \approx 74,45228...$$

Chọn B.



Câu 46: Trong Công viên Toán học có những mảnh đất mang hình dáng khác nhau. Mỗi mảnh được trồng một loài hoa và nó được tạo thành bởi một trong những đường cong đẹp trong toán học. Ở đó có một mảnh đất mang tên Bernoulli, nó được tạo thành từ đường Lemniscate có phương trình trong hệ tọa độ Oxy là $16y^2 = x^2(25 - x^2)$ như hình vẽ bên.



Tính diện tích S của mảnh đất Bernoulli biết rằng mỗi đơn vị trong hệ tọa độ Oxy tương ứng với chiều dài 1 mét.

A. $S = \frac{125}{6} (m^2)$ **B.** $S = \frac{125}{4} (m^2)$ **C.** $S = \frac{250}{3} (m^2)$ **D.** $S = \frac{125}{3} (m^2)$

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Vì tính đối xứng trục nên diện tích của mảnh đất tương ứng với 4 lần diện tích của mảnh đất thuộc góc phần tư thứ nhất của hệ trục tọa độ Oxy .

Từ giả thuyết bài toán, ta có $y = \pm \frac{1}{4}x\sqrt{25 - x^2}$.

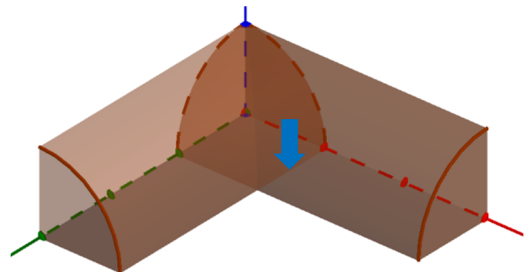
Góc phần tư thứ nhất $y = \frac{1}{4}x\sqrt{25 - x^2}; x \in [0; 5]$

$$\text{Nên } S_{(I)} = \frac{1}{4} \int_0^5 x\sqrt{25 - x^2} dx = \frac{125}{12} \Rightarrow S = \frac{125}{3} (m^2)$$

Câu 47: Gọi (H) là phần giao của hai khối $\frac{1}{4}$ hình trụ có bán kính a , hai trục hình trụ vuông góc với nhau. Xem hình vẽ bên. Tính thể tích của (H) .

A. $V_{(H)} = \frac{2a^3}{3}$ **B.** $V_{(H)} = \frac{3a^3}{4}$

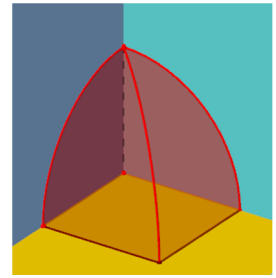
C. $V_{(H)} = \frac{a^3}{2}$ **D.** $V_{(H)} = \frac{\pi a^3}{4}$



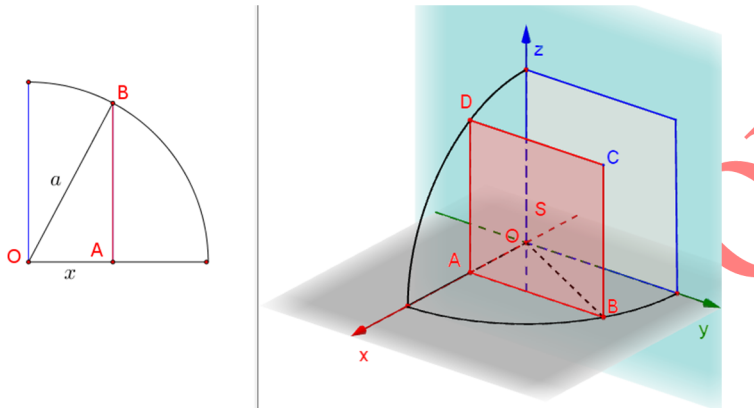
Hướng dẫn giải

Chọn A.

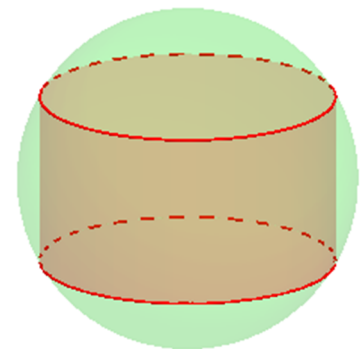
Ta gọi trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ. Khi đó phần giao (H) là một vật thể có đáy là một phần tư hình tròn tâm O bán kính a , thiết diện của mặt phẳng vuông góc với trục Ox là một hình vuông có diện tích $S(x) = a^2 - x^2$



$$\text{Thể tích khối } (H) \text{ là } \int_0^a S(x) dx = \int_0^a (a^2 - x^2) dx = \frac{2a^3}{3}.$$



Câu 48: Một khối cầu có bán kính là $5(dm)$, người ta cắt bỏ hai phần của khối cầu bằng hai mặt phẳng song song cùng vuông góc đường kính và cách tâm một khoảng $3(dm)$ để làm một chiếc lu đựng nước (như hình vẽ). Tính thể tích mà chiếc lu chứa được.



- A. $\frac{100}{3}\pi(dm^3)$ B. $\frac{43}{3}\pi(dm^3)$ C. $41\pi(dm^3)$ D. $132\pi(dm^3)$

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Cách 1: Trên hệ trục tọa độ Oxy , xét đường tròn $(C): (x-5)^2 + y^2 = 25$. Ta thấy nếu cho nửa trên trục Ox của (C) quay quanh trục Ox ta được mặt cầu bán kính bằng 5. Nếu cho hình phẳng (H) giới hạn bởi nửa trên trục Ox của (C) , trục Ox , hai đường thẳng $x=0, x=2$ quay xung quanh trục Ox ta sẽ được khối tròn xoay chính là phần cắt đi của khối cầu trong đề bài.

$$\text{Ta có } (x-5)^2 + y^2 = 25 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{25-(x-5)^2}$$

$\Rightarrow$ Nửa trên trục Ox của (C) có phương trình $y = \sqrt{25 - (x-5)^2} = \sqrt{10x - x^2}$

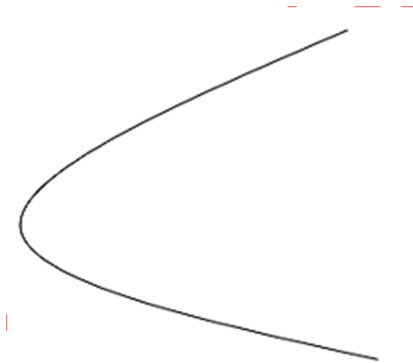
$\Rightarrow$ Thể tích vật thể tròn xoay khi cho (H) quay quanh Ox là:

$$V_1 = \pi \int_0^2 (10x - x^2) dx = \pi \left(5x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^2 = \frac{52\pi}{3}$$

$$\text{Thể tích khối cầu là: } V_2 = \frac{4}{3} \pi \cdot 5^3 = \frac{500\pi}{3}$$

$$\text{Thể tích cần tìm: } V = V_2 - 2V_1 = \frac{500\pi}{3} - 2 \cdot \frac{52\pi}{3} = 132\pi \text{ (dm}^3\text{)}$$

Câu 49: Một cái chuông có dạng như hình vẽ. Giả sử khi cắt chuông bởi mặt phẳng qua trục của chuông, được thiết diện có đường viền là một phần parabol (hình vẽ). Biết chuông cao 4m, và bán kính của miệng chuông là $2\sqrt{2}$. Tính thể tích chuông?



A. 6π

B. 12π

C. $2\pi^3$

D. 16π

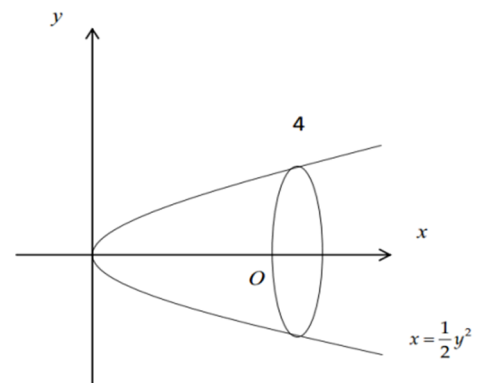
Hướng dẫn giải

Xét hệ trục như hình vẽ, dễ thấy parabol đi qua ba điểm $(0;0), (4;2\sqrt{2}), (4;-2\sqrt{2})$ nên có phương trình

$x = \frac{y^2}{2}$. Thể tích của chuông là thể tích của khối tròn

xoay tạo bởi hình phẳng $y = \sqrt{2}x, x = 0, x = 4$ quay quanh trục Ox . Do đó

$$\text{Ta có } V = \pi \int_0^4 2x dx = \left(\pi x^2 \right) \Big|_0^4 = 16\pi$$



Câu 50: Một mảnh vườn hình tròn tâm O bán kính $6m$. Người ta cần trồng cây trên dải đất rộng $6m$ nhận O làm tâm đối xứng, biết kinh phí trồng cây là 70000 đồng/ m^2 Hỏi cần bao nhiêu tiền để trồng cây trên dải đất đó (số tiền được làm tròn đến hàng đơn vị)

- A.** 8412322 đồng. **B.** 8142232 đồng. **C.** 4821232 đồng. **D.** 4821322 đồng

Hướng dẫn giải

Xét hệ trục tọa độ oxy đặt vào tâm khu vườn, khi đó phương trình đường tròn tâm O là

$x^2 + y^2 = 36$. Khi đó phần nửa cung tròn phía trên trục Ox có phương trình
 $y = \sqrt{36 - x^2} = f(x)$

Khi đó diện tích S của mảnh đất bằng 2 lần diện tích hình phẳng giới hạn bởi trục hoành, đồ thị $y = f(x)$ và hai đường thẳng $x = -3$; $x = 3$

$$\Rightarrow S = 2 \int_{-3}^3 \sqrt{36 - x^2} dx$$

Đặt $x = 6 \sin t \Rightarrow dx = 6 \cos t dt$. Đổi cận: $x = -3 \Rightarrow t = -\frac{\pi}{6}$; $x = 3 \Rightarrow t = \frac{\pi}{6}$

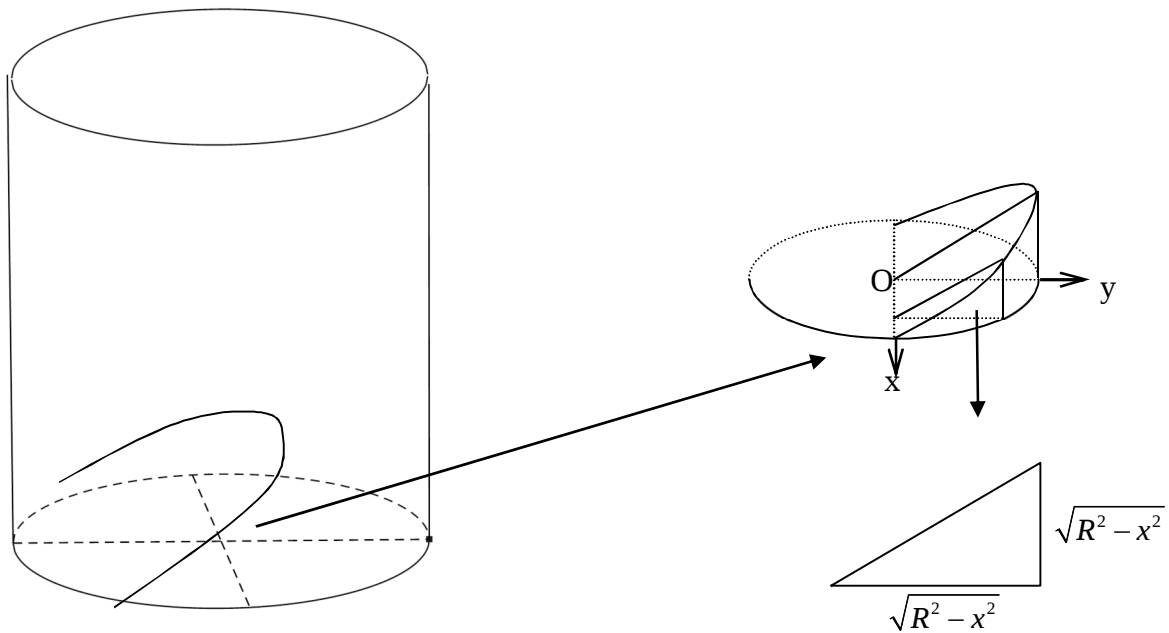
$$\Rightarrow S = 2 \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} 36 \cos^2 t dt = 36 \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} (\cos 2t + 1) dt = 18(\sin 2t + 2t) \Big|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} = 18\sqrt{3} + 12\pi$$

Do đó số tiền cần dùng là 70000.S $\approx$ 4821322 đồng

Câu 51: Cho một vật thể bằng gỗ có dạng khối trụ với bán kính đáy bằng R. Cắt khối trụ bởi một mặt phẳng có giao tuyến với đáy là một đường kính của đáy và tạo với đáy góc 45° . Thể tích của khối gỗ bé là:

- A.** $V = \frac{2R^3}{3}$. **B.** $V = \frac{\pi R^3}{6}$. **C.** $V = \frac{R^3}{3}$. **D.** $V = \frac{\pi R^3}{3}$.

Hướng dẫn giải



Chọn hệ trục Oxy như hình vẽ. Cắt khối gỗ bé bởi các mặt phẳng vuông góc với Ox tại điểm có hoành độ x ta được thiết diện là tam giác vuông có diện tích bằng $A(x) = \frac{1}{2}\sqrt{R^2 - x^2}$.

Vậy thể tích khối gỗ bé bằng: $V = \int_{-R}^R \frac{1}{2}\sqrt{R^2 - x^2} = \frac{2R^3}{3}$.

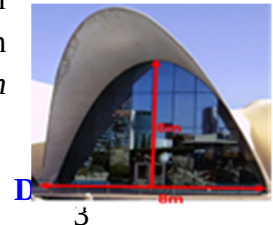
Chọn A.

Câu 52: Vòm cửa lớn của một trung tâm văn hoá có dạng hình Parabol. Người ta dự định lắp cửa kính cường lực cho vòm cửa này. Hãy tính diện tích mặt kính cần lắp vào biết rằng vòm cửa cao 8m và rộng 8m (như hình vẽ)

A. $\frac{28}{3}(m^2)$

B. $\frac{26}{3}(m^2)$

C. $\frac{128}{3}(m^2)$



Hướng dẫn giải:

Đáp án đúng: C

Các phương án nhiễu:

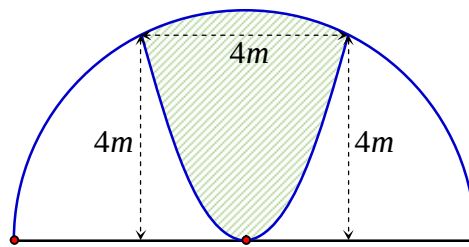
A. HS tính tích phân sai $S = \int_{-4}^4 \left| -\frac{1}{2}x^2 + 8 \right| dx = \frac{28}{3} (m^2)$

B. HS tính tích phân sai $S = \int_{-4}^4 \left| -\frac{1}{2}x^2 + 8 \right| dx = \frac{26}{3} (m^2)$

D. HS nhầm $a = -\frac{1}{2}$, $b = 8$, $c = 0 \Rightarrow S = \int_{-4}^4 \left| -\frac{1}{2}x^2 + 8x \right| dx = \frac{131}{3} (m^2)$

Câu 53: Một khuôn viên dạng nửa hình tròn có đường kính bằng $4\sqrt{5}$ (m). Trên đó người thiết kế hai phần để trồng hoa có dạng của một cánh hoa hình parabol có đỉnh trùng với tâm nửa hình tròn và hai đầu mút của cánh hoa nằm trên nửa đường tròn (phần tô màu), cách nhau một khoảng bằng 4(m), phần còn lại của khuôn viên (phần không tô màu) dành để trồng cỏ Nhật Bản.

Biết các kích thước cho như hình vẽ và kinh phí để trồng cỏ Nhật Bản là 100.000 đồng/m². Hỏi cần bao nhiêu tiền để trồng cỏ Nhật Bản trên phần đất đó? (Số tiền được làm tròn đến hàng nghìn)



- A.** 3.895.000 (đồng). **B.** 1.948.000 (đồng). **C.** 2.388.000 (đồng). **D.** 1.194.000 (đồng).

Hướng dẫn giải:

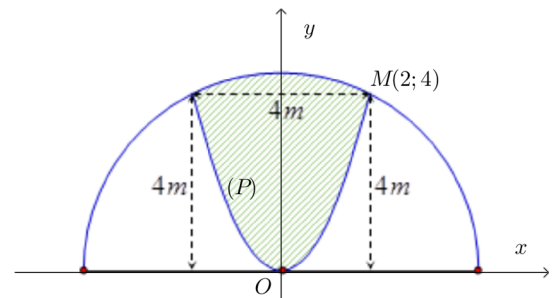
Chọn B

Đặt hệ trục tọa độ như hình vẽ. Khi đó phương trình nửa đường tròn là

$$y = \sqrt{R^2 - x^2} = \sqrt{(2\sqrt{5})^2 - x^2} = \sqrt{20 - x^2}.$$

Phương trình parabol (P) có đỉnh là gốc O sẽ có dạng $y = ax^2$. Mặt khác (P) qua điểm

$$M(2;4) \text{ do đó: } 4 = a(-2)^2 \Rightarrow a = 1.$$



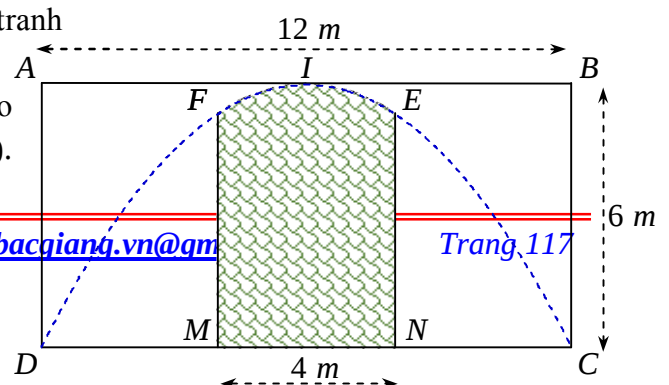
Phần diện tích của hình phẳng giới hạn bởi (P) và nửa đường tròn.(phần tô màu)

$$\text{Ta có công thức } S_1 = \int_{-2}^2 (\sqrt{20 - x^2} - x^2) dx \approx 11,94m^2.$$

$$\text{Vậy phần diện tích trồng cỏ là } S_{\text{trong cỏ}} = \frac{1}{2} S_{\text{hình tròn}} - S_1 \approx 19,47592654$$

$$\text{Vậy số tiền cần có là } S_{\text{trong cỏ}} \times 100000 \approx 1.948.000 \text{ (đồng).đồng.}$$

Câu 54: Một công ty quảng cáo X muốn làm một bức tranh trang trí hình MNEIF ở chính giữa của một bức tường hình chữ nhật ABCD có chiều cao $BC = 6$ m, chiều dài $CD = 12$ m (hình vẽ bên).

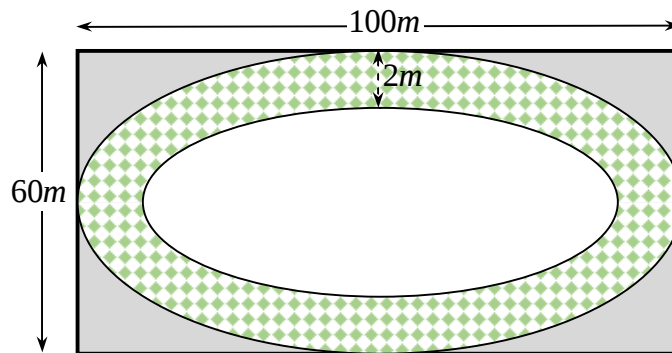


Cho biết $MNEF$ là hình chữ nhật có $MN = 4\text{ m}$; cung EIF có hình dạng là một phần của cung parabol có đỉnh I là trung điểm của cạnh AB và đi qua hai điểm C, D . Kinh phí làm bức tranh là $900.000\text{ đồng}/\text{m}^2$.

Hỏi công ty X cần bao nhiêu tiền để làm bức tranh đó?

A. 20.400.000 đồng. **B.** 20.600.000 đồng. **C.** 20.800.000 đồng. **D.** 21.200.000 đồng.

Câu 55: Một sân chơi cho trẻ em hình chữ nhật có chiều dài 100 và chiều rộng là 60m người ta làm một con đường nằm trong sân (như hình vẽ). Biết rằng viền ngoài và viền trong của con đường là hai đường elip, Elip của đường viền ngoài có trục lớn và trục bé lần lượt song song với các cạnh hình chữ nhật và chiều rộng của mặt đường là 2m . Kinh phí cho mỗi m^2 làm đường 600.000 đồng. Tính tổng số tiền làm con đường đó. (Số tiền được làm tròn đến hàng nghìn).



A. 293904000. **B.** 283904000. **C.** 293804000. **D.** 283604000.

Hướng dẫn giải:

Chọn **A.**

Xét hệ trục tọa độ Oxy đặt gốc tọa độ O vào tâm của hình Elip.

Phương trình Elip của đường viền ngoài của con đường là $(E_1): \frac{x^2}{50^2} + \frac{y^2}{30^2} = 1$. Phần đồ thị

của (E_1) nằm phía trên trục hoành có phương trình $y = 30\sqrt{1 - \frac{x^2}{50^2}} = f_1(x)$.

Phương trình Elip của đường viền trong của con đường là $(E_2): \frac{x^2}{48^2} + \frac{y^2}{28^2} = 1$. Phần đồ thị

của (E_2) nằm phía trên trục hoành có phương trình $y = 28\sqrt{1 - \frac{x^2}{48^2}} = f_2(x)$.

Gọi S_1 là diện tích của (E_1) và bằng hai lần diện tích phần hình phẳng giới hạn bởi trục hoành và đồ thị hàm số $y = f_1(x)$. Gọi S_2 là diện tích của (E_2) và bằng hai lần diện tích phần hình phẳng giới hạn bởi trục hoành và đồ thị hàm số $y = f_2(x)$.

Gọi S là diện tích con đường. Khi đó

$$S = S_1 - S_2 = 2 \int_{-50}^{50} 30 \sqrt{1 - \frac{x^2}{50^2}} dx - 2 \int_{-48}^{48} 28 \sqrt{1 - \frac{x^2}{48^2}} dx.$$

$$\text{Tính tích phân } I = 2 \int_{-a}^a b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx, (a, b \in \mathbb{R}^+).$$

$$\text{Đặt } x = a \sin t, \left(-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow dx = a \cos t dt.$$

$$\text{Đổi cận } x = -a \Rightarrow t = -\frac{\pi}{2}; x = a \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{Khi đó } I = 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} b \sqrt{1 - \sin^2 t} \cdot a \cos t dt = 2ab \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = ab \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt$$

$$= ab \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = ab\pi.$$

$$\text{Do đó } S = S_1 - S_2 = 50.30\pi - 48.28\pi = 156\pi.$$

Vậy tổng số tiền làm con đường đó là $600000.S = 600000.156\pi \approx 294053000$ (đồng).

Câu 56: Có một vật thể là hình tròn xoay có dạng giống như một cái ly như hình vẽ dưới đây. Người ta đo được đường kính của miệng ly là 4cm và chiều cao là 6cm . Biết rằng thiết diện của chiếc ly cắt bởi mặt phẳng đối xứng là một parabol. Tính thể tích $V(\text{cm}^3)$ của vật thể đã cho.

A. $V = 12\pi$.

B. $V = 12$.

C. $V = \frac{72}{5}\pi$.

D. $V = \frac{72}{5}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Chọn gốc tọa độ O trùng với đỉnh I của parabol (P) . Vì parabol (P) đi qua các điểm $A(-2;6), B(2;6)$ và $I(0;0)$ nên parabol (P) có phương trình $y = \frac{3}{2}x^2$.

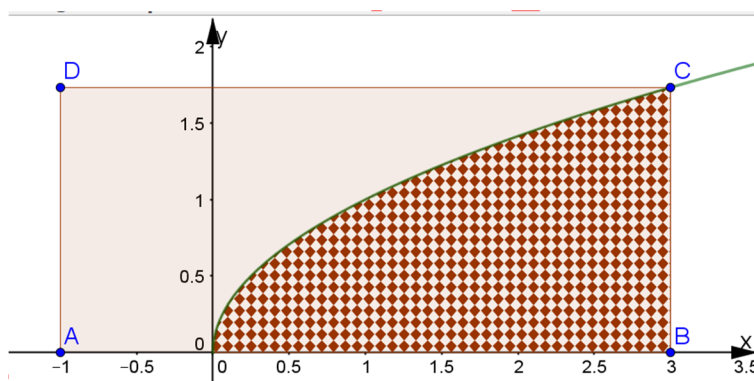
Ta có $y = \frac{3}{2}x^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{2}{3}y$. Khi đó thể tích của vật thể đã cho là

$$V = \pi \int_0^6 \left(\frac{2}{3}y \right) dy = 12\pi (cm^3).$$

Câu 57: Trong mặt phẳng tọa độ, cho hình chữ nhật (H) có một cạnh nằm trên trục hoành, và có hai đỉnh trên một đường chéo là $A(-1;0)$ và $B(a;\sqrt{a})$, với $a > 0$. Biết rằng đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$ chia hình (H) thành hai phần có diện tích bằng nhau, tìm a .

- A.** $a = 9$. **B.** $a = 4$. **C.** $a = \frac{1}{2}$. **D.** $a = 3$.

Hướng dẫn giải:

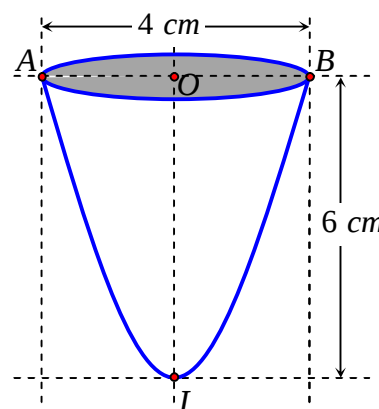


Chọn D.

Gọi $ACBD$ là hình chữ nhật với AC nằm trên trục Ox , $A(-1;0)$ và $B(a;\sqrt{a})$

Nhận thấy đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$ cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 0 và đi qua $B(a;\sqrt{a})$. Do đó nó chia hình chữ nhật $ACBD$ ra làm 2 phần là có diện tích lần lượt là S_1, S_2 . Gọi S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x}$ và trục Ox , $x = 0, x = a$ và S_1 là diện tích phần còn lại. Ta lần lượt tính S_1, S_2 .

Tính diện tích $S_2 = \int_0^a \sqrt{x} dx$.



Đặt $t = \sqrt{x} \Rightarrow t^2 = x \Rightarrow 2tdt = dx$; Khi $x = 0 \Rightarrow t = 0$; $x = a \Rightarrow t = \sqrt{a}$.

$$\text{Do đó } S_2 = \int_0^{\sqrt{a}} 2t^2 dt = \left(\frac{2t^3}{3} \right) \Big|_0^{\sqrt{a}} = \frac{2a\sqrt{a}}{3}.$$

Hình chữ nhật $ACBD$ có $AC = a+1$; $AD = \sqrt{a}$ nên

$$S_1 = S_{ACBD} - S_2 = \sqrt{a}(a+1) - \frac{2a\sqrt{a}}{3} = \frac{1}{3}a\sqrt{a} + \sqrt{a}$$

Do đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$ chia hình (H) thành hai phần có diện tích bằng nhau nên

$$S_1 = S_2 \Leftrightarrow \frac{2a\sqrt{a}}{3} = \frac{1}{3}a\sqrt{a} + \sqrt{a} \Leftrightarrow a\sqrt{a} = 3\sqrt{a} \Leftrightarrow a = 3 \text{ (Do } a > 0 \text{)}$$

Câu 58: Sân trường có một bồn hoa hình tròn tâm O . Một nhóm học sinh lớp 12 được giao thiết kế bồn hoa, nhóm này định chia bồn hoa thành bốn phần, bởi hai đường parabol có cùng đỉnh O và đối xứng nhau qua O . Hai đường parabol này cắt đường tròn tại bốn điểm A, B, C, D tạo thành một hình vuông có cạnh bằng $4m$ (như hình vẽ). Phần diện tích S_1, S_2 dùng để trồng hoa, phần diện tích S_3, S_4 dùng để trồng cỏ (Diện tích làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai). Biết kinh phí trồng hoa là 150.000 đồng / m^2 , kinh phí để trồng cỏ là 100.000 đồng/ m^2 . Hỏi nhà trường cần bao nhiêu tiền để trồng bồn hoa đó? (Số tiền làm tròn đến hàng chục nghìn)

A. 6.060.000 đồng. **B.** 5.790.000 đồng. **C.** 3.270.000 đồng. **D.** 3.000.000 đồng.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ

Parabol có hàm số dạng $y = ax^2 + bx + c$ có đỉnh là gốc tọa độ và đi qua điểm $B(2; 2)$ nên

$$\text{có phương trình } y = \frac{1}{2}x^2$$

Đường tròn bồn hoa có tâm là gốc tọa độ và bán kính $OB = 2\sqrt{2}$ nên có phương trình là $x^2 + y^2 = 8$. Do ta chỉ xét nhánh trên của đường tròn nên ta chọn hàm số nhánh trên là $y = \sqrt{8 - x^2}$.

$$\text{Vậy diện tích phần } S_1 = \int_{-2}^2 \left(\sqrt{8 - x^2} - \frac{1}{2}x^2 \right) dx$$

$$\text{Do đó, diện tích trồng hoa sẽ là } S_1 + S_2 = 2 \int_{-2}^2 \left(\sqrt{8 - x^2} - \frac{1}{2}x^2 \right) dx \approx 15,233...$$

Vậy tổng số tiền để trồng bồn hoa là:

$$15,233 \times 150.000 + \left(\pi \left(2\sqrt{2} \right)^2 - 15,233 \right) \times 100.000 \approx 3.274.924 \text{ đồng.}$$

Làm tròn đến hàng chục nghìn nên ta có kết quả là 3.270.000 đồng.