

KỶ THI THỬ TUYỂN SINH QUỐC GIA NĂM 2016**Môn: Toán (ĐỀ VIP 4)**

Thời gian làm bài: 180 phút (Không kể thời gian giao đề)

Đề thi được soạn theo cấu trúc mới nhất 2016!(Kèm đáp án)**Câu I (2 điểm)** Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$, gọi đồ thị là (C).

a) Khảo sát và vẽ đồ thị (C) hàm số.

b) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng (d): $x+3y+2015=0$.**Câu II (1 điểm)** Giải phương trình: $2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \cos 5x + 1$ **Câu III (1 điểm)** Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số: $f(x) = x\sqrt{(5-x)^3}$ trên đoạn $[0;5]$ **Câu IV (1 điểm)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a . Góc $\widehat{BAC} = 60^\circ$, hình chiếu của S trên mặt $(ABCD)$ trùng với trọng tâm của tam giác $\triangle ABC$. Mặt phẳng (SAC) hợp với mặt phẳng $(ABCD)$ góc 60° . Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCD) theo a .**Câu V (1 điểm)** Trong không gian Oxyz, cho mặt phẳng $(P): x-y+z-1=0$ và điểm $A(1,-1,2)$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A và vuông góc với (P) . Tính bán kính của mặt cầu (S) có tâm thuộc đường thẳng Δ , đi qua A và tiếp xúc với (P) .**Câu VI (1 điểm)** 1. Giải phương trình sau: $2\log_{\sqrt{3}}^2(2x-1) - 2\log_3(2x-1)^3 - 2 = 0$

2. Một đội ngũ cán bộ khoa học gồm 8 nhà toán học nam, 5 nhà vật lý nữ và 3 nhà hóa học nữ. Chọn ra từ đó 4 người, tính xác suất trong 4 người được chọn phải có nữ và có đủ ba bộ môn.

Câu VII (1 điểm) Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho tam giác nhọn ABC . Đường thẳng chứa đường trung tuyến kẻ từ đỉnh A và đường thẳng BC lần lượt có phương trình là $3x+5y-8=0$, $x-y-4=0$. Đường thẳng qua A vuông góc với đường thẳng BC cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại điểm thứ hai là $D(4;-2)$. Viết phương trình các đường thẳng AB , AC ; biết rằng hoành độ của điểm B không lớn hơn 3.**Câu VIII (1 điểm)** Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2y^3 + y + 2x\sqrt{1-x} = 3\sqrt{1-x} \\ \sqrt{9-4y^2} = 2x^2 + 6y^2 - 7 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$
Câu IX (1 điểm) Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $a \geq b \geq c$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 5$. Chứng minh rằng: $(a-b)(b-c)(c-a)(ab+bc+ca) \geq -4$ **CHÚC CÁC EM THÀNH CÔNG !**

Hướng dẫn

Câu I:

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (C)

+Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

+Sự biến thiên

- Chiều biến thiên: $y' = \frac{3}{(x+1)^2} > 0 \quad \forall x \neq -1$.

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$

- Cực trị : Hàm số không có cực trị.
- Giới hạn tại vô cực và tiệm cận:

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x-1}{x+1} = 2$, đường thẳng $y = 2$ là tiệm cận ngang

$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2x-1}{x+1} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2x-1}{x+1} = -\infty$, đường thẳng $x = -1$ là tiệm cận đứng

- Bảng biến thiên :

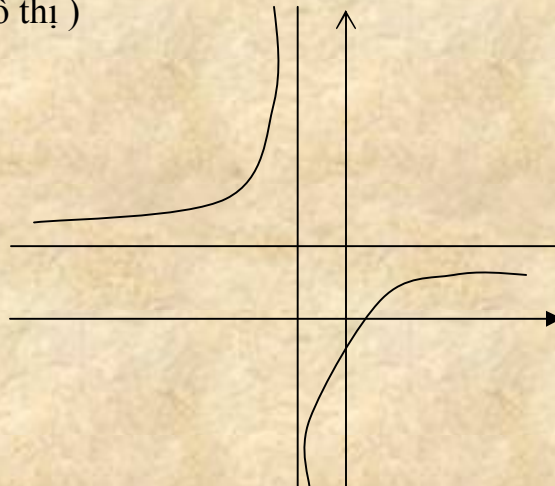
x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'	+		+
y	2	$+\infty$ $-\infty$	2

+Đồ thị: Đồ thị hàm số cắt trục Ox tại điểm $A\left(\frac{1}{2}; 0\right)$

Đồ thị hàm số cắt trục Oy tại điểm $B(0; -1)$

Đồ thị hàm số nhận giao điểm của 2 tiệm cận là $I(-1; 2)$ làm tâm đối xứng

(Đồ thị)



2, Viết phương trình tiếp tuyến

Gọi k là hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm $M(x_0; y_0)$ ta có : $k = f'(x_0) = \frac{3}{(x_0 + 1)^2}$
Lại có $k \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -1 \Rightarrow k = 3$
hay $\frac{3}{(x_0 + 1)^2} = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 = -2 \end{cases}$
Với $x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = -1$ Vậy phương trình tiếp tuyến là : $y = 3x - 1$ Với $x_0 = -2 \Rightarrow y_0 = 5$ Vậy phương trình tiếp tuyến là : $y = 3x + 11$

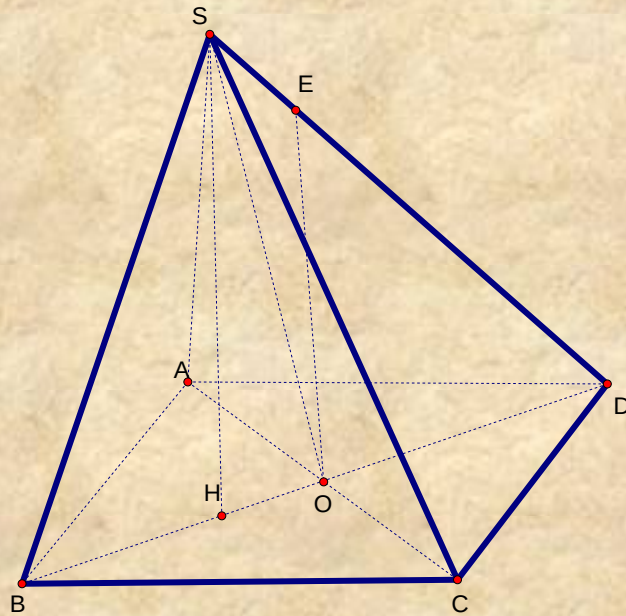
Câu II:

$2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1 = \cos 5x \Leftrightarrow -\cos x = \cos 5x$
$\Leftrightarrow \cos(x) = \cos(\pi - 5x)$
$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi - 5x + k2\pi \\ x = 5x - \pi + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \end{cases}$ là nghiệm của phương trình.

Câu III:

$f(x) = x\sqrt{(5-x)^3}$ hàm số liên tục trên đoạn $[0; 5]$ $f(x) = x(5-x)^{3/2} \quad \forall x \in (0; 5)$
$f'(x) = \sqrt{5-x}\left(5 - \frac{5}{2}x\right)$
$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 5; x = 2$. Ta có : $f(2) = 6\sqrt{3}$, $f(0) = f(5) = 0$
Vậy $\text{Max}_{x \in [0; 5]} f(x) = f(2) = 6\sqrt{3}$, $\text{Min}_{x \in [0; 5]} f(x) = f(0) = 0$

Câu IV



Nội dung	Điểm
* Gọi $O = AC \cap BD$ Ta có : $OB \perp AC, SO \perp AC \Rightarrow \angle SOB = 60^\circ$	0.25
Xét tam giác SOH vuông tại H : $\tan 60^\circ = \frac{SH}{HO} \Rightarrow SH = OH \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{6} \cdot \sqrt{3} = \frac{a}{2}$	0.25
Ta có : tam giác ABC đều : $S_{ABCD} = 2.S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$	0.25
Vậy $V_{SABCD} = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$ (đvtt)	0.25
* Tính khoảng cách	
Trong (SBD) kẻ $OE \perp SH$ khi đó ta có : $OC; OD; OE$ đôi một vuông góc Và : $OC = \frac{a}{2}; OD = \frac{a\sqrt{3}}{2}; OE = \frac{3a}{8}$	0.5
Áp dụng công thức : $\frac{1}{d^2(O, SCD)} = \frac{1}{OC^2} + \frac{1}{OD^2} + \frac{1}{OE^2} \Rightarrow d = \frac{3a}{\sqrt{112}}$ Mà $d(B, SCD) = 2d(O, SCD) = \frac{6a}{\sqrt{112}}$	0.5

Do Δ vuông góc với (P) nên Δ có VTPT $\vec{u} = \vec{n_p} = (1, -1, 1)$

Phương trình đường thẳng Δ qua $A(1, -1, 2)$ là:
$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - t \\ z = 2 + t \end{cases}$$

Gọi tâm $I \in \Delta \Rightarrow I(1+t, -1-t, 2+t)$. Lúc đó $R = IA = d(I, (P)) \Leftrightarrow \sqrt{3t^2} = \frac{|3+3t|}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2}$

Vậy $R = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Câu VI

$$\text{a) } 2\log_{\sqrt{3}}^2(2x-1) - 2\log_3(2x-1)^3 - 2 = 0$$

Điều kiện : $x \geq \frac{1}{2}$

$$\text{PT} \Leftrightarrow 8\log_3^2(2x-1) - 6\log_3(2x-1) - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4\log_3^2(2x-1) - 3\log_3(2x-1) - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3(2x-1) = 1 \\ \log_3(2x-1) = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{\sqrt[4]{3}+1}{2\sqrt[3]{3}} \end{cases} \text{ là nghiệm của phương trình đã cho.}$$

b) Tính xác suất

Ta có : $|\Omega| = C_{16}^4 = 1820$

Gọi $A =$ “ 2 nam toán , 1 lý nữ , 1 hóa nữ ”

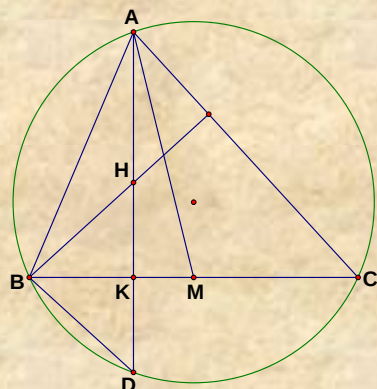
$B =$ “ 1 nam toán , 2 lý nữ , 1 hóa nữ ”

$C =$ “ 1 nam toán , 1 lý nữ , 2 hóa nữ ”

Thì $H = A \cup B \cup C =$ “ Có nữ và đủ ba bộ môn ”

$$P(H) = \frac{C_8^2 C_5^1 C_3^1 + C_8^1 C_5^2 C_3^1 + C_8^1 C_5^1 C_3^2}{|\Omega|} = \frac{3}{7}$$

Câu VII



Nội dung	Điểm
Gọi M là trung điểm của BC, H là trực tâm tam giác ABC, K là giao điểm của BC và AD, E là giao điểm của BH và AC. Ta kí hiệu $\overrightarrow{n_d}, \overrightarrow{u_d}$ lần lượt là vtpt, vtcp của đường thẳng d. Do M là giao điểm của AM và BC nên tọa độ của M là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} x - y - 4 = 0 \\ 3x + 5y - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{7}{2}; -\frac{1}{2}\right)$	0,5
AD vuông góc với BC nên $\overrightarrow{n_{AD}} = \overrightarrow{u_{BC}} = (1;1)$, mà AD đi qua điểm D suy ra phương trình của $AD: 1(x-4) + 1(y+2) = 0 \Leftrightarrow x + y - 2 = 0$. Do A là giao điểm của AD và AM nên tọa độ điểm A là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} 3x + 5y - 8 = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow A(1;1)$	0,5
Tọa độ điểm K là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} x - y - 4 = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow K(3; -1)$	0,25
Tứ giác $HKCE$ nội tiếp nên $\angle BHK = \angle KCE$, mà $\angle KCE = \angle BDA$ (nội tiếp chắn cung $\widehat{AB}$) Suy ra $\angle BHK = \angle BDK$, vậy K là trung điểm của HD nên $H(2;4)$. (Nếu học sinh thừa nhận H đối xứng với D qua BC mà không chứng minh, trừ 0.25 điểm)	0,25
Do B thuộc $BC \Rightarrow B(t; t-4)$, kết hợp với M là trung điểm BC suy ra $C(7-t; 3-t)$. $\overrightarrow{HB}(t-2; t-8); \overrightarrow{AC}(6-t; 2-t)$. Do H là trực tâm của tam giác ABC nên $\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow (t-2)(6-t) + (t-8)(2-t) = 0 \Leftrightarrow (t-2)(14-2t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = 7 \end{cases}$	0,25
Do $t \leq 3 \Rightarrow t = 2 \Rightarrow B(2; -2), C(5;1)$. Ta có $\overrightarrow{AB} = (1; -3), \overrightarrow{AC} = (4; 0) \Rightarrow \overrightarrow{n_{AB}} = (3; 1), \overrightarrow{n_{AC}} = (0; 1)$ Suy ra $AB: 3x + y - 4 = 0; AC: y - 1 = 0$.	0,25

Câu VIII

Nội dung	Điểm
Điều kiện: $x \leq 1; y \in \left[-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right]$. Ta có	0.25
$(1) \Leftrightarrow 2y^3 + y = 2\sqrt{1-x} - 2x\sqrt{1-x} + \sqrt{1-x}$ $\Leftrightarrow 2y^3 + y = 2(1-x)\sqrt{1-x} + \sqrt{1-x}$	0.25
Xét hàm số $f(t) = 2t^3 + t$, ta có $f'(t) = 6t^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Vậy $(1) \Leftrightarrow f(y) = f(\sqrt{1-x}) \Leftrightarrow y = \sqrt{1-x} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ y^2 = 1-x \end{cases}$	0.25
Thế vào (2) ta được : $\sqrt{4x+5} = 2x^2 - 6x - 1$	0.25
$Pt \Leftrightarrow 2\sqrt{4x+5} = 4x^2 - 12x - 2 \Leftrightarrow (\sqrt{4x+5} + 1)^2 = (2x-2)^2$	0.5
$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{4x+5} = 2x-3(vn) \\ \sqrt{4x+5} = 1-2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{1}{2} \\ x = 1+\sqrt{2}(l) \\ x = 1-\sqrt{2} \end{cases}$	0.5
Với $x = 1-\sqrt{2} \Rightarrow \begin{cases} y = \sqrt[4]{2} \\ y = -\sqrt[4]{2} \end{cases}$ Vậy hệ có hai nghiệm.	

Câu IX

Nội dung	Điểm
Ta có $(a-b)(b-c)(c-a)(ab+bc+ca) \geq -4 \Leftrightarrow (a-b)(b-c)(a-c)(ab+bc+ca) \leq 4 (*)$. Đặt vế trái của (*) là P Nếu $ab+bc+ca < 0$ thì $P \leq 0$ suy ra BĐT được chứng minh Nếu $ab+bc+ca \geq 0$, đặt $ab+bc+ca = x \geq 0$	0.25
$(a-b)(b-c) \leq \left(\frac{a-b+b-c}{2}\right)^2 = \frac{(a-c)^2}{4} \Rightarrow (a-b)(b-c)(a-c) \leq \frac{(a-c)^3}{4} \quad (1)$	0.25
Ta có : $4(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = 2(a-c)^2 + 2(a-b)^2 + 2(b-c)^2$ $\geq 2(a-c)^2 + [(a-b) + (b-c)]^2 = 2(a-c)^2 + (a-c)^2 = 3(a-c)^2$	0.25

Suy ra $4(5 - x) \geq 3(a - c)^2$, từ đây ta có $x \leq 5$ và $a - c \leq \sqrt{\frac{4}{3}(5 - x)}$ (2) .	
Từ (1) , (2) suy ra $P \leq \frac{1}{4}x \cdot \sqrt{\left[\frac{4}{3}(5 - x)\right]^3} = \frac{2\sqrt{3}}{9}x\sqrt{(5 - x)^3}$ (3) Theo câu a ta có: $f(x) = x\sqrt{(5 - x)^3} \leq 6\sqrt{3}$ với x thuộc đoạn $[0; 5]$ nên suy ra $P \leq \frac{2\sqrt{3}}{9} \cdot 6\sqrt{3} \Rightarrow P \leq 4$. Vậy (*) được chứng minh. Dấu bằng xảy ra khi $a = 2; b = 1; c = 0$	1.0