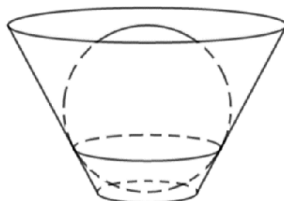


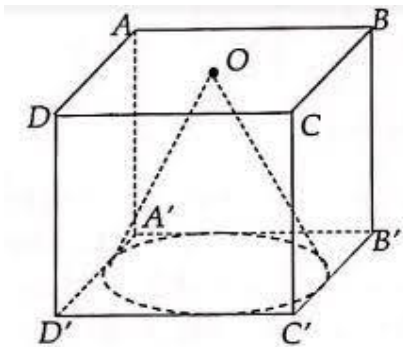
PHẦN 1. KHỐI NÓN – KHỐI TRỤ

- Câu 1.** (Chuyên Lương Văn Tỵ - Ninh Bình - 2020) Cho hình trụ có chiều cao bằng $8a$. Biết hai điểm A, C lần lượt nằm trên hai đáy thỏa $AC = 10a$, khoảng cách giữa AC và trục của hình trụ bằng $4a$. Thể tích của khối trụ đã cho là
- A. $128\pi a^3$. B. $320\pi a^3$. C. $80\pi a^3$. D. $200\pi a^3$.
- Câu 2.** (Chuyên Nguyễn Bình Khiêm - Quảng Nam - 2020) Cho hình nón đỉnh S có đáy là hình tròn tâm O , bán kính R . Dựng hai đường sinh SA và SB , biết AB chắn trên đường tròn đáy một cung có số đo bằng 60° , khoảng cách từ tâm O đến mặt phẳng (SAB) bằng $\frac{R}{2}$. Đường cao h của hình nón bằng
- A. $h = R\sqrt{3}$. B. $h = R\sqrt{2}$. C. $h = \frac{R\sqrt{3}}{2}$. D. $h = \frac{R\sqrt{6}}{4}$.
- Câu 3.** (Chuyên Nguyễn Bình Khiêm - Quảng Nam - 2020) Cho hình trụ có bán kính đáy bằng R và chiều cao bằng $\frac{3R}{2}$. Mặt phẳng (α) song song với trục của hình trụ và cách trục một khoảng bằng $\frac{R}{2}$. Diện tích thiết diện của hình trụ cắt bởi mặt phẳng (α) là:
- A. $\frac{3\sqrt{2}R^2}{2}$. B. $\frac{3\sqrt{3}R^2}{2}$. C. $\frac{2\sqrt{3}R^2}{3}$. D. $\frac{2\sqrt{2}R^2}{3}$.
- Câu 4.** (Chuyên Bắc Ninh - 2020) Cho hình trụ có hai đáy là hai hình tròn (O) và (O') , bán kính bằng a . Một hình nón có đỉnh là O' và có đáy là hình tròn (O) . Biết góc giữa đường sinh của hình nón với mặt đáy bằng 60° , tỉ số diện tích xung quanh của hình trụ và hình nón bằng
- A. 2. B. $\sqrt{2}$. C. $\sqrt{3}$. D. $\frac{1}{\sqrt{3}}$.
- Câu 5.** (Chuyên Bắc Ninh - 2020) Cho hình nón tròn xoay có chiều cao bằng $2a$, bán kính đáy bằng $3a$. Một thiết diện đi qua đỉnh của hình nón có khoảng cách từ tâm của đáy đến mặt phẳng chứa thiết diện bằng $\frac{3a}{2}$. Diện tích của thiết diện đó bằng
- A. $\frac{2a^2\sqrt{3}}{7}$. B. $12a^2\sqrt{3}$. C. $\frac{12a^2}{7}$. D. $\frac{24a^2\sqrt{3}}{7}$.
- Câu 6.** (Chuyên Bắc Ninh - 2020) Cho một chiếc cốc có dạng hình nón cụt và một viên bi có đường kính bằng chiều cao của cốc. Đổ đầy nước rồi thả viên bi vào, ta thấy lượng nước tràn ra bằng một phần ba lượng nước đổ vào cốc lúc ban đầu. Biết viên bi tiếp xúc với đáy cốc và thành cốc. Tìm tỉ số bán kính của miệng cốc và đáy cốc (bỏ qua độ dày của cốc).



- A. $\frac{5+\sqrt{21}}{2}$. B. $\frac{5}{2}$. C. $\sqrt{21}$. D. $\frac{21+\sqrt{5}}{2}$.

Câu 7. (Chuyên Thái Nguyên - 2020) Một khối lập phương có cạnh 1m chứa đầy nước. Đặt vào trong khối đó một khối nón có đỉnh trùng với tâm một mặt của lập phương, đáy khối nón tiếp xúc với các cạnh của mặt đối diện. Tính tỉ số thể tích lượng nước trào ra ngoài và thể tích lượng nước ban đầu của khối lập phương.

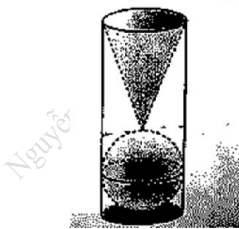


- A. $\frac{4}{\pi}$. B. $\frac{\pi}{12}$. C. $\frac{12}{\pi}$. D. $\frac{3}{\pi}$.

Câu 8. (Chuyên Vĩnh Phúc - 2020) Thiết diện của hình trụ và mặt phẳng chứa trục của hình trụ là hình chữ nhật có chu vi bằng 12. Giá trị lớn nhất của thể tích khối trụ là

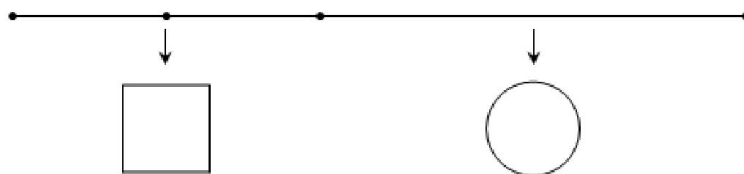
- A. 16π . B. 32π . C. 8π . D. 64π .

Câu 9. (Đại Học Hà Tĩnh - 2020) Trên bàn có một cốc nước hình trụ chứa đầy nước có chiều cao bằng 3 lần đường kính của đáy; một viên bi và một khối nón đều bằng thủy tinh. Biết viên bi là một khối cầu có đường kính bằng của cốc nước. Người ta từ từ thả vào cốc nước viên bi và khối nón đó (như hình vẽ) thì thấy nước trong cốc tràn ra ngoài. Tính tỉ số thể tích của lượng nước còn lại trong cốc và lượng nước ban đầu(bỏ qua bề dày của lớp vỏ thủy tinh)



- A. $\frac{5}{9}$. B. $\frac{2}{3}$. C. $\frac{4}{9}$. D. $\frac{1}{2}$.

Câu 10. (Đại Học Hà Tĩnh - 2020) Một sợi dây kim loại dài 60cm được cắt thành hai đoạn. Đoạn dây thứ nhất uốn thành hình vuông cạnh a , đoạn dây thứ hai uốn thành đường tròn bán kính r (tham khảo hình vẽ).



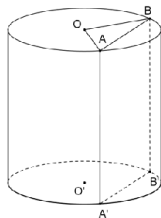
Để tổng diện tích của hình vuông và hình tròn nhỏ nhất thì tỉ số $\frac{a}{r}$ bằng:

- A. $\frac{a}{r} = 1$. B. $\frac{a}{r} = 2$. C. $\frac{a}{r} = 3$. D. $\frac{a}{r} = 4$.

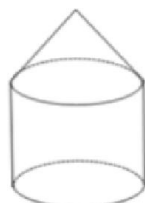
Câu 11. (ĐHQG Hà Nội - 2020) Trong các hình trụ có diện tích toàn phần bằng 1000cm^2 thì hình trụ có thể tích lớn nhất là bao nhiêu cm^3

- A. 2428. B. 2532. C. 2612. D. 2740.

- Câu 12. (Sở Hưng Yên - 2020)** Cho hình trụ có O, O' là tâm hai đáy. Xét hình chữ nhật $ABCD$ có A, B cùng thuộc (O) và C, D cùng thuộc (O') sao cho $AB = a\sqrt{3}$, $BC = 2a$ đồng thời $(ABCD)$ tạo với mặt phẳng đáy hình trụ góc 60° . Thể tích khối trụ bằng
- A. $\pi a^3 \sqrt{3}$. B. $\frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{9}$. C. $\frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{3}$. D. $2\pi a^3 \sqrt{3}$.
- Câu 13. (Sở Phú Thọ - 2020)** Cho hình nón đỉnh S có đáy là hình tròn tâm O . Một mặt phẳng đi qua đỉnh của hình nón và cắt hình nón theo thiết diện là một tam giác vuông SAB có diện tích bằng $4a^2$. Góc giữa trục SO và mặt phẳng (SAB) bằng 30° . Diện tích xung quanh của hình nón đã cho bằng
- A. $4\sqrt{10}\pi a^2$. B. $2\sqrt{10}\pi a^2$. C. $\sqrt{10}\pi a^2$. D. $8\sqrt{10}\pi a^2$.
- Câu 14. (Sở Hà Tĩnh - 2020)** Cho khối trụ có hai đáy là (O) và (O') . AB, CD lần lượt là hai đường kính của (O) và (O') , góc giữa AB và CD bằng 30° , $AB = 6$. Thể tích khối tứ diện $ABCD$ bằng 30. Thể tích khối trụ đã cho bằng
- A. 180π . B. 90π . C. 30π . D. 45π .
- Câu 15. (Sở Ninh Bình)** Cho tam giác vuông cân ABC có $AB = BC = a\sqrt{2}$. Khi quay tam giác ABC quanh đường thẳng đi qua B và song song với AC ta thu được một khối tròn xoay có thể tích bằng
- A. $2\pi a^3$. B. $\frac{2\pi a^3}{3}$. C. $\frac{4\pi a^3}{3}$. D. πa^3 .
- Câu 16. (Sở Ninh Bình)** Cho hai khối nón có chung trục $SS' = 3r$. Khối nón thứ nhất có đỉnh S , đáy là hình tròn tâm S' bán kính $2r$. Khối nón thứ hai có đỉnh S' , đáy là hình tròn tâm S bán kính r . Thể tích phần chung của hai khối nón đã cho bằng
- A. $\frac{4\pi r^3}{27}$. B. $\frac{\pi r^3}{9}$. C. $\frac{4\pi r^3}{9}$. D. $\frac{4\pi r^3}{3}$.
- Câu 17. (Sở Bình Phước - 2020)** Một hình trụ có diện tích xung quanh là 4π , thiết diện qua trục là một hình vuông. Một mặt phẳng (α) song song với trục, cắt hình trụ theo thiết diện $ABB'A'$, biết một cạnh của thiết diện là một dây của đường tròn đáy của hình trụ và căng một cung 120° . Diện tích của thiết diện $ABB'A'$ bằng



- A. $2\sqrt{3}$. B. $2\sqrt{2}$. C. $3\sqrt{2}$. D. $\sqrt{3}$.
- Câu 18. (Sở Yên Bái - 2020)** Một khối đồ chơi gồm một khối trụ và một khối nón có cùng bán kính được chồng lên nhau, độ dài đường sinh khối trụ bằng độ dài đường sinh khối nón và bằng đường kính khối trụ, khối nón (tham khảo hình vẽ). Biết thể tích toàn bộ khối đồ chơi là 50cm^3 , thể tích khối trụ gần với số nào nhất trong các số sau

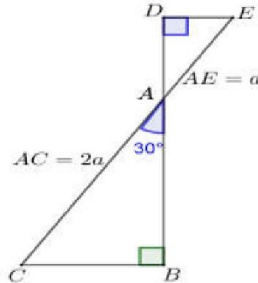


- A. $38,8\text{cm}^3$. B. $38,2\text{cm}^3$. C. $36,5\text{cm}^3$. D. $40,5\text{cm}^3$.

Câu 19. (Bỉm Sơn - Thanh Hóa - 2020) Thiết diện qua trục của một hình nón là một tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng $a\sqrt{2}$. Một thiết diện qua đỉnh tạo với đáy một góc 60° . Diện tích của thiết diện này bằng

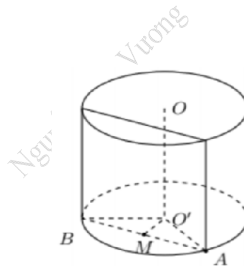
- A. $\frac{a^2\sqrt{2}}{3}$. B. $\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$. C. $2a^2$. D. $\frac{a^2\sqrt{2}}{4}$.

Câu 20. (Đặng Thúc Hứa - Nghệ An - 2020) Tính thể tích của vật thể tròn xoay khi quay mô hình (như hình vẽ bên) quanh trục DB .



- A. $\frac{9\pi a^3\sqrt{3}}{8}$. B. $\frac{3\pi a^3\sqrt{3}}{8}$. C. $\frac{2\pi a^3\sqrt{3}}{3}$. D. $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{12}$.

Câu 21. (Đặng Thúc Hứa - Nghệ An - 2020) Cho khối lăng trụ T đường cao OO' , bán kính đáy r và thể tích V . Cắt khối trụ T thành hai phần bởi mặt phẳng (P) song song với trục và cách trục một khoảng bằng $\frac{r}{2}$ (như hình vẽ bên dưới). Gọi V_1 là thể tích phần không chứa trục OO' . Tính tỷ số $\frac{V_1}{V}$.



- A. $\frac{V_1}{V} = \frac{\pi - \sqrt{3}}{2\pi}$. B. $\frac{V_1}{V} = \frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{V_1}{V} = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4\pi}$. D. $\frac{V_1}{V} = \frac{4 - \sqrt{3}}{4\pi}$.

Câu 22. (Đô Lương 4 - Nghệ An - 2020) Cho tam giác ABC vuông tại A , $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $b < c$. Khi quay tam giác vuông ABC một vòng quanh cạnh BC , quay cạnh AC , quanh cạnh AB , ta thu được các hình có diện tích toàn phần theo thứ tự bằng S_a, S_b, S_c . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $S_b > S_c > S_a$. B. $S_b > S_a > S_c$. C. $S_c > S_a > S_b$. D. $S_a > S_c > S_b$.

Câu 23. (Lê Lai - Thanh Hóa - 2020) Cho hình nón có chiều cao bằng $2\sqrt{3}$. Mặt phẳng đi qua đỉnh của hình nón, cắt hình nón theo thiết diện là tam giác đều sao cho góc hợp bởi mặt phẳng thiết diện và mặt đáy của hình nón có số đo bằng 60° . Thể tích của khối nón được giới hạn bởi hình nón đã cho bằng

- A. 104π . B. $\frac{4\sqrt{39}\pi}{3}$. C. $104\sqrt{3}\pi$. D. $\frac{56\sqrt{3}\pi}{9}$.

Câu 24. (Liên trường Nghệ An - 2020) Một sợi dây (không co giãn) được quấn đối xứng đúng 10 vòng quanh một ống trụ tròn đều có bán kính $R = \frac{2}{\pi} \text{ cm}$ (Như hình vẽ)



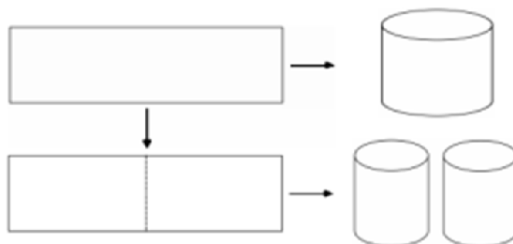
Biết rằng sợi dây dài 50cm . Hãy tính diện tích xung quanh của ống trụ đó.

- A. 80cm^2 . B. 100cm^2 . C. 60cm^2 . D. 120cm^2 .

Câu 25. (Lý Nhân Tông - Bắc Ninh - 2020) Từ một tấm tôn hình chữ nhật kích thước $50\text{cm} \times 240\text{cm}$, người ta làm các thùng đựng nước hình trụ có chiều cao bằng 50cm , theo hai cách sau (xem hình minh họa dưới đây):

- Cách 1: Gò tấm tôn ban đầu thành mặt xung quanh của thùng.
- Cách 2: Cắt tấm tôn ban đầu thành hai tấm bằng nhau, rồi gò mỗi tấm đó thành mặt xung quanh của một thùng.

Kí hiệu V_1 là thể tích của thùng gò được theo cách 1 và V_2 là tổng thể tích của hai thùng gò được theo cách 2. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.



- A. $\frac{V_1}{V_2} = 1$. B. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{2}$. C. $\frac{V_1}{V_2} = 2$. D. $\frac{V_1}{V_2} = 4$.

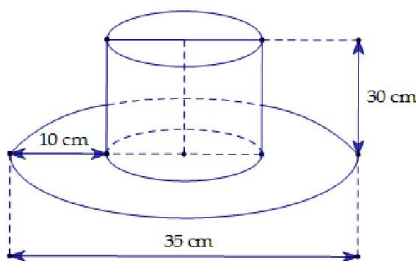
Câu 26. (Nguyễn Huệ - Phú Yên - 2020) Cho hình nón có chiều cao $6a$. Một mặt phẳng (P) đi qua đỉnh của hình nón và có khoảng cách đến tâm là $3a$, thiết diện thu được là một tam giác vuông cân. Thể tích của khối nón được giới hạn bởi hình nón đã cho bằng

- A. $150\pi a^3$. B. $96\pi a^3$. C. $108\pi a^3$. D. $120\pi a^3$.

Câu 27. (Nguyễn Trãi - Thái Bình - 2020) Trong tất cả các hình nón nội tiếp trong hình cầu có thể tích bằng 36π , bán kính r của hình nón có diện tích xung quanh lớn nhất là

- A. $r = \frac{3\sqrt{2}}{2}$. B. $r = \frac{3}{2}$. C. $r = 2\sqrt{2}$. D. $r = 3$.

Câu 28. (THPT Nguyễn Viết Xuân - 2020) Một cái mũ bằng vải của nhà ảo thuật với kích thước như hình vẽ. Hãy tính tổng diện tích vải cần có để làm nên cái mũ đó (không tính viền, mép, phần thừa).



- A. $750,25\pi(\text{cm}^2)$. B. $756,25\pi(\text{cm}^2)$. C. $700\pi(\text{cm}^2)$. D. $700\pi(\text{cm}^2)$.

Câu 29. (Tiên Du - Bắc Ninh - 2020) Cho hình trụ có hai đáy là hình tròn tâm O và O' , chiều cao $h = a\sqrt{3}$. Mặt phẳng đi qua tâm O và tạo với OO' một góc 30° , cắt hai đường tròn tâm O và O' tại bốn điểm là bốn đỉnh của một hình thang có đáy lớn gấp đôi đáy nhỏ và diện tích bằng $3a^2$. Thể tích của khối trụ được giới hạn bởi hình trụ đã cho bằng

- A. $\frac{\sqrt{3}\pi a^3}{3}$. B. $\sqrt{3}\pi a^3$. C. $\frac{\sqrt{3}\pi a^3}{12}$. D. $\frac{\sqrt{3}\pi a^3}{4}$.

Câu 30. (Tiên Du - Bắc Ninh - 2020) Cho hình nón có bán kính đáy bằng 3 và chiều cao bằng 10. Mặt phẳng (α) vuông góc với trục và cách đỉnh của hình nón một khoảng bằng 4, chia hình nón thành hai phần. Gọi V_1 là thể tích của phần chứa đỉnh của hình nón đã cho, V_2 là thể tích của phần còn lại. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$?

- A. $\frac{4}{25}$. B. $\frac{21}{25}$. C. $\frac{8}{117}$. D. $\frac{4}{21}$.

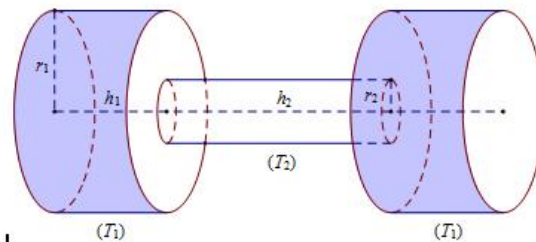
Câu 31. (Hải Hậu - Nam Định - 2020) Trong không gian cho tứ giác $ABCD$ là một nửa lục giác đều nội tiếp đường tròn đường kính $CD = 2a$. Khi quay tứ giác $ABCD$ quanh cạnh AB thì tạo thành một khối tròn xoay. Thể tích khối tròn xoay đó bằng

- A. πa^3 . B. $2\pi a^3$. C. $\frac{5}{4}\pi a^3$. D. $\frac{3}{2}\pi a^3$.

Câu 32. (Hải Hậu - Nam Định - 2020) Một khối trụ có bán kính đáy $r = 2a$. O, O' lần lượt là tâm đường tròn đáy. Một mặt phẳng song song với trục và cách trục $\frac{a\sqrt{15}}{2}$, cắt đường tròn (O') tại hai điểm A, B . Biết thể tích của khối tứ diện $OO'AB$ bằng $\frac{a^3\sqrt{15}}{4}$. Độ dài đường cao của hình trụ bằng

- A. a . B. $6a$. C. $3a$. D. $2a$.

Câu 33. (Trường VINSCHOOL - 2020) Một chiếc tạ tay có hình dạng gồm 3 khối trụ, trong đó hai khối trụ ở hai đầu bằng nhau và khối trụ làm tay cầm ở giữa. Gọi khối trụ làm đầu tạ là (T_1) và khối trụ làm tay cầm là (T_2) lần lượt có bán kính và chiều cao tương ứng là r_1, h_1, r_2, h_2 thỏa mãn $r_1 = 4r_2, h_1 = \frac{1}{2}h_2$ (tham khảo hình vẽ).



Biết rằng thể tích của khối trụ tay cầm (T_2) bằng $30 \text{ (cm}^3\text{)}$ và chiếc tạ làm bằng inox có khối lượng riêng là $D = 7,7 \text{ g/cm}^3$. Khối lượng của chiếc tạ tay bằng

- A. $3,927 \text{ (kg)}$. B. $2,927 \text{ (kg)}$. C. $3,279 \text{ (kg)}$. D. $2,279 \text{ (kg)}$.

Câu 34. (Thanh Chương 1 - Nghệ An - 2020) Cho một hình nón có bán kính đáy bằng $2a$. Mặt phẳng (P) đi qua đỉnh (S) của hình nón, cắt đường tròn đáy tại A và B sao cho $AB = 2a\sqrt{3}$, khoảng cách từ tâm đường tròn đáy đến mặt phẳng (P) bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Thể tích khối nón đã cho bằng

- A. $\frac{8\pi a^3}{3}$. B. $\frac{4\pi a^3}{3}$. C. $\frac{2\pi a^3}{3}$. D. $\frac{\pi a^3}{3}$.

Câu 35. (Tiên Lãng - Hải Phòng - 2020) Cho hình trụ có đáy là hai đường tròn tâm O và O' , bán kính đáy bằng chiều cao và bằng $2a$. Trên đường tròn đáy có tâm O lấy điểm A , trên đường tròn tâm O' lấy điểm B . Đặt α là góc giữa AB và đáy. Biết rằng thể tích khối tứ diện $OO'AB$ đạt giá trị lớn nhất. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. $\tan \alpha = \sqrt{2}$.

B. $\tan \alpha = 1$.

C. $\tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

D. $\tan \alpha = \frac{1}{2}$.

PHẦN 2. MẶT CẦU

Câu 36. (Chuyên ĐH Vinh - Nghệ An - 2020) Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AA' = 2a$, $BC = a$. Gọi M là trung điểm của BB' . Bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $M.A'B'C'$ bằng

A. $\frac{3\sqrt{3}a}{8}$.

B. $\frac{\sqrt{13}a}{2}$.

C. $\frac{\sqrt{21}a}{6}$.

D. $\frac{2\sqrt{3}a}{3}$.

Câu 37. (Chuyên Hưng Yên - 2020) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh 1. Mặt bên (SAC) là tam giác cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, $SA = SC = \frac{3}{2}$. Gọi D là

điểm đối xứng với B qua C . Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABD$.

A. $\frac{\sqrt{34}}{8}$.

B. $\frac{3\sqrt{34}}{4}$.

C. $\frac{3\sqrt{34}}{16}$.

D. $\frac{3\sqrt{34}}{8}$.

Câu 38. (Chuyên Thái Bình - 2020) Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có chiều cao bằng 4, đáy ABC là tam giác cân tại A với $AB = AC = 2$; $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ trên

A. $\frac{64\pi\sqrt{2}}{3}$.

B. 16π .

C. 32π .

D. $\frac{32\pi\sqrt{2}}{3}$.

Câu 39. (Chuyên Lê Hồng Phong - Nam Định - 2020) Cho hình nón đỉnh S và đáy là hình tròn tâm O . Biết rằng chiều cao của nón bằng a và bán kính đáy nón bằng $2a$. Một mặt phẳng (P) đi qua đỉnh S và cắt đường tròn đáy nón tại hai điểm A, B mà $AB = 2a\sqrt{3}$. Hãy tính theo a diện tích mặt cầu ngoại tiếp khối tứ diện $SOAB$.

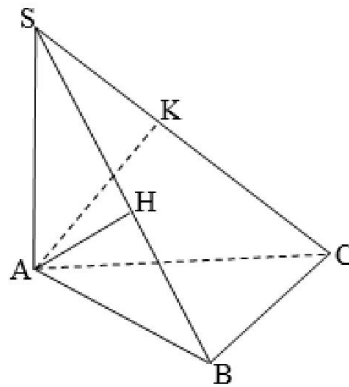
A. $5\pi a^2$.

B. $17\pi a^2$.

C. $7\pi a^2$.

D. $26\pi a^2$.

Câu 40. (Chuyên Phan Bội Châu - Nghệ An - 2020) Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy, đáy là tam giác đều, $SA = a\sqrt{3}$ và góc giữa đường thẳng SB và đáy bằng 60° . Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB, SC . Tính bán kính mặt cầu đi qua các điểm A, B, H, K .



A. $\frac{a}{2}$.

B. $\frac{\sqrt{3}a}{6}$.

C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

D. $\frac{\sqrt{3}a}{3}$.

Câu 41. (Chuyên Sơn La - 2020) Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có các cạnh đều bằng a . Tính diện tích S của mặt cầu đi qua 6 đỉnh của hình lăng trụ đó.

A. $S = \frac{7\pi a^2}{3}$.

B. $S = \frac{7\pi a^2}{3}$.

C. $S = \frac{49\pi a^2}{144}$.

D. $S = \frac{49\pi a^2}{114}$.

Câu 42. (Chuyên Vĩnh Phúc - 2020) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $BC = a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy (ABC) . Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB và SC . Thể tích của khối cầu ngoại tiếp hình chóp $A.HKCB$ bằng

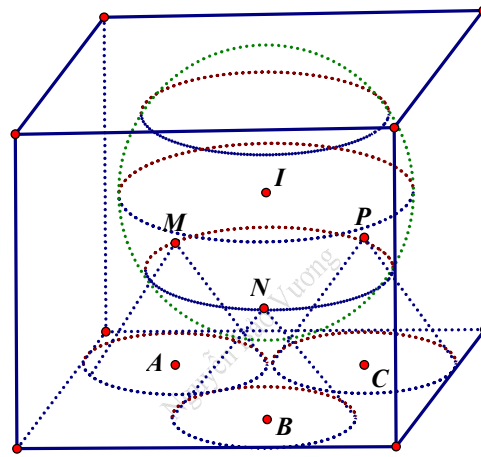
- A. $\sqrt{2}\pi a^3$. B. $\frac{\sqrt{2}\pi a^3}{3}$. C. $\frac{\pi a^3}{6}$. D. $\frac{\pi a^3}{2}$.

Câu 43. (Sở Ninh Bình) Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $AB = \sqrt{3}$, $AC = 2$ và $\widehat{BAC} = 30^\circ$. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu của A trên SB, SC . Bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $A.BCNM$ là

- A. $R = 2$. B. $R = \sqrt{13}$. C. $R = 1$. D. $R = \sqrt{2}$.

Câu 44. (Sở Ninh Bình) Có một bể hình hộp chữ nhật chứa đầy nước. Người ta cho ba khối nón giống nhau có thiết diện qua trục là một tam giác vuông cân vào bể sao cho ba đường tròn đáy của ba khối nón đôi một tiếp xúc với nhau, một khối nón có đường tròn đáy chỉ tiếp xúc với một cạnh của đáy bể và hai khối nón còn lại có đường tròn đáy tiếp xúc với hai cạnh của đáy bể. Sau đó người ta đặt lên đỉnh của ba khối nón một khối cầu có bán kính bằng $\frac{4}{3}$ lần bán kính đáy của khối

nón. Biết khối cầu vừa đủ ngập trong nước và tổng lượng nước trào ra là $\frac{337\pi}{24}$ (lít). Thể tích nước ban đầu ở trong bể thuộc khoảng nào dưới đây (đơn vị tính: lít)?



- A. (150; 151). B. (151; 152). C. (139; 140). D. (138; 139).

Câu 45. (Sở Bắc Ninh - 2020) Cho hình chóp $ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và D . Biết SA vuông góc với $ABCD$, $AB = BC = a$, $AD = 2a$, $SA = a\sqrt{2}$. Gọi E là trung điểm của AD . Bán kính mặt cầu đi qua các điểm S, A, B, C, E bằng

- A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. B. $\frac{a\sqrt{30}}{6}$. C. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. D. a .

Câu 46. (Sở Yên Bái - 2020) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có đường chéo bằng $a\sqrt{2}$, cạnh SA có độ dài bằng $2a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

- A. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. B. $\frac{a\sqrt{6}}{12}$. C. $\frac{a\sqrt{6}}{4}$. D. $\frac{2a\sqrt{6}}{3}$.

Câu 47. (Bỉm Sơn - Thanh Hóa - 2020) Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy là hình vuông cạnh bằng x . Cạnh bên $SA = x\sqrt{6}$ và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Tính theo x diện tích mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABCD$.

- A. $8\pi x^2$. B. $x^2\sqrt{2}$. C. $2\pi x^2$. D. $2x^2$.

Câu 48. (Kim Liên - Hà Nội - 2020) Cho ba hình cầu có bán kính lần lượt là R_1, R_2, R_3 đôi một tiếp xúc nhau và cùng tiếp xúc với mặt phẳng (P) . Các tiếp điểm của ba hình cầu với mặt phẳng (P) lập thành một tam giác có độ dài các cạnh lần lượt là 2; 3; 4. Tính tổng $R_1 + R_2 + R_3$:

A. $\frac{61}{12}$.

B. $\frac{53}{12}$.

C. $\frac{67}{12}$.

D. $\frac{59}{12}$.

Câu 49. (Nguyễn Trãi - Thái Bình - 2020) Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a và góc giữa mặt bên và mặt phẳng đáy bằng 45° . Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ là

A. $\frac{4\pi a^2}{3}$

B. $\frac{3\pi a^2}{4}$

C. $\frac{2\pi a^2}{3}$

D. $\frac{9\pi a^2}{4}$

Câu 50. (Kim Thành - Hải Dương - 2020) Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) , $AB = a$, $AC = a\sqrt{2}$, $\widehat{BAC} = 45^\circ$. Gọi B_1, C_1 lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB, SC . Thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $ABCC_1B_1$ bằng

A. $\frac{\pi a^3}{\sqrt{2}}$.

B. $\pi a^3 \sqrt{2}$.

C. $\frac{\pi a^3 \sqrt{2}}{3}$.

D. $\frac{4}{3}\pi a^3$.

----- HẾT -----

Nguyễn Bảo Vương

TUYỂN CHỌN CÂU HỎI VẬN DỤNG - VẬN DỤNG CAO TỪ CÁC ĐỀ THI THỬ TRÊN CẢ NƯỚC NĂM 2020

50 CÂU VD - VDC - CHƯƠNG 5. KHỐI TRÒN XOAY

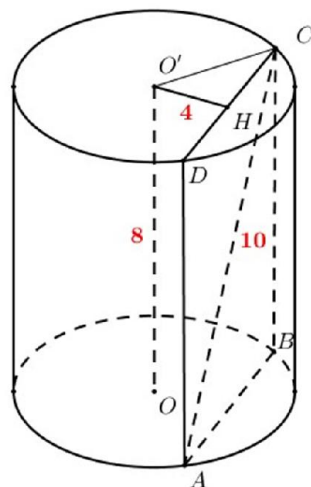
PHẦN 1. KHỐI NÓN – KHỐI TRỤ

Câu 1. (Chuyên Lương Văn Tỵ - Ninh Bình - 2020) Cho hình trụ có chiều cao bằng $8a$. Biết hai điểm A, C lần lượt nằm trên hai đáy thỏa $AC = 10a$, khoảng cách giữa AC và trục của hình trụ bằng $4a$. Thể tích của khối trụ đã cho là

- A. $128\pi a^3$. B. $320\pi a^3$. C. $80\pi a^3$. D. $200\pi a^3$.

Lời giải

Chọn D



Gọi $(O), (O')$ lần lượt là hai đường tròn đáy. $A \in (O), C \in (O')$.

Dựng AD, CB lần lượt song song với OO' ($D \in (O'), B \in (O)$). Dễ dàng có $ABCD$ là hình chữ nhật.

Do $AC = 10a, AD = 8a \Rightarrow DC = 6a$.

Gọi H là trung điểm của DC .

$$\begin{cases} O'H \perp DC \\ O'H \perp AD \end{cases} \Rightarrow O'H \perp (ABCD).$$

Ta có $OO' \parallel (ABCD) \Rightarrow d(OO', AC) = d(OO', (ABCD)) = O'H = 4a$.

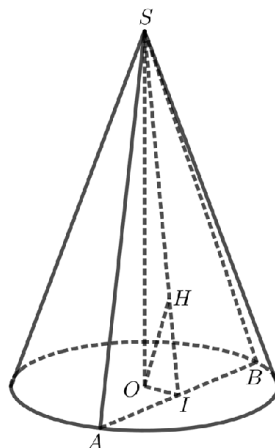
$O'H = 4a, CH = 3a \Rightarrow R = O'C = 5a$.

Vậy thể tích của khối trụ là $V = \pi R^2 h = \pi (5a)^2 8a = 200\pi a^3$.

Câu 2. (Chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm - Quảng Nam - 2020) Cho hình nón đỉnh S có đáy là hình tròn tâm O , bán kính R . Dựng hai đường sinh SA và SB , biết AB chắn trên đường tròn đáy một cung có số đo bằng 60° , khoảng cách từ tâm O đến mặt phẳng (SAB) bằng $\frac{R}{2}$. Đường cao h của hình nón bằng

- A. $h = R\sqrt{3}$. B. $h = R\sqrt{2}$. C. $h = \frac{R\sqrt{3}}{2}$. D. $h = \frac{R\sqrt{6}}{4}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi I là trung điểm AB .

Kẻ OH vuông góc với SI .

$$d(O, (SAB)) = OH = \frac{R}{2}.$$

Ta có cung AB bằng 60° nên $\widehat{AOB} = 60^\circ$.

Tam giác AOI vuông tại I , ta có $\cos \widehat{IOA} = \frac{OI}{OA} \Leftrightarrow OI = OA \cdot \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}R}{2}$.

Tam giác SOI vuông tại O , ta có

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OI^2} \Leftrightarrow \frac{1}{SO^2} = \frac{1}{OH^2} - \frac{1}{OI^2} = \frac{1}{\left(\frac{R}{2}\right)^2} - \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}R}{2}\right)^2} = \frac{8}{3R^2} \Rightarrow SO = \frac{\sqrt{6}R}{4}.$$

Câu 3. (Chuyên Nguyễn Bình Khiêm - Quảng Nam - 2020) Cho hình trụ có bán kính đáy bằng R

và chiều cao bằng $\frac{3R}{2}$. Mặt phẳng (α) song song với trục của hình trụ và cách trục một

khoảng bằng $\frac{R}{2}$. Diện tích thiết diện của hình trụ cắt bởi mặt phẳng (α) là:

A. $\frac{3\sqrt{2}R^2}{2}$.

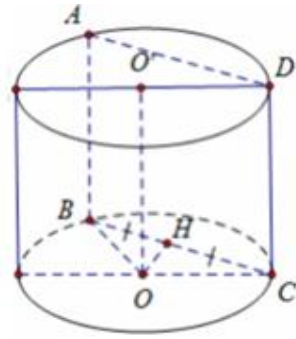
B. $\frac{3\sqrt{3}R^2}{2}$.

C. $\frac{2\sqrt{3}R^2}{3}$.

D. $\frac{2\sqrt{2}R^2}{3}$.

Lời giải

Chọn B



Giả sử thiết diện là hình chữ nhật $ABCD$ như hình vẽ.

Gọi H là trung điểm của BC suy ra $OH \perp BC$ suy ra $d(O; BC) = \frac{R}{2}$

$$BC = 2HB = 2\sqrt{OB^2 - OH^2} = 2\sqrt{R^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2} = R\sqrt{3}$$

Khi đó

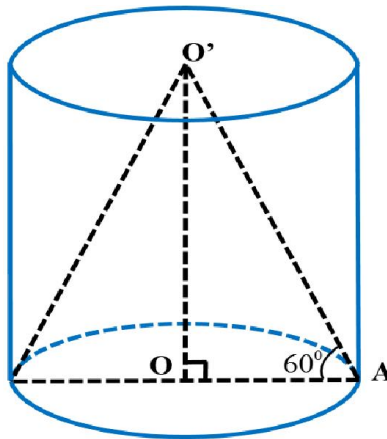
$$\text{Suy ra } S_{ABCD} = BC \cdot AB = R\sqrt{3} \cdot \frac{3R}{2} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{2}.$$

Câu 4. (Chuyên Bắc Ninh - 2020) Cho hình trụ có hai đáy là hai hình tròn (O) và (O') , bán kính bằng a . Một hình nón có đỉnh là O' và có đáy là hình tròn (O) . Biết góc giữa đường sinh của hình nón với mặt đáy bằng 60° , tỉ số diện tích xung quanh của hình trụ và hình nón bằng

- A. 2. B. $\sqrt{2}$. C. $\sqrt{3}$. D. $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi A là điểm thuộc đường tròn (O) .

Góc giữa $O'A$ và mặt phẳng đáy là góc $\widehat{O'AO}$. Theo giả thiết ta có $\widehat{O'AO} = 60^\circ$. Xét tam giác $O'OA$ vuông tại O , ta có:

$$\tan \widehat{O'AO} = \frac{O'O}{OA} \Rightarrow O'O = a \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3}.$$

$$+ \cos \widehat{O'AO} = \frac{OA}{O'A} \Rightarrow O'A = \frac{a}{\cos 60^\circ} = 2a.$$

Diện tích xung quanh của hình trụ là: $S_{xq(T)} = 2\pi.OA.O'O = 2\pi.a.a\sqrt{3} = 2\pi a^2\sqrt{3}$.

Diện tích xung quanh của hình nón là: $S_{xq(N)} = \pi.OA.O'A = \pi.a.2a = 2\pi a^2$

$$\Rightarrow \frac{S_{xq(T)}}{S_{xq(N)}} = \frac{2\pi a^2\sqrt{3}}{2\pi a^2} = \sqrt{3}.$$

Câu 5. (Chuyên Bắc Ninh - 2020) Cho hình nón tròn xoay có chiều cao bằng $2a$, bán kính đáy bằng $3a$. Một thiết diện đi qua đỉnh của hình nón có khoảng cách từ tâm của đáy đến mặt phẳng chứa thiết diện bằng $\frac{3a}{2}$. Diện tích của thiết diện đó bằng

A. $\frac{2a^2\sqrt{3}}{7}$.

B. $12a^2\sqrt{3}$.

C. $\frac{12a^2}{7}$.

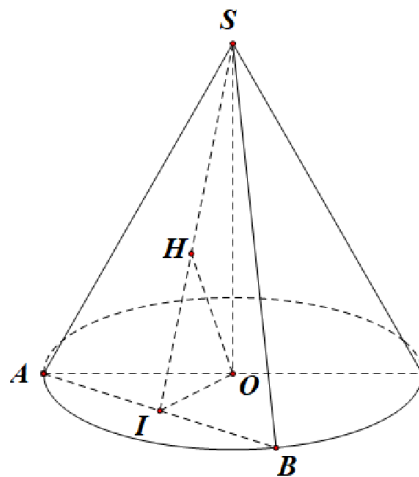
D. $\frac{24a^2\sqrt{3}}{7}$.

Lời giải

Chọn D

Xét hình nón đỉnh S có chiều cao $SO = 2a$, bán kính đáy $OA = 3a$.

Thiết diện đi qua đỉnh của hình nón là tam giác SAB cân tại S .



+ Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng AB . Trong tam giác SOI , kẻ $OH \perp SI$, $H \in SI$.

$$+ \begin{cases} AB \perp OI \\ AB \perp SO \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SOI) \Rightarrow AB \perp OH.$$

$$+ \begin{cases} OH \perp SI \\ OH \perp AB \end{cases} \Rightarrow OH \perp (SAB) \Rightarrow d(O, (SAB)) = OH = \frac{3a}{2}.$$

$$\text{Xét tam giác } SOI \text{ vuông tại } O, \text{ ta có } \frac{1}{OI^2} = \frac{1}{OH^2} - \frac{1}{SO^2} = \frac{4}{9a^2} - \frac{1}{4a^2} = \frac{7}{36a^2} \Rightarrow OI = \frac{6a}{\sqrt{7}}.$$

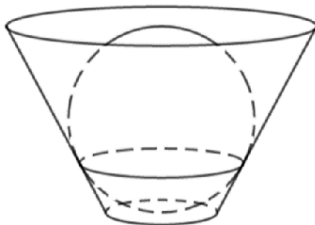
$$SI = \sqrt{SO^2 + OI^2} = \sqrt{4a^2 + \frac{36a^2}{7}} = \frac{8a}{\sqrt{7}}.$$

$$\text{Xét tam giác } AOI \text{ vuông tại } I, AI = \sqrt{AO^2 - OI^2} = \sqrt{9a^2 - \frac{36a^2}{7}} = \frac{3\sqrt{3}a}{\sqrt{7}}$$

$$\Rightarrow AB = 2AI = \frac{6\sqrt{3}a}{\sqrt{7}}.$$

$$\text{Vậy diện tích của thiết diện là: } S_{\Delta SAB} = \frac{1}{2}.SI.AB = \frac{1}{2} \cdot \frac{8a}{\sqrt{7}} \cdot \frac{6\sqrt{3}a}{\sqrt{7}} = \frac{24a^2\sqrt{3}}{7}.$$

- Câu 6. (Chuyên Bắc Ninh - 2020)** Cho một chiếc cốc có dạng hình nón cụt và một viên bi có đường kính bằng chiều cao của cốc. Đổ đầy nước rồi thả viên bi vào, ta thấy lượng nước tràn ra bằng một phần ba lượng nước đổ vào cốc lúc ban đầu. Biết viên bi tiếp xúc với đáy cốc và thành cốc. Tìm tỉ số bán kính của miệng cốc và đáy cốc (bỏ qua độ dày của cốc).



A. $\frac{5+\sqrt{21}}{2}$.

B. $\frac{5}{2}$.

C. $\sqrt{21}$.

D. $\frac{21+\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải

Chọn A

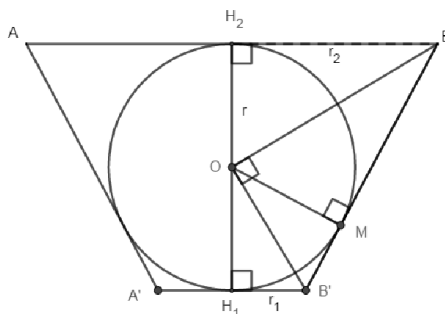
Gọi bán kính viên bi là r ; bán kính đáy cốc, miệng cốc lần lượt là r_1, r_2 , ($r_1 < r_2$). Theo giả thiết thì chiều cao của cốc là $h = 2r$.

Thể tích viên bi là $V_B = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Thể tích cốc là $V_C = \frac{1}{3}\pi h(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2) = \frac{2}{3}\pi r(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2)$.

Theo giả thiết thì $V_B = \frac{1}{3}V_C \Leftrightarrow 6r^2 = r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2$ (1).

Mặt cắt chứa trục của cốc là hình thang cân $ABB'A'$. Đường tròn tâm $(O; r)$ là đường tròn lớn của viên bi, đồng thời là đường tròn nội tiếp hình thang $ABB'A'$, tiếp xúc với $A'B'$, AB lần lượt tại H_1, H_2 và tiếp xúc với BB' tại M .



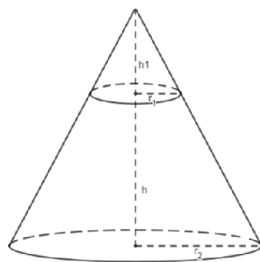
Để thấy tam giác BOB' vuông tại O .

Ta có $OM^2 = MB.MB' \Leftrightarrow r^2 = r_1 r_2$ (2).

Thay (2) vào (1) ta được $6r_1 r_2 = r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2 \Leftrightarrow \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 - 5\frac{r_2}{r_1} + 1 = 0$.

Giải phương trình với điều kiện $\frac{r_2}{r_1} > 1$ ta được $\frac{r_2}{r_1} = \frac{5+\sqrt{21}}{2}$.

Chú ý: Chứng minh công thức thể tích hình nón cụt.



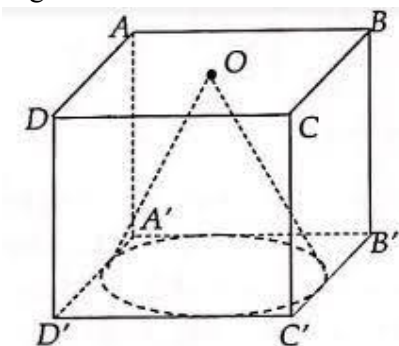
Ta có: $\frac{r_1}{r_2} = \frac{h_1}{h_1 + h} \Leftrightarrow h_1 = \frac{r_1 h}{r_2 - r_1}$.

$$V_1 = \frac{1}{3} \pi r_1^2 \cdot h_1 = \frac{1}{3} \pi h \frac{r_1^3}{r_2 - r_1}.$$

$$V_2 = \frac{1}{3} \pi r_2^2 \cdot (h_1 + h) = \frac{1}{3} \pi h \frac{r_2^3}{r_2 - r_1}.$$

$$V = V_2 - V_1 = \frac{1}{3} \pi h \frac{r_2^3 - r_1^3}{r_2 - r_1} = \frac{1}{3} \pi h (r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2).$$

Câu 7. (Chuyên Thái Nguyên - 2020) Một khối lập phương có cạnh 1m chứa đầy nước. Đặt vào trong khối đó một khối nón có đỉnh trùng với tâm một mặt của lập phương, đáy khối nón tiếp xúc với các cạnh của mặt đối diện. Tính tỉ số thể tích lượng nước trào ra ngoài và thể tích lượng nước ban đầu của khối lập phương.



A. $\frac{4}{\pi}$.

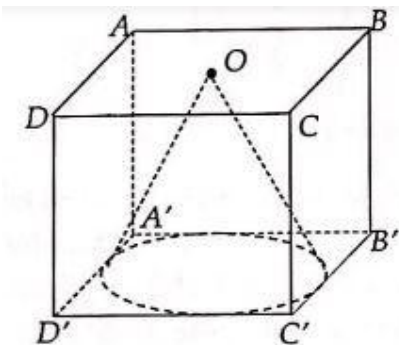
B. $\frac{\pi}{12}$.

C. $\frac{12}{\pi}$.

D. $\frac{3}{\pi}$.

Lời giải

Chọn B



Thể tích khối lập phương là $V = 1^3 = 1 \text{ (m}^3\text{)}$.

Ta có khối nón có đỉnh trùng với tâm một mặt của lập phương, đáy khối nón tiếp xúc với các cạnh của mặt đối diện có chiều cao $h = 1 \text{ (m)}$ và bán kính đáy $r = \frac{1}{2} \text{ (m)}$.

Suy ra thể tích khối nón (tức là phần thể tích lượng nước tràn ra ngoài) là

$$V_N = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{\pi}{12} (\text{m}^3).$$

Vậy tỉ số thể tích của lượng nước trào ra ngoài và lượng nước ban đầu của khối lập phương là

$$\frac{V_N}{V} = \frac{\frac{\pi}{12}}{1} = \frac{\pi}{12}.$$

Câu 8. (Chuyên Vĩnh Phúc - 2020) Thiết diện của hình trụ và mặt phẳng chứa trục của hình trụ là hình chữ nhật có chu vi bằng 12. Giá trị lớn nhất của thể tích khối trụ là

A. 16π .

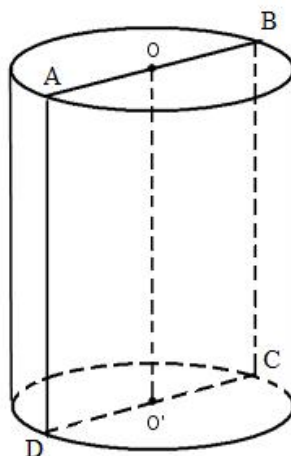
B. 32π .

C. 8π .

D. 64π .

Lời giải

Chọn C



Từ hình vẽ ta có $ABCD$ là hình chữ nhật, gọi chiều cao của hình trụ là h và bán kính đáy của hình trụ là r , theo giả thiết ta có $2(h+2r)=12 \Leftrightarrow h+2r=6$.

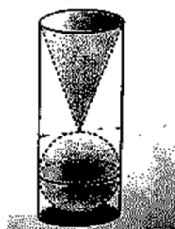
Thể tích của khối trụ tương ứng là $V = \pi r^2 h$, theo bất đẳng thức Cô si ta có

$$r+r+h \geq 3\sqrt[3]{r^2 \cdot h} \Leftrightarrow V = \pi r^2 h \leq \pi \cdot \left(\frac{2r+h}{3}\right)^3 = 8\pi$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $r=h=2$.

Vậy giá trị lớn nhất của thể tích khối trụ là 8π .

Câu 9. (Đại Học Hà Tĩnh - 2020) Trên bàn có một cốc nước hình trụ chứa đầy nước có chiều cao bằng 3 lần đường kính của đáy; một viên bi và một khối nón đều bằng thủy tinh. Biết viên bi là một khối cầu có đường kính bằng của cốc nước. Người ta từ từ thả vào cốc nước viên bi và khối nón đó (như hình vẽ) thì thấy nước trong cốc tràn ra ngoài. Tính tỉ số thể tích của lượng nước còn lại trong cốc và lượng nước ban đầu (bỏ qua bề dày của lớp vỏ thủy tinh)



A. $\frac{5}{9}$.

B. $\frac{2}{3}$.

C. $\frac{4}{9}$.

D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi R, h lần lượt là bán kính đáy và là chiều cao của khối trụ

$$h = 6R$$

Thể tích của khối trụ $V_T = \pi 6R^3$.

Khối cầu bên trong khối trụ có bán kính R nên khối cầu có thể tích $V_C = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Khối nón bên trong khối trụ có bán kính R và chiều cao $h = 4R$ nên khối nón có thể tích

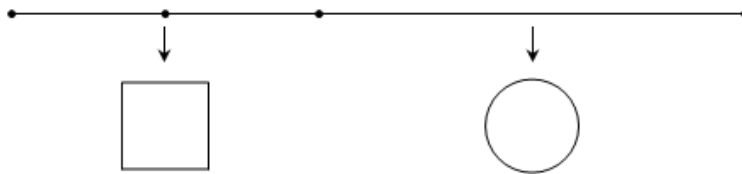
$$V_N = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Thể tích lượng nước còn lại bên trong khối trụ

$$V = V_T - (V_C + V_N) = 6\pi R^3 - \frac{8}{3}\pi R^3 = \frac{10}{3}\pi R^3.$$

$$\text{Vậy } \frac{V}{V_T} = \frac{5}{9}.$$

Câu 10. (Đại Học Hà Tĩnh - 2020) Một sợi dây kim loại dài 60cm được cắt thành hai đoạn. Đoạn dây thứ nhất uốn thành hình vuông cạnh a , đoạn dây thứ hai uốn thành đường tròn bán kính r (tham khảo hình vẽ).



Để tổng diện tích của hình vuông và hình tròn nhỏ nhất thì tỉ số $\frac{a}{r}$ bằng:

A. $\frac{a}{r} = 1$.

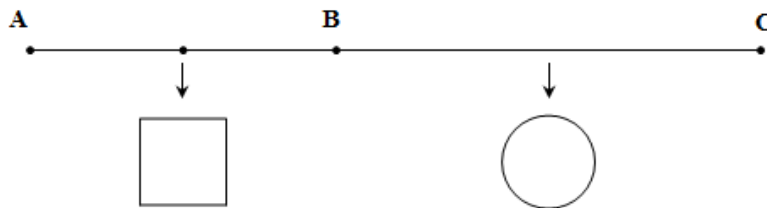
B. $\frac{a}{r} = 2$.

C. $\frac{a}{r} = 3$.

D. $\frac{a}{r} = 4$.

Lời giải**Chọn B**

Giả sử đoạn dây thứ nhất có độ dài bằng AB , đoạn dây thứ hai có độ dài bằng BC (như hình vẽ).



+) Độ dài đoạn AB bằng chu vi hình chữ nhật cạnh a nên: $AB = 4a$ và độ dài đoạn BC bằng chu vi đường tròn bán kính r nên: $BC = 2\pi r$. Khi đó,

$$AC = 60 \Leftrightarrow AB + BC = 60 \Leftrightarrow 4a + 2\pi r = 60 \Leftrightarrow 2a + \pi r = 30$$

+) Gọi S là tổng diện tích của hình vuông và hình tròn, suy ra, $S = a^2 + \pi r^2$.

+) Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpxki cho hai bộ số $(2; \sqrt{\pi})$ và $(a; \sqrt{\pi}r)$:

$$(2a + \pi r)^2 = (2a + \sqrt{\pi} \cdot \sqrt{\pi}r)^2 \leq (4 + \pi)(a^2 + \pi r^2) \Leftrightarrow 30^2 \leq (4 + \pi)S \Leftrightarrow S \geq \frac{900}{4 + \pi}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\frac{2}{a} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi r}} \Leftrightarrow \frac{2}{a} = \frac{1}{r} \Leftrightarrow \frac{a}{r} = 2$.

Vậy khi tổng diện tích của hình vuông và hình tròn nhỏ nhất thì tỉ số $\frac{a}{r} = 2$.

Câu 11. (ĐHQG Hà Nội - 2020) Trong các hình trụ có diện tích toàn phần bằng 1000cm^2 thì hình trụ có thể tích lớn nhất là bao nhiêu cm^3

A. 2428.

B. 2532.

C. 2612.

D. 2740.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } S_p = 2\pi Rh + 2\pi R^2 \Rightarrow Rh + R^2 = \frac{S}{2\pi}$$

$$\text{Vậy thể tích khối trụ } V = \pi R^2 h = \pi R \left(\frac{S}{2\pi} - R^2 \right) = \frac{S}{2} R - \pi R^3 = F(R)$$

$$\text{Ta có: } F'(R) = \frac{S}{2} - 3\pi R^2 = 0 \Leftrightarrow R = \sqrt{\frac{S}{6\pi}}$$

Bảng biến thiên

R	0	$R = \sqrt{\frac{S}{6\pi}}$	$+\infty$
$F'(R)$	+	0	-
$F(R)$		$F\left(\sqrt{\frac{S}{6\pi}}\right)$	

$$\text{Từ bảng biến thiên ta có } V_{\max} = \frac{S}{2} R - \pi R^3 = \frac{1000}{2} \sqrt{\frac{1000}{6\pi}} - \pi \sqrt{\frac{1000}{6\pi}}^3 \approx 2428.$$

Câu 12. (Sở Hưng Yên - 2020) Cho hình trụ có O, O' là tâm hai đáy. Xét hình chữ nhật $ABCD$ có A, B cùng thuộc (O) và C, D cùng thuộc (O') sao cho $AB = a\sqrt{3}$, $BC = 2a$ đồng thời $(ABCD)$ tạo với mặt phẳng đáy hình trụ góc 60° . Thể tích khối trụ bằng

A. $\pi a^3 \sqrt{3}$.

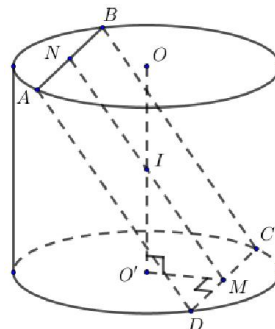
B. $\frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{9}$.

C. $\frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{3}$.

D. $2\pi a^3 \sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của CD, AB và I là trung điểm của OO' .

Suy ra góc giữa mặt phẳng $(ABCD)$ và mặt phẳng đáy là $\widehat{IMO'} = 60^\circ$.

$$\text{Ta có } IM = \frac{1}{2}MN = \frac{1}{2}BC = a.$$

$$\text{Xét } \triangle IO'M \text{ vuông tại } O, \text{ ta có } IO' = IM \cdot \sin \widehat{IMO'} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow h = OO' = 2IO' = a\sqrt{3};$$

$$O'M = IM \cdot \cos \widehat{IMO'} = \frac{a}{2}.$$

$$\text{Xét } \triangle O'MD \text{ vuông tại } M, \text{ có } O'M = \frac{a}{2}, MD = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}AB = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow r = O'D = \sqrt{O'M^2 + MD^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} \Rightarrow r = a.$$

$$\text{Vậy } V = \pi r^2 h = \pi a^3 \sqrt{3}.$$

Câu 13. (Sở Phú Thọ - 2020) Cho hình nón đỉnh S có đáy là hình tròn tâm O . Một mặt phẳng đi qua đỉnh của hình nón và cắt hình nón theo thiết diện là một tam giác vuông SAB có diện tích bằng $4a^2$. Góc giữa trục SO và mặt phẳng (SAB) bằng 30° . Diện tích xung quanh của hình nón đã cho bằng

A. $4\sqrt{10}\pi a^2$.

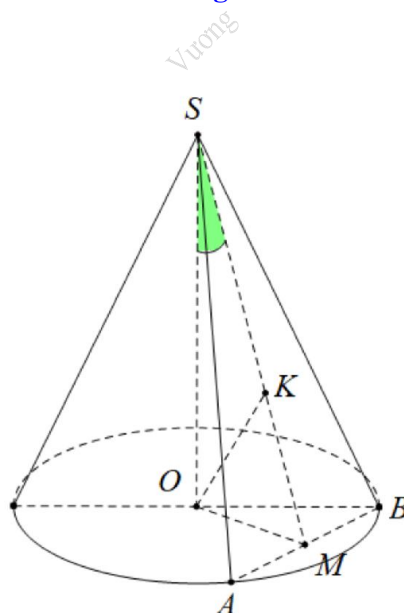
B. $2\sqrt{10}\pi a^2$.

C. $\sqrt{10}\pi a^2$.

D. $8\sqrt{10}\pi a^2$.

Lời giải

Chọn B



Gọi M là trung điểm của AB , tam giác OAB cân đỉnh O nên $OM \perp AB$ và $SO \perp AB$ suy ra $AB \perp (SOM)$.

Dựng $OK \perp SM$.

Theo trên có $OK \perp AB$ nên $OK \perp (SAB)$.

Vậy góc tạo bởi giữa trục SO và mặt phẳng (SAB) là $\widehat{OSM} = 30^\circ$.

Tam giác vuông cân SAB có diện tích bằng $4a^2$ suy ra $\frac{1}{2}SA^2 = 4a^2 \Rightarrow SA = 2a\sqrt{2}$
 $\Rightarrow AB = 4a \Rightarrow SM = 2a$.

Xét tam giác vuông SOM có $\cos \widehat{OSM} = \frac{SO}{SM} \Rightarrow SO = \frac{\sqrt{3}}{2}.2a = \sqrt{3}a$.

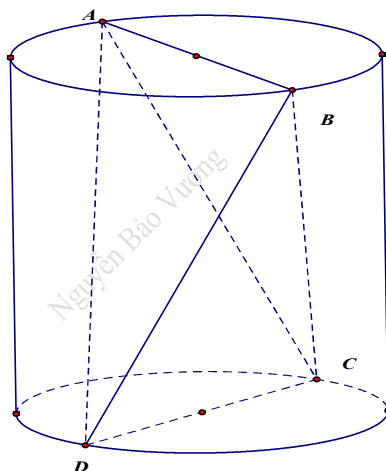
Cuối cùng $OB = \sqrt{SB^2 - SO^2} = a\sqrt{5}$.

Vậy diện tích xung quanh của hình nón bằng $S_{xq} = \pi rl = \pi.a\sqrt{5}.2a\sqrt{2} = 2a^2\sqrt{10}\pi$.

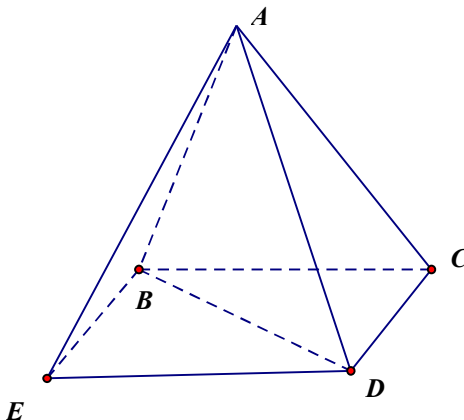
- Câu 14.** (Sở Hà Tĩnh - 2020) Cho khối trụ có hai đáy là (O) và (O') . AB, CD lần lượt là hai đường kính của (O) và (O') , góc giữa AB và CD bằng 30° , $AB = 6$. Thể tích khối tứ diện $ABCD$ bằng 30. Thể tích khối trụ đã cho bằng
- A. 180π . B. 90π . C. 30π . D. 45π .

Lời giải

Chọn B



Ta chứng minh: $V_{ABCD} = \frac{1}{6} AB.CD.d(AB, CD). \sin(AB, CD)$.



Lấy điểm E sao cho tứ giác $BCDE$ là hình bình hành.

Khi đó $(AB, CD) = (AB, BE) \Rightarrow \sin(AB, CD) = \sin(AB, BE)$.

$$d(D, (ABE)) = d(AB, CD).$$

$$V_{ABCD} = V_{ABDE} = \frac{1}{3} \cdot d(D, (ABE)) \cdot S_{ABE} = \frac{1}{6} AB \cdot CD \cdot d(AB, CD) \cdot \sin(AB, CD)$$

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} AB \cdot CD \cdot d(AB, CD) \cdot \sin(AB, CD) \Rightarrow d(AB, CD) = \frac{6V_{ABCD}}{AB \cdot CD \cdot \sin 30^\circ} = \frac{180}{6 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2}} = 10.$$

Chiều cao của lăng trụ bằng $h = d(AB, CD) = 10$.

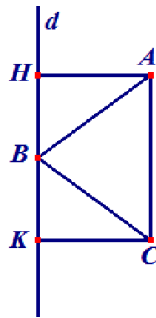
Thể tích lăng trụ: $V = S \cdot h = \pi \cdot 3^2 \cdot 10 = 90\pi$.

Câu 15. (Sở Ninh Bình) Cho tam giác vuông cân ABC có $AB = BC = a\sqrt{2}$. Khi quay tam giác ABC quanh đường thẳng đi qua B và song song với AC ta thu được một khối tròn xoay có thể tích bằng

- A. $2\pi a^3$. B. $\frac{2\pi a^3}{3}$. C. $\frac{4\pi a^3}{3}$. D. πa^3 .

Lời giải

Chọn C



Gọi d là đường thẳng đi qua B và song song với AC ; H, K lần lượt là hình chiếu của A, C trên d . Ta có $AC = 2a$, $HA = KC = a$.

Khối tròn xoay cần nhận được khi quay tam giác ABC quanh d chính là khối tròn xoay có được bằng cách từ khối trụ với hai đáy là hình tròn (H, HA) và (K, KC) bỏ đi 2 khối nón chung đỉnh B với đáy lần lượt là (H, HA) và (K, KC) .

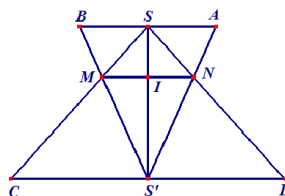
$$\text{Do đó } V = \pi \cdot HA^2 \cdot AC - 2 \cdot \frac{1}{3} \pi \cdot HA^2 \cdot \frac{AC}{2} = 2\pi a^3 - \frac{2}{3} \pi a^3 = \frac{4}{3} \pi a^3.$$

Câu 16. (Sở Ninh Bình) Cho hai khối nón có chung trục $SS' = 3r$. Khối nón thứ nhất có đỉnh S , đáy là hình tròn tâm S' bán kính $2r$. Khối nón thứ hai có đỉnh S' , đáy là hình tròn tâm S bán kính r . Thể tích phần chung của hai khối nón đã cho bằng

- A. $\frac{4\pi r^3}{27}$. B. $\frac{\pi r^3}{9}$. C. $\frac{4\pi r^3}{9}$. D. $\frac{4\pi r^3}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi (P) là mặt phẳng đi qua trục của hai khối nón và lần lượt cắt hai đường tròn (S, r) và $(S', 2r)$ theo đường kính AB, CD . Gọi $M = SC \cap S'B, N = SD \cap S'A$. Phần chung của 2 khối nón đã cho gồm 2 khối nón chung đáy là hình tròn đường kính MN và đỉnh lần lượt là S, S' .

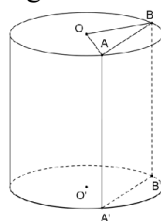
$$\text{Ta có } \frac{MN}{CD} = \frac{SN}{SD} = \frac{SN}{SN + ND} = \frac{SA}{SA + S'D} = \frac{r}{3r} = \frac{1}{3} \Rightarrow MN = \frac{1}{3}CD = \frac{4r}{3}.$$

$$\text{Gọi } I \text{ là giao điểm của } MN \text{ và } SS'. \text{ Ta có } SI = \frac{1}{3}SS' = r, S'I = \frac{2}{3}SS' = 2r.$$

Do đó thể tích phần chung là

$$V = \frac{1}{3}\pi SI \cdot \left(\frac{MN}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\pi S'I \cdot \left(\frac{MN}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}\pi r \cdot \frac{4r^2}{9} + \frac{1}{3}\pi \cdot 2r \cdot \frac{4r^2}{9} = \frac{4\pi r^3}{9}.$$

- Câu 17. (Sở Bình Phước - 2020)** Một hình trụ có diện tích xung quanh là 4π , thiết diện qua trục là một hình vuông. Một mặt phẳng (α) song song với trục, cắt hình trụ theo thiết diện $ABB'A'$, biết một cạnh của thiết diện là một dây của đường tròn đáy của hình trụ và căng một cung 120° . Diện tích của thiết diện $ABB'A'$ bằng



A. $2\sqrt{3}$.

B. $2\sqrt{2}$.

C. $3\sqrt{2}$.

D. $\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi bán kính đáy và chiều cao của hình trụ lần lượt là r, h .

Theo đề ra ta có: $2\pi rh = 4\pi \Rightarrow rh = 2$ (1).

Không giảm tính tổng quát, ta giả sử AB là dây của đường tròn đáy của hình trụ. Gọi O là tâm của đáy trên của hình trụ. Theo bài ra ta có: $\widehat{AOB} = 120^\circ$.

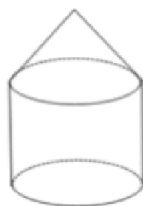
Áp dụng định lý cosin trong tam giác OAB , ta có: $AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cdot \cos(\widehat{AOB})$

$$\Rightarrow AB^2 = r^2 + r^2 - 2r^2 \cdot \cos(120^\circ) = 3r^2 \Rightarrow AB = r\sqrt{3} \quad (2).$$

Mặt khác, do mặt phẳng (α) song song với trục nên $ABB'A'$ là hình chữ nhật và $AA' = h$ (3).

$$\text{Từ (1), (2) và (3) ta suy ra: } S_{ABB'A'} = AB \cdot AA' = r\sqrt{3} \cdot h = rh\sqrt{3} = 2\sqrt{3}.$$

- Câu 18. (Sở Yên Bái - 2020)** Một khối đồ chơi gồm một khối trụ và một khối nón có cùng bán kính được chồng lên nhau, độ dài đường sinh khối trụ bằng độ dài đường sinh khối nón và bằng đường kính khối trụ, khối nón (tham khảo hình vẽ). Biết thể tích toàn bộ khối đồ chơi là 50cm^3 , thể tích khối trụ gần với số nào nhất trong các số sau



A. $38,8\text{cm}^3$.

B. $38,2\text{cm}^3$.

C. $36,5\text{cm}^3$.

D. $40,5\text{cm}^3$.

Lời giải

Chọn A

Gọi $l; r$ lần lượt là độ dài đường sinh và bán kính đáy khối trụ.

Khi đó ta có: $l = 2r$.

Suy ra thể tích khối trụ là $V_t = \pi r^2 l = 2\pi r^3$.

Gọi $h_n; l_n$ lần lượt là chiều cao và đường sinh của khối nón.

Theo giả thiết ta có $\begin{cases} l_n = l \\ h_n = \sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{3}r \end{cases}$.

Khi đó thể tích khối nón là $V_n = \frac{1}{3}\pi r^2 h_n = \frac{\sqrt{3}}{3}\pi r^3$.

Do thể tích toàn bộ khối đồ chơi là 50cm^3 nên

$$V_t + V_n = 2\pi r^3 + \frac{\sqrt{3}}{3}\pi r^3 = \left(2 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\pi r^3 = 50 \Rightarrow \pi r^3 = \frac{150}{6 + \sqrt{3}}.$$

Khi đó thể tích khối trụ là $V_t = \pi r^2 l = 2\pi r^3 \approx 38,8\text{cm}^3$.

Câu 19. (Bỉm Sơn - Thanh Hóa - 2020) Thiết diện qua trục của một hình nón là một tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng $a\sqrt{2}$. Một thiết diện qua đỉnh tạo với đáy một góc 60° . Diện tích của thiết diện này bằng

A. $\frac{a^2\sqrt{2}}{3}$.

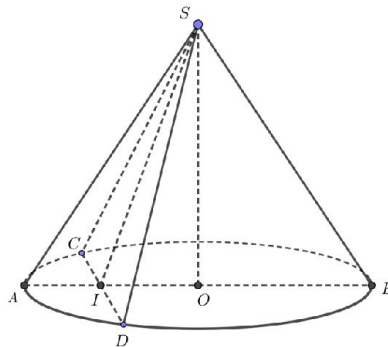
B. $\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$.

C. $2a^2$.

D. $\frac{a^2\sqrt{2}}{4}$.

Lời giải

Chọn A



Giả sử hình nón có đỉnh S , tâm đường tròn đáy là O . Thiết diện qua trục là $\triangle SAB$, thiết diện qua đỉnh là $\triangle SCD$; gọi I là trung điểm của CD .

Theo giả thiết ta có $\triangle SAB$ vuông cân tại S , cạnh huyền $AB = a\sqrt{2} \Rightarrow r = OA = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

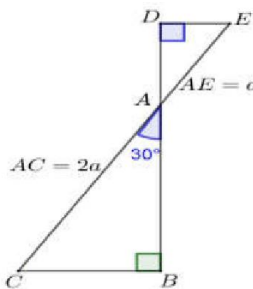
$$SA = SB = l = a \Rightarrow h = SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{a^2 - \frac{2a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Ta lại có } \widehat{SIO} = 60^\circ \Rightarrow \sin 60^\circ = \frac{SO}{SI} \Rightarrow SI = \frac{SO}{\sin 60^\circ} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{a\sqrt{6}}{3};$$

$$ID = \sqrt{SD^2 - SI^2} = \sqrt{a^2 - \frac{6a^2}{9}} = \frac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow CD = \frac{2a\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Diện tích thiết diện cần tìm là } S_{\Delta SCD} = \frac{1}{2} \cdot CD \cdot SI = \frac{1}{2} \cdot \frac{2a\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a^2\sqrt{2}}{3}.$$

Câu 20. (Đặng Thúc Hứa - Nghệ An - 2020) Tính thể tích của vật thể tròn xoay khi quay mô hình (như hình vẽ bên) quanh trục DB .



A. $\frac{9\pi a^3\sqrt{3}}{8}$.

B. $\frac{3\pi a^3\sqrt{3}}{8}$.

C. $\frac{2\pi a^3\sqrt{3}}{3}$.

D. $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{12}$.

Lời giải

Chọn B

Thể tích của vật thể tròn xoay gồm hai phần bao gồm thể tích V_1 của hình nón tạo bởi tam giác vuông ABC khi quay quanh cạnh AB và thể tích V_2 của hình nón tạo bởi tam giác vuông ADE khi quay quanh cạnh AD .

*Xét tam giác vuông ABC vuông tại B ta có:

$$r_1 = BC = AC \cdot \sin 30^\circ = a; \quad h_1 = AB = AC \cdot \sin 60^\circ = a\sqrt{3}$$

$$\text{Vậy ta có } V_1 = \frac{1}{3} \pi r_1^2 \cdot h_1 = \frac{1}{3} \pi \cdot a^2 \cdot a\sqrt{3} = \frac{\pi\sqrt{3}a^3}{3}.$$

*Xét tam giác vuông ADE vuông tại D ta có:

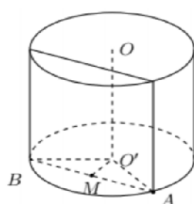
$$r_2 = DE = AE \cdot \sin 30^\circ = \frac{a}{2}; \quad h_2 = AD = AE \cdot \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Vậy ta có } V_2 = \frac{1}{3} \pi r_2^2 \cdot h_2 = \frac{1}{3} \pi \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi\sqrt{3}a^3}{24}.$$

$$\text{Vậy thể tích của vật thể tròn xoay là } V = V_1 + V_2 = \frac{\pi\sqrt{3}a^3}{3} + \frac{\pi\sqrt{3}a^3}{24} = \frac{3\pi\sqrt{3}a^3}{8}.$$

Câu 21. (Đặng Thúc Hứa - Nghệ An - 2020) Cho khối lăng trụ T đường cao OO' , bán kính đáy r và thể tích V . Cắt khối trụ T thành hai phần bởi mặt phẳng (P) song song với trục và cách trục một khoảng bằng $\frac{r}{2}$ (như hình vẽ bên dưới). Gọi V_1 là thể tích phần không chứa trục OO' .

Tính tỷ số $\frac{V_1}{V}$.



A. $\frac{V_1}{V} = \frac{\pi - \sqrt{3}}{2\pi}$.

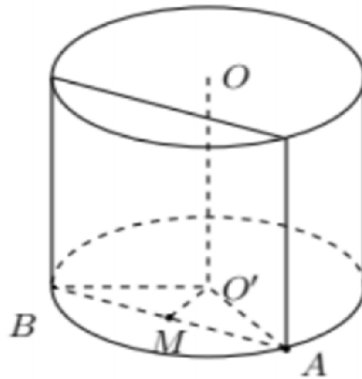
B. $\frac{V_1}{V} = \frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{3}}{3}$.

C. $\frac{V_1}{V} = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4\pi}$.

D. $\frac{V_1}{V} = \frac{4 - \sqrt{3}}{4\pi}$.

Lời giải

Chọn C



Theo giả thiết, hình trụ T có chiều cao $h = \frac{V}{\pi r^2}$.

Giả sử mặt phẳng (P) cắt một mặt đáy hình trụ theo dây cung AB (như hình vẽ). Gọi M là trung điểm của AB . Khi đó, $d(OO', (P)) = O'M = \frac{r}{2}$.

Xét tam giác $O'AM$ có $O'A = r$, $O'M = \frac{r}{2}$. Suy ra $\widehat{MO'A} = 60^\circ$. Suy ra hình quạt tròn $O'AB$ có diện tích $S = \frac{\pi r^2 120}{360} = \frac{\pi r^2}{3}$.

Khi đó, phần hình phẳng giới hạn bởi dây AB và cung nhỏ bằng AB có diện tích

$$S_1 = S - S_{\Delta O'AB} = \frac{\pi r^2}{3} - \frac{1}{2} r^2 \sin 120^\circ = \frac{4\pi r^2 - 3r^2 \sqrt{3}}{12}.$$

$$\text{Suy ra } V_1 = \int_0^h S_1 dx = S_1 \cdot h = \frac{4\pi r^2 - 3r^2 \sqrt{3}}{12} \cdot \frac{V}{\pi r^2}.$$

$$\text{Vậy } \frac{V_1}{V} = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4\pi}.$$

Câu 22. (Đô Lương 4 - Nghệ An - 2020) Cho tam giác ABC vuông tại A , $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $b < c$. Khi quay tam giác vuông ABC một vòng quanh cạnh BC , quanh cạnh AC , quanh cạnh AB , ta thu được các hình có diện tích toàn phần theo thứ tự bằng S_a, S_b, S_c . Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $S_b > S_c > S_a$.

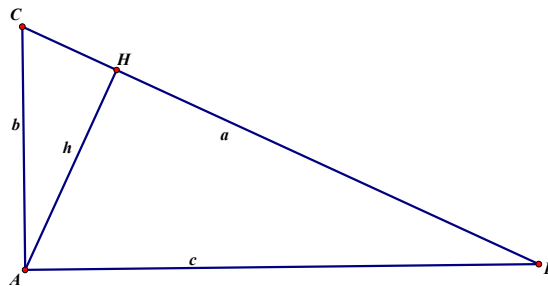
B. $S_b > S_a > S_c$.

C. $S_c > S_a > S_b$.

D. $S_a > S_c > S_b$.

Lời giải

Chọn A



Gọi H là hình chiếu của A lên cạnh BC , $AH = h$.

Khi quay tam giác vuông ABC một vòng quanh cạnh BC ta thu được hình hợp bởi hai hình nón tròn xoay có chung đáy bán kính bằng h , đường sinh lần lượt là b, c . Do đó $S_a = \pi bh + \pi ch$.

Khi quay tam giác vuông ABC một vòng quanh cạnh AC ta thu được hình nón tròn xoay có bán kính đáy bằng c , đường sinh bằng a , $S_b = \pi ac + \pi c^2 = \pi c(a + c)$.

Khi quay tam giác vuông ABC một vòng quanh cạnh AB ta thu được hình nón tròn xoay có bán kính đáy bằng b , đường sinh bằng a , $S_c = \pi ab + \pi b^2 = \pi b(a + b)$.

$$\text{Do } b < c \text{ nên } \begin{cases} ab < ac \\ b^2 < c^2 \end{cases} \Rightarrow S_c < S_b.$$

$$\text{Ta có } h = \frac{bc}{a} \Rightarrow S_a = \pi b^2 \cdot \frac{c}{a} + \pi c^2 \cdot \frac{b}{a}.$$

$$\text{Tam giác } ABC \text{ vuông nên } \frac{c}{a} < 1 \Rightarrow \pi b^2 \frac{c}{a} < \pi b^2; \frac{c^2}{a^2} < 1 \Rightarrow \pi c^2 \frac{b}{a} < \pi ab.$$

$$\Rightarrow S_a < \pi b^2 + \pi ab = \pi b(a + b) = S_c. \text{ Do đó } S_a < S_c.$$

$$\text{Vậy } S_b > S_c > S_a.$$

Câu 23. (Lê Lai - Thanh Hóa - 2020) Cho hình nón có chiều cao bằng $2\sqrt{3}$. Mặt phẳng đi qua đỉnh của hình nón, cắt hình nón theo thiết diện là tam giác đều sao cho góc hợp bởi mặt phẳng thiết diện và mặt đáy của hình nón có số đo bằng 60° . Thể tích của khối nón được giới hạn bởi hình nón đã cho bằng

- A. 104π . B. $\frac{4\sqrt{39}\pi}{3}$. C. $104\sqrt{3}\pi$. D. $\frac{56\sqrt{3}\pi}{9}$.

Lời giải

Chọn D

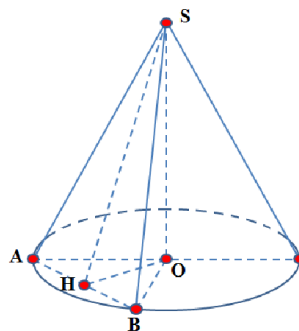
Mặt phẳng qua đỉnh của hình nón và cắt hình nón theo thiết diện là tam giác đều SAB .

Gọi H là trung điểm của AB ta có $SH \perp AB$ và $OH \perp AB$. Do đó góc hợp bởi bởi mặt phẳng thiết diện và mặt đáy của hình nón là góc $\widehat{SHO} = 60^\circ$

Theo đề bài ta có: $h = SO = 2\sqrt{3}$.

Xét tam giác SHO vuông tại O có

$$\sin \widehat{SHO} = \frac{SO}{SH} \Leftrightarrow SH = \frac{SO}{\sin 60^\circ} = 4.$$



$$\text{mà } SH = \frac{AB\sqrt{3}}{2} \text{ (do tam giác } SAB \text{ là tam giác đều)}$$

$$\Rightarrow AB = \frac{2SH}{\sqrt{3}} = \frac{8}{\sqrt{3}} \Rightarrow AB = \frac{2SH}{\sqrt{3}} = 8$$

$$\Rightarrow SA = SB = AB = \frac{8}{\sqrt{3}}.$$

$$\Delta SOA \text{ vuông tại } O \text{ ta có: } SA^2 = OA^2 + SO^2 \Rightarrow OA^2 = SA^2 - SO^2 = \frac{28}{3} \Rightarrow r^2 = OA^2 = \frac{28}{3}$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \frac{28}{3} \cdot 2\sqrt{3} = \frac{56\pi\sqrt{3}}{9} \text{ (đvtt)}.$$

Câu 24. (Liên trường Nghệ An - 2020) Một sợi dây (không co giãn) được quấn đối xứng đúng 10 vòng quanh một ống trụ tròn đều có bán kính $R = \frac{2}{\pi} \text{ cm}$ (Như hình vẽ)



Biết rằng sợi dây dài 50 cm . Hãy tính diện tích xung quanh của ống trụ đó.

A. 80 cm^2 .

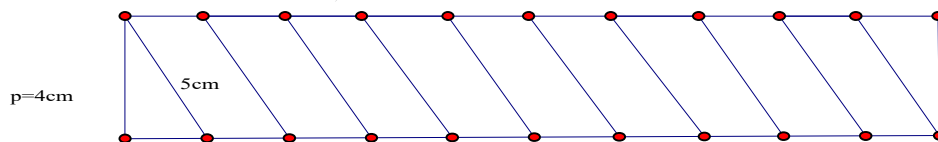
B. 100 cm^2 .

C. 60 cm^2 .

D. 120 cm^2 .

Lời giải

Khi trải phẳng ống trụ tròn đều ta được một hình chữ nhật có chiều rộng là chu vi của mặt đáy còn chiều dài là chiều dài của trụ, mỗi vòng quấn của dây dài 5 cm là đường chéo của hình chữ nhật có kích thước lần lượt bằng chu vi đáy trụ và $\frac{1}{10}$ chiều dài trụ (hình vẽ).



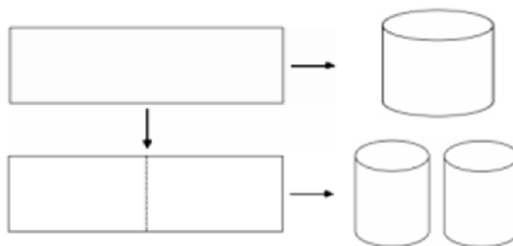
$$\text{Gọi chiều dài trụ là } l(\text{cm}), \text{ theo định lý Pitago ta có } \sqrt{5^2 - \left(2 \cdot \frac{2}{\pi}\right)^2} = \frac{l}{10} \Leftrightarrow l = 30(\text{cm}).$$

$$\text{Vậy diện tích xung quanh của trụ là: } S_{xq} = 2 \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \pi \cdot 30 = 120(\text{cm}^2).$$

Câu 25. (Lý Nhân Tông - Bắc Ninh - 2020) Từ một tấm tôn hình chữ nhật kích thước $50 \text{ cm} \times 240 \text{ cm}$, người ta làm các thùng đựng nước hình trụ có chiều cao bằng 50 cm , theo hai cách sau (xem hình minh họa dưới đây):

- Cách 1: Gò tấm tôn ban đầu thành mặt xung quanh của thùng.
- Cách 2: Cắt tấm tôn ban đầu thành hai tấm bằng nhau, rồi gò mỗi tấm đó thành mặt xung quanh của một thùng.

Kí hiệu V_1 là thể tích của thùng gò được theo cách 1 và V_2 là tổng thể tích của hai thùng gò được theo cách 2. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.



A. $\frac{V_1}{V_2} = 1.$

B. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{2}.$

C. $\frac{V_1}{V_2} = 2.$

D. $\frac{V_1}{V_2} = 4.$

Lời giải

Chọn C

Ở cách 1, thùng hình trụ có chiều cao $h = 50$ cm, chu vi đáy $C_1 = 240$ cm nên bán kính đáy

$$R_1 = \frac{C_1}{2\pi} = \frac{120}{\pi} \text{ cm. Do đó thể tích của thùng là } V_1 = \pi R_1^2 h.$$

Ở cách 2, hai thùng đều có chiều cao $h = 50$ cm, chu vi đáy $C_2 = 120$ cm nên bán kính đáy

$$R_2 = \frac{C_2}{2\pi} = \frac{60}{\pi} \text{ cm. Do đó tổng thể tích của hai thùng là } V_2 = 2\pi R_2^2 h.$$

$$\text{Vậy } \frac{V_1}{V_2} = \frac{\pi R_1^2 h}{2\pi R_2^2 h} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\frac{120}{\pi}}{\frac{60}{\pi}} \right)^2 = 2.$$

Câu 26. (Nguyễn Huệ - Phú Yên - 2020) Cho hình nón có chiều cao $6a$. Một mặt phẳng (P) đi qua đỉnh của hình nón và có khoảng cách đến tâm là $3a$, thiết diện thu được là một tam giác vuông cân. Thể tích của khối nón được giới hạn bởi hình nón đã cho bằng

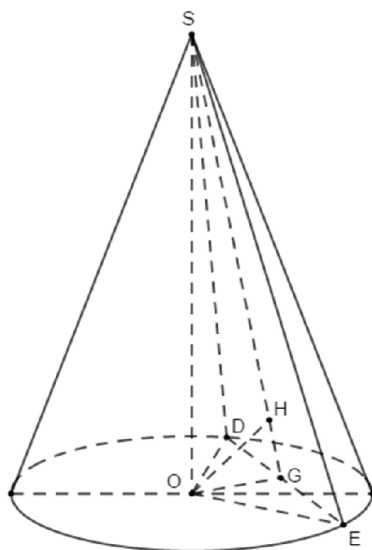
A. $150\pi a^3.$

B. $96\pi a^3.$

C. $108\pi a^3.$

D. $120\pi a^3.$

Lời giải

Chọn D

Mặt phẳng (P) cắt hình nón theo thiết diện là tam giác SDE . Theo giả thiết, tam giác SDE vuông cân tại đỉnh S . Gọi G là trung điểm DE , kẻ $OH \perp SG \Rightarrow OH = 3a$.

$$\text{Ta có } \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OG^2} \Rightarrow \frac{1}{OG^2} = \frac{1}{OH^2} - \frac{1}{SO^2} \Rightarrow OG = 2a\sqrt{3}.$$

$$\text{Do } SO \cdot OG = OH \cdot SG \Rightarrow SG = \frac{SO \cdot OG}{SG} = \frac{6a \cdot 2a\sqrt{3}}{3a} = 4a\sqrt{3} \Rightarrow DE = 8a\sqrt{3}.$$

$$OD = \sqrt{OG^2 + DG^2} = \sqrt{12a^2 + 48a^2} = 2\sqrt{15}a.$$

$$\text{Vậy } V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (2\sqrt{15}a)^2 \cdot 6a = 120\pi a^3$$

Câu 27. (Nguyễn Trãi - Thái Bình - 2020) Trong tất cả các hình nón nội tiếp trong hình cầu có thể tích bằng 36π , bán kính r của hình nón có diện tích xung quanh lớn nhất là

A. $r = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$

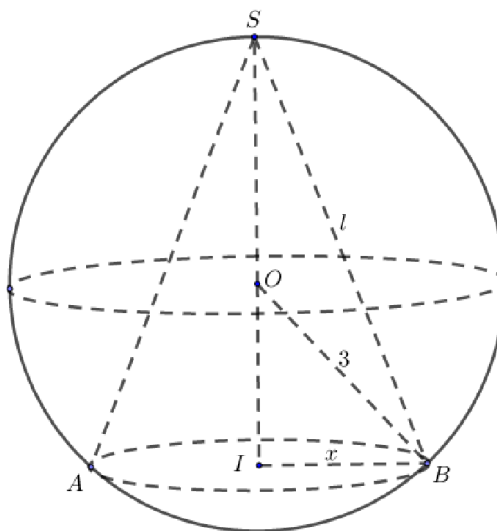
B. $r = \frac{3}{2}.$

C. $r = 2\sqrt{2}.$

D. $r = 3.$

Lời giải

Chọn C



Vì hình cầu có thể tích là 36π nên bán kính hình cầu là $R = 3$.

Ta có diện tích xung quanh của hình nón là $S = \pi r l$.

Để hình nón có diện tích xung quanh lớn nhất thì đỉnh của hình nón và đáy của hình nón phải ở hai phía so với đường tròn kính của hình cầu.

Đặt bán kính đáy hình nón là $r = x$ với $0 < x \leq 3$ và tâm của đáy hình nón là I .

Ta có tam giác OIB vuông tại I nên $OI = \sqrt{9 - x^2}$.

Chiều cao của hình nón là $h = 3 + \sqrt{9 - x^2}$.

Độ dài đường sinh của hình nón là $l = \sqrt{(3 + \sqrt{9 - x^2})^2 + x^2} = \sqrt{18 + 6\sqrt{9 - x^2}}$.

Suy ra diện tích xung quanh của hình nón là $S = \pi x \sqrt{18 + 6\sqrt{9 - x^2}}$.

Đặt $P = x \sqrt{18 + 6\sqrt{9 - x^2}}$ nên $P^2 = x^2 (18 + 6\sqrt{9 - x^2})$ và đặt $\sqrt{9 - x^2} = t$, ($0 \leq t < 3$).

Khi đó $P^2 = (9 - t^2)(18 + 6t)$ với $0 \leq t < 3$.

Xét hàm số $y = (9 - t^2)(18 + 6t) \Leftrightarrow y = -6t^3 - 18t^2 + 54t + 162$ có

$$y' = -18t^2 - 36t + 54 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -3(L) \end{cases}.$$

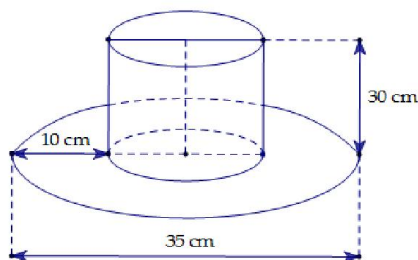
Bảng biến thiên của hàm số $y = (9 - t^2)(18 + 6t)$ trên $0 \leq t < 3$.

t	0	1	3
y'	+	0	-
y	162	192	0

Từ bảng biến thiên, P^2 lớn nhất khi và chỉ khi $t = 1$ suy ra P lớn nhất khi và chỉ khi $t = 1$.

Khi đó $S = \pi x \sqrt{18 + 6\sqrt{9 - x^2}}$ lớn nhất khi $\sqrt{9 - x^2} = 1 \Leftrightarrow x = 2\sqrt{2}$ và diện tích xung quanh của mặt cầu khi đó là $S = 8\sqrt{3}\pi$.

Câu 28. (THPT Nguyễn Viết Xuân - 2020) Một cái mũ bằng vải của nhà ảo thuật với kích thước như hình vẽ. Hãy tính tổng diện tích vải cần có để làm nên cái mũ đó (không tính viền, mép, phần thừa).



- A. $750,25\pi (cm^2)$. B. $756,25\pi (cm^2)$. C. $700\pi (cm^2)$. D. $700\pi (cm^2)$.

Lời giải

Chọn B

Bán kính hình trụ của cái mũ là $r = \frac{35 - 10 - 10}{2} = \frac{15}{2} (cm)$.

Đường cao hình trụ của cái mũ là $30 cm$.

Diện tích xung hình trụ là: $S_{xq} = 2\pi rl = 2\pi \cdot \frac{15}{2} \cdot 30 = 450\pi (cm^2)$.

Diện tích vành mũ là: $S_v = \pi \left(\frac{35}{2} \right)^2 - S_d (cm^2)$.

Vậy tổng diện tích vải cần có để làm nên cái mũ đó (không tính viền, mép, phần thừa) là:

$$S = S_{xq} + S_d + S_v = 450\pi + \left(\frac{35}{2} \right)^2 \pi = 756,25\pi (cm^2).$$

Câu 29. (Tiên Du - Bắc Ninh - 2020) Cho hình trụ có hai đáy là hình tròn tâm O và O' , chiều cao $h = a\sqrt{3}$. Mặt phẳng đi qua tâm O và tạo với OO' một góc 30° , cắt hai đường tròn tâm O và O' tại bốn điểm là bốn đỉnh của một hình thang có đáy lớn gấp đôi đáy nhỏ và diện tích bằng $3a^2$. Thể tích của khối trụ được giới hạn bởi hình trụ đã cho bằng

- A. $\frac{\sqrt{3}\pi a^3}{3}$. B. $\sqrt{3}\pi a^3$. C. $\frac{\sqrt{3}\pi a^3}{12}$. D. $\frac{\sqrt{3}\pi a^3}{4}$.

Ta có: $IB \parallel OA \Rightarrow \frac{IB}{OA} = \frac{SI}{SO} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

Khi đó, $\frac{V_1}{V} = \frac{\frac{1}{3}\pi \cdot IB^2 \cdot SI}{\frac{1}{3}\pi \cdot OA^2 \cdot SO} = \left(\frac{IB}{OA}\right)^2 \cdot \left(\frac{SI}{SO}\right) = \left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{8}{125}$

Suy ra: $\frac{V_2}{V} = 1 - \frac{8}{125} = \frac{117}{125}$

Vậy $\frac{V_1}{V_2} = \frac{V_1}{V} : \frac{V_2}{V} = \frac{8}{125} : \frac{117}{125} = \frac{8}{117}$

Câu 31. (Hải Hậu - Nam Định - 2020) Trong không gian cho tứ giác $ABCD$ là một nửa lục giác đều nội tiếp đường tròn đường kính $CD = 2a$. Khi quay tứ giác $ABCD$ quanh cạnh AB thì tạo thành một khối tròn xoay. Thể tích khối tròn xoay đó bằng

A. πa^3 .

B. $2\pi a^3$.

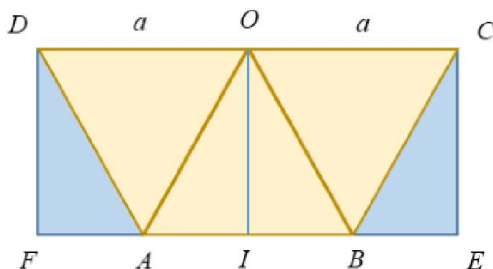
C. $\frac{5}{4}\pi a^3$.

D. $\frac{3}{2}\pi a^3$.

Lời giải

Chọn C

Vẽ hình chữ nhật $DFEC$.



Gọi V_1 là thể tích khối trụ tròn xoay sinh ra khi quay hình chữ nhật $DFEC$ quanh cạnh FE .

V_2 là thể tích khối nón tròn xoay sinh ra khi quay hình tam giác vuông DFA quanh cạnh FA .

Khi đó, thể tích khối tròn xoay cần tìm là $V = V_1 - 2V_2$

Ta có $DF = OI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $AF = AI = \frac{a}{2}$.

$V_1 = \pi r^2 2a = \pi \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 2a = \frac{3\pi a^3}{2}$, $V_2 = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 \frac{a}{2} = \frac{\pi a^3}{8}$.

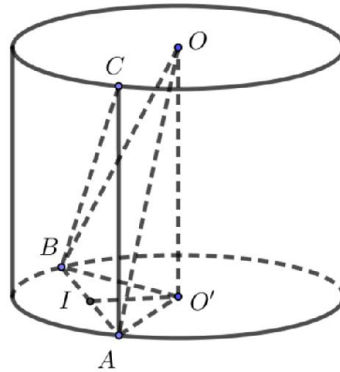
$V = V_1 - 2V_2 = \frac{3\pi a^3}{2} - 2 \cdot \frac{\pi a^3}{8} = \frac{5\pi a^3}{4}$.

Câu 32. (Hải Hậu - Nam Định - 2020) Một khối trụ có bán kính đáy $r = 2a$. O, O' lần lượt là tâm đường tròn đáy. Một mặt phẳng song song với trục và cách trục $\frac{a\sqrt{15}}{2}$, cắt đường tròn (O') tại hai điểm A, B . Biết thể tích của khối tứ diện $OO'AB$ bằng $\frac{a^3\sqrt{15}}{4}$. Độ dài đường cao của hình trụ bằng

A. a .B. $6a$.C. $3a$.D. $2a$.

Lời giải

Chọn C



Vẽ đường sinh AC , khi đó mặt phẳng (ABC) song song với OO' và cách OO' một khoảng $\frac{a\sqrt{15}}{2}$.

Gọi I là trung điểm AB , ta có $d(OO', (ABC)) = d(O', (ABC)) = O'I = \frac{a\sqrt{15}}{2}$.

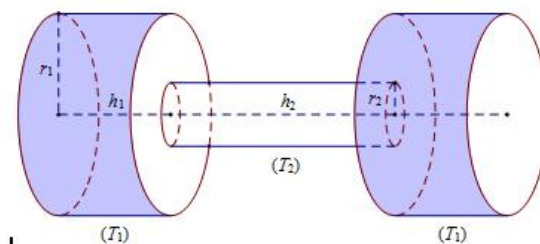
Bán kính $O'A = 2a$ suy ra $BA = 2IA = 2\sqrt{O'A^2 - O'I^2} = 2\sqrt{4a^2 - \frac{15a^2}{4}} = a$.

Thể tích tứ diện $OO'AB$ bằng $\frac{a^3\sqrt{15}}{4}$ nên ta

$$\text{có: } \frac{1}{6} \cdot OO' \cdot IO' \cdot AB = \frac{a^3\sqrt{15}}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{6} \cdot OO' \cdot \frac{a\sqrt{15}}{2} \cdot a = \frac{a^3\sqrt{15}}{4} \Leftrightarrow OO' = 3a.$$

Vậy hình trụ có chiều cao $OO' = 3a$.

Câu 33. (Trường VINSCHOOL - 2020) Một chiếc tạ tay có hình dạng gồm 3 khối trụ, trong đó hai khối trụ ở hai đầu bằng nhau và khối trụ làm tay cầm ở giữa. Gọi khối trụ làm đầu tạ là (T_1) và khối trụ làm tay cầm là (T_2) lần lượt có bán kính và chiều cao tương ứng là r_1, h_1, r_2, h_2 thỏa mãn $r_1 = 4r_2, h_1 = \frac{1}{2}h_2$ (tham khảo hình vẽ).



Biết rằng thể tích của khối trụ tay cầm (T_2) bằng $30 \text{ (cm}^3\text{)}$ và chiếc tạ làm bằng inox có khối lượng riêng là $D = 7,7 \text{ g/cm}^3$. Khối lượng của chiếc tạ tay bằng

A. $3,927 \text{ (kg)}$.B. $2,927 \text{ (kg)}$.C. $3,279 \text{ (kg)}$.D. $2,279 \text{ (kg)}$.

Lời giải

Chọn A

Thể tích của hai khối trụ làm đầu tạ (T_1):

$$V_1 = 2\pi r_1^2 h_1 = 2\pi (4r_2)^2 \frac{1}{2} h_2 = 16\pi r_2^2 h_2 = 16.30 = 480 (cm^3).$$

Tổng thể tích của chiếc tạ tay: $V = V_1 + V_2 = 480 + 30 = 510 (cm^3)$.

Khối lượng của chiếc tạ: $m = D.V = 7,7.510 = 3927 (g) = 3,927 (kg)$.

- Câu 34. (Thanh Chương 1 - Nghệ An - 2020)** Cho một hình nón có bán kính đáy bằng $2a$. Mặt phẳng (P) đi qua đỉnh (S) của hình nón, cắt đường tròn đáy tại A và B sao cho $AB = 2a\sqrt{3}$, khoảng cách từ tâm đường tròn đáy đến mặt phẳng (P) bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Thể tích khối nón đã cho bằng

A. $\frac{8\pi a^3}{3}$.

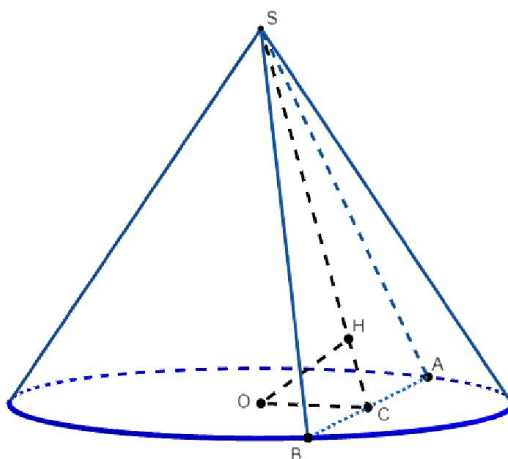
B. $\frac{4\pi a^3}{3}$.

C. $\frac{2\pi a^3}{3}$.

D. $\frac{\pi a^3}{3}$.

Lời giải.

Chọn B



Gọi C là trung điểm của AB , O là tâm của đáy. Khi đó $\begin{cases} SO \perp AB \\ OC \perp AB \end{cases} \Rightarrow (SOC) \perp AB$. Gọi H là hình chiếu của O lên SC thì $OH \perp (SAB)$ nên $OH = a \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$OB = 2a, BC = a\sqrt{3} \Rightarrow OC = a$. Xét tam giác vuông SOC : $\frac{1}{SO^2} = \frac{1}{OH^2} - \frac{1}{OC^2} = \frac{1}{a^2} \Rightarrow SO = a$.

Vậy thể tích khối nón giới hạn bởi hình nón đã cho là $\frac{1}{3} \pi \cdot (2a)^2 \cdot a = \frac{4\pi a^3}{3}$.

- Câu 35. (Tiên Lãng - Hải Phòng - 2020)** Cho hình trụ có đáy là hai đường tròn tâm O và O' , bán kính đáy bằng chiều cao và bằng $2a$. Trên đường tròn đáy có tâm O lấy điểm A , trên đường tròn tâm O' lấy điểm B . Đặt α là góc giữa AB và đáy. Biết rằng thể tích khối tứ diện $OO'AB$ đạt giá trị lớn nhất. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\tan \alpha = \sqrt{2}$.

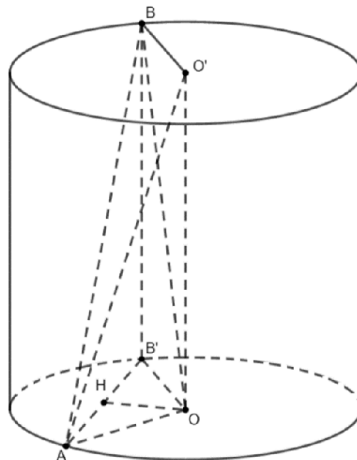
B. $\tan \alpha = 1$.

C. $\tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

D. $\tan \alpha = \frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi B' là hình chiếu của B trên mặt phẳng chứa đường tròn (O) , khi đó AB' là hình chiếu của AB trên mặt phẳng chứa đường tròn (O) .

$$\text{Suy ra } \left(\widehat{AB, (OAB')} \right) = \left(\widehat{AB, AB'} \right) = \widehat{BAB'} = \alpha, \alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2} \right).$$

$$\text{Xét tam giác vuông } ABB' \text{ vuông tại } B' \text{ có } \tan \widehat{BAB'} = \frac{BB'}{AB'} \Rightarrow AB' = \frac{BB'}{\tan \alpha} = \frac{2a}{\tan \alpha}.$$

Gọi H là trung điểm AB' , khi đó $OH \perp AB'$ và

$$OH = \sqrt{OA^2 - AH^2} = \sqrt{R^2 - \frac{AB'^2}{4}} = \sqrt{4a^2 - \frac{a^2}{\tan^2 \alpha}} = a \sqrt{4 - \frac{1}{\tan^2 \alpha}}$$

$$\text{Lại có } S_{\triangle OAB'} = \frac{1}{2} OH \cdot AB' = \frac{1}{2} \cdot OB' \cdot d(A, OB')$$

$$\Rightarrow d(A, OB') = \frac{OH \cdot AB'}{OB'} = \frac{a \sqrt{4 - \frac{1}{\tan^2 \alpha}} \cdot \frac{2a}{\tan \alpha}}{2a} = \frac{a}{\tan \alpha} \sqrt{4 - \frac{1}{\tan^2 \alpha}} = d(A, (OO'BB')).$$

$$\text{Vậy } V_{A.OO'B} = \frac{1}{3} d(A, (OO'BB')) \cdot S_{\triangle OO'B} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{\tan \alpha} \sqrt{4 - \frac{1}{\tan^2 \alpha}} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 2a = \frac{2a^3}{3} \cdot \frac{1}{\tan \alpha} \sqrt{4 - \frac{1}{\tan^2 \alpha}}$$

$$\text{Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có } \frac{1}{\tan \alpha} \sqrt{4 - \frac{1}{\tan^2 \alpha}} \leq \frac{\frac{1}{\tan^2 \alpha} + 4 - \frac{1}{\tan^2 \alpha}}{2} = 2$$

$$\Rightarrow V_{A.OO'B} \leq \frac{2a^3}{3} \cdot 2 = \frac{4a^3}{3}.$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi } \frac{1}{\tan \alpha} = \sqrt{4 - \frac{1}{\tan^2 \alpha}} \Leftrightarrow \frac{1}{\tan^2 \alpha} = 4 - \frac{1}{\tan^2 \alpha} \Leftrightarrow \frac{2}{\tan^2 \alpha} = 4$$

$$\Leftrightarrow \tan^2 \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ do } \alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2} \right).$$

PHẦN 2. MẶT CẦU

Câu 36. (Chuyên ĐH Vinh - Nghệ An -2020) Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AA' = 2a$, $BC = a$. Gọi M là trung điểm của BB' . Bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $M.A'B'C'$ bằng

A. $\frac{3\sqrt{3}a}{8}$.

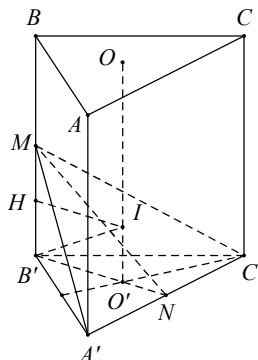
B. $\frac{\sqrt{13}a}{2}$.

C. $\frac{\sqrt{21}a}{6}$.

D. $\frac{2\sqrt{3}a}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi O ; O' lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC và $A'B'C'$.

$$\text{Vì } ABC.A'B'C' \text{ là lăng trụ tam giác đều} \Rightarrow \begin{cases} OO' = AA' = BB' = 2a \\ OO' \perp (ABC); OO' \perp (A'B'C') \\ BC = B'C' = a \end{cases}$$

Như vậy OO' là trục đường tròn ngoại tiếp 2 mặt đáy.

$\Rightarrow$ tâm mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $M.A'B'C'$ nằm trên OO' .

Trong mặt phẳng $(OBB'O')$, từ trung điểm H của MB' , kẻ đường thẳng vuông góc với MB' cắt OO' tại I .

Suy ra $IA' = IC' = IB' = IM \Rightarrow$ khối chóp $M.A'B'C'$ nội tiếp mặt cầu tâm I , bán kính $R = IB'$.

Gọi N là trung điểm của $A'C'$.

Dễ dàng chứng minh được $HIO'B'$ là hình chữ nhật.

$$\begin{aligned} \text{Suy ra } IB' &= \sqrt{IO'^2 + B'O'^2} = \sqrt{HB'^2 + \left(\frac{2}{3}B'N\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{BB'}{4}\right)^2 + \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{BC\sqrt{3}}{2}\right)^2} \\ \Rightarrow IB' &= \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{a\sqrt{21}}{6}. \end{aligned}$$

Câu 37. (Chuyên Hưng Yên - 2020) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh 1. Mặt bên (SAC) là tam giác cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, $SA = SC = \frac{3}{2}$.

Gọi D là điểm đối xứng với B qua C . Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABD$.

A. $\frac{\sqrt{34}}{8}$.

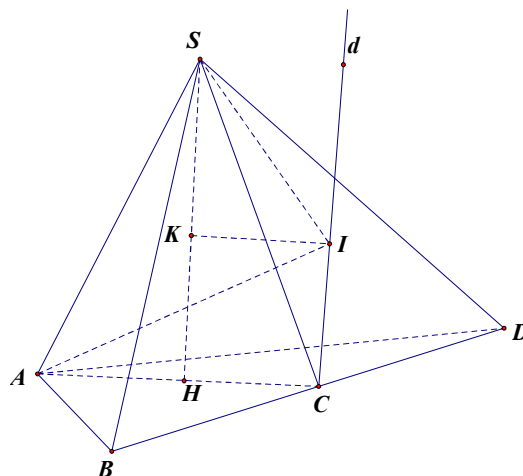
B. $\frac{3\sqrt{34}}{4}$.

C. $\frac{3\sqrt{34}}{16}$.

D. $\frac{3\sqrt{34}}{8}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi H là trung điểm của AC, do SAC là tam giác cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy nên $SH \perp AC \Rightarrow SH \perp (ABC)$ và $SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{1}{4}} = \sqrt{2}$.

Tam giác ABD có AC là đường trung tuyến và $AC = \frac{1}{2}BD$ nên ABD là tam giác vuông tại A, suy ra C là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD.

Dựng trục (d) của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD. Gọi I là tâm của mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABD \Rightarrow I \in d$ và $IA = IS = ID = IB = R$.

$$\text{Kẻ } IK \perp SH \Rightarrow IK = CH = \frac{1}{2}$$

$$\text{Giả sử } HK = x \Rightarrow SK = \sqrt{2} - x \Rightarrow IS = \sqrt{SK^2 + HC^2} = \sqrt{(\sqrt{2} - x)^2 + \frac{1}{4}} = R$$

$$\text{Mặt khác: } R = IA = \sqrt{AC^2 + IC^2} = \sqrt{1 + x^2}.$$

$$\text{Ta có phương trình: } \sqrt{(\sqrt{2} - x)^2 + \frac{1}{4}} = \sqrt{1 + x^2} \Leftrightarrow x = \frac{5\sqrt{2}}{16}$$

$$\text{Suy ra: } R = \frac{3\sqrt{2}}{16} + 1 \quad R = \sqrt{x^2 + 1} = \frac{3\sqrt{34}}{16}.$$

Vậy phương án C đúng.

Câu 38. (Chuyên Thái Bình - 2020) Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có chiều cao bằng 4, đáy ABC là tam giác cân tại A với $AB = AC = 2$; $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ trên

A. $\frac{64\pi\sqrt{2}}{3}$.

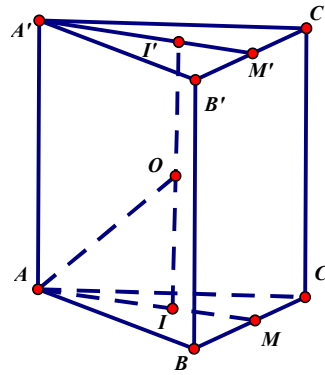
B. 16π .

C. 32π .

D. $\frac{32\pi\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi M, M' lần lượt là trung điểm của BC và $B'C'$. Gọi I, I' lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và tam giác $A'B'C'$. Khi đó, II' là trục đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC và tam giác $A'B'C'$, suy ra tâm mặt cầu là trung điểm O của II' .

Ta có $BM = AB \cdot \sin 60^\circ = \sqrt{3} \Rightarrow BC = 2\sqrt{3}$.

$$\frac{BC}{\sin \widehat{BAC}} = 2 \cdot IA \Rightarrow IA = \frac{2\sqrt{3}}{2 \cdot \sin 120^\circ} = 2; \quad OI = 2 \Rightarrow OA = \sqrt{OI^2 + IA^2} = 2\sqrt{2}.$$

Bán kính mặt cầu $R = OA = 2\sqrt{2}$. Diện tích mặt cầu là $S = 4\pi R^2 = 4\pi (2\sqrt{2})^2 = 32\pi$.

Phương án C được chọn.

Câu 39. (Chuyên Lê Hồng Phong - Nam Định - 2020) Cho hình nón đỉnh S và đáy là hình tròn tâm O . Biết rằng chiều cao của nón bằng a và bán kính đáy nón bằng $2a$. Một mặt phẳng (P) đi qua đỉnh S và cắt đường tròn đáy nón tại hai điểm A, B mà $AB = 2a\sqrt{3}$. Hãy tính theo a diện tích mặt cầu ngoại tiếp khối tứ diện $SOAB$.

A. $5\pi a^2$.

B. $17\pi a^2$.

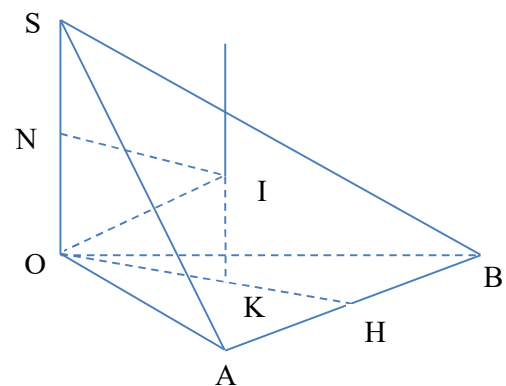
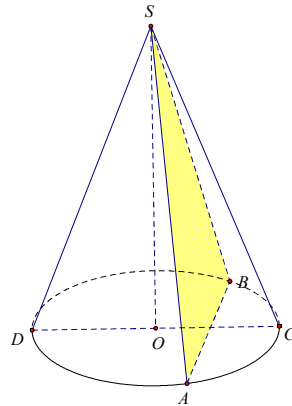
C. $7\pi a^2$.

D. $26\pi a^2$.

Lời giải

Chọn B

Gọi d là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB và trục đường tròn d cắt đường trung trục của đoạn thẳng SO tại I . Gọi r là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB thì $r = OK$.



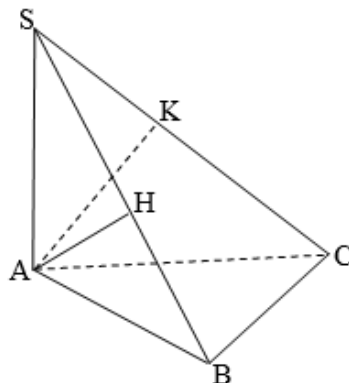
Khi đó R là bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.OAB$ thì $R = IO = IS = IA = IB$.

$$\text{Ta có } S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2} OH \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{OA^2 - AH^2} \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{4a^2 - (a\sqrt{3})^2} \cdot 2a\sqrt{3} = a^2\sqrt{3}.$$

$$\text{Mặt khác } S_{\Delta OAB} = \frac{OA \cdot OB \cdot AB}{4r} \Rightarrow r = \frac{OA \cdot OB \cdot AB}{4 \cdot S} = \frac{2a \cdot 2a \cdot 2a\sqrt{3}}{4 \cdot a^2\sqrt{3}} = 2a.$$

$$\text{Khi đó } R = \sqrt{OK^2 + ON^2} = \sqrt{(2a)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{17}}{2} \Rightarrow S_{m.c} = 4\pi.R^2 = 17\pi a^2..$$

Câu 40. (**Chuyên Phan Bội Châu - Nghệ An - 2020**) Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy, đáy là tam giác đều, $SA = a\sqrt{3}$ và góc giữa đường thẳng SB và đáy bằng 60° . Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB, SC . Tính bán kính mặt cầu đi qua các điểm A, B, H, K .



A. $\frac{a}{2}$.

B. $\frac{\sqrt{3}a}{6}$.

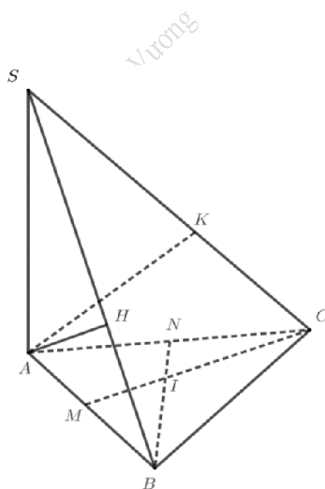
C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

D. $\frac{\sqrt{3}a}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Cách 1:



$$\text{Góc giữa đường thẳng } SB \text{ và đáy bằng } 60^\circ \Rightarrow \widehat{SBA} = 60^\circ \Rightarrow AB = \frac{SA}{\tan 60^\circ} = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = a.$$

Gọi BN, CM lần lượt là hai đường cao của tam giác ABC và I là trọng tâm của ΔABC .

Do tam giác ABC đều nên M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AC .

Tam giác ABH vuông tại H nên M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABH ,

mặt khác $\left. \begin{matrix} CM \perp AB \\ CM \perp SA \end{matrix} \right\} \Rightarrow CM \perp (SAB)$, ta suy ra CM là trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác

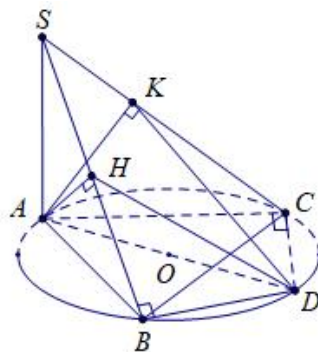
ABH . Hoàn toàn tương tự ta có BN là trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác ACK . Từ đó

suy ra $IA = IB = IH = IC = IK$ hay I là tâm mặt cầu đi qua các điểm A, B, H, K bán kính mặt

$$\text{cầu là } R = IA = \frac{2}{3} \cdot \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{AB\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Vậy } R = \frac{AB\sqrt{3}}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Cách 2:



Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ và D là điểm đối xứng của A qua điểm O .

Ta có $BD \perp AB$ và $BD \perp SA \Rightarrow BD \perp (SAB) \Rightarrow BD \perp AH$.

Từ giả thuyết $\Rightarrow AH \perp SB$

$\Rightarrow AH \perp (SBD) \Rightarrow AH \perp HD$.

Tương tự $AK \perp KD$.

Do các điểm B, H, K nhìn AD dưới một góc vuông nên B, H, K nằm trên mặt cầu đường kính AD .

$$\left(\widehat{SB; (ABC)} \right) = \widehat{SBA} = 60^\circ$$

$$\tan \widehat{SBA} = \frac{SA}{AB} \Rightarrow AB = \frac{SA}{\tan 60^\circ} = a. \text{ Tam giác } ABC \text{ đều cạnh } a \text{ ta có } AO = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Vậy mặt cầu qua } A, B, H, K \text{ có bán kính } R = \frac{AD}{2} = AO = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Câu 41. (Chuyên Sơn La - 2020) Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có các cạnh đều bằng a . Tính diện tích S của mặt cầu đi qua 6 đỉnh của hình lăng trụ đó.

A. $S = \frac{7\pi a^2}{3}$

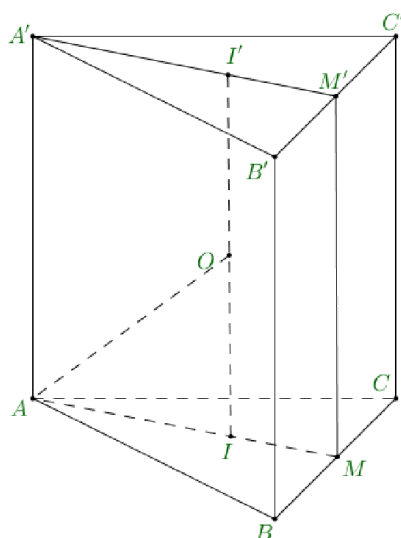
B. $S = \frac{7a^2}{3}$

C. $S = \frac{49\pi a^2}{144}$

D. $S = \frac{49a^2}{114}$

Lời giải

Chọn A



Gọi I, I' lần lượt là trọng tâm tam giác $ABC, A'B'C'$, O là trung điểm của II' . Khi đó O là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ.

Ta có $AI = \frac{2}{3}AM = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, $OI = \frac{a}{2}$.

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ $R = OA = \sqrt{OI^2 + AI^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{a\sqrt{7}}{\sqrt{12}}$.

Diện tích mặt cầu $S = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot \frac{7a^2}{12} = \frac{7\pi a^2}{3}$.

Câu 42. (Chuyên Vĩnh Phúc - 2020) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $BC = a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy (ABC). Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB và SC . Thể tích của khối cầu ngoại tiếp hình chóp $A.HKCB$ bằng

A. $\sqrt{2}\pi a^3$.

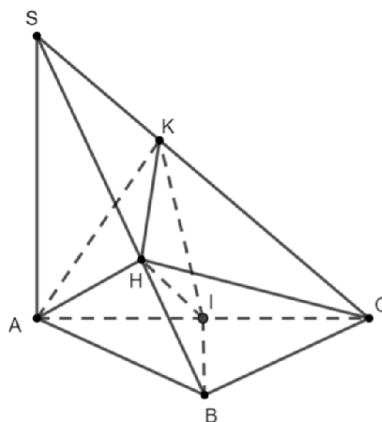
B. $\frac{\sqrt{2}\pi a^3}{3}$.

C. $\frac{\pi a^3}{6}$.

D. $\frac{\pi a^3}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi I là trung điểm của AC . Do tam giác ABC vuông cân tại B nên $IA = IB = IC = \frac{1}{2}AC$.

Do $AK \perp SC$ nên $\triangle AKC$ vuông tại K , khi đó $IA = IK = IC = \frac{1}{2}AC$.

Ta có $BC \perp AB, BC \perp SA \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH$, mà $AH \perp SB$ nên $AH \perp (SBC)$

$\Rightarrow AH \perp HC$ hay $\triangle AHC$ vuông tại $H \Rightarrow IH = IA = IC = \frac{1}{2}AC$.

Như vậy $IA = IB = IC = IH = IK = \frac{1}{2}AC$ hay mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $A.HKCB$ có tâm

I là trung điểm AC , bán kính $R = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}.BC\sqrt{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Vậy thể tích khối cầu là $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^3 = \frac{\sqrt{2}\pi a^3}{3}$.

Câu 43. (Sở Ninh Bình) Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $AB = \sqrt{3}$, $AC = 2$ và $\widehat{BAC} = 30^\circ$. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu của A trên SB, SC . Bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $A.BCNM$ là

A. $R = 2$.

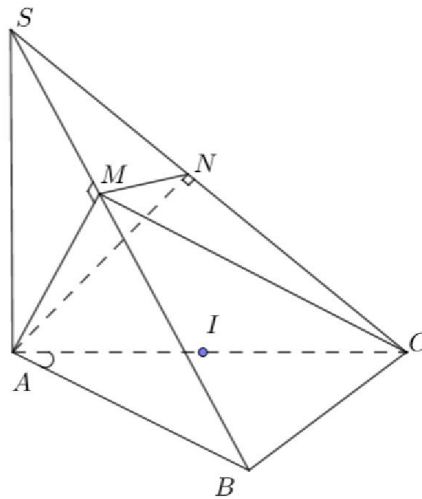
B. $R = \sqrt{13}$.

C. $R = 1$.

D. $R = \sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn C



Xét tam giác ABC có $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC \cos B = 3 + 2^2 - 2.\sqrt{3}.2 \cos 30^\circ = 1$.

Suy ra: $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 4$ hay tam giác ABC vuông tại B .

Gọi I là trung điểm AC suy ra $IA = IC = IB$. (1)

Tương tự tam giác ANC vuông tại N ta được $IA = IC = IN$. (2)

Xét BC và (SAB) có

$\left. \begin{array}{l} BC \perp AB \text{ (cmt)} \\ BC \perp SA \text{ (gt)} \end{array} \right\} \Rightarrow BC \perp (SAB) \text{ mà } AM \subset (SAB) \Rightarrow AM \perp BC$.

Ta được

$$\left. \begin{array}{l} AM \perp BC \\ AM \perp SB(gt) \end{array} \right\} \Rightarrow AM \perp (SBC) \text{ mà } MC \subset (SBC) \Rightarrow AM \perp MC.$$

Suy tam giác AMC vuông tại M ta được $IA = IB = IM$. (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $A.BCNM$ có bán kính

$$R = AI = \frac{AB}{2} = 1.$$

Câu 44. (Sở Ninh Bình) Có một bể hình hộp chữ nhật chứa đầy nước. Người ta cho ba khối nón giống nhau có thiết diện qua trục là một tam giác vuông cân vào bể sao cho ba đường tròn đáy của ba khối nón đôi một tiếp xúc với nhau, một khối nón có đường tròn đáy chỉ tiếp xúc với một cạnh của đáy bể và hai khối nón còn lại có đường tròn đáy tiếp xúc với hai cạnh của đáy bể. Sau đó người ta đặt lên đỉnh của ba khối nón một khối cầu có bán kính bằng $\frac{4}{3}$ lần bán kính đáy của

khối nón. Biết khối cầu vừa đủ ngập trong nước và tổng lượng nước trào ra là $\frac{337\pi}{24}$ (lít). Thể

tích nước ban đầu ở trong bể thuộc khoảng nào dưới đây (đơn vị tính: lít)?

A. (150 ; 151).

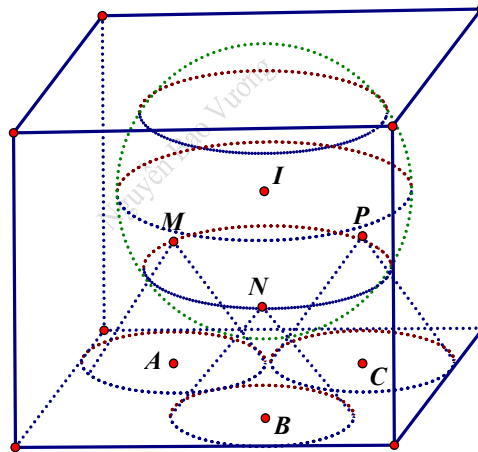
B. (151 ; 152).

C. (139 ; 140).

D. (138 ; 139).

Lời giải

Chọn B



+) Gọi r là bán kính đáy của hình nón suy ra chiều cao nón là $h = r$ (do thiết diện là tam giác vuông cân).

+) Chiều dài của khối hộp là $b = 4r$; bán kính của khối cầu là $R = \frac{4}{3}r$.

+) Thể tích nước bị tràn là $3 \cdot \frac{1}{3} \pi r^2 h + \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{337\pi}{24} \Leftrightarrow \pi r^3 + \frac{4}{3} \pi \frac{64}{27} r^3 = \frac{337\pi}{24} \Rightarrow r = \frac{3}{2}$ (dm).

+) Gọi A, B, C là tâm của 3 đáy của khối nón suy ra $\triangle ABC$ đều cạnh $2r \Rightarrow R_{ABC} = \frac{2r}{\sqrt{3}}$.

+) Chiều rộng khối hộp là $a = 2r + \frac{2r\sqrt{3}}{2} = r(2 + \sqrt{3})$ (dm).

+) Ba đỉnh nón chạm mặt cầu tại các điểm $M, N, P \Rightarrow \triangle MNP = \triangle ABC$

$d(I; (MNP)) = \sqrt{R^2 - R_{(ABC)}^2}$ (với I là tâm mặt cầu), do đó $d(I; (MNP)) = \frac{2}{3}r$. Suy ra chiều cao

của khối trụ là $c = R + \frac{2}{3}r + r = 3r$.

+) Thể tích nước ban đầu là $abc = 12(2 + \sqrt{3})r^3 = 12(2 + \sqrt{3}) \cdot \frac{27}{8} \approx 151,1(\text{dm}^3) = 151,1$ (lít).

Câu 45. (Sở Bắc Ninh - 2020) Cho hình chóp $ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và D . Biết SA vuông góc với $ABCD$, $AB = BC = a$, $AD = 2a$, $SA = a\sqrt{2}$. Gọi E là trung điểm của AD . Bán kính mặt cầu đi qua các điểm S, A, B, C, E bằng

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

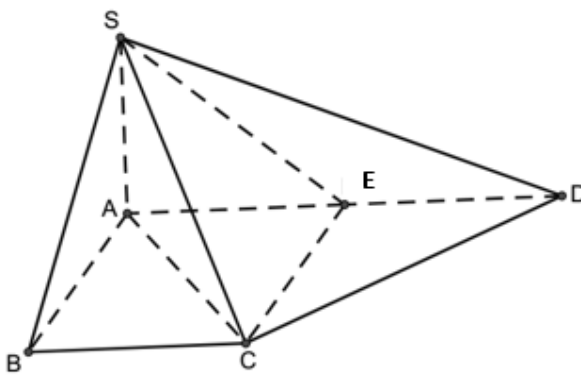
B. $\frac{a\sqrt{30}}{6}$.

C. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

D. a .

Lời giải

Chọn D



Ta thấy các tam giác $\triangle SAC$; $\triangle SBC$; $\triangle SEC$ vuông tại A, C, E . Vậy các điểm S, A, B, C, E nằm trên mặt cầu đường kính $SC \Rightarrow R = \frac{SC}{2} = \frac{\sqrt{SA^2 + AC^2}}{2} = a$.

Câu 46. (Sở Yên Bái - 2020) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có đường chéo bằng $a\sqrt{2}$, cạnh SA có độ dài bằng $2a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

A. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$.

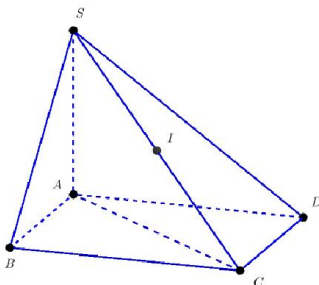
B. $\frac{a\sqrt{6}}{12}$.

C. $\frac{a\sqrt{6}}{4}$.

D. $\frac{2a\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Theo giả thiết, $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp AC$ nên $\triangle SAC$ vuông tại A .

Mặt khác

$$\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp SB. \text{ Suy ra } \Delta SBC \text{ vuông tại } B.$$

Tương tự, ta cũng có ΔSCD vuông tại D .

Gọi I là trung điểm của SC . Suy ra $IS = IA = IB = IC = ID$.

Do đó, I là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ và bán kính $R = \frac{SC}{2}$.

$$\text{Ta có } SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = \sqrt{(2a)^2 + (a\sqrt{2})^2} = a\sqrt{6} \Rightarrow R = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

Câu 47. (Bỉm Sơn - Thanh Hóa - 2020) Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy là hình vuông cạnh bằng x . Cạnh bên $SA = x\sqrt{6}$ và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Tính theo x diện tích mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABCD$.

A. $8\pi x^2$.

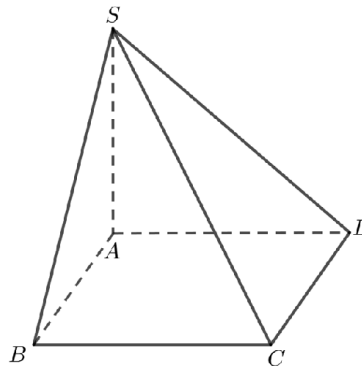
B. $x^2\sqrt{2}$.

C. $2\pi x^2$.

D. $2x^2$.

Lời giải

Chọn A



+ Ta có $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp AC, SA \perp BC, SA \perp CD$.

$$\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow BC \perp SB, \begin{cases} CD \perp SA \\ CD \perp AD \end{cases} \Rightarrow CD \perp SD.$$

Vậy $\widehat{SAC} = \widehat{SBC} = \widehat{SDC} = 90^\circ$ do đó A, B, D, S, C thuộc mặt cầu đường kính SC .

+ Ta có $AC = \sqrt{2}x, SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = 2\sqrt{2}x$. R là bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABCD$ khi đó $R = \frac{SC}{2} = \sqrt{2}x$. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABCD$ bằng

$$S = 4\pi R^2 = 4\pi (\sqrt{2}x)^2 = 8\pi x^2.$$

Câu 48. (Kim Liên - Hà Nội - 2020) Cho ba hình cầu có bán kính lần lượt là R_1, R_2, R_3 đôi một tiếp xúc nhau và cùng tiếp xúc với mặt

phẳng (P) . Các tiếp điểm của ba hình cầu với mặt phẳng (P) lập thành một tam giác có độ dài

các cạnh lần lượt là $2; 3; 4$. Tính tổng $R_1 + R_2 + R_3$:

A. $\frac{61}{12}$.

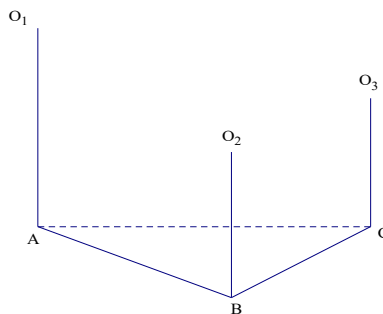
B. $\frac{53}{12}$.

C. $\frac{67}{12}$.

D. $\frac{59}{12}$.

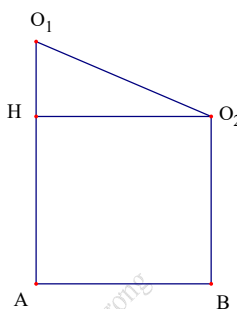
Lời giải

Chọn A



Gọi $O_1; O_2; O_3$ lần lượt là tâm mặt cầu và A, B, C lần lượt là hình chiếu của $O_1; O_2; O_3$ lên mặt phẳng (P) .

Ta có: $O_1A \perp (P); O_2B \perp (P); O_3C \perp (P)$ nên $O_1A = R_1; O_2B = R_2; O_3C = R_3$.



Trong hình thang vuông ABO_2O_1 dựng $O_2H \perp O_1A$ nên $AH = R_2; O_1H = R_1 - R_2; O_2H = AB; O_2O_1 = R_1 + R_2$.

Tam giác O_1O_2H có:

$$(O_1O_2)^2 = O_1H^2 + AB^2 \Rightarrow (R_1 + R_2)^2 = (R_1 - R_2)^2 + AB^2 \Rightarrow R_1R_2 = \frac{AB^2}{4}.$$

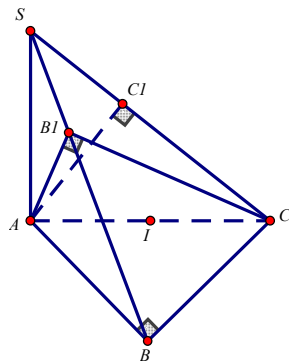
Tương tự ta có: $R_2R_3 = \frac{BC^2}{4}; R_1R_3 = \frac{AC^2}{4}.$

$$\text{Giải hệ phương trình } \begin{cases} R_1R_2 = \frac{AB^2}{4} \\ R_2R_3 = \frac{BC^2}{4} \\ R_1R_3 = \frac{AC^2}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R_1 = \frac{4}{3} \\ R_2 = \frac{3}{4} \\ R_3 = 3 \end{cases} \Rightarrow R_1 + R_2 + R_3 = \frac{61}{12}$$

Câu 49. (Nguyễn Trãi - Thái Bình - 2020) Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a và góc giữa mặt bên và mặt phẳng đáy bằng 45° . Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ là

Lời giải

Chọn C



Xét tam giác ABC có $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{BAC} = a^2 + 2a^2 - 2a \cdot a \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = a^2$

$$\Rightarrow BC = a$$

Tam giác ABC có $BA = BC = a$, $\widehat{BAC} = 45^\circ$ là tam giác vuông cân tại B

$$\text{Ta có } \begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AB_1$$

$$\text{Khi đó } \begin{cases} AB_1 \perp SB \\ AB_1 \perp BC \end{cases} \Rightarrow AB_1 \perp (SBC) \Rightarrow AB_1 \perp CB_1 \Rightarrow \Delta AB_1C \text{ vuông tại } B_1$$

Gọi I là trung điểm của AC

Vì tam giác ABC vuông tại B nên $IA = IB = IC$

Vì tam giác AB_1C vuông tại B_1 nên $IA = IC = IB_1$

Vì tam giác ACC_1 vuông tại C_1 nên $IA = IC = IC_1$

Vậy I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $ABCC_1B_1$ với bán kính $R = \frac{1}{2}AC = \frac{a}{\sqrt{2}}$

$$\text{Thể tích khối cầu đó là: } V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{\pi a^3 \sqrt{2}}{3}$$

----- HẾT -----