CHƯƠNG I

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

BÀI 3: GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT VÀ GIÁ TRỊ LỚN NHẤT CỦA HÀM SỐ

I. LÝ THUYẾT.

1. ***Định nghĩa:*** Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên miền D.

- Số M gọi là giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$ trên D nếu: $\begin{cases} f(x)\le M, \forall x\in D \\ \exists x_0\in D, f(x_0)=M \end{cases}$.

Kí hiệu: $M=\max\limits_{x\in D} f(x)$ hoặc $M=\max\limits_{D} f(x)$.

- Số m gọi là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên D nếu: $\begin{cases} f(x)\ge m, \forall x\in D \\ \exists x_0\in D, f(x_0)=m \end{cases}$.

Kí hiệu: $m=\min\limits_{x\in D} f(x)$hoặc $m=\min\limits_{D} f(x)$

2. ***Định lý***

Mọi hàm số **liên tục** trên một **đoạn** đều có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên đoạn đó.

Quy tắc tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm liên tục trên một đoạn

Giả sử hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Khi đó, để tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm f trên đoạn $[a;b]$ ta làm như sau:

$*$ Tìm các điểm $x_1;\ x_2;...;\ x_n$ thuộc $(a;b)$ sao cho tại đó hàm số f có đạo hàm bằng 0 hoặc không xác định.

$*$ Tính $f(x_1); f(x_2);...; f(x_n); f(a); f(b)$.

$*$ So sánh các giá trị tìm được.

Số lớn nhất trong các giá trị đó là giá trị lớn nhất của hàm f trên đoạn $[a;b]$, số nhỏ nhất trong các giá trị đó là giá trị nhỏ nhất của hàm f trên đoạn $[a;b]$.

*** Nếu:**

1) $y'>0, \forall x\in[a;b] \Rightarrow \begin{cases} \max\limits_{[a;b]} f(x)=f(b) \\ \min\limits_{[a;b]} f(x)=f(a) \end{cases}$

2) $y'<0, \forall x\in[a;b] \Rightarrow \begin{cases} \max\limits_{[a;b]} f(x)=f(a) \\ \min\limits_{[a;b]} f(x)=f(b) \end{cases}$

Chú ý

$*$ Quy tắc trên chỉ được sử dụng trong các bài toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên một **đoạn**.

$*$ Đối với bài toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên một **khoảng (nửa khoảng)** thì ta phải tính đạo hàm, **lập bảng biến thiên** của hàm f rồi dựa vào nội dung của bảng biến thiên để suy ra giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm f trên **khoảng (nửa khoảng)** đó.

$*$ Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên một **khoảng (nửa khoảng)** có thể không tồn tại.

*** Với bài toán đặt ẩn phụ ta phải tìm điều kiện của ẩn phụ.**

II HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN

DẠNG 1. TÌM MAX-MIN TRÊN ĐOẠN BẰNG HÀM SỐ CỤ THỂ, BẢNG BIẾN THIÊN, ĐỒ THỊ HÀM SỐ CHO TRÊN ĐOẠN VÀ KHOẢNG.

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[-3;2]$ và có bảng biến thiên như hình dưới đây. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên $[-1;2]$. Giá trị của $M+m$ bằng bao nhiêu ?

x	-3		-1		0		1		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	-2	$\nearrow$	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	1

Câu 2. a) Tìm GTLN, GTNN của hàm số $y=x^4+2x^2-1$ trên đoạn $\left[1;\sqrt{3}\right]$.

b) Tìm GTLN, GTNN của hàm số $y=-x^3+3x^2+2$ trên đoạn $[-1;2]$.

Câu 3. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\dfrac{-x^2-4}{x}$ trên đoạn $\left[\dfrac{3}{2};4\right]$.

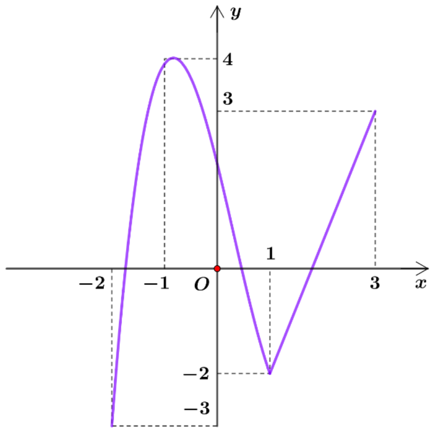
Câu 4. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^3-3x+1$ trên đoạn $[0;2]$.

Câu 5. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{x^2-2x+2}{x-2}$ trên $\left[3;2+2\sqrt{2}\right]$. Tính $M-m$.

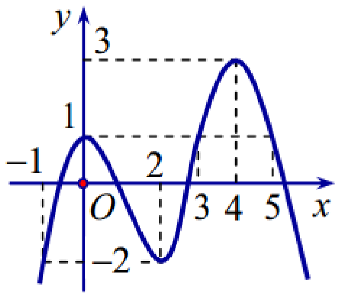
Câu 6. Kí hiệu m và M lần lượt là giá trị lớn nhất giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{x^2+x+4}{x+1}$ trên đoạn $[0;3]$. Tính giá trị của tỉ số $\dfrac{M}{m}$.

Câu 7. Gọi giá trị lớn nhất của hàm số, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=\dfrac{-x^2-4}{x}$ trên đoạn $\left[\dfrac{3}{2};4\right]$ lần lượt là M,m . Tìm $M-3m$

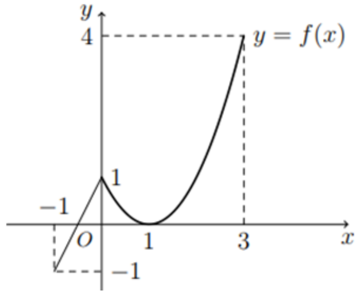
Câu 8. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2;3]$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-2;3]$. Giá trị của $2m-3M$ bằng bao nhiêu?



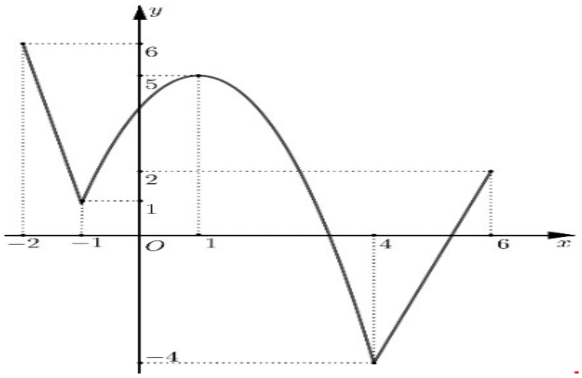
Câu 9. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-1;5]$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên $[-1;5]$. Giá trị của $M-m$ bằng bao nhiêu?



Câu 10. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-1;3]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên $[-1;3]$. Tính $M-m$.

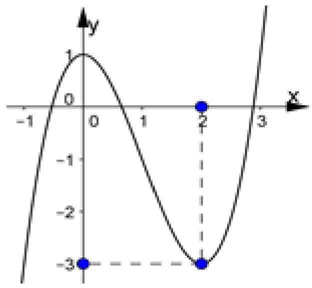


Câu 11. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2;6]$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ trên đoạn $[-2;6]$. Giá trị của $2M+3m$ là



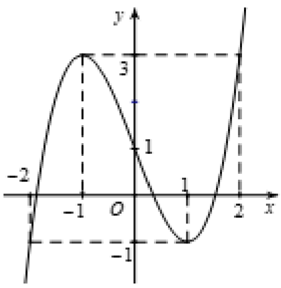
Câu 12. Cho hàm số $y=\sqrt{-x^2+4x+21}-\sqrt{-x^2+3x+10}$, gọi y_0 là GTNN của hàm số đã cho, đạt được tại điểm x_0. Tính $6x_0+y_0^4$.

Câu 13. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình dưới:



Tìm GTLN, GTNN của hàm số $y=f^2(x)+3$ trên đoạn $[0;2]$.

Câu 14. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình dưới:



Tìm GTLN, GTNN của hàm số $y=1-f^2(x)$ trên đoạn $[-2;1]$.

DẠNG 2: TÌM MAX- MIN BẰNG PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN

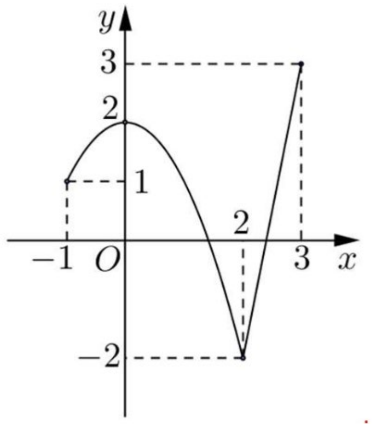
Câu 1. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sin^2 x-4\sin x+2$.

Câu 2. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng xét dấu biến thiên như sau:

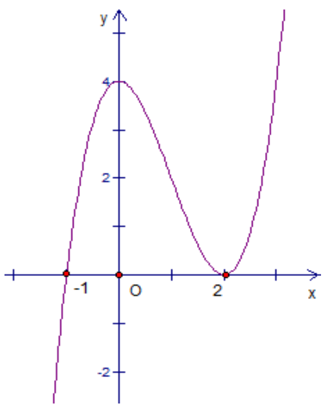
x	$-\infty$		-2		0		1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	3	↘	-3	↗	4	↘	-2	↗	$+\infty$

Giá trị lớn nhất của hàm số $f\left(\sin x-1\right)$ bằng bao nhiêu?

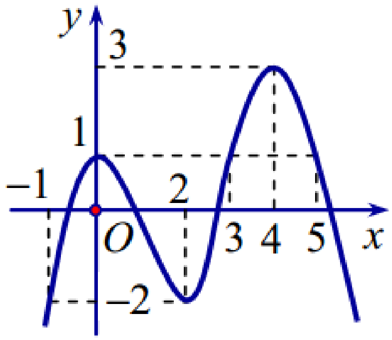
Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên R có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi M vàm lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y=f(-sinx+2)$. Giá trị của $M-m$ bằng



Câu 4. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=f\left(2-x^2\right)$ trên đoạn $\left[0;\sqrt{2}\right]$.



Câu 5. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-1;5]$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y=f\left(x^2-2x+4\right)$ trên $[0;2]$.

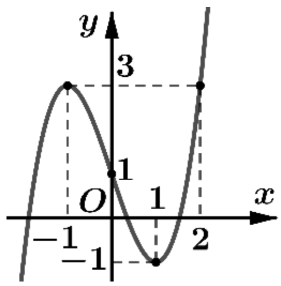


Câu 6. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên tập $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		1		$\frac{21}{4}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	0	-	
$f(x)$	$-\infty$	↗	4	↘	2	↗	5	↘	$+\infty$

Gọi $M;m$ lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f\left(x^2-2x\right)$ trên đoạn $\left[-\frac{3}{2};\frac{7}{2}\right]$. Tìm tổng $M+m$.

Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ:



Xét hàm số $g(x)=f\left(2x^3+x-1\right)+m$. Tìm m để $\max\limits_{[0;1]} g(x)=-10$.

DẠNG 3: MỘT SỐ BÀI TOÁN CÓ CHỨA THAM SỐ

Câu 1. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=-x^3-3x^2+m$ trên đoạn $[-1;1]$ bằng 0.

Câu 2. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x-m^2}{x+1}$ đạt giá trị lớn nhất bằng 3 trên $[-4;-2]$.

Câu 3. Tính tổng tất cả các giá trị của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left(x^3-3x+m\right)^2$ trên đoạn $\left[-1;1\right]$ bằng 1.

Câu 4. Tìm tất cả các của tham số m đểGTNN của hàm số $y=\left|x^2-4x+m+3\right|$ bằng 5.

Câu 5. Tìm tất cả các giá trị của m để GTNN của hàm số $y=\left|x^2-4x+m+3\right|-4x$ bằng -5.

Câu 6. Gọi S là tập tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $f\left(x\right)=\left|x^3-3x+m\right|$ trên đoạn $\left[0;3\right]$ bằng 16. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

Câu 7: Gọi tập S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|x^3-3x+m\right|$ trên đoạn $\left[0;2\right]$ bằng 3. Số phần tử của S là

Câu 8: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=\left|x^2+x+m\right|$ thỏa mãn $\min\limits_{[-2;\,2]} y=2$. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

Câu 9: Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số $f\left(x\right)=\left|3x^4-4x^3-12x^2+m\right|$ trên đoạn $\left[-1;3\right]$. Có bao nhiêu số thực m để $M=\dfrac{59}{2}$?

Câu 10: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=\left|\dfrac{x-m^2-m}{x+2}\right|$ thỏa $\max\limits_{[1;2]} y=1$. Tích các phần tử của S bằng

Câu 11: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|\dfrac{x^2+mx+m}{x+1}\right|$ trên $\left[1;2\right]$ bằng 2. Số phần tử của S là

Câu 12: Xét hàm số $f\left(x\right)=\left|x^2+ax+b\right|$, với a, b là tham số. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số trên $\left[-1;3\right]$. Khi M nhận giá trị nhỏ nhất tính $T=a+2b$.

Câu 13: Cho hàm số $y=\left|x^3-3x^2+m\right|$ (với m là tham số thực). Hỏi $\max\limits_{[1;2]} y$ có giá trị nhỏ nhất bằng

Câu 14: Cho hàm số $f\left(x\right)=\left|8x^4+ax^2+b\right|$, trong đó a, b là tham số thực. Tìm mối liên hệ giữa a và b để giá trị lớn nhất của hàm số $f\left(x\right)$ trên đoạn $\left[-1;1\right]$ bằng 1.

Câu 15: Cho hàm số $f\left(x\right)=\left|x^4-4x^3+4x^2+a\right|$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $\left[0;2\right]$. Có bao nhiêu số nguyên a thuộc đoạn $\left[-3;3\right]$ sao cho $M\le 2m$?

Câu 16: Cho hàm số $y=\left|\dfrac{x^4+ax+a}{x+1}\right|$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $\left[1;2\right]$. Có bao nhiêu số nguyên a sao cho $M\ge 2m$?

Câu 17: Cho hàm số $y=\left|2x-x^2-\sqrt{\left(x+1\right)\left(3-x\right)}+m\right|$. Có tất cả bao nhiêu giá trị thực của tham số m để $\max y=3$?

Câu 18: Cho hàm số $y=\left|2x-x^2-\sqrt{(x+1)(3-x)}+m\right|$. Khi giá trị lớn nhất của hàm số đạt giá trị nhỏ nhất. Mệnh đề nào sau đây đúng?

Câu 19: Gọi S là tập hợp tất cả các số nguyên m để hàm số $y=\left|\frac{1}{4}x^4-\frac{19}{2}x^2+30x+m\right|$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $[0;2]$ không vượt quá 20. Tổng các phần tử của S bằng

Câu 20: Cho hàm số $y=\left|2x^3-3x^2+m\right|$. Có bao nhiêu số nguyên m để $\min\limits_{[-1;3]} f(x)\le 3$?

Câu 21: Cho hàm số $f(x)=ax^2+bx+c$, $|f(x)|\le 1, \forall x\in[0;1]$. Tìm giá trị lớn nhất của $f'(0)$.

Câu 22: Cho hàm số $y=\left|x^4-2x^3+x^2+a\right|$. Có bao nhiêu số thực a để $\min\limits_{[-1;2]} y+\max\limits_{[-1;2]} y=10$?

DẠNG 4: PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ ĐỂ GIẢI QUYẾT BÀI TOÁN TÌM ĐIỀU KIỆN CỦA THAM SỐ m SAO CHO PHƯƠNG TRÌNH $f(x,m)=0$ CÓ NGHIỆM (CÓ ỨNG DỤNG GTLN, GTNN)

I. Phương pháp:

Bước 1. Tìm điều kiện xác định của phương trình đã cho.

Bước 2. Đặt $t=u(x)$ hoặc $x=u(t)$. Tìm tập giá trị K của t. Chuyển bài toán về: tìm điều kiện của m để phương trình $g(t)=h(m)$ có nghiệm thuộc K.

Bước 3. Tìm GTLN, GTNN của $g(t)$ hoặc tập giá trị của $g(t)$ trên K để suy ra điều kiện của m.

Một số cách đặt ẩn phụ thường gặp:

1. Xuất hiện biểu thức đối xứng $\begin{cases}\sqrt{ax+b}\pm\sqrt{cx+d}\\ \sqrt{(ax+b)(cx+d)}\end{cases}$. **PP:** Đặt $t=\sqrt{ax+b}+\sqrt{cx+d}$.

2. Xuất hiện $\sqrt{a+bx}$ và $\sqrt{c-bx}$ $(a+c>0)$.

PP: Vì $\left(\sqrt{a+bx}\right)^2+\left(\sqrt{c-bx}\right)^2=a+c$. Nên đặt $\begin{cases}\sqrt{a+bx}=\sqrt{a+c}\sin\alpha\\ \sqrt{c-bx}=\sqrt{a+c}\cos\alpha\end{cases}$, $\alpha\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

Và sử dụng hệ thức $\begin{cases}\sin\alpha=\dfrac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}\\ \cos\alpha=\dfrac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}\end{cases}$, tiếp tục đặt $t=\tan\frac{\alpha}{2}$, $t\in[0;1]$.

Ta được một phương trình ẩn t.

Câu 1. Tìm các giá trị thực của tham số m để phương trình sau có nghiệm:

$$6-x+2\sqrt{2(x-1)(4-x)}=m+4\sqrt{x-1}+4\sqrt{2}.\sqrt{4-x}.$$

Câu 2. Tìm các giá trị thực của tham số m để phương trình sau có nghiệm:

$$(2m-1)\sqrt{x+3}+(m-2)\sqrt{1-x}+m-1=0.$$

DẠNG 7: PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ ĐỂ GIẢI QUYẾT BÀI TOÁN TÌM ĐIỀU KIỆN CỦA THAM SỐ ĐỂ BẤT PHƯƠNG TRÌNH CÓ NGHIỆM HOẶC NGHIỆM ĐÚNG VỚI MỌI $x \in K$ (CÓ ỨNG DỤNG GTLN, GTNN)

I. Phương pháp

1. Tìm điều kiện của tham số để bất phương trình chứa tham số có nghiệm hoặc nghiệm đúng với mọi $x \in [a;b]$

$$m > f(x)\ \forall x \in [a;b] \Leftrightarrow m > \max_{[a;b]} f(x)$$

$$m \ge f(x)\ \forall x \in [a;b] \Leftrightarrow m \ge \max_{[a;b]} f(x)$$

$$m < f(x)\ \forall x \in [a;b] \Leftrightarrow m < \min_{[a;b]} f(x)$$

$$m \le f(x)\ \forall x \in [a;b] \Leftrightarrow m \le \min_{[a;b]} f(x)$$

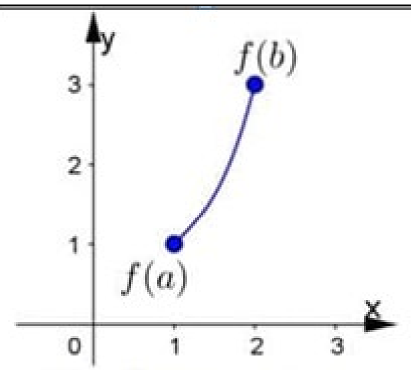
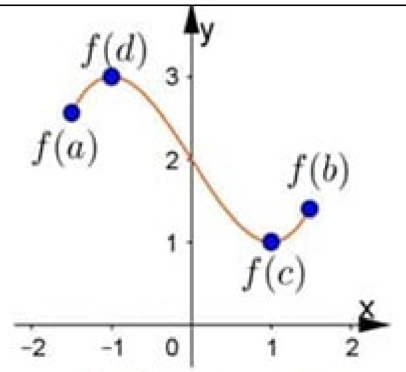
$m > f(x)$ có nghiệm $x \in [a;b] \Leftrightarrow m > \min\limits_{[a;b]} f(x)$

$m \ge f(x)$ có nghiệm $x \in [a;b] \Leftrightarrow m \ge \min\limits_{[a;b]} f(x)$

$m < f(x)$ có nghiệm $x \in [a;b] \Leftrightarrow m < \max\limits_{[a;b]} f(x)$

$m \le f(x)$ có nghiệm $x \in [a;b] \Leftrightarrow m \le \max\limits_{[a;b]} f(x)$

2. Tìm điều kiện của tham số để bất phương trình chứa tham số có nghiệm hoặc nghiệm đúng với mọi $x \in (a;b)$

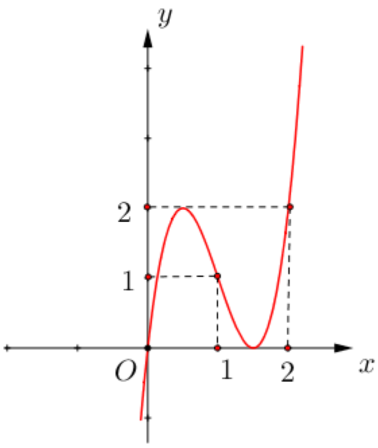
MẸO NHỚ Nếu hàm chỉ có max min ở biên và không tồn tại thì: Loại $\forall$ luôn có dấu =, loại có nghiệm luôn bỏ dấu =. Nếu hàm có max min tồn tại thì đang có dấu gì thì giữ nguyên	 $x \in (a;b)$ và max/min ko $\exists$	 $x \in (a;b)$ và max/min $\exists$
$m > f(x)\ \forall x \in (a;b)$ $m \ge f(x)\ \forall x \in (a;b)$ $m < f(x)\ \forall x \in (a;b)$ $m \le f(x)\ \forall x \in (a;b)$	$\to m \ge f(b)$ $\to m \ge f(b)$ $\to m \le f(a)$ $\to m \le f(a)$	$m >$ max $\to m > f(d)$ $m \ge$ max $\to m \ge f(d)$ $m <$ min $\to m < f(c)$ $m \le$ min $\to m \le f(c)$
$m > f(x)$ có nghiệm $m \ge f(x)$ có nghiệm $m < f(x)$ có nghiệm $m \le f(x)$ có nghiệm	$\to m > f(a)$ $\to m > f(a)$ $\to m < f(b)$ $\to m < f(b)$	$m >$ min $\to m > f(c)$ $m \ge$ min $\to m \ge f(c)$ $m <$ max $\to m < f(d)$ $m \le$ max $\to m \le f(d)$

Câu 1. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $6x+\sqrt{(2+x)(8-x)} \le x^2+m-1$ nghiệm đúng với mọi $x \in [-2;8]$.

Câu 2. Cho phương trình $4\sqrt{6+x-x^2}-3x \le m\left(\sqrt{x+2}+2\sqrt{3-x}\right)$. Tìm m để bất phương trình đã cho có nghiệm thực?

Câu 3. Tìm m để bất phương trình $\sqrt{x}+\sqrt{9-x} \ge \sqrt{-x^2+9x+m}$ (1) có nghiệm.

Câu 4. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Tìm m sao cho bất phương trình $f(2\sin x)-2\sin^2 x < m$ đúng với mọi $x \in (0;\pi)$?

DẠNG 8: BÀI TOÁN THỰC TẾ:

I. Phương pháp:

Đưa yêu cầu bài toán về mối quan hệ hàm số, lập bảng biến thiên để tìm giá trị lớn nhất , giá trị nhỏ nhất của hàm số với điều kiện ràng buộc cho trước.

Chú ý:

Ta cũng có thể sử dụng các bất đẳng thức để tìm giá trị lớn nhất , giá trị nhỏ nhất của biểu thức. Một số bất đẳng thức thường dùng.

1. Bất đẳng thức $AM-GM$:
   - Cho hai số thực $a,b \ge 0$ ta có: $\dfrac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}$ hay $a+b \ge 2\sqrt{ab}$.

     Dấu $"="$ xãy ra khi và chỉ khi $a=b$.
   - Cho ba số thực $a,b,c \ge 0$ ta có: $\dfrac{a+b+c}{3} \ge \sqrt[3]{abc}$ hay $a+b+c \ge 3\sqrt[3]{abc}$.

     Dấu $"="$ xãy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.
2. Bất đẳng thức Bunhiacopxki :
   - Cho hai bộ số thực $(a;b),(x;y)$ ta có: $|ax+by| \le \sqrt{(a^2+b^2)(x^2+y^2)}$.

     Dấu $"="$ xãy ra khi và chỉ khi $ay=bx$.
   - Cho hai bộ số thực $(a;b;c),(x;y;z)$ ta có:

     $$|ax+by+cz| \le \sqrt{(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)}.$$

     Dấu $"="$ xãy ra khi và chỉ khi $a:b:c=x:y:z$.

Câu 1. Một chất điểm chuyển động theo quy luật $S(t)=3t^2-t^3$. Tìm thời điểm t (giây) tại đó vận tốc $v\left(\text{m/s}\right)$ của chuyển động đạt giá trị lớn nhất?

Câu 2. Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $S\left(t\right)=-\frac{1}{4}t^4+3t^2-2t-4$, trong đó t tính bằng giây $\left(s\right)$ và S tính bằng mét $\left(m\right)$. Tại thời điểm nào vận tốc của chuyển động đạt giá trị lớn nhất?

Câu 3. Hằng ngày mực nước của hồ thủy điện ở miền Trung lên và xuống theo lượng nước mưa và các suối nước đổ về hồ. Từ lúc 8 giờ sáng, độ sâu của mực nước trong hồ tính theo mét và lên xuống theo thời gian t (giờ) trong ngày cho bởi công thức:

$$h\left(t\right)=-\frac{1}{3}t^3+5t^2+24t \quad \left(t>0\right)$$

Biết rằng phải thông báo cho các hộ dân phải di dời trước khi xả nước theo quy định trước 5 giờ. Hỏi cần thông báo cho hộ dân di dời trước khi xả nước mấy giờ. Biết rằng mực nước trong hồ phải lên cao nhất mới xả nước.

Câu 4. Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được cho bởi công thức $F\left(x\right)=\frac{1}{40}x^2\left(30-x\right)$, trong đó x là liều lượng thuốc tiêm cho bệnh nhân (x được tính bằng miligam). Tính liều lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân để huyết áp giảm nhiều nhất.

Câu 5. Để thiết kế một chiếc bể cá hình hộp chữ nhật có chiều cao là $60\,cm$, thể tích $96000\,cm^3$. Người thợ dùng loại kính để sử dụng làm mặt bên có giá thành 70000 $VNĐ\,/\,m^2$ và loại kính để làm mặt đáy có giá thành 100000 $VNĐ/m^2$. Tính chi phí thấp nhất để hoàn thành bể cá .

Câu 6. Nhà xe khoán cho hai tài xế An và Bình mỗi người lần lượt nhận 32 lít và 72 lít xăng trong một tháng. Biết rằng trong một ngày tổng số xăng cả hai người sử dụng là 10 lít. Tổng số ngày ít nhất để hai tài xế sử dụng hết số xăng được khoán là bao nhiêu.

Câu 7. Người ta cần xây một bể chứa nước sản xuất dạng khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng $200\ \text{m}^3$. Đáy bể hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng. Chi phí để xây bể là 300 nghìn đồng$/\text{m}^2$ (chi phí được tính theo diện tích xây dựng, bao gồm diện tích đáy và diện tích xung quanh không tính chiều dày của đáy và thành bên). Tính chi phí thấp nhất để xây bể (làm tròn số tiền đến đơn vị triệu đồng).

CHƯƠNG I ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

BÀI 3: GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT VÀ GIÁ TRỊ LỚN NHẤT CỦA HÀM SỐ

I LÝ THUYẾT.

1. *Định nghĩa:* Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ xác định trên miền D.

- Số M gọi là giá trị lớn nhất của hàm số $y = f\left(x\right)$ trên D nếu: $\begin{cases} f\left(x\right) \le M, \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D, f\left(x_0\right) = M \end{cases}$.

Kí hiệu: $M = \max\limits_{x \in D} f\left(x\right)$ hoặc $M = \max\limits_{D} f\left(x\right)$.

- Số m gọi là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f\left(x\right)$ trên D nếu: $\begin{cases} f\left(x\right) \ge m, \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D, f\left(x_0\right) = m \end{cases}$.

Kí hiệu: $m = \min\limits_{x \in D} f\left(x\right)$hoặc $m = \min\limits_{D} f\left(x\right)$

2. *Định lý*

Mọi hàm số **liên tục** trên một **đoạn** đều có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên đoạn đó.

Quy tắc tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm liên tục trên một đoạn

Giả sử hàm số $y = f\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\left[a;b\right]$. Khi đó, để tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm f trên đoạn $\left[a;b\right]$ ta làm như sau:

$*$ Tìm các điểm $x_1;\ x_2;...;\ x_n$ thuộc $\left(a;b\right)$ sao cho tại đó hàm số f có đạo hàm bằng 0 hoặc không xác định.

$*$ Tính $f\left(x_1\right); f\left(x_2\right);...; f\left(x_n\right); f\left(a\right); f\left(b\right)$.

$*$ So sánh các giá trị tìm được.

Số lớn nhất trong các giá trị đó là giá trị lớn nhất của hàm f trên đoạn $\left[a;b\right]$, số nhỏ nhất trong các giá trị đó là giá trị nhỏ nhất của hàm f trên đoạn $\left[a;b\right]$.

*** Nếu:**

1) $y' > 0, \forall x \in \left[a;b\right] \Rightarrow \begin{cases} \max\limits_{\left[a;b\right]} f\left(x\right) = f\left(b\right) \\ \min\limits_{\left[a;b\right]} f\left(x\right) = f\left(a\right) \end{cases}$

2) $y' < 0, \forall x \in \left[a;b\right] \Rightarrow \begin{cases} \max\limits_{\left[a;b\right]} f\left(x\right) = f\left(a\right) \\ \min\limits_{\left[a;b\right]} f\left(x\right) = f\left(b\right) \end{cases}$

Chú ý

$*$ Quy tắc trên chỉ được sử dụng trong các bài toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên một **đoạn**.

$*$ Đối với bài toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên một **khoảng (nửa khoảng)** thì ta phải tính đạo hàm, **lập bảng biến thiên** của hàm f rồi dựa vào nội dung của bảng biến thiên để suy ra giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm f trên **khoảng (nửa khoảng)** đó.

$*$ Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên một **khoảng (nửa khoảng)** có thể không tồn tại.

*** Với bài toán đặt ẩn phụ ta phải tìm điều kiện của ẩn phụ.**

II HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN

DẠNG 1. TÌM MAX-MIN TRÊN ĐOẠN BẰNG HÀM SỐ CỤ THỂ, BẢNG BIẾN THIÊN, ĐỒ THỊ HÀM SỐ CHO TRÊN ĐOẠN VÀ KHOẢNG.

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[-3;2]$ và có bảng biến thiên như hình dưới đây. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên $[-1;2]$. Giá trị của $M + m$ bằng bao nhiêu ?

x	-3		-1		0		1		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	-2	$\nearrow$	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	1

Lời giải

Ta có $M = \max\limits_{[-1;2]} f(x) = f(-1) = 3$ và $m = \min\limits_{[-1;2]} f(x) = f(0) = 0$.

Vậy $M + m = 3$.

Câu 2. a) Tìm GTLN, GTNN của hàm số $y = x^4 + 2x^2 - 1$ trên đoạn $\left[1;\sqrt{3}\right]$.

b) Tìm GTLN, GTNN của hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 2$ trên đoạn $[-1;2]$.

Lời giải

a) TXĐ: $\mathbb{R}$.

$y' = 4x^3 + 4x$.

$y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 + 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \notin \left[1;\sqrt{3}\right]$.

$y(1) = 2; y\left(\sqrt{3}\right) = 14$

$\Rightarrow \max\limits_{[1;\sqrt{3}]} y = 14$ khi $x = \sqrt{3}$ và $\min\limits_{[1;\sqrt{3}]} y = 2$ khi $x = 1$.

b) ĐS: $\max\limits_{[-1;2]} y = 6$ khi $\left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 2 \end{array}\right.$ và $\min\limits_{[-1;2]} y = 2$ khi $x = 0$.

Câu 3. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{-x^2-4}{x}$ trên đoạn $\left[\dfrac{3}{2};4\right]$.

Lời giải

Ta có $f\left(x\right)=\dfrac{-x^2-4}{x}=-x-\dfrac{4}{x}\Rightarrow f'\left(x\right)=-1+\dfrac{4}{x^2}=\dfrac{-x^2+4}{x^2}$.

Trên khoảng $\left(\dfrac{3}{2};4\right)$: $f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\begin{cases}-x^2+4=0\\ \dfrac{3}{2}<x<4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=2\\ x=-2\end{array}\right.\\ \dfrac{3}{2}<x<4\end{cases}\Leftrightarrow x=2$.

Ta có $f\left(\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{-25}{6}$; $f\left(2\right)=-4$; $f\left(4\right)=-5$.

Do hàm số $f\left(x\right)$ xác định và liên tục trên $\left[\dfrac{3}{2};4\right]$ nên $\max\limits_{x\in\left[\frac{3}{2};4\right]}f\left(x\right)=f\left(2\right)=-4$.

Câu 4. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^3-3x+1$ trên đoạn $\left[0;2\right]$.

Lời giải

Ta có: $y'=3x^2-3$; $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\in\left[0;2\right]\\ x=-1\notin\left[0;2\right]\end{array}\right.$.

$y\left(0\right)=1$; $y\left(1\right)=-1$; $y\left(2\right)=3$.

Suy ra $\min\limits_{\left[0;2\right]}y=-1$.

Câu 5. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{x^2-2x+2}{x-2}$ trên $\left[3;2+2\sqrt{2}\right]$. Tính $M-m$.

Lời giải

Hàm số $y=\dfrac{x^2-2x+2}{x-2}$ xác định và liên tục trên $\left[3;2+2\sqrt{2}\right]$.

Ta có $y=x+\dfrac{2}{x-2}\Rightarrow y'=1-\dfrac{2}{\left(x-2\right)^2}$.

$y'=0\Leftrightarrow 1-\dfrac{2}{\left(x-2\right)^2}=0\Leftrightarrow\left(x-2\right)^2=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2-\sqrt{2}\ \notin\left[3;2+2\sqrt{2}\right]\\ x=2+\sqrt{2}\ \in\left[3;2+2\sqrt{2}\right]\end{array}\right.$.

Ta có : $y\left(3\right)=5$; $y\left(2+\sqrt{2}\right)=2+2\sqrt{2}$; $y\left(2+2\sqrt{2}\right)=\dfrac{5\sqrt{2}+4}{2}$.

Suy ra $M=\dfrac{5\sqrt{2}+4}{2}$ và $m=2+2\sqrt{2}$.

Vậy $M-m=\dfrac{5\sqrt{2}+4}{2}-\left(2+2\sqrt{2}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 6. Kí hiệu m và M lần lượt là giá trị lớn nhất giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{x^2+x+4}{x+1}$ trên đoạn $[0;3]$. Tính giá trị của tỉ số $\dfrac{M}{m}$.

Lời giải

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

$y'=\dfrac{(2x+1)(x+1)-x^2-x-4}{(x+1)^2}=\dfrac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$; $\begin{cases}x\in[0;3]\\y'=0\end{cases}\Leftrightarrow x=1.$

Ta có $f(0)=4; f(1)=3; f(3)=4.$

Do đó $m=\min\limits_{[0;3]}f(x)=3;\ M=\max\limits_{[0;3]}f(x)=4\Rightarrow\dfrac{M}{m}=\dfrac{4}{3}.$

Câu 7. Gọi giá trị lớn nhất của hàm số, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=\dfrac{-x^2-4}{x}$ trên đoạn $\left[\dfrac{3}{2};4\right]$ lần lượt là M,m . Tìm $M-3m$

Lời giải

Ta có $f(x)=\dfrac{-x^2-4}{x}=-x-\dfrac{4}{x}\Rightarrow f'(x)=-1+\dfrac{4}{x^2}=\dfrac{-x^2+4}{x^2}$.

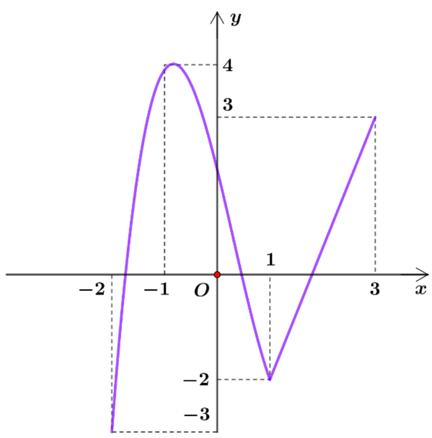
Trên khoảng $\left(\dfrac{3}{2};4\right)$: $f'(x)=0\Leftrightarrow\begin{cases}-x^2+4=0\\\dfrac{3}{2}<x<4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=2\\x=-2\end{array}\right.\\\dfrac{3}{2}<x<4\end{cases}\Leftrightarrow x=2$.

Ta có $f\left(\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{-25}{6}; f(2)=-4; f(4)=-5$.

Do hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\left[\dfrac{3}{2};4\right]$ nên $\max\limits_{x\in\left[\frac{3}{2};4\right]}f(x)=f(2)=-4$.

$\min\limits_{x\in\left[\frac{3}{2};4\right]}f(x)=f(4)=-5$. Hay $M=-4; m=-5$ suy ra $M-3m=11$.

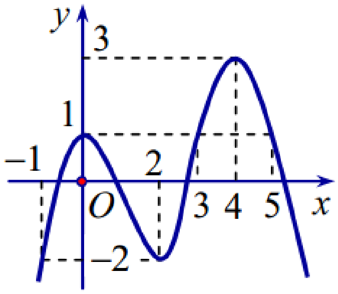
Câu 8. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2;3]$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-2;3]$. Giá trị của $2m-3M$ bằng bao nhiêu?



Lời giải

Dựa vào đồ thị ta xác định được $m=-3;\ M=4$. Ta có $2m-3M=-6-12=-18$.

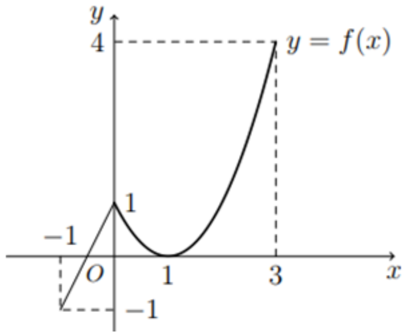
Câu 9. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-1;5]$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên $[-1;5]$. Giá trị của $M-m$ bằng bao nhiêu?



Lời giải

Dựa vào hình vẽ, ta có $M=3; m=-2 \Rightarrow M-m=5$.

Câu 10. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-1;3]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên $[-1;3]$. Tính $M-m$.

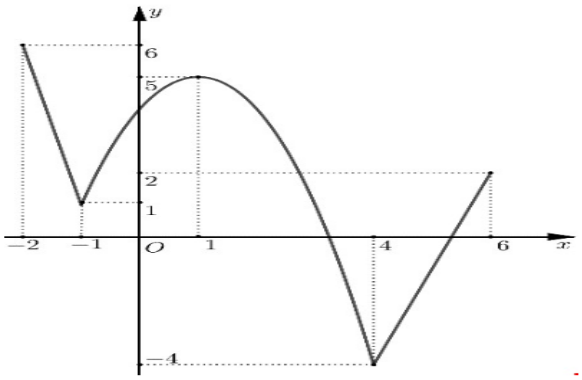


Lời giải

Quan sát đồ thị ta thấy hàm số $y=f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên $[-1;3]$ là -1 tại điểm $x=-1$ và đạt giá trị lớn nhất trên $[-1;3]$ là 4 tại điểm $x=3$. Do đó $M=4, m=-1$.

Giá trị $M-m=4-(-1)=5$.

Câu 11. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2;6]$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ trên đoạn $[-2;6]$. Giá trị của $2M+3m$ là



Lời giải

Nhìn vào đồ thị ta thấy: $M = 6$, $m = -4$.

Vậy giá trị $2M + 3m = 2.6 + 3.(-4) = 0$.

Câu 12. Cho hàm số $y = \sqrt{-x^2 + 4x + 21} - \sqrt{-x^2 + 3x + 10}$, gọi y_0 là GTNN của hàm số đã cho, đạt được tại điểm x_0. Tính $6x_0 + y_0^4$.

Lời giải

TXĐ: $D = [-2;5]$.

Xét hàm số đã cho xác định và liên tục trên $[-2;5]$

Ta có: $y' = \dfrac{-x+2}{\sqrt{-x^2+4x+21}} + \dfrac{2x-3}{2\sqrt{-x^2+3x+10}}$ $(-2 < x < 5)$.

$$y'=0 \Leftrightarrow \frac{-x+2}{\sqrt{-x^2+4x+21}} + \frac{2x-3}{2\sqrt{-x^2+3x+10}} = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x-4)\sqrt{-x^2+3x+10} = (2x-3)\sqrt{-x^2+4x+21}$$

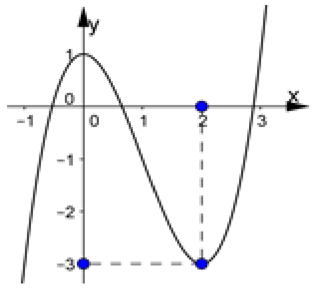
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2 < x < 5 \\ (2x-4)(2x-3) \ge 0 \\ (2x-4)^2(-x^2+3x+10) = (2x-3)^2(-x^2+4x+21) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left(-2;\dfrac{3}{2}\right] \cup [2;5) \\ 25(2x-3)^2 = 49(x-2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left(-2;\dfrac{3}{2}\right] \cup [2;5) \\ \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{3} \\ x = \dfrac{29}{17} \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1}{3} \in (-2;5)$$

Xét: $y(-2) = 3; y\left(\dfrac{1}{3}\right) = \sqrt{2}; y(5) = 4 \Rightarrow \min\limits_{[-2;5]} y = y\left(\dfrac{1}{3}\right) = \sqrt{2}$

Suy ra, $x_0 = \dfrac{1}{3}$, $y_0 = \sqrt{2}$ $\Rightarrow 6x_0 + y_0^4 = 10$

Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình dưới:



Tìm GTLN, GTNN của hàm số $y = f^2(x) + 3$ trên đoạn $[0;2]$.

Lời giải

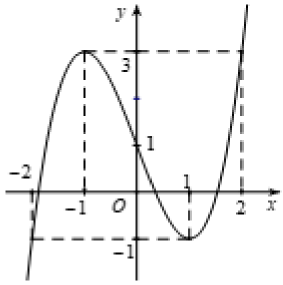
Đặt $g(x) = f^2(x) + 3$. Từ đồ thị đã cho ta có: $\exists x_0 \in (0;1)$ để $f(x_0) = 0$.

Và $\forall x \in [0;2]$ thì $-3 \le f(x) \le 1 \Rightarrow 0 \le f^2(x) \le 9 \Rightarrow 3 \le f^2(x) + 3 \le 12 \Rightarrow 3 \le g(x) \le 12$

$$\Rightarrow \max_{[0;2]} g(x) = 12 \text{ khi } f(x) = -3 \Leftrightarrow x = 2 \in [0;2].$$

Và $\min_{[0;2]} g(x) = 3$ khi $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_0 \in [0;2]$.

Câu 14. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình dưới:



Tìm GTLN, GTNN của hàm số $y = 1 - f^2(x)$ trên đoạn $[-2;1]$.

Lời giải

GTNN là -8 khi $x = -1$.

GTLN là 1 khi $\left[\begin{array}{l} x = x_1 \\ x = x_2 \end{array}\right.$ (với x_1, x_2 là các nghiệm của $f(x)$ trên đoạn $[-2;1]$).

khi $x = \frac{1}{3} \Rightarrow \Rightarrow x_0 = \frac{1}{3}, y_0 = \sqrt{2} \Rightarrow 6x_0 + y_0^4 = 8$.

DẠNG 2: TÌM MAX- MIN BẰNG PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN

Câu 1. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sin^2 x-4\sin x+2$.

Lời giải

Đặt $t=\sin x$ điều kiện $-1\le t\le 1$ hàm số đã cho trở thành $y=f(t)=t^2-4t+2$.

Ta có $f'(t)=2t-4$, $f'(t)<0$ với $\forall t\in[-1;1]$ nên hàm số $f(t)$ nghịch biến trên $[-1;1]$ do đó

$\min\limits_{t\in[-1;1]} f(t)=f(1)=-1$ và $\max\limits_{t\in[-1;1]} f(t)=f(-1)=7$.

Vậy hàm số đã cho có GTLN là 7 và GTNN là -1 .

Câu 2. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng xét dấu biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		0		1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-3	$\nearrow$	4	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Giá trị lớn nhất của hàm số $f\left(\sin x-1\right)$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Đặt $\sin x-1=t,\left(-2\le t\le 0\right)$.

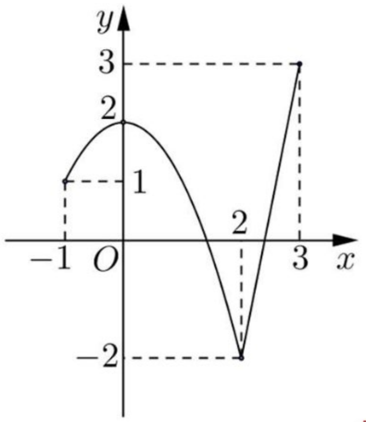
Bài toán quy về tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=f\left(t\right)$ trên đoạn $\left[-2;0\right]$.

Từ bảng biến thiên ta có giá trị lớn nhất của hàm số $y=f\left(t\right)$ trên đoạn $\left[-2;0\right]$ là 3 khi $t=-2$

hay $\sin x=-1\Leftrightarrow x=\dfrac{-\pi}{2}+k2\pi, k\in Z$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số $f\left(\sin x-1\right)$ bằng 3.

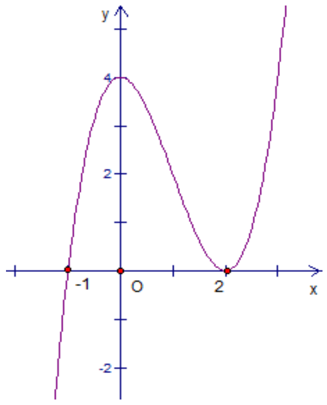
Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên R có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi M vàm lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y=f(-sinx+2)$. Giá trị của $M-m$ bằng



Lời giải

Đặt $t=-\sin x+2$ vì $-1\le\sin x\le 1\Rightarrow t\in[1;3]$. Xét hàm số $y=f\left(t\right)$ với $t\in\left[1;3\right]$, Từ đồ thị đã cho, ta có $M = \max\limits_{[1;3]} f(t) = f(3) = 3; \min\limits_{[1;3]} f(t) = f(2) = -2 \Rightarrow M - m = 5.$

Câu 4. Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = f\left(2 - x^2\right)$ trên đoạn $\left[0; \sqrt{2}\right]$.



Lời giải

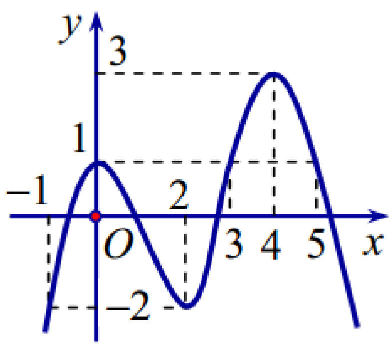
Đặt $t = 2 - x^2$.

Vì $t' = -2x \le 0$, $\forall x \in \left[0; \sqrt{2}\right]$ và $t' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ nên hàm số $t = 2 - x^2$ nghịch biến trên đoạn $\left[0; \sqrt{2}\right]$. Nên ta có $x \in \left[0; \sqrt{2}\right] \Leftrightarrow t \in [0; 2]$. Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = f\left(t\right)$ trên đoạn $[0; 2]$.

Từ đồ thị hàm số $y = f\left(x\right)$ cho thấy : trên $\left[0; 2\right]$ hàm số $y = f\left(t\right)$ nghịch biến.

Do đó $\max\limits_{[0;2]} f\left(t\right) = f\left(0\right) = 4$.

Câu 5. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\left[-1; 5\right]$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = f\left(x^2 - 2x + 4\right)$ trên $\left[0; 2\right]$.



Lời giải

Đặt $t = x^2 - 2x + 4, x \in \left[0; 2\right]$.

Ta có $t'\left(x\right) = 2x - 2$.

$t'\left(x\right) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

$t(0)=4; t(1)=3; t(2)=4 \Rightarrow t \in [3;4]$.

$y=f\left(x^2-2x+4\right)=f(t), t \in [3;4]$.

Dựa vào đồ thị ta có :

$\underset{x\in[0;2]}{\text{Max}}\, y = \underset{t\in[3;4]}{\text{Max}}\, f(t)=3$.

$\underset{x\in[0;2]}{\text{Min}}\, y = \underset{t\in[3;4]}{\text{Min}}\, f(t)=1$.

Câu 6. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên tập $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		1		$\frac{21}{4}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	2	$\nearrow$	5	$\searrow$	$+\infty$

Gọi $M;m$ lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f\left(x^2-2x\right)$ trên đoạn $\left[-\frac{3}{2};\frac{7}{2}\right]$. Tìm tổng $M+m$.

Lời giải

Đặt $t=x^2-2x$ với $x\in\left[-\frac{3}{2};\frac{7}{2}\right]$.

Ta có $x\in\left[-\frac{3}{2};\frac{7}{2}\right] \Leftrightarrow -\frac{5}{2}\le x-1\le\frac{5}{2} \Leftrightarrow 0\le(x-1)^2\le\frac{25}{4}$

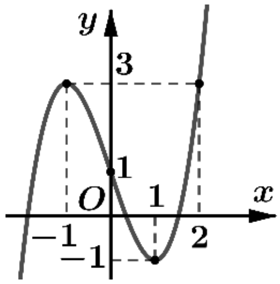
$\Leftrightarrow -1\le(x-1)^2-1\le\frac{21}{4}$ nên $t\in\left[-1;\frac{21}{4}\right]$.

Xét hàm số $y=f(t); t\in\left[-1;\frac{21}{4}\right]$

Từ bảng biến thiên suy ra: $m=\underset{t\in\left[-1;\frac{21}{4}\right]}{\min} f(t)=f(1)=2, M=\underset{t\in\left[-1;\frac{21}{4}\right]}{\max} f(t)=f\left(\frac{21}{4}\right)=5$.

Do đó $M+m=2+5=7$.

Câu 7. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ:



Xét hàm số $g\left(x\right)=f\left(2x^3+x-1\right)+m$. Tìm m để $\max\limits_{[0;1]} g\left(x\right)=-10$.

Lời giải

Đặt $t\left(x\right)=2x^3+x-1$ với $x\in\left[0;1\right]$. Ta có $t'\left(x\right)=6x^2+1>0,\ \forall x\in\left[0;1\right]$.

Suy ra hàm số $t\left(x\right)$ đồng biến nên $x\in\left[0;1\right]\Rightarrow t\in\left[-1;2\right]$.

Từ đồ thị hàm số ta có $\max\limits_{[-1;2]} f\left(t\right)=3\Rightarrow \max\limits_{[-1;2]}\left[f\left(t\right)+m\right]=3+m$.

Theo yêu cầu bài toán ta cần có: $3+m=-10\Leftrightarrow m=-13$.

DẠNG 3: MỘT SỐ BÀI TOÁN CÓ CHỨA THAM SỐ

Câu 1. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=-x^3-3x^2+m$ trên đoạn $[-1;1]$ bằng 0.

Lời giải

$y=f(x)=-x^3-3x^2+m$. Ta có: $y'=-3x^2-6x$. $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\in[-1;1]\\x=-2\notin[-1;1]\end{array}\right.$.

$f(-1)=m-2$; $f(0)=m$; $f(1)=m-4$.

Ta thấy $\min\limits_{[-1;1]}\{f(-1);f(0);f(1)\}=m-4$. Suy ra yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m-4=0\Leftrightarrow m=4$.

Câu 2. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x-m^2}{x+1}$ đạt giá trị lớn nhất bằng 3 trên $[-4;-2]$.

Lời giải

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

Ta có: $y'=\dfrac{1+m^2}{(x+1)^2}>0,\forall x\neq -1$. Suy ra hàm số $y=\dfrac{x-m^2}{x+1}$ đồng biến trên $(-\infty;-1),(-1;+\infty)$

.

Do đó: $\max\limits_{[-4;-2]}y=y(-2)=\dfrac{-2-m^2}{-2+1}=2+m^2$.

Theo giả thiết: $\max\limits_{[-4;-2]}y=3\Leftrightarrow 2+m^2=3\Leftrightarrow m=\pm1$.

Câu 3. Tính tổng tất cả các giá trị của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=(x^3-3x+m)^2$ trên đoạn $[-1;1]$ bằng 1.

Lời giải

Xét hàm số $f(x)=x^3-3\text{x}+m$. Để GTNN của hàm số $y=(x^3-3\text{x}+m)^2$ trên đoạn $[-1;1]$ bằng 1 thì $\min\limits_{[-1;1]}f(x)=1$ hoặc $\max\limits_{[-1;1]}f(x)=-1$.

Ta có $f'(x)=3\text{x}^2-3$; $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=1\end{array}\right.\Rightarrow f(x)$ nghịch biến trên $[-1;1]$.

Suy ra $\max\limits_{[-1;1]}f(x)=f(-1)=2+m$ và $\min\limits_{[-1;1]}f(x)=f(1)=-2+m$.

Trường hợp 1: $\min\limits_{[-1;1]}f(x)=1\Leftrightarrow -2+m=1\Leftrightarrow m=3$.

Trường hợp 2: $\max\limits_{[-1;1]}f(x)=-1\Leftrightarrow 2+m=-1\Leftrightarrow m=-3$.

Vậy tổng các giá trị của tham số m là 0.

Câu 4. Tìm tất cả các của tham số m đểGTNN của hàm số $y=\left|x^2-4x+m+3\right|$ bằng 5.

Lời giải

Đặt $f(x)=x^2-4x+m+3 \Rightarrow f'(x)=2x-4.$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=2.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	m-1	$\nearrow$	$+\infty$

TH1: Nếu $m-1\ge 0 \Leftrightarrow m\ge 1$ thì GTNN của hàm số $y=\left|x^2-4x+m+3\right|$ bằng $m-1=5 \Leftrightarrow m=6\,(TM)$.

TH2: Nếu $m-1<0 \Leftrightarrow m<1$

Ta có $f\left(x\right)=0$ có hai nghiệm $x_1=2-\sqrt{1-m}$; $x_2=2+\sqrt{1-m}$ thỏa mãn $x_1<2<x_2$

Ta có GTNN của hàm số $y=\left|x^2-4x+m+3\right|$ bằng 0 (KTM)

KL: $m=6$.

Câu 5. Tìm tất cả các giá trị của m để GTNN của hàm số $y=\left|x^2-4x+m+3\right|-4x$ bằng -5.

Lờigiải

Xét $f\left(x\right)=x^2-4x+m+3$ có $\Delta'=1-m$.

TH1. $m\ge 1$: $f\left(x\right)\ge 0\ \forall x \Leftrightarrow y=x^2-8x+m+3$.

x	$-\infty$		4		$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	$m-13$	$\nearrow$	$+\infty$

$\min y=-5 \Leftrightarrow m=8$ (TM).

TH2. $m<1$: $f\left(x\right)=0$ có hai nghiệm $x_1=2-\sqrt{1-m}$; $x_2=2+\sqrt{1-m}$.

Khiđó $y=\begin{cases}-x^2-3-m \text{ nếu } x\in\left[x_1;x_2\right]\\ x^2-8x+3+m \text{ nếu } x\notin\left[x_1;x_2\right]\end{cases}$

Do đó

$\min y \le \min\limits_{[x_1;x_2]} y = \min\left\{y(x_1), y(x_2)\right\} = \min\left\{-8+4\sqrt{1-m}, -8-4\sqrt{1-m}\right\} = -8-4\sqrt{1-m} < -8$ (loại).

Vậy $m = 8$ là giá trị cần tìm.

Câu 6. Gọi S là tập tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \left|x^3 - 3x + m\right|$ trên đoạn $[0;3]$ bằng 16. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

Cách tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất hàm số trên đoạn $[a;b]$

- Tìm nghiệm $x_i (i = 1,2,...)$ của $y' = 0$ thuộc $[a;b]$

- Tính các giá trị $f(x_i); f(a); f(b)$ so sánh các giá trị, suy ra giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất.

3. HƯỚNG GIẢI: Tìm giá trị lớn nhất hàm số $y = \left|f(x)\right|$, ta xét hàm số $y = f(x)$.

B1: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$.

B2: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left|f(x)\right|$ tại $\max f(x)$ hoặc $\min f(x)$.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Đặt $g(x) = x^3 - 3x + m$.

$g'(x) = 3x^2 - 3$; $g'(x) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \notin [0;3] \\ x = 1 \in [0;3] \end{array}\right.$.

$g(0) = m; g(1) = -2 + m;\ g(3) = 18 + m$.

Suy ra $\max\limits_{[0;3]} g(x) = 18 + m$; $\min\limits_{[0;3]} g(x) = -2 + m$.

Để giá trị lớn nhất hàm số $y = f(x)$ là 16 $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 18 + m = 16 \\ -2 + m > -16 \end{cases} \\ \begin{cases} -2 + m = -16 \\ 18 + m < 16 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m = -2 \\ m > -14 \end{cases} \\ \begin{cases} m = -14 \\ m < -2 \end{cases} \end{array}\right.$.

Vậy $S = \left\{-2; -14\right\}$ nên tổng là $-2 - 14 = -16$.

Câu 7: Gọi tập S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left|x^3 - 3x + m\right|$ trên đoạn $[0;2]$ bằng 3. Số phần tử của S là

Lời giải

Xét $u = x^3 - 3x + m$. Ta có: $u' = 3x^2 - 3$; $u' = 0 \Leftrightarrow x = 1 \in [0;2]$. Khi đó:

$A = \max\limits_{[0;2]} u = \max\left\{u(0), u(1), u(2)\right\} = \max\left\{m, m-2, m+2\right\} = m + 2$.

$a = \min\limits_{[0;2]} u = \min\left\{u(0), u(1), u(2)\right\} = \min\left\{m, m-2, m+2\right\} = m - 2$.

Ta có: $\max\limits_{[0;2]} y = \max\{|A|,|a|\} = \max\{|m+2|,|m-2|\} = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} |m+2| = 3 \\ |m+2| \geq |m-2| \end{cases} \\ \begin{cases} |m-2| = 3 \\ |m-2| \geq |m+2| \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -1 \end{array}\right.$.

Vậy $S = \{\pm 1\}$.

Câu 8: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = |x^2 + x + m|$ thỏa mãn $\min\limits_{[-2;\,2]} y = 2$. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

Lời giải

Xét hàm số $u = x^2 + x + m$ trên đoạn $[-2;2]$, có: $u' = 0 \Leftrightarrow 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$.

$\max\limits_{[-2;2]} u = \max\left\{u(-2), u\left(-\frac{1}{2}\right), u(2)\right\} = m + 6$; $\min\limits_{[-3;2]} u = \min\left\{u(-2), u\left(-\frac{1}{2}\right), u(2)\right\} = m - \frac{1}{4}$.

Nếu $m - \frac{1}{4} \geq 0$ hay $m \geq \frac{1}{4}$ thì $\min\limits_{[-2;\,2]} y = m - \frac{1}{4} = 2 \Leftrightarrow m = \frac{9}{4}$ (thỏa mãn).

Nếu $m + 6 \leq 0$ hay $m \leq -6$ thì $\min\limits_{[-2;\,2]} y = -m - 6 = 2 \Leftrightarrow m = -8$ (thỏa mãn).

Nếu $-6 < m < \frac{1}{4}$ thì $\min\limits_{[-2;\,2]} y = 0$ (không thỏa mãn).

Ta có: $S = \left\{-8; \frac{9}{8}\right\}$. Vậy tổng các phần tử của S bằng $-\frac{23}{4}$.

Câu 9: Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m|$ trên đoạn $[-1;3]$. Có bao nhiêu số thực m để $M = \frac{59}{2}$?

Lời giải

Xét hàm số: $u = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m$.

Có $u' = 12x^3 - 12x^2 - 24x \Rightarrow u' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -1 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

Khi đó: $\begin{cases} \min\limits_{[-1;3]} u = \min\{u(-1), u(0), u(2), u(3)\} = u(2) = m - 32 \\ \max\limits_{[-1;3]} u = \max\{u(-1), u(0), u(2), u(3)\} = u(3) = m + 27 \end{cases}$.

Do đó: $M=\max\left\{|m-32|,|m+27|\right\}=\dfrac{59}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}|m-32|=\dfrac{59}{2}\\|m-32|\ge|m+27|\end{cases}\\\begin{cases}|m+27|=\dfrac{59}{2}\\|m+27|\ge|m-32|\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow m=\dfrac{5}{2}$.

Vậy có 1 số thực m để $M=\dfrac{59}{2}$.

Câu 10: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=\left|\dfrac{x-m^2-m}{x+2}\right|$ thỏa $\max\limits_{[1;2]} y=1$. Tích các phần tử của S bằng

Lời giải

Xét $u=\dfrac{x-m^2-m}{x+2}$, ta có: $u'=\dfrac{2+m^2+m}{(x+2)^2}>0$, $\forall x\in[1;2]$, $\forall m\in\mathbb{R}$.

Do đó $A=\max\limits_{[1;2]}u=u(2)=-\dfrac{m^2+m-2}{4}$; $a=\min\limits_{[1;2]}u=u(1)=-\dfrac{m^2+m-1}{3}$.

$\max\limits_{[1;2]}y=\max\left\{\left|\dfrac{m^2+m-2}{4}\right|,\left|\dfrac{m^2+m-1}{3}\right|\right\}=1\Leftrightarrow m=\dfrac{-1\pm\sqrt{17}}{2}$.

Ta có: $S=\left\{\dfrac{-1\pm\sqrt{17}}{2}\right\}$. Vậy tích các phần tử của S bằng -4.

Câu 11: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|\dfrac{x^2+mx+m}{x+1}\right|$ trên $[1;2]$ bằng 2. Số phần tử của S là

Lời giải

Xét hàm số: $u=\dfrac{x^2+mx+m}{x+1}$.

$u'=\dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}$; $u'=0\Leftrightarrow\dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}=0\Leftrightarrow x^2+2x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\notin[1;2]\\x=-2\notin[1;2]\end{array}\right.$.

Ta có: $u'>0\,\forall x\in[1;2]$ nên $\max\limits_{[1;2]}y=\left\{\left|m+\dfrac{4}{3}\right|,\left|m\dfrac{1}{2}\right|\right\}$.

$\max\limits_{[1;2]}y=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=\dfrac{2}{3}\\m=-\dfrac{10}{3}\end{array}\right.$. Vậy $S=\left\{\dfrac{2}{3};-\dfrac{10}{3}\right\}$.

Câu 12: Xét hàm số $f(x)=\left|x^2+ax+b\right|$, với a, b là tham số. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-1;3]$. Khi M nhận giá trị nhỏ nhất tính $T=a+2b$.

Lời giải

Ta có: $\max\{|A|,|B|\}\ge\dfrac{|A+B|}{2}$ (1). Dấu $=$ xảy ra khi $A=B$.

Ta có: $\max\{|A|,|B|\}\ge\dfrac{|A-B|}{2}$ (2). Dấu $=$ xảy ra khi $A=-B$.

Xét hàm số $g(x)=x^2+ax+b$, có $g'(x)=0\Leftrightarrow x=-\dfrac{a}{2}$.

Trường hợp 1: $-\dfrac{a}{2}\notin[-1;3]\Leftrightarrow a\notin[-6;2]$. Khi đó $\mathrm{M}=\max\{|1-a+b|,|9+3a+b|\}$.

Áp dụng bất đẳng thức (1) ta có $\mathrm{M}\ge|4+2a|>8$.

Trường hợp 2: $-\dfrac{a}{2}\in[-1;3]\Leftrightarrow a\in[-6;2]$. Khi đó $\mathrm{M}=\max\left\{|1-a+b|,|9+3a+b|,\left|b-\dfrac{a^2}{4}\right|\right\}$

.

Áp dụng bất đẳng thức (1) và (2) ta có $\mathrm{M}\ge\max\left\{|5+a+b|,\left|b-\dfrac{a^2}{4}\right|\right\}$

$\Leftrightarrow \mathrm{M}\ge\dfrac{1}{8}\left|20+4a+a^2\right|\Leftrightarrow \mathrm{M}\ge\dfrac{1}{8}\left|16+(a+2)^2\right|$.

Suy ra $\mathrm{M}\ge 2$.

Ta có: M nhận giá trị nhỏ nhất có thể được là $M=2$ khi $\begin{cases}a=-2\\5+a+b=\dfrac{-a^2}{2}-b\\1-a+b=9+3a+b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-2\\b=-1\end{cases}$.

Vậy $a+2b=-4$.

Câu 13: Cho hàm số $y=\left|x^3-3x^2+m\right|$ (với m là tham số thực). Hỏi $\max\limits_{[1;2]}y$ có giá trị nhỏ nhất bằng

Lời giải

Xét hàm số: $t=x^3-3x^2$ với $x\in[1;2]$.

Ta có $t'=3x^2-6x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\notin(1;2)\\x=2\notin(1;2)\end{array}\right.$; $t(1)=-2$, $t(2)=-4$. Nên $\max\limits_{[1;2]}t=-2$ và $\min\limits_{[1;2]}t=-4$.

Do đó $\max\limits_{[1;2]}y=\max\limits_{[1;2]}|m+t|=\max\{|m-4|;|m-2|\}$

$=\max\{|m-4|;|2-m|\}\ge\dfrac{|m-4|+|2-m|}{2}\ge\dfrac{|(m-4)+(2-m)|}{2}=1$.

Dấu bằng đạt tại $m-4=2-m \Leftrightarrow m=3$.

Câu 14: Cho hàm số $f(x)=\left|8x^4+ax^2+b\right|$, trong đó a, b là tham số thực. Tìm mối liên hệ giữa a và b để giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-1;1]$ bằng 1.

Lời giải

Đặt $t=x^2$, vì $x\in[-1;1]$ nên $t\in[0;1]$.

Ta có: $g(t)=8t^2+at+b$, đây là parabol có bề lõm quay lên và có tọa độ đỉnh là $I\left(-\frac{a}{6};-\frac{a^2}{32}+b\right)$

Trường hợp 1: $-\frac{a}{6}\in[0;1]$. Theo yêu cầu bài toán ta có:

$$\begin{cases}-1\le g(0)\le 1\\ -1\le g(1)\le 1\\ -1\le -\frac{a^2}{32}+b\le 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-1\le b\le 1\\ -1\le 8+a+b\le 1\\ -32\le 32b-a^2\le 32\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-1\le b\le 1 & (1)\\ -1\le 8+a+b\le 1 & (2)\\ -32\le a^2-32b\le 32 & (3)\end{cases}$$

Lấy $(1)+32(3)$ ta có : $-64\le a^2\le 64$ do đó $-8\le a\le 8$.

Lấy $(3)+32(2)$ ta có : $-64\le a^2+32a+256\le 64$

Suy ra : $a^2+32a+192\le 0 \Leftrightarrow -24\le a\le -8$.

Khi đó ta có : $a=-8$ và $b=1$.

Thử lại: $g(t)=8t^2-8t+1=2(2t-1)^2-1$

Vì $0\le t\le 1$ nên $-1\le 2t-1\le 1 \Rightarrow 0\le (2t-1)^2\le 1 \Rightarrow -1\le g(t)=2(2t-1)^2-1\le 1$.

Ta có: $\max\left|g(t)\right|=1$ khi $t=1 \Rightarrow x=\pm 1$. Nên $a=-8$ và $b=1$ (thỏa mãn).

Trường hợp 2 : $-\frac{a}{6}\notin[0;1]$. Theo yêu cầu bài toán ta có:

$$\begin{cases}-1\le g(0)\le 1\\ -1\le g(1)\le 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-1\le b\le 1\\ -1\le 8+a+b\le 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-1\le b\le 1\\ -1\le 8+a+b\le 1\end{cases}$$

$\Rightarrow -2\le a+8\le 2 \Leftrightarrow -10\le a\le -6$ **(loại)**.

Vậy $a=-8$ và $b=1$.

Câu 15: Cho hàm số $f(x)=\left|x^4-4x^3+4x^2+a\right|$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[0;2]$. Có bao nhiêu số nguyên a thuộc đoạn $[-3;3]$ sao cho $M\le 2m$?

Lời giải

Xét hàm số $g\left(x\right)=x^4-4x^3+4x^2+a$.

$$g'\left(x\right)=4x^3-12x^2+8x\,;\; g'\left(x\right)=0 \Leftrightarrow 4x^3-12x^2+8x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=2 \end{array}\right..$$

Bảng biến thiên

x	0		1		2
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	a	$\nearrow$	$a+1$	$\searrow$	a

TH1: $a\le -1 \Rightarrow m=-\left(a+1\right); M=-a \;\Rightarrow -2\left(a+1\right)\ge -a \Leftrightarrow a\le -2 \Rightarrow a\in\left\{-3;-2\right\}$.

TH2: $-1<a<0 \Rightarrow m=0; M>0 \;\Rightarrow M>2m$ (loại).

TH3: $a\ge 0 \Rightarrow m=a; M=a+1 \;\Rightarrow 2a\ge a+1 \Leftrightarrow a\ge 1 \Rightarrow a\in\left\{1;2;3\right\}$.

Vậy có 5 giá trị của a thỏa mãn đề bài.

Câu 16: Cho hàm số $y=\left|\dfrac{x^4+ax+a}{x+1}\right|$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $\left[1;2\right]$. Có bao nhiêu số nguyên a sao cho $M\ge 2m$?

Lời giải

Xét $u=\dfrac{x^4+ax+a}{x+1}$ trên đoạn $\left[1;2\right]$, ta có $u'=\dfrac{3x^4+4x^3}{\left(x+1\right)^2}>0$, $\forall x\in\left[1;2\right]$.

Do đó, $\max\limits_{[1;2]} u=u\left(2\right)=a+\dfrac{16}{3}$, $\min\limits_{[1;2]} u=u\left(1\right)=a+\dfrac{1}{2}$.

TH1: $a+\dfrac{1}{2}\ge 0 \Rightarrow \begin{cases} M=a+\dfrac{16}{3} \\ m=a+\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+\dfrac{1}{2}\ge 0 \\ a+\dfrac{16}{3}\ge 2\left(a+\dfrac{1}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{2}\le a\le \dfrac{13}{3}$.

TH2: $a+\dfrac{16}{3}\le 0 \Rightarrow \begin{cases} M=-\left(a+\dfrac{1}{2}\right) \\ m=-\left(a+\dfrac{16}{3}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+\dfrac{16}{3}\le 0 \\ -\left(a+\dfrac{1}{2}\right)\ge -2\left(a+\dfrac{16}{3}\right) \end{cases} \Leftrightarrow -\dfrac{61}{6}\le a\le -\dfrac{16}{3}$.

TH3: $\left(a+\dfrac{1}{2}\right).\left(a+\dfrac{16}{3}\right)\le 0 \Rightarrow m=0$, $M=\max\left\{\left|a+\dfrac{1}{2}\right|,\left|a+\dfrac{16}{3}\right|\right\} \Rightarrow M>2m$ (thỏa mãn).

Ta có: $-\dfrac{61}{6}\le a\le \dfrac{13}{3}$ $a\in\left\{-10;....;4\right\}$. Vậy có 15 số nguyên thỏa mãn.

Câu 17: Cho hàm số $y=\left|2x-x^2-\sqrt{(x+1)(3-x)}+m\right|$. Có tất cả bao nhiêu giá trị thực của tham số m để $\max y=3$?

Lời giải

Hàm số xác định khi: $(x+1)(3-x)\ge 0 \Leftrightarrow -1\le x\le 3$.

Đặt $t=\sqrt{(x+1)(3-x)}=\sqrt{3+2x-x^2}\ \left(t\in[0;2]\right)$ và $2x-x^2=t^2-3$.

Khi đó ta cần tìm giái trị lớn nhất của hàm số $y=\left|t^2-t-3+m\right|$ trên đoạn $[0;2]$.

Với $u=t^2-t-3+m$ ta có: $\max\limits_{[0;2]}u=m-1;\min\limits_{[0;2]}u=m-\dfrac{13}{4}$.

Do đó $\max y=\max\left\{|m-1|;\left|m-\dfrac{13}{4}\right|\right\}=3\Leftrightarrow m=4;m=\dfrac{1}{4}$.

Câu 18: Cho hàm số $y=\left|2x-x^2-\sqrt{(x+1)(3-x)}+m\right|$. Khi giá trị lớn nhất của hàm số đạt giá trị nhỏ nhất. Mệnh đề nào sau đây đúng?

Lời giải

Hàm số xác định khi: $(x+1)(3-x)\ge 0 \Leftrightarrow -1\le x\le 3$.

Đặt $t=\sqrt{(x+1)(3-x)}=\sqrt{3+2x-x^2}\ \left(t\in[0;2]\right)$ và $2x-x^2=t^2-3$.

Khi đó ta cần tìm giái trị lớn nhất của hàm số $y=\left|t^2-t-3+m\right|$ trên đoạn $[0;2]$.

Với $u=t^2-t-3+m$ ta có: $\max\limits_{[0;2]}u=m-1;\min\limits_{[0;2]}u=m-\dfrac{13}{4}$.

Do đó $\max y=\max\left\{|m-1|;\left|m-\dfrac{13}{4}\right|\right\}\ge\dfrac{|m-1|+\left|\dfrac{13}{4}-m\right|}{2}\ge\dfrac{\left|m-1+\dfrac{13}{4}-m\right|}{2}=\dfrac{9}{8}$.

Dấu bằng xảy ra $|m-1|=\left|\dfrac{13}{4}-m\right|=\dfrac{9}{8}\Leftrightarrow m=\dfrac{17}{8}$.

Câu 19: Gọi S là tập hợp tất cả các số nguyên m để hàm số $y=\left|\dfrac{1}{4}x^4-\dfrac{19}{2}x^2+30x+m\right|$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $[0;2]$ không vượt quá 20. Tổng các phần tử của S bằng

Lời giải

Xét $u=\dfrac{1}{4}x^4-\dfrac{19}{2}x^2+30x+m$ trên đoạn $[0;2]$ có $u'=x^3-19x+30$; $u'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-5\\x=3\\x=2\end{array}\right.$.

Do đó: $\max\limits_{[0;2]}u=\max\{u(0);u(2)\}=\max\{m;m+6\}=m+6;\min\limits_{[0;2]}u=m$.

Do đó:

$$\max_{[0;2]} y = \max\{|m|;|m+6|\} \le 20 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |m| \le |m+6| \le 20 \\ |m+6| \le |m| \le 20 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -13 \le m \le -6 \\ -20 \le m \le -13 \end{array}\right. \Leftrightarrow -20 \le m \le -6.$$

Mà $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-20;-19;\ldots,-6\}$. Vậy $S = -\sum_{6}^{20} k = -195$.

Câu 20: Cho hàm số $y = \left|2x^3 - 3x^2 + m\right|$. Có bao nhiêu số nguyên m để $\min_{[-1;3]} f(x) \le 3$?

Lời giải

Xét $u = 2x^3 - 3x^2 + m$, ta có: $u' = 6x^2 - 6x$; $u' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$.

Do đó: $\begin{cases} \min_{[-1;3]} u = \min\{u(-1), u(3), u(0), u(1)\} = \min\{m-5, m+27, m, m-1\} = m-5 \\ \max_{[-1;3]} u = \max\{u(-1), u(3), u(0), u(1)\} = \max\{m-5, m+27, m, m-1\} = m+27 \end{cases}$.

TH1: $m - 5 \ge 0 \Leftrightarrow m \ge 5 \Rightarrow \min_{[-1;3]} f(x) = m - 5 \le 3 \Leftrightarrow m \le 8 \Rightarrow m \in \{5;6;7;8\}$.

TH2:
$m + 27 \le 0 \Leftrightarrow m \le -27 \Rightarrow \min_{[-1;3]} f(x) = -(m+27) \le 3 \Leftrightarrow m \ge -30 \Rightarrow m \in \{-30;-29;-28;-27\}$.

TH3: $(m-5)(m+27) < 0 \Leftrightarrow -27 < m < 5 \Rightarrow \min_{[-1;3]} f(x) = 0$ (thỏa mãn).

Vậy $m \in \{-30;-29;-28;\ldots;7;8\}$.

Câu 21: Cho hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$, $|f(x)| \le 1, \forall x \in [0;1]$. Tìm giá trị lớn nhất của $f'(0)$.

Lời giải.

$f'(x) = 2ax + b \Rightarrow f'(0) = b$.

Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của b với điều kiện $|f(x)| \le 1, \forall x \in [0;1]$.

Ta có. $\begin{cases} f(0) = c \\ f(1) = a + b + c \\ f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{a}{4} + \frac{b}{2} + c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = f(1) - f(0) \\ a + 2b = 4f\left(\frac{1}{2}\right) - 4f(0) \\ c = f(0) \end{cases} \Rightarrow b = 4f\left(\frac{1}{2}\right) - f(1) - 3f(0).$

$$|f(x)| \le 1, \forall x \in [0;1] \Rightarrow \begin{cases} -1 \le f(0) \le 1 \\ -1 \le f(1) \le 1 \\ -1 \le f\left(\frac{1}{2}\right) \le 1 \end{cases} \Rightarrow b = 4f\left(\frac{1}{2}\right) + (-f(1)) + 3(-f(0)) \le 4 + 1 + 3 = 8.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} f\left(\frac{1}{2}\right)=1 \\ f(1)=-1 \\ f(0)=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=-1, \\ a+b+c=-1, \\ \frac{a}{4}+\frac{b}{2}+c=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-8 \\ b=8 \\ c=-1 \end{cases} \Rightarrow f(x)=-8x^2+8x-1.$

Vậy giá trị lớn nhất của $f'(0)$ bằng 8.

Câu 22: Cho hàm số $y=\left|x^4-2x^3+x^2+a\right|$. Có bao nhiêu số thực a để $\min\limits_{[-1;2]} y+\max\limits_{[-1;2]} y=10$?

Lời giải

Xét $u=x^4-2x^3+x^2+a$ trên đoạn $[-1;2]$, ta có : $u'=4x^3-6x^2+2x$; $u'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=\frac{1}{2} \end{array}\right.$.

Suy ra: $\begin{cases} M=\max\limits_{[-1;2]} u=\max\left\{u(-1),u(0),u\left(\frac{1}{2}\right),u(1)\right\}=u(-1)=u(2)=a+4 \\ m=\min\limits_{[-1;2]} u=\min\left\{u(-1),u(0),u\left(\frac{1}{2}\right),u(1)\right\}=u(0)=u(1)=a \end{cases}$.

TH1: $m\ge 0 \Leftrightarrow a\ge 0$. Khi đó: $\min\limits_{[-1;2]} y=m;\ \max\limits_{[-1;2]} y=M$

Ta có điều kiện : $\begin{cases} a\ge 0 \\ a+a+4=10 \end{cases} \Leftrightarrow a=3$.

TH2: $M\le 0 \Leftrightarrow a\le -4$. Khi đó : $\min\limits_{[-1;2]} y=-M;\ \max\limits_{[-1;2]} y=-m$.

Ta có điều kiện : $\begin{cases} a\le -4 \\ -(a+4)-a=10 \end{cases} \Leftrightarrow a=-7$.

TH3: $m<0<M \Leftrightarrow -4<a<0$.

Khi đó: $\min\limits_{[-1;2]} y=0;\ \max\limits_{[-1;2]} y=\max\left\{|a+4|,|a|\right\}=\max\left\{a+4,-a\right\}<10$.

Suy ra $\min\limits_{[-1;2]} y+\max\limits_{[-1;2]} y<0+10=10$ (loại).

Vậy $a\in\{3;-7\}$.

DẠNG 4: PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ ĐỂ GIẢI QUYẾT BÀI TOÁN TÌM ĐIỀU KIỆN CỦA THAM SỐ m SAO CHO PHƯƠNG TRÌNH $f(x,m)=0$ CÓ NGHIỆM (CÓ ỨNG DỤNG GTLN, GTNN)

I. Phương pháp:

Bước 1. Tìm điều kiện xác định của phương trình đã cho.

Bước 2. Đặt $t=u(x)$ hoặc $x=u(t)$. Tìm tập giá trị K của t. Chuyển bài toán về: tìm điều kiện của m để phương trình $g(t)=h(m)$ có nghiệm thuộc K.

Bước 3. Tìm GTLN, GTNN của $g(t)$ hoặc tập giá trị của $g(t)$ trên K để suy ra điều kiện của m.

Một số cách đặt ẩn phụ thường gặp:

1. Xuất hiện biểu thức đối xứng $\begin{cases}\sqrt{ax+b}\pm\sqrt{cx+d}\\ \sqrt{(ax+b)(cx+d)}\end{cases}$. **PP:** Đặt $t=\sqrt{ax+b}+\sqrt{cx+d}$.

2. Xuất hiện $\sqrt{a+bx}$ và $\sqrt{c-bx}$ $(a+c>0)$.

PP: Vì $\left(\sqrt{a+bx}\right)^2+\left(\sqrt{c-bx}\right)^2=a+c$. Nên đặt $\begin{cases}\sqrt{a+bx}=\sqrt{a+c}\sin\alpha\\ \sqrt{c-bx}=\sqrt{a+c}\cos\alpha\end{cases}$, $\alpha\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Và sử dụng hệ thức $\begin{cases}\sin\alpha=\dfrac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}\\ \cos\alpha=\dfrac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}\end{cases}$, tiếp tục đặt $t=\tan\dfrac{\alpha}{2}$, $t\in[0;1]$.

Ta được một phương trình ẩn t.

Câu 1. Tìm các giá trị thực của tham số m để phương trình sau có nghiệm:

$$6-x+2\sqrt{2(x-1)(4-x)}=m+4\sqrt{x-1}+4\sqrt{2}.\sqrt{4-x}.$$

Lời giải

Đkxđ: $1\le x\le 4$.

Phương trình đã cho tương đương: $6-x+2\sqrt{(x-1)(8-2x)}-4\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{8-2x}\right)=m$ (1).

Đặt $t=\sqrt{x-1}+\sqrt{8-2x}$.

Xét hàm số $t(x)=\sqrt{x-1}+\sqrt{8-2x}$ liên tục trên đoạn $[1;4]$, có:

$$t'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x-1}}+\frac{-2}{2\sqrt{8-2x}}=\frac{\sqrt{8-2x}-2\sqrt{x-1}}{2\sqrt{x-1}.\sqrt{8-2x}}$$

Ta có: $t'(x)=0\Leftrightarrow\sqrt{8-2x}=2\sqrt{x-1}\Leftrightarrow x=2$.

Lại có: $t(1)=\sqrt{6}$, $t(2)=3$, $t(4)=\sqrt{3}$ $\Rightarrow\begin{cases}\min\limits_{x\in[1;4]}t(x)=t(4)=\sqrt{3}\\ \max\limits_{x\in[1;4]}t(x)=t(2)=3\end{cases}$

Vì $t=\sqrt{x-1}+\sqrt{8-2x}\Rightarrow t^2=7-x+2\sqrt{(x-1)(8-2x)}\Leftrightarrow t^2-1=6-x+2\sqrt{(x-1)(8-2x)}$

Phương trình (1) trở thành: $t^2-4t-1=m$ (2).

Xét hàm số $f(t)=t^2-4t-1$ liên tục trên đoạn $\left[\sqrt{3};3\right]$, có: $f'(t)=2t-4$.

Ta có: $f(t)=0 \Leftrightarrow t=2$.

Lại có: $f\left(\sqrt{3}\right)=2-4\sqrt{3}$, $f(2)=-5$, $f(3)=-4 \Rightarrow \begin{cases} \min\limits_{x\in\left[\sqrt{3};3\right]} f(t)=f(2)=-5 \\ \max\limits_{x\in\left[\sqrt{3};3\right]} f(t)=f(3)=-4 \end{cases}$

(1) có nghiệm $x\in[1;4]$ $\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm $t\in\left[\sqrt{3};3\right]$

$\Leftrightarrow \min\limits_{t\in\left[\sqrt{3};3\right]} f(t)\le m\le \max\limits_{t\in\left[\sqrt{3};3\right]} f(t) \Leftrightarrow -5\le m\le -4$.

Vậy $-5\le m\le -4$ là các giá trị m cần tìm.

Câu 2. Tìm các giá trị thực của tham số m để phương trình sau có nghiệm:

$(2m-1)\sqrt{x+3}+(m-2)\sqrt{1-x}+m-1=0$.

Lời giải

Đkxđ: $-3\le x\le 1$.

Phương trình đã cho tương đương:

$$m\left(2\sqrt{x+3}+\sqrt{1-x}+1\right)=\sqrt{x+3}+2\sqrt{1-x}+1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x+3}+2\sqrt{1-x}+1}{2\sqrt{x+3}+\sqrt{1-x}+1}=m \quad (1).$$

Ta có: $\left(\sqrt{x+3}\right)^2+\left(\sqrt{1-x}\right)^2=4$. Nên đặt: $\begin{cases}\sqrt{x+3}=2\sin a \\ \sqrt{1-x}=2\cos a\end{cases}$, $a\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Sử dụng: $\begin{cases} \sin a=\dfrac{2\tan\frac{a}{2}}{1+\tan^2\frac{a}{2}} \\ \cos a=\dfrac{1-\tan^2\frac{a}{2}}{1+\tan^2\frac{a}{2}} \end{cases}$, và đặt $t=\tan\dfrac{a}{2}$, $t\in[0;1]$.

Phương trình (1) trở thành: $\dfrac{-3t^2+4t+5}{-t^2+8t+3}=m$, $t\in[0;1]$.

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{-3t^2+4t+5}{-t^2+8t+3}$ liên tục trên đoạn $[0;1]$.

Ta có $f'(t)=\dfrac{-20t^2-8t-28}{\left(-t^2+8t+3\right)^2}<0\ \forall t\in[0;1]$

$\Rightarrow$ hàm số $f(t)$ nghịch biến trên $[0;1] \Rightarrow \begin{cases} \min\limits_{t\in[0;1]} f(t)=f(1)=\dfrac{3}{5} \\ \max\limits_{t\in[0;1]} f(t)=f(0)=\dfrac{5}{3} \end{cases}$

(1) có nghiệm $x\in[-3;1]$ $\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm $t\in[0;1]$

$\Leftrightarrow \min\limits_{t\in[0;1]} f(t)\le m\le \max\limits_{t\in[0;1]} f(t) \Leftrightarrow \dfrac{3}{5}\le m\le\dfrac{5}{3}$.

Vậy $\dfrac{3}{5}\le m\le\dfrac{5}{3}$ là các giá trị m cần tìm.

DẠNG 7: PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ ĐỂ GIẢI QUYẾT BÀI TOÁN TÌM ĐIỀU KIỆN CỦA THAM SỐ ĐỂ BẤT PHƯƠNG TRÌNH CÓ NGHIỆM HOẶC NGHIỆM ĐÚNG VỚI MỌI $x \in K$ (CÓ ỨNG DỤNG GTLN, GTNN)

I. Phương pháp

1. Tìm điều kiện của tham số để bất phương trình chứa tham số có nghiệm hoặc nghiệm đúng với mọi $x \in [a;b]$

$$m > f(x)\ \forall x \in [a;b] \Leftrightarrow m > \max_{[a;b]} f(x)$$

$$m \ge f(x)\ \forall x \in [a;b] \Leftrightarrow m \ge \max_{[a;b]} f(x)$$

$$m < f(x)\ \forall x \in [a;b] \Leftrightarrow m < \min_{[a;b]} f(x)$$

$$m \le f(x)\ \forall x \in [a;b] \Leftrightarrow m \le \min_{[a;b]} f(x)$$

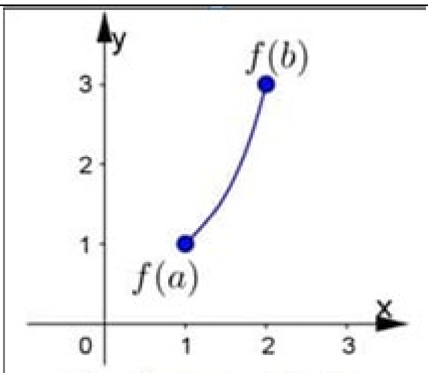
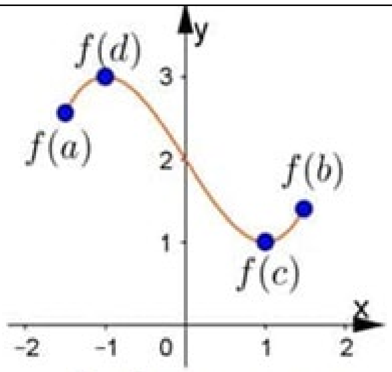
$$m > f(x) \text{ có nghiệm } x \in [a;b] \Leftrightarrow m > \min_{[a;b]} f(x)$$

$$m \ge f(x) \text{ có nghiệm } x \in [a;b] \Leftrightarrow m \ge \min_{[a;b]} f(x)$$

$$m < f(x) \text{ có nghiệm } x \in [a;b] \Leftrightarrow m < \max_{[a;b]} f(x)$$

$$m \le f(x) \text{ có nghiệm } x \in [a;b] \Leftrightarrow m \le \max_{[a;b]} f(x)$$

2. Tìm điều kiện của tham số để bất phương trình chứa tham số có nghiệm hoặc nghiệm đúng với mọi $x \in (a;b)$

MẸO NHỚ Nếu hàm chỉ có max min ở biên và không tồn tại thì: Loại $\forall$ luôn có dấu =, loại có nghiệm luôn bỏ dấu =. Nếu hàm có max min tồn tại thì đang có dấu gì thì giữ nguyên	 $x \in (a;b)$ và max/min ko $\exists$	 $x \in (a;b)$ và max/min $\exists$
$m > f(x)\ \forall x \in (a;b)$ $m \ge f(x)\ \forall x \in (a;b)$ $m < f(x)\ \forall x \in (a;b)$ $m \le f(x)\ \forall x \in (a;b)$	$\to m \ge f(b)$ $\to m \ge f(b)$ $\to m \le f(a)$ $\to m \le f(a)$	$m > \max \to m > f(d)$ $m \ge \max \to m \ge f(d)$ $m < \min \to m < f(c)$ $m \le \min \to m \le f(c)$
$m > f(x)$ có nghiệm $m \ge f(x)$ có nghiệm $m < f(x)$ có nghiệm $m \le f(x)$ có nghiệm	$\to m > f(a)$ $\to m > f(a)$ $\to m < f(b)$ $\to m < f(b)$	$m > \min \to m > f(c)$ $m \ge \min \to m \ge f(c)$ $m < \max \to m < f(d)$ $m \le \max \to m \le f(d)$

Câu 1. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $6x+\sqrt{(2+x)(8-x)}\le x^2+m-1$ nghiệm đúng với mọi $x\in[-2;8]$.

Lời giải

Bất phương trình tương đương với $-x^2+6x+16+\sqrt{(2+x)(8-x)}-15\le m$

Đặt $t=\sqrt{(2+x)(8-x)}$, với $x\in[-2;8]$ thì $t\in[0;5]$.

Bất phương trình trở thành $t^2+t-15\le m$.

Xét hàm số $f(t)=t^2+t-15$ trên đoạn $[0;5]$, ta có bảng biến thiên như hình sau

t		0		5	
$f(t)$				15	
		-15	$\nearrow$		

Suy ra bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $x\in[-2;8]$ khi và chỉ khi

$m\ge\max\limits_{[0;5]}f(t)=15$

Câu 2. Cho phương trình $4\sqrt{6+x-x^2}-3x\le m\left(\sqrt{x+2}+2\sqrt{3-x}\right)$. Tìm m để bất phương trình đã cho có nghiệm thực?

Lời giải

+ Điều kiện: $-2\le x\le 3$.

+ Đặt $t=\sqrt{x+2}+2\sqrt{3-x}$ với $x\in[-2,3]$

Ta có: $t'=\dfrac{1}{2\sqrt{x+2}}-\dfrac{1}{\sqrt{3-x}}=\dfrac{\sqrt{3-x}-2\sqrt{x+2}}{2\sqrt{x+2}\sqrt{3-x}}$; $t'=0\Leftrightarrow\sqrt{3-x}=2\sqrt{x+2}\Leftrightarrow x=-1$

Bảng biến thiên:

x		-2		-1		3	
t'			$+$		$-$		
t				5			
			$\nearrow$		$\searrow$		
		$2\sqrt{5}$				$\sqrt{5}$	

Từ bảng biến thiên suy ra: $t\in\left[\sqrt{5},5\right]$

+ Do $t=\sqrt{x+2}+2\sqrt{3-x}\Leftrightarrow 4\sqrt{6+x-x^2}-3x=t^2-14$ nên bất phương trình đã cho trở thành:

$t^2-14\le mt\Leftrightarrow\dfrac{t^2-14}{t}\le m$

+ Xét hàm số $f(t)=\dfrac{t^2-14}{t}$ với $t\in\left[\sqrt{5},5\right]$, ta có:

$f'(t)=\dfrac{t^2+14}{t^2}>0,\forall t\in\left[\sqrt{5},5\right]\Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $\left[\sqrt{5},5\right]$

Bất phương trình đã cho có nghiệm thực $\Leftrightarrow m\ge\min\limits_{\left[\sqrt{5};5\right]}f(t)=f\left(\sqrt{5}\right)\Leftrightarrow m\ge-\dfrac{9\sqrt{5}}{5}$.

Câu 3. Tìm m để bất phương trình $\sqrt{x}+\sqrt{9-x}\ge\sqrt{-x^2+9x+m}$ (1) có nghiệm.

Lời giải

Điều kiện: $0\le x\le 9$

Ta có $(1)\Leftrightarrow x+9-x+2\sqrt{x(9-x)}\ge -x^2+9x+m$

$\Leftrightarrow 9+2\sqrt{-x^2+9x}\ge -x^2+9x+m$ (2)

Đặt $t=\sqrt{-x^2+9x}$ do $0\le x\le 9$ suy ra $0\le t\le\frac{9}{2}$

Nên (2) trở thành $9+2t\ge t^2+m\Leftrightarrow -t^2+2t+9\ge m$ (3)

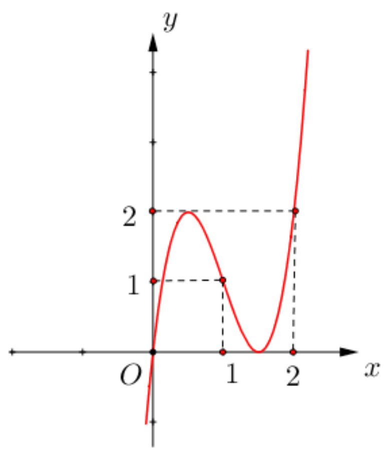
Xét hàm số $f(t)=-t^2+2t+9$, $0\le t\le\frac{9}{2}$

Bảng biến thiên :

t		0	1	$\frac{9}{2}$	
$f(t)$		9 ↗	10	↘ $-\frac{9}{4}$	

Suy ra (1) có nghiệm khi và chỉ khi (3) có nghiệm $t\in\left[0;\frac{9}{2}\right]$, nên $-\frac{9}{4}\le m\le 10$.

Câu 4. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Tìm m sao cho bất phương trình $f(2\sin x)-2\sin^2 x<m$ đúng với mọi $x\in(0;\pi)$?

Lời giải

Ta có: $x\in(0;\pi)\Rightarrow \sin x\in(0;1]$.

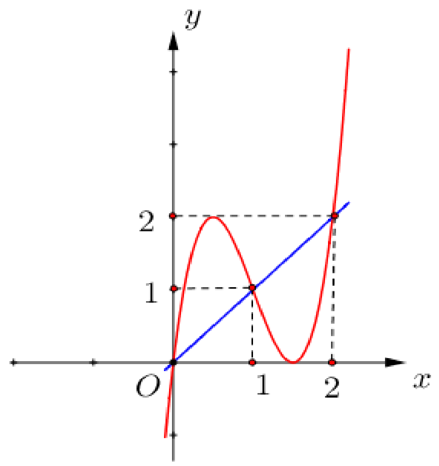
Đặt $t=2\sin x\left(t\in(0;2]\right)$ ta có:

$f(2\sin x)-2\sin^2 x<m$ đúng với mọi $x\in(0;\pi)$

$\Leftrightarrow f(t)-\frac{1}{2}t^2 < m$ đúng với mọi $t \in (0;2]$.

Xét $g(t)=f(t)-\frac{1}{2}t^2$ với $t \in (0;2]$.

$g'(t)=f'(t)-t$.



Từ đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ và $y=x$ (hình vẽ) ta có BBT của $g(t)$ như sau:

t	0		1		2
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(t)$		$\nearrow$		$\searrow$	

Vậy $\underset{(0;2]}{Max}\, g(t)=g(1)=f(1)-\frac{1}{2}$.

Vậy yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m > g(1) \Leftrightarrow m > f(1)-\frac{1}{2}$.

DẠNG 8: BÀI TOÁN THỰC TẾ:

I. Phương pháp:

Đưa yêu cầu bài toán về mối quan hệ hàm số, lập bảng biến thiên để tìm giá trị lớn nhất , giá trị nhỏ nhất của hàm số với điều kiện ràng buộc cho trước.

Chú ý:

Ta cũng có thể sử dụng các bất đẳng thức để tìm giá trị lớn nhất , giá trị nhỏ nhất của biểu thức. Một số bất đẳng thức thường dùng.

1. Bất đẳng thức $AM-GM$:
   - Cho hai số thực $a,b\ge 0$ ta có: $\dfrac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$ hay $a+b\ge 2\sqrt{ab}$.

     Dấu "=" xãy ra khi và chỉ khi $a=b$.
   - Cho ba số thực $a,b,c\ge 0$ ta có: $\dfrac{a+b+c}{3}\ge\sqrt[3]{abc}$ hay $a+b+c\ge 3\sqrt[3]{abc}$.

     Dấu "=" xãy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.
2. Bất đẳng thức Bunhiacopxki :
   - Cho hai bộ số thực $(a;b),(x;y)$ ta có: $|ax+by|\le\sqrt{(a^2+b^2)(x^2+y^2)}$.

     Dấu "=" xãy ra khi và chỉ khi $ay=bx$.
   - Cho hai bộ số thực $(a;b;c),(x;y;z)$ ta có:

     $$|ax+by+cz|\le\sqrt{(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)}.$$

     Dấu "=" xãy ra khi và chỉ khi $a:b:c=x:y:z$.

Câu 1. Một chất điểm chuyển động theo quy luật $S(t)=3t^2-t^3$. Tìm thời điểm t (giây) tại đó vận tốc $v(\text{m/s})$ của chuyển động đạt giá trị lớn nhất?

Lời giải

Ta có $v=S'(t)=6t-3t^2=-3(t-1)^2+3\le 3$, $\forall t\ge 0$. Dấu "=" xảy ra khi $t=1$

Vậy vận tốc của chuyển động đạt giá trị lớn nhất bằng 3 tại thời điểm $t=1\ (s)$.

Câu 2. Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $S(t)=-\dfrac{1}{4}t^4+3t^2-2t-4$, trong đó t tính bằng giây (s) và S tính bằng mét (m). Tại thời điểm nào vận tốc của chuyển động đạt giá trị lớn nhất?

Lời giải

Vận tốc của chuyển động được xác định bởi $v(t)=S'(t)=-t^3+6t-2$.

Ta có: $v'(t)=-3t^2+6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\sqrt{2}\\t=-\sqrt{2}\end{array}\right.$.

Do $t>0$, nên ta có bảng biến thiên

t	0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$v'(t)$		$+$	0	$-$	
$v(t)$		$\nearrow$	$-2+4\sqrt{2}$	$\searrow$	

Dựa vào bảng biến thiên suy ra vận tốc của chuyển động đạt giá trị lớn nhất tại $t=\sqrt{2}$.

Câu 3. Hằng ngày mực nước của hồ thủy điện ở miền Trung lên và xuống theo lượng nước mưa và các suối nước đổ về hồ. Từ lúc 8 giờ sáng, độ sâu của mực nước trong hồ tính theo mét và lên xuống theo thời gian t (giờ) trong ngày cho bởi công thức:

$$h(t)=-\frac{1}{3}t^3+5t^2+24t \quad (t>0)$$

Biết rằng phải thông báo cho các hộ dân phải di dời trước khi xả nước theo quy định trước 5 giờ. Hỏi cần thông báo cho hộ dân di dời trước khi xả nước mấy giờ. Biết rằng mực nước trong hồ phải lên cao nhất mới xả nước.

Lời giải

Xét : $h(t)=-\frac{1}{3}t^3+5t^2+24t \quad (t>0)$

Ta có: $h'(t)=-t^2+10t+24$

$$h'(t)=0 \Leftrightarrow -t^2+10t+24=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=12 \\ t=-2\in(0;+\infty) \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:

t	0		12		$+\infty$
$h'(t)$		$+$	0	$-$	
$h(t)$		$\nearrow$	h_{max}	$\searrow$	

Để mực nước lên cao nhất thì phải mất 12 giờ. Vậy phải thông báo cho dân di dời vào 15 giờ chiều cùng ngày.

Câu 4. Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được cho bởi công thức $F(x)=\frac{1}{40}x^2(30-x)$, trong đó x là liều lượng thuốc tiêm cho bệnh nhân (x được tính bằng miligam). Tính liều lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân để huyết áp giảm nhiều nhất.

Lời giải

Xét hàm số : $F(x)=\frac{1}{40}x^2(30-x) \qquad (0<x<30)$.

$$\Rightarrow F'(x)=\frac{1}{40}\left(-3x^2+60x\right)$$

$$F'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{40}\left(-3x^2+60x\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\in(0;30) \\ x=20 \end{array}\right.$$

BBT.

x	**0**		**20**		$+\infty$
F'(x)		+	**0**	-	
F(x)		$\nearrow$	**100**	$\searrow$	

Ta có huyết áp giảm nhiều nhất $\Leftrightarrow F(x)$ lớn nhất trên $(0;+\infty)$. Dựa vào BBT ta thấy $\underset{(0;+\infty)}{\text{Max}}\, F(x) = F(20) = 100$ nên liều lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân là $x = 20$.

Câu 5. Để thiết kế một chiếc bể cá hình hộp chữ nhật có chiều cao là $60\,cm$, thể tích $96000\,cm^3$. Người thợ dùng loại kính để sử dụng làm mặt bên có giá thành $70000\ VNĐ/m^2$ và loại kính để làm mặt đáy có giá thành $100000\ VNĐ/m^2$. Tính chi phí thấp nhất để hoàn thành bể cá.

Lời giải

Gọi $x, y(m)$ $(x > 0, y > 0)$ là chiều dài và chiều rộng của đáy bể

Khi đó theo đề ta suy ra: $0,6xy = 0,096\ hay\ y = \dfrac{0,16}{x}$.

Giá thành của bể cá được xác định theo giá trị hàm số sau:

$$f(x) = 2.0,6\left(x + \frac{0,16}{x}\right).70000 + 100000.x.\frac{0,16}{x}$$

Ta có $f(x) = 84000\left(x + \dfrac{0,16}{x}\right) + 16000$

Suy ra $f'(x) = 84000\left(1 - \dfrac{0,16}{x^2}\right) \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0,4$

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên $(0;+\infty)$.

x	0		0,4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	+	
$f(x)$		$\searrow$	$f(0,4)$	$\nearrow$	

Dựa vào bảng biến thiên suy ra chi phí thấp nhất để hoàn thành bể cá là $f(0,4) = 83200\ VNĐ$

Câu 6. Nhà xe khoán cho hai tài xế An và Bình mỗi người lần lượt nhận 32 lít và 72 lít xăng trong một tháng. Biết rằng trong một ngày tổng số xăng cả hai người sử dụng là 10 lít. Tổng số ngày ít nhất để hai tài xế sử dụng hết số xăng được khoán là bao nhiêu.

Lời giải

Gọi x (lít) $(0 < x < 10)$ là số xăng An sử dụng trong 1 ngày.

Khi đó: $10 - x$ (lít) là số xăng Bình sử dụng trong 1 ngày.

Suy ra $f(x) = \dfrac{32}{x} + \dfrac{72}{10 - x}$, $x \in (0;10)$ là tổng số ngày An và Bình sử dụng hết số xăng được khoán.

Xét hàm số $f(x)$ ta có: $f'(x) = -\dfrac{32}{x^2} + \dfrac{72}{(10-x)^2}$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{32}{x^2} + \frac{72}{(10-x)^2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = -20 \notin (0;10) \end{array}\right.$$

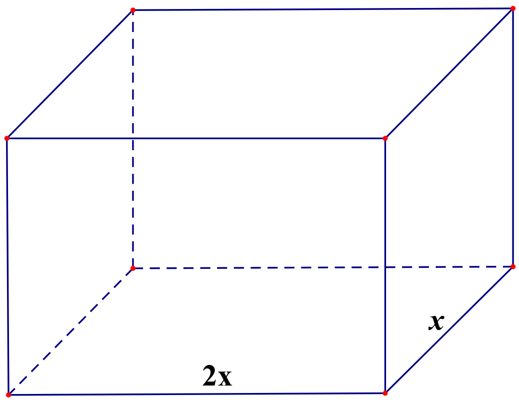
Bảng biến thiên của hàm số $f(x) = \dfrac{32}{x} + \dfrac{72}{10-x}$, $x \in (0;10)$

x	0		4		10
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	||
$f(x)$	|| $+\infty$	$\searrow$	20	$\nearrow$	$+\infty$ ||

Dựa vào BBT ta có sau ít nhất 20 ngày thì An và Bình sử dụng hết lượng xăng được khoán.

Câu 7. Người ta cần xây một bể chứa nước sản xuất dạng khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng $200\ \text{m}^3$. Đáy bể hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng. Chi phí để xây bể là 300 nghìn đồng/m^2 (chi phí được tính theo diện tích xây dựng, bao gồm diện tích đáy và diện tích xung quanh không tính chiều dày của đáy và thành bên). Tính chi phí thấp nhất để xây bể (làm tròn số tiền đến đơn vị triệu đồng).

Lời giải



Gọi chiều rộng của khối hộp là x (m), $x > 0 \Rightarrow$ chiều dài của khối hộp là $2x$ và chiều cao của khối hộp là $\dfrac{200}{2x.x} = \dfrac{100}{x^2}$ (m). Ta có :

Diện tích xung quanh của bể chứa là $S_{xq} = 2\left(x.\dfrac{100}{x^2} + 2x.\dfrac{100}{x^2}\right)$

Diện tích mặt đáy của bể là $S_1 = 2x.x$

Do đó diện tích xây dựng của bể là

$$S = S_{xq} + S_1 = 2\left(x.\frac{100}{x^2} + 2x.\frac{100}{x^2}\right) + 2x.x = 2x^2 + \frac{600}{x}\ (\text{m}^2)$$

Chi phí xây dựng bể là $C(x) = \left(2x^2 + \dfrac{600}{x}\right).3.10^5$ đồng.

Tìm GTNN của $f(x) = 2x^2 + \dfrac{600}{x}$ khi $x > 0$.

Vì $x > 0$ nên áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho ba số không âm ta được

$f(x)=2x^2+\frac{600}{x}=2x^2+\frac{300}{x}+\frac{300}{x}\geq 3\sqrt[3]{2.300.300}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}2x^2=\frac{300}{x}\\ x>0\end{cases}\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{150}.$

Do đó $\min\limits_{(0;+\infty)} f(x)=f(\sqrt[3]{150})=3\sqrt[3]{180000}$.

Chi phí thấp nhất để xây bể là $\min\limits_{(0;+\infty)} f(x).300=3\sqrt[3]{180000}.300\approx 50,81595$ triệu đồng.

Vậy chi phí thấp nhất để xây bể xấp xỉ là 51 triệu đồng.

CHƯƠNG I

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

BÀI 3: GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT VÀ GIÁ TRỊ LỚN NHẤT CỦA HÀM SỐ

III BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TRÍCH TỪ ĐỀ THAM KHẢO VÀ ĐỀ CHÍNH THỨC CỦA BỘ GIÁO DỤC TỪ NĂM 2017 ĐẾN NAY

Câu 1: **(MĐ 101-2022)** Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=x^3-3x^2-9x+10$ trên đoạn $[-2;2]$ bằng

A. -12. **B.** 10. **C.** 15. **D.** -1.

Câu 2: **(MĐ 102-2022)** Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=x^3-3x^2-9x+10$ trên đoạn $[-2;2]$ bằng

A. 15. **B.** 10. **C.** -1. **D.** -12.

Câu 3: **(MĐ 101-2022)** Cho hàm số $f(x)=(m-1)x^4-2mx^2+1$ với m là tham số thực. Nếu $\min\limits_{[0;3]} f(x)=f(2)$ thì $\max\limits_{[0;3]} f(x)$ bằng

A. $-\frac{13}{3}$. **B.** 4. **C.** $-\frac{14}{3}$. **D.** 1.

Câu 4: **(MĐ 102-2022)** Cho hàm số $f(x)=mx^4+2(m-1)x^2$ với m là tham số thực. Nếu $\min\limits_{[0;2]} f(x)=f(1)$ thì $\max\limits_{[0;2]} f(x)$ bằng

A. 2. **B.** -1. **C.** 4. **D.** 0.

Câu 5: **(MĐ 103-2022)** Cho hàm số $f(x)=ax^4+2(a+4)x^2-1$ với a là tham số thực. Nếu $\max\limits_{[0;2]} f(x)=f(1)$ thì $\min\limits_{[0;2]} f(x)$ bằng

A. -17. **B.** -16. **C.** -1. **D.** 3.

Câu 6: **(MĐ 104-2022)** Cho hàm số $f(x)=(a+3)x^4-2ax^2+1$ với a là tham số thực. Nếu $\max\limits_{[0;3]} f(x)=f(2)$ thì $\min\limits_{[0;3]} f(x)$ bằng

A. -9. **B.** 4. **C.** 1. **D.** -8.

Câu 7: **(ĐTK 2020-2021)** Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^4-2x^2+3$ trên đoạn $[0;2]$. Tổng $M+m$ bằng?

A. 11. **B.** 14. **C.** 5. **D.** 13.

Câu 8: **(MĐ 101 2020-2021 – ĐỢT 1)** Trên đoạn $[0;3]$, hàm số $y=-x^3+3x$ đạt giá trị lớn nhất tại điểm

A. $x=0$. **B.** $x=3$. **C.** $x=1$. **D.** $x=2$.

Câu 9: **(MĐ 102 2020-2021 – ĐỢT 1)** Trên đoạn $[-2;1]$, hàm số $y=x^3-3x^2-1$ đạt giá trị lớn nhất tại điểm.

A. $x=-2$. **B.** $x=0$. **C.** $x=-1$. **D.** $x=1$.

Câu 10: **(MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 1)** Trên đoạn $[0;3]$, hàm số $y=x^3-3x+4$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm

A. $x=1$. **B.** $x=0$. **C.** $x=3$. **D.** $x=2$.

Câu 11: **(MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 1)** Trên đoạn $[-1;2]$, hàm số $y=x^3+3x^2+1$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm

A. $x=2$. **B.** $x=0$. **C.** $x=-1$. **D.** $x=1$.

Câu 12: **(MĐ 101 2020-2021 – ĐỢT 2)** Trên đoạn $[-4;-1]$, hàm số $y=x^4-8x^2+13$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm

A. $x=-2$. **B.** $x=-1$. **C.** $x=-4$. **D.** $x=-3$.

Câu 13: **(MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 2)** Trên đoạn $[1;4]$ hàm số $y=x^4-8x^2+19$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm

A. $x=2$. **B.** $x=1$. **C.** $x=3$. **D.** $x=4$.

Câu 14: **(MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 2)** Trên đoạn $[1;4]$,hàm số $y=-x^4+8x^2-13$ đạt giá trị lớn nhất tại điểm

A. $x=4$. **B.** $x=2$. **C.** $x=1$. **D.** $x=3$.

Câu 15: **(Đề minh họa 1, Năm 2017)** Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{x^2+3}{x-1}$ trên đoạn $[2;4]$.

A. $\min\limits_{[2;4]} y=6$ **B.** $\min\limits_{[2;4]} y=-2$ **C.** $\min\limits_{[2;4]} y=-3$. **D.** $\min\limits_{[2;4]} y=\dfrac{19}{3}$

Câu 16: **(Mã 101, Năm 2017)** Giá trị lớn nhất của hàm số $y=x^4-4x^2+9$ trên đoạn $[-2;3]$ bằng

A. 201 **B.** 2 **C.** 9 **D.** 54

Câu 17: **(Mã 102, Năm 2017)** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^3+2x^2-7x$ trên đoạn $[0;4]$ bằng

A. -259 **B.** 68 **C.** 0 **D.** -4

Câu 18: **(Mã 102, Năm 2017)** Ông A dự định sử dụng hết $6,7\text{m}^2$ kính để làm một bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

A. $1,57\text{m}^3$ **B.** $1,11\text{m}^3$ **C.** $1,23\text{m}^3$ **D.** $2,48\text{m}^3$

Câu 19: **(Mã 103, Năm 2017)** Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = x^4 - x^2 + 13$ trên đoạn $[-2;3]$.

A. $m = \frac{51}{4}$ **B.** $m = \frac{49}{4}$ **C.** $m = 13$ **D.** $m = \frac{51}{2}$

Câu 20: **(Mã 104, Năm 2017)** Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = x^2 + \frac{2}{x}$ trên đoạn $\left[\frac{1}{2};2\right]$.

A. $m = \frac{17}{4}$ **B.** $m = 10$ **C.** $m = 5$ **D.** $m = 3$

Câu 21: **(Đề tham khảo, Năm 2018)** Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x^4 - 4x^2 + 5$ trêm đoạn $[-2;3]$ bằng

A. 50 **B.** 5 **C.** 1 **D.** 122

Câu 22: **(Mã 101, Năm 2018)** Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^4 - 4x^2 + 9$ trên đoạn $[-2;3]$ bằng

A. 201 **B.** 2 **C.** 9 **D.** 54

Câu 23: **(Mã 102, Năm 2018)** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 + 2x^2 - 7x$ trên đoạn $[0;4]$ bằng

A. -259 **B.** 68 **C.** 0 **D.** -4

Câu 24: **(Mã 102, Năm 2018)** Ông A dự định sử dụng hết $6,7\text{m}^2$ kính để làm một bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

A. $1,57\text{m}^3$ **B.** $1,11\text{m}^3$ **C.** $1,23\text{m}^3$ **D.** $2,48\text{m}^3$

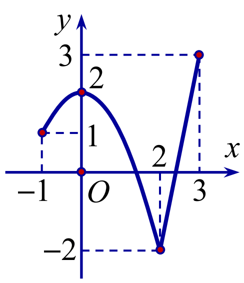
Câu 25: **(Mã 103, Năm 2018)** Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = x^4 - x^2 + 13$ trên đoạn $[-2;3]$.

A. $m = \frac{51}{4}$ **B.** $m = \frac{49}{4}$ **C.** $m = 13$ **D.** $m = \frac{51}{2}$

Câu 26: **(Mã 104, Năm 2018)** Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = x^2 + \frac{2}{x}$ trên đoạn $\left[\frac{1}{2};2\right]$.

A. $m = \frac{17}{4}$ **B.** $m = 10$ **C.** $m = 5$ **D.** $m = 3$

Câu 27: **(Đề minh họa, Năm 2019)** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;3]$ và có đồ thị như hình bên. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1;3]$. Giá trị của $M - m$ bằng



A. 0 **B.** 1 **C.** 4 **D.** 5

Câu 28: **(Mã 101, Năm 2019)** Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=x^3-3x+2$ trên đoạn $[-3;3]$ bằng

A. -16 **B.** 20 **C.** 0 **D.** 4

Câu 29: **(Mã 102, Năm 2019)** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^3-3x+2$ trên $[-3;3]$ bằng

A. 20 **B.** 4 **C.** 0 **D.** -16

Câu 30: **(Mã 103, Năm 2019)** Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=x^3-3x$ trên đoạn $[-3;3]$ bằng

A. 18 **B.** 2 **C.** -18 **D.** -2

Câu 31: **(Mã 104, Năm 2019)** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^3-3x$ trên đoạn $[-3;3]$ bằng

A. 18 **B.** -18 **C.** -2 **D.** 2

Câu 32: **(Đề Minh Họa 2020 Lần 1)** Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=-x^4+12x^2+1$ trên đoạn $[-1;2]$ bằng:

A. 1. **B.** 37. **C.** 33. **D.** 12.

Câu 33: **(Đề Tham Khảo 2020 Lần 2)** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^4-10x^2+2$ trên đoạn $[-1;2]$ bằng

A. 2. **B.** -23. **C.** -22. **D.** -7.

Câu 34: **(Mã 101 - 2020 Lần 1)** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^3-24x$ trên đoạn $[2;19]$ bằng

A. $32\sqrt{2}$. **B.** -40. **C.** $-32\sqrt{2}$. **D.** -45.

Câu 35: **(Mã 102 - 2020 Lần 1)** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^3-21x$ trên đoạn $[2;19]$ bằng

A. -36. **B.** $-14\sqrt{7}$. **C.** $14\sqrt{7}$. **D.** -34.

Câu 36: **(Mã 103 - 2020 Lần 1)** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^3-30x$ trên đoạn $[2;19]$ bằng

A. $20\sqrt{10}$. **B.** -63. **C.** $-20\sqrt{10}$. **D.** -52.

Câu 37: **(Mã 104 - 2020 Lần 1)** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^3-33x$ trên đoạn $[2;19]$ bằng

A. -72. **B.** $-22\sqrt{11}$. **C.** -58. **D.** $22\sqrt{11}$.

Câu 38: **(Mã 101 – 2020 Lần 2)** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^4-10x^2-4$ trên $[0;9]$ bằng

A. -28. **B.** -4. **C.** -13. **D.** -29.

Câu 39: **(Mã 102 - 2020 Lần 2)** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^4-12x^2-4$ trên đoạn $[0;9]$ bằng

A. -39. **B.** -40. **C.** -36. **D.** -4.

Câu 40: **(Mã 103 - 2020 Lần 2)** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^4-10x^2-2$ trên đoạn $[0;9]$ bằng

A. -2. **B.** -11. **C.** -26. **D.** -27.

Câu 41: **(Mã 104 - 2020 Lần 2)** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^4-12x^2-1$ trên đoạn $[0;9]$ bằng

A. -28. **B.** -1. **C.** -36. **D.** -37.

Câu 42: **(Đề Minh Họa 2020 Lần 1)** Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $f\left(x\right)=\left|x^3-3x+m\right|$ trên đoạn $\left[0;3\right]$ bằng 16. Tổng tất cả các phần tử của S là:

A. -16. **B.** 16. **C.** -12. **D.** -2.

Câu 43: **(Đề Tham Khảo 2020 Lần 2)** Cho hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{x+m}{x+1}$ (m là tham số thực). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho $\max\limits_{[0;1]}\left|f\left(x\right)\right|+\min\limits_{[0;1]}\left|f\left(x\right)\right|=2$. Số phần tử của S là

A. 6. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

CHƯƠNG I

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

BÀI 3: GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT VÀ GIÁ TRỊ LỚN NHẤT CỦA HÀM SỐ

III BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TRÍCH TỪ ĐỀ THAM KHẢO VÀ ĐỀ CHÍNH THỨC CỦA BỘ GIÁO DỤC TỪ NĂM 2017 ĐẾN NAY

Câu 1: **(MĐ 101-2022)** Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=x^3-3x^2-9x+10$ trên đoạn $[-2;2]$ bằng

A. -12. **B.** 10. **C.** 15. **D.** -1.

Lời giải

Chọn C

Hàm số liên tục trên đoạn $[-2;2]$.

Ta có: $f'(x)=3x^2-6x-9 \Rightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1\in[-2;2] \\ x=3\notin[-2;2] \end{array}\right.$.

Mà: $f(-1)=15$; $f(-2)=8$; $f(2)=-12 \Rightarrow \max\limits_{[-2;2]} f(x)=f(-1)=15$.

Câu 2: **(MĐ 102-2022)** Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=x^3-3x^2-9x+10$ trên đoạn $[-2;2]$ bằng

A. 15. **B.** 10. **C.** -1. **D.** -12.

Lời giải

Chọn D

$f(x)=x^3-3x^2-9x+10 \Rightarrow f'(x)=3x^2-6x-9$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=-1 \end{array}\right.$ do $x\in[-2;2] \Rightarrow x=-1$.

$f(-2)=8, f(-1)=15, f(2)=-12$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=x^3-3x^2-9x+10$ trên đoạn $[-2;2]$ bằng 15. Chọn.

A.

Câu 3: **(MĐ 101-2022)** Cho hàm số $f(x)=(m-1)x^4-2mx^2+1$ với m là tham số thực. Nếu $\min\limits_{[0;3]} f(x)=f(2)$ thì $\max\limits_{[0;3]} f(x)$ bằng

A. $-\frac{13}{3}$. **B.** 4· **C.** $-\frac{14}{3}$· **D.** 1·

Lời giải

Chọn B

Có: $f'(x)=4(m-1)x^3-4mx$.

Nếu $\min\limits_{[0;3]} f(x)=f(2)$ thì điều kiện cần là $f'(2)=0$ (Do $f(x)$ là hàm đa thức)

Suy ra $f'(2)=0 \Leftrightarrow m=\frac{4}{3}$.

Điều kiện đủ: Với $m=\frac{4}{3}$, ta có $f(x)=\frac{1}{3}x^4-\frac{8}{3}x^2+1$; $f'(x)=\frac{4}{3}x^3-\frac{16}{3}x$

Nên $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \\ x=-2 \notin (0;3) \end{array}\right.$

Ta có $f(0)=1; f(3)=4; f(2)=-\frac{13}{3}$. Vậy $\min\limits_{[0;3]} f(x)=f(2)$; $\max\limits_{[0;3]} f(x)=4$

Câu 4: **(MĐ 102-2022)** Cho hàm số $f(x)=mx^4+2(m-1)x^2$ với m là tham số thực. Nếu $\min\limits_{[0;2]} f(x)=f(1)$ thì $\max\limits_{[0;2]} f(x)$ bằng

A. 2. **B.** -1. **C.** 4. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C

Vì $\min\limits_{[0;2]} f(x)=f(1)$ nên suy ra $f'(1)=0$

Ta có $f'(x)=4mx^3+4(m-1)x \Rightarrow f'(1)=0 \Leftrightarrow m=\frac{1}{2}$

Với $m=\frac{1}{2}$ thì $f(x)=\frac{1}{2}x^4-x^2$

Ta có $f'(x)=2x^3-2x; f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 1 \end{array}\right.$

$f(0)=0; f(1)=-\frac{1}{2}; f(2)=4$.

Vậy $\max\limits_{[0;2]} f(x)=4$.

Câu 5: **(MĐ 103-2022)** Cho hàm số $f(x)=ax^4+2(a+4)x^2-1$ với a là tham số thực. Nếu $\max\limits_{[0;2]} f(x)=f(1)$ thì $\min\limits_{[0;2]} f(x)$ bằng

A. -17. **B.** -16. **C.** -1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f'(x)=4ax^3+4(a+4)$.

Theo giả thiết $\max\limits_{[0;2]} f(x)=f(1)$ suy ra $f'(1)=0$.

$\Rightarrow 4a+4(a+4)=0 \Leftrightarrow a=-2$.

Khi đó $f(x)=-2x^4+4x^2-1 \Rightarrow f'(x)=-8x^3+8x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \notin [0;2] \\ x=0 \end{array}\right.$.

Ta có $f(0)=-1, f(1)=1, f(2)=-17$.

Vậy, $\min\limits_{[0;2]} f(x)=-17$.

Câu 6: **(MĐ 104-2022)** Cho hàm số $f(x)=(a+3)x^4-2ax^2+1$ với a là tham số thực. Nếu $\max\limits_{[0;3]} f(x)=f(2)$ thì $\min\limits_{[0;3]} f(x)$ bằng

A. -9. **B.** 4. **C.** 1. **D.** -8.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $f'(x)=4x\left[(a+3)x^2-a\right], \forall x \in \mathbb{R}$.

Do $\max\limits_{[0;3]} f(x)=f(2)$ nên $f'(2)=0 \Rightarrow 3a+12=0 \Leftrightarrow a=-4$.

Kiểm tra lại: $a=-4$ thì $f(x)=-x^4+8x^2+1$ liên tục trên $[0;3]$.

Ta có: $f'(x)=-4x^3+16x$ và $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \in [0;3] \\ x=2 \in [0;3] \\ x=-2 \notin [0;3] \end{array}\right.$.

Ta có: $f(2)=17$, $f(0)=1$ và $f(3)=-8$.

Suy ra: $\max\limits_{[0;3]} f(x)=f(2)=17$ và $\min\limits_{[0;3]} f(x)=f(3)=-8$.

****

Câu 7: **(ĐTK 2020-2021)** Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^4-2x^2+3$ trên đoạn $[0;2]$. Tổng $M+m$ bằng?

A. 11. **B.** 14. **C.** 5. **D.** 13.

Lời giải

Ta có $f'(x)=4x^3-4x$ và $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0, x=\pm 1$. Trên $[0;2]$, ta xét các giá trị

$$f(0)=3,\ f(1)=2,\ f(2)=11.$$

Do đó $M=11, m=2$ và $M+m=13$.

Câu 8: **(MĐ 101 2020-2021 – ĐỢT 1)** Trên đoạn $[0;3]$, hàm số $y=-x^3+3x$ đạt giá trị lớn nhất tại điểm

A. $x=0$. **B.** $x=3$. **C.** $x=1$. **D.** $x=2$.

Lời giải

Hàm số $y=-x^3+3x$ xác định và liên tục trên đoạn $[0;3]$.

$y'=-3x^2+3$; $y'=0 \Leftrightarrow -3x^2+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\in[0;3] \\ x=-1\notin[0;3] \end{array}\right.$.

Ta có: $f(0)=0$; $f(3)=-18$; $f(1)=2$.

Vậy $\max\limits_{[0;3]} f(x)=2$ đạt tại $x=1$.

Câu 9: **(MĐ 102 2020-2021 – ĐỢT 1)** Trên đoạn $[-2;1]$, hàm số $y=x^3-3x^2-1$ đạt giá trị lớn nhất tại điểm.

A. $x=-2$. **B.** $x=0$. **C.** $x=-1$. **D.** $x=1$.

Lời giải

$y'=3x^2-6x$

$y'=0 \Leftrightarrow 3x^2-6x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$

Với $x=-2 \Leftrightarrow y(-2)=-21$

Với $x=0 \Leftrightarrow y(0)=-1$

Với $x=1 \Leftrightarrow y(-2)=-3$

Vậy hàm số $y=x^3-3x^2-1$ đạt giá trị lớn nhất tại điểm $x=0$ với $y(0)=-1$.

Câu 10: **(MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 1)** Trên đoạn $[0;3]$, hàm số $y=x^3-3x+4$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm

A. $x=1$. **B.** $x=0$. **C.** $x=3$. **D.** $x=2$.

Lời giải

$y'=3x^2-3$, $\forall x\in(0;3)$; $y'=0 \Leftrightarrow 3x^2-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \quad (\text{n}) \\ x=-1\ (\text{l}) \end{array}\right.$

Ta có: $y(0)=4; y(1)=2; y(3)=22$

Mà hàm số liên tục trên $[0;3]$ (hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$). Suy ra $\min\limits_{x\in[0;3]} y=y(1)=2$

Vậy hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x=1$.

Câu 11: **(MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 1)** Trên đoạn $[-1;2]$, hàm số $y=x^3+3x^2+1$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm

A. $x=2$. **B.** $x=0$. **C.** $x=-1$. **D.** $x=1$.

Lời giải

Xét hàm số $y=f(x)=x^3+3x^2+1$.

$\Rightarrow y'=f'(x)=3x^2+6x$.

$+\ f'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2+6x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\in[-1;2] \\ x=-2\notin[-1;2] \end{array}\right.$.

Ta có $f(-1)=3$, $f(0)=1$ và $f(2)=21$.

Nên $\min\limits_{x\in[-1;2]} f(x)=1$ khi $x=0$.

Câu 12: **(MĐ 101 2020-2021 – ĐỢT 2)** Trên đoạn $[-4;-1]$, hàm số $y=x^4-8x^2+13$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm

A. $x=-2$. **B.** $x=-1$. **C.** $x=-4$. **D.** $x=-3$.

Lời giải

Hàm số $y=x^4-8x^2+13$ xác định và liên tục trên đoạn $[-4;-1]$.

Ta có $y'=4x^3-16x$;

$y'=0 \Leftrightarrow 4x^3-16x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2\ (\in[-4;-1]) \\ x=0\ \ (\notin[-4;-1]) \\ x=2\ \ (\notin[-4;-1]) \end{array}\right.$.

Ta có $f(-4)=141$; $f(-2)=-3$; $f(-1)=6$.

Vậy hàm số $y=x^4-8x^2+13$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm $x=-2$.

Câu 13: **(MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 2)** Trên đoạn $[1;4]$ hàm số $y=x^4-8x^2+19$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm

A. $x=2$. **B.** $x=1$. **C.** $x=3$. **D.** $x=4$.

Lời giải

Ta có: $y'=4x^3-16x=4x(x^2-4)$. Do đó: $y'=0 \Leftrightarrow 4x(x^2-4)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\notin(1;4) \\ x=-2\notin(1;4) \\ x=2\in(1;4) \end{array}\right.$.

Đặt $f(x)=x^4-8x^2+19$ ta có: $f(1)=12$; $f(2)=3$; $f(4)=147$. Suy ra trên đoạn $[1;4]$ hàm số $y=x^4-8x^2+19$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm $x=2$.

Câu 14: **(MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 2)** Trên đoạn $[1;4]$,hàm số $y=-x^4+8x^2-13$ đạt giá trị lớn nhất tại điểm

A. $x=4$. **B.** $x=2$. **C.** $x=1$. **D.** $x=3$.

Lời giải

Ta có $y'=-4x^3+16x$,

$$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \notin [1;4] \\ x=2 \in [1;4] \\ x=-2 \notin [1;4] \end{array}\right.$$

$y(1)=-6, y(2)=3, y(4)=-141$.

$\Rightarrow \max\limits_{[1;4]} y=3 \Leftrightarrow x=2$.

Câu 15: **(Đề minh họa 1, Năm 2017)** Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{x^2+3}{x-1}$ trên đoạn $[2;4]$.

A. $\min\limits_{[2;4]} y=6$ **B.** $\min\limits_{[2;4]} y=-2$ **C.** $\min\limits_{[2;4]} y=-3$. **D.** $\min\limits_{[2;4]} y=\dfrac{19}{3}$

Lời giải

Chọn A

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$. Hàm số đã cho liên tục trên $[2;4]$.

Ta có $y'=\dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$.

$$y'=0 \Leftrightarrow x^2-2x-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \notin [2;4] \\ x=3 \end{array}\right..$$

Ta có $y(2)=7$, $y(3)=6$, $y(4)=\dfrac{19}{3}$. Vậy $\min\limits_{[2;4]} y=6$.

Câu 16: **(Mã 101, Năm 2017)** Giá trị lớn nhất của hàm số $y=x^4-4x^2+9$ trên đoạn $[-2;3]$ bằng

A. 201 **B.** 2 **C.** 9 **D.** 54

Lời giải

Chọn D

Hàm số đã cho liên tục trên $[-2;3]$.

Ta có $y'=4x^3-8x$; $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{2} \end{array}\right.$.

Ta có $y(-2)=9$; $y(3)=54$; $y(0)=9$; $y(\pm\sqrt{2})=5$.

Vậy $\max\limits_{[-2;3]} y=54$.

Câu 17: **(Mã 102, Năm 2017)** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 + 2x^2 - 7x$ trên đoạn $[0;4]$ bằng

A. -259 **B.** 68 **C.** 0 **D.** -4

Lời giải

Chọn D

TXĐ $D = \mathbb{R}$. Hàm số liên tục trên đoạn $[0;4]$.

Ta có $y' = 3x^2 + 4x - 7$. Ta có $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \in [0;4] \\ x = -\frac{7}{3} \notin [0;4] \end{array}\right.$

$y(0) = 0; y(1) = -4; y(4) = 68$. Vậy $\min\limits_{[0;4]} y = -4$.

Câu 18: **(Mã 102, Năm 2017)** Ông A dự định sử dụng hết $6,7\text{m}^2$ kính để làm một bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

A. $1,57\text{m}^3$ **B.** $1,11\text{m}^3$ **C.** $1,23\text{m}^3$ **D.** $2,48\text{m}^3$

Lời giải

Chọn A

Gọi x là chiều rộng, ta có chiều dài là $2x$

Do diện tích đáy và các mặt bên là $6,7m^2$ nên có chiều cao $h = \frac{6,7 - 2x^2}{6x}$,

Ta có $h > 0$ nên $x < \sqrt{\frac{6,7}{2}}$.

Thể tích bể cá là $V(x) = \frac{6,7x - 2x^3}{3}$ và $V'(x) = \frac{6,7 - 6x^2}{3} = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{6,7}{6}}$

Bảng biến thiên

x	0		$\sqrt{\frac{6,7}{6}}$		$\sqrt{\frac{6,7}{2}}$
y'		$+$	0	$-$	
y	0	↗	$1,57m^3$	↘	0

Bể cá có dung tích lớn nhất bằng $1,57\text{m}^3$.

Câu 19: **(Mã 103, Năm 2017)** Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = x^4 - x^2 + 13$ trên đoạn $[-2;3]$.

A. $m = \frac{51}{4}$ **B.** $m = \frac{49}{4}$ **C.** $m = 13$ **D.** $m = \frac{51}{2}$

Lời giải

Chọn A

Hàm số đã cho liên tục trên $\left[-2;3\right]$.

Ta có: $y' = 4x^3 - 2x$.

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right.$; $y\left(0\right) = 13$, $y\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{51}{4}$, $y\left(-2\right) = 25$, $y\left(3\right) = 85$.

Vậy: $m = \dfrac{51}{4}$.

Câu 20: **(Mã 104, Năm 2017)** Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = x^2 + \dfrac{2}{x}$ trên đoạn $\left[\dfrac{1}{2};2\right]$.

A. $m = \dfrac{17}{4}$ **B.** $m = 10$ **C.** $m = 5$ **D.** $m = 3$

Lời giải

Chọn D

Đặt $y = f\left(x\right) = x^2 + \dfrac{2}{x}$. Hàm số đã cho liên tục trên $\left[\dfrac{1}{2};2\right]$.

Ta có $y' = 2x - \dfrac{2}{x^2} = \dfrac{2x^3 - 2}{x^2}$, $y' = 0 \Rightarrow x = 1 \in \left[\dfrac{1}{2};2\right]$

Khi đó: $f\left(1\right) = 3,\ f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{17}{4},\ f\left(2\right) = 5$

Vậy $m = \min\limits_{\left[\frac{1}{2};2\right]} f\left(x\right) = f\left(1\right) = 3$.

Câu 21: **(Đề tham khảo, Năm 2018)** Giá trị lớn nhất của hàm số $f\left(x\right) = x^4 - 4x^2 + 5$ trêm đoạn $\left[-2;3\right]$ bằng

A. 50 **B.** 5 **C.** 1 **D.** 122

Lời giải

Chọn A

Hàm số đã cho liên tục trên $\left[-2;3\right]$.

$f'(x) = 4x^3 - 8x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{array}\right. \in \left[-2;3\right]$;

$f\left(0\right) = 5; f\left(\pm\sqrt{2}\right) = 1; f\left(-2\right) = 5; f\left(3\right) = 50$

Vậy $\underset{\left[-2;3\right]}{Max}\, y = 50$

Câu 22: **(Mã 101, Năm 2018)** Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^4 - 4x^2 + 9$ trên đoạn $\left[-2;3\right]$ bằng

A. 201 **B.** 2 **C.** 9 **D.** 54

Lời giải

Chọn D

Hàm số đã cho liên tục trên $\left[-2;3\right]$.

Ta có $y'=4x^3-8x$; $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm\sqrt{2}\end{array}\right.$.

Ta có $y\left(-2\right)=9$; $y\left(3\right)=54$; $y\left(0\right)=9$; $y\left(\pm\sqrt{2}\right)=5$.

Vậy $\max\limits_{\left[-2;3\right]}y=y\left(3\right)=54$

Câu 23: **(Mã 102, Năm 2018)** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^3+2x^2-7x$ trên đoạn $\left[0;4\right]$ bằng

A. -259 **B.** 68 **C.** 0 **D.** -4

Lời giải

Chọn D

TXĐ $D=\mathbb{R}$. Hàm số liên tục trên đoạn $\left[0;4\right]$.

Ta có $y'=3x^2+4x-7$. Ta có $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\in\left[0;4\right]\\x=-\frac{7}{3}\notin\left[0;4\right]\end{array}\right.$

$y\left(0\right)=0; y\left(1\right)=-4; y\left(4\right)=68$. Vậy $\min\limits_{\left[0;4\right]}y=-4$.

Câu 24: **(Mã 102, Năm 2018)** Ông A dự định sử dụng hết $6,7\text{m}^2$ kính để làm một bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

A. $1,57\text{m}^3$ **B.** $1,11\text{m}^3$ **C.** $1,23\text{m}^3$ **D.** $2,48\text{m}^3$

Lời giải

Chọn A

Gọi x là chiều rộng, ta có chiều dài là $2x$

Do diện tích đáy và các mặt bên là $6,7m^2$ nên có chiều cao $h=\dfrac{6,7-2x^2}{6x}$,

Ta có $h>0$ nên $x<\sqrt{\dfrac{6,7}{2}}$.

Thể tích bể cá là $V\left(x\right)=\dfrac{6,7x-2x^3}{3}$ và $V'\left(x\right)=\dfrac{6,7-6x^2}{3}=0\Leftrightarrow x=\sqrt{\dfrac{6,7}{6}}$

Bảng biến thiên

x	0		$\sqrt{\frac{6,7}{6}}$		$\sqrt{\frac{6,7}{2}}$
y'		$+$	0	$-$	
y	0	$\nearrow$	$1,57m^3$	$\searrow$	0

Bể cá có dung tích lớn nhất bằng $1,57\text{m}^3$.

Câu 25: **(Mã 103, Năm 2018)** Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = x^4 - x^2 + 13$ trên đoạn $[-2;3]$.

A. $m = \frac{51}{4}$ **B.** $m = \frac{49}{4}$ **C.** $m = 13$ **D.** $m = \frac{51}{2}$

Lời giải

Chọn A

Hàm số đã cho liên tục trên $[-2;3]$.

Ta có: $y' = 4x^3 - 2x$.

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right.$; $y(0) = 13$, $y\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{51}{4}$, $y(-2) = 25$, $y(3) = 85$.

Vậy: $m = \frac{51}{4}$.

Câu 26: **(Mã 104, Năm 2018)** Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = x^2 + \frac{2}{x}$ trên đoạn $\left[\frac{1}{2};2\right]$.

A. $m = \frac{17}{4}$ **B.** $m = 10$ **C.** $m = 5$ **D.** $m = 3$

Lời giải

Chọn D

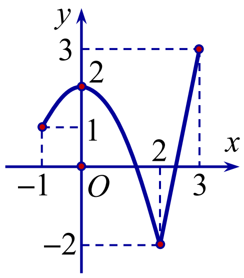
Đặt $y = f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$. Hàm số đã cho liên tục trên $\left[\frac{1}{2};2\right]$.

Ta có $y' = 2x - \frac{2}{x^2} = \frac{2x^3 - 2}{x^2}$, $y' = 0 \Rightarrow x = 1 \in \left[\frac{1}{2};2\right]$

Khi đó: $f(1) = 3$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{17}{4}$, $f(2) = 5$

Vậy $m = \min\limits_{\left[\frac{1}{2};2\right]} f(x) = f(1) = 3$.

Câu 27: **(Đề minh họa, Năm 2019)** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;3]$ và có đồ thị như hình bên. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1;3]$. Giá trị của $M - m$ bằng



A. 0 **B.** 1 **C.** 4 **D.** 5

Lời giải

Chọn D

Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1;3]$ ta có:

$M = \max\limits_{[-1;3]} y = f(3) = 3$ và $m = \min\limits_{[-1;3]} y = f(2) = -2$

Khi đó $M - m = 5$.

Câu 28: **(Mã 101, Năm 2019)** Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 3x + 2$ trên đoạn $[-3;3]$ bằng

A. -16 **B.** 20 **C.** 0 **D.** 4

Lời giải

Chọn B

Hàm số đã cho liên tục trên $[-3;3]$.

Ta có: $f(x) = x^3 - 3x + 2 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 3$

Có: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right.$

Mặt khác: $f(-3) = -16, f(-1) = 4, f(1) = 0, f(3) = 20$.

Vậy $\max\limits_{[-3;3]} f(x) = 20$.

Câu 29: **(Mã 102, Năm 2019)** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 3x + 2$ trên $[-3;3]$ bằng

A. 20 **B.** 4 **C.** 0 **D.** -16

Lời giải

Chọn D

Hàm số đã cho liên tục trên $[-3;3]$.

Ta có: $f'(x) = 3x^2 - 3 \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Ta có: $f(-3) = -16; f(-1) = 4; f(1) = 0; f(3) = 20$.

Do hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-3;3]$ nên giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng -16.

Câu 30: **(Mã 103, Năm 2019)** Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 3x$ trên đoạn $[-3;3]$ bằng

A. 18 **B.** 2 **C.** -18 **D.** -2

Lời giải

Chọn A

Hàm số đã cho liên tục trên $\left[-3;3\right]$.

Tập xác định trên $D=\mathbb{R}$. Hàm số $f\left(x\right)=x^3-3x$ liên tục trên đoạn $\left[-3;3\right]$.

Có $f'\left(x\right)=3x^2-3$.

Cho $f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-1\end{array}\right.$. Ta có $f\left(-3\right)=-18$, $f\left(-1\right)=2$, $f\left(1\right)=-2$ và $f\left(3\right)=18$.

Vậy $\max\limits_{[-3;3]} y=18=f\left(3\right)$

Câu 31: **(Mã 104, Năm 2019)** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f\left(x\right)=x^3-3x$ trên đoạn $\left[-3;3\right]$ bằng

A. 18 **B.** -18 **C.** -2 **D.** 2

Lời giải

Chọn B

Hàm số đã cho liên tục trên $\left[-3;3\right]$.

Ta có: $f'\left(x\right)=3x^2-3$

Có: $f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\in\left[-3;3\right]\\x=1\in\left[-3;3\right]\end{array}\right.$

Mặt khác: $f\left(-3\right)=-18; f\left(3\right)=18; f\left(-1\right)=2; f\left(1\right)=-2$.

Vậy $\min\limits_{[-3;3]} f\left(x\right)=f\left(-3\right)=-18$.

Câu 32: **(Đề Minh Họa 2020 Lần 1)** Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=-x^4+12x^2+1$ trên đoạn $\left[-1;2\right]$ bằng:

A. 1. **B.** 37. **C.** 33. **D.** 12.

Lời giải

Chọn C

$f(x)=-x^4+12x^2+1$ liên tục trên $\left[-1;2\right]$ và $f'(x)=-4x^3+24x^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\sqrt{6}\quad(L)\\x=-\sqrt{6}\quad(L)\end{array}\right.$

Ta có:

$f(-1)=12; f(2)=33; f(0)=1$

Vậy, giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=-x^4+12x^2+1$ trên đoạn $\left[-1;2\right]$bằng 33 tại $x=2$

Câu 33: **(Đề Tham Khảo 2020 Lần 2)** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f\left(x\right)=x^4-10x^2+2$ trên đoạn $\left[-1;2\right]$ bằng

A. 2. **B.** -23. **C.** -22. **D.** -7.

Lời giải

Chọn C

Hàm số đã cho liên tục trên đoạn $\left[-1;2\right]$.

Ta có: $f'(x)=4x^3-20x, f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{5} \end{array}\right.$.

Xét hàm số trên đoạn $[-1;2]$ có: $f(-1)=-7; f(0)=2; f(2)=-22$.

Vậy $\min\limits_{x\in[-1;2]} f(x)=-22$.

Câu 34: **(Mã 101 - 2020 Lần 1)** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^3-24x$ trên đoạn $[2;19]$ bằng

A. $32\sqrt{2}$. **B.** -40. **C.** $-32\sqrt{2}$. **D.** -45.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f'(x)=3x^2-24=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2\sqrt{2}\in[2;19] \\ x=-2\sqrt{2}\notin[2;19] \end{array}\right.$.

$f(2)=2^3-24.2=-40$; $f(2\sqrt{2})=(2\sqrt{2})^3-24.2\sqrt{2}=-32\sqrt{2}$; $f(19)=19^3-24.19=6403$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^3-24x$ trên đoạn $[2;19]$ bằng $-32\sqrt{2}$.

Câu 35: **(Mã 102 - 2020 Lần 1)** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^3-21x$ trên đoạn $[2;19]$ bằng

A. -36. **B.** $-14\sqrt{7}$. **C.** $14\sqrt{7}$. **D.** -34.

Lời giải

Chọn B

Trên đoạn $[2;19]$, ta có: $y'=3x^2-21 \Rightarrow y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\sqrt{7}\notin[2;19] \\ x=\sqrt{7}\in[2;19] \end{array}\right.$.

Ta có: $y(2)=-34$; $y(\sqrt{7})=-14\sqrt{7}$; $y(19)=6460$. Vậy $m=-14\sqrt{7}$.

Câu 36: **(Mã 103 - 2020 Lần 1)** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^3-30x$ trên đoạn $[2;19]$ bằng

A. $20\sqrt{10}$. **B.** -63. **C.** $-20\sqrt{10}$. **D.** -52.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f'(x)=3x^2-30 \Rightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-30=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\sqrt{10}\ (n) \\ x=-\sqrt{10}\ (l) \end{array}\right.$.

Khi đó $f(2)=-52$; $f(\sqrt{10})=-20\sqrt{10}$ và $f(19)=6289$.

Vậy $\min\limits_{x\in[2;19]} f(x)=f(\sqrt{10})=-20\sqrt{10}$.

Câu 37: **(Mã 104 - 2020 Lần 1)** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^3-33x$ trên đoạn $[2;19]$ bằng

A. -72. **B.** $-22\sqrt{11}$. **C.** -58. **D.** $22\sqrt{11}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f'(x)=3x^2-33=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\sqrt{11}\in[2;19] \\ x=-\sqrt{11}\notin[2;19] \end{array}\right.$.

Khi đó ta có $f(2)=-58$, $f(\sqrt{11})=-22\sqrt{11}$, $f(19)=6232$. Vậy $f_{\min}=f(\sqrt{11})=-22\sqrt{11}$.

Câu 38: **(Mã 101 – 2020 Lần 2)** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^4-10x^2-4$ trên $[0;9]$ bằng

A. -28. **B.** -4. **C.** -13. **D.** -29.

Lời giải

Chọn D

Hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[0;9]$.

Có $f'(x)=4x^3-20x$, $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\sqrt{5} \\ x=-\sqrt{5}\notin[0;9] \end{array}\right.$

Ta có $f(0)=-4$, $f(\sqrt{5})=-29$, $f(9)=5747$

Do đó $\min\limits_{[0;9]} f(x)=f(\sqrt{5})=-29$.

Câu 39: **(Mã 102 - 2020 Lần 2)** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^4-12x^2-4$ trên đoạn $[0;9]$ bằng

A. -39. **B.** -40. **C.** -36. **D.** -4.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $f'(x)=4x^3-24x$; $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{6} \end{array}\right.$

Tính được: $f(0)=-4$; $f(9)=5585$ và $f(\sqrt{6})=-40$.

Suy ra $\min\limits_{[0;9]} f(x)=-40$.

Câu 40: **(Mã 103 - 2020 Lần 2)** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^4-10x^2-2$ trên đoạn $[0;9]$ bằng

A. -2. **B.** -11. **C.** -26. **D.** -27.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f'(x)=4x^3-20x$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 4x^3-20x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\notin(0;9) \\ x=\sqrt{5}\in(0;9) \\ x=-\sqrt{5}\ \notin(0;9) \end{array}\right.$

$f(0)=-2$; $f(\sqrt{5})=-27$; $f(9)=5749$.

Vậy $\min\limits_{[0;9]} f(x)=-27$.

Câu 41: **(Mã 104 - 2020 Lần 2)** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^4-12x^2-1$ trên đoạn $[0;9]$ bằng

A. -28. **B.** -1. **C.** -36. **D.** -37.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f'(x)=4x^3-24x$.

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow 4x^3-24x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\in[0;9] \\ x=\sqrt{6}\in[0;9] \\ x=-\sqrt{6}\notin[0;9] \end{array}\right..$$

$f(0)=-1$, $f(\sqrt{6})=-37$, $f(9)=5588$

Câu 42: **(Đề Minh Họa 2020 Lần 1)** Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=|x^3-3x+m|$ trên đoạn $[0;3]$ bằng 16. Tổng tất cả các phần tử của S là:

A. -16. **B.** 16. **C.** -12. **D.** -2.

Lời giải

Chọn A

Xét $u=x^3-3x+m$ trên đoạn $[0;3]$ có $u'=0 \Leftrightarrow 3x^2-3=0 \Leftrightarrow x=1\in[0;3]$.

$$\text{Khi đó } \begin{cases} \max\limits_{[0;3]} \mathrm{u}=\max\{u(0),u(1),u(3)\}=\max\{\mathrm{m},\mathrm{m}-2,\mathrm{m}+18\}=m+18 \\ \min\limits_{[0;3]} \mathrm{u}=\min\{u(0),u(1),u(3)\}=\min\{\mathrm{m},\mathrm{m}-2,\mathrm{m}+18\}=m-2 \end{cases}.$$

$$\text{Suy ra } \underset{[0;3]}{Max} f(x)=\max\{|m-2|,|m+18|\}=16 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} |m+18|=16 \\ |m+18|\geq|m-2| \end{cases} \\ \begin{cases} |m-2|=16 \\ |m-2|\geq|m+18| \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-2 \\ m=-14 \end{array}\right..$$

Do đó tổng tất cả các phần tử của S bằng -16.

Câu 43: **(Đề Tham Khảo 2020 Lần 2)** Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x+m}{x+1}$ (m là tham số thực). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho $\max\limits_{[0;1]}|f(x)|+\min\limits_{[0;1]}|f(x)|=2$. Số phần tử của S là

A. 6. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Do hàm số $f(x)=\dfrac{x+m}{x+1}$ liên tục trên $[0;1]$.

Khi $m=1$ hàm số là hàm hằng nên $\max\limits_{[0;1]} f(x) = \min\limits_{[0;1]} f(x) = 1$

Khi $m \neq 1$ hàm số đơn điệu trên đoạn $\left[0;1\right]$ nên

+ Khi $f(0); f(1)$ cùng dấu thì $\max\limits_{[0;1]}\left|f(x)\right| + \min\limits_{[0;1]}\left|f(x)\right| = \left|f(0)\right| + \left|f(1)\right| = |m| + \left|\dfrac{m+1}{2}\right|$.

+ Khi $f(0); f(1)$ trái dấu thì $\min\limits_{[0;1]}\left|f(x)\right| = 0$,

$\max\limits_{[0;1]}\left|f(x)\right| = \max\left\{\left|f(0)\right|; \left|f(1)\right|\right\} = \max\left\{|m|; \left|\dfrac{m+1}{2}\right|\right\}$.

TH1: $f(0).f(1) \geq 0 \Leftrightarrow m(m+1) \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \leq -1 \\ m \geq 0 \end{array}\right.$.

$\max\limits_{[0;1]}\left|f(x)\right| + \min\limits_{[0;1]}\left|f(x)\right| = 2 \Leftrightarrow |m| + \left|\dfrac{m+1}{2}\right| = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -\dfrac{5}{3} \end{array}\right.$ (thoả mãn).

TH2: $f(0).f(1) < 0 \Leftrightarrow m(m+1) < 0 \Leftrightarrow -1 < m < 0$

$\max\limits_{[0;1]}\left|f(x)\right| + \min\limits_{[0;1]}\left|f(x)\right| = 2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} |m| = 2 \\ \left|\dfrac{m+1}{2}\right| = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \pm 2 \\ m = -5 \\ m = 3 \end{array}\right.$ (không thoả mãn).

Số phần tử của S là 2.

CHƯƠNG I ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

BÀI 3: GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT VÀ GIÁ TRỊ LỚN NHẤT CỦA HÀM SỐ

III BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

DẠNG 1. XÁC ĐỊNH GIÁ TRỊ LỚN NHẤT – GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ THÔNG QUA ĐỒ THỊ, BẢNG BIẾN THIÊN

- Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$

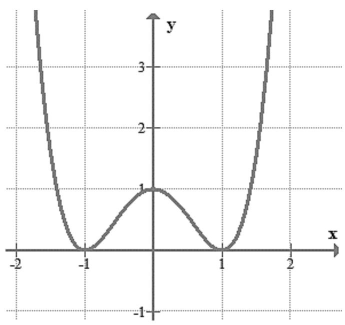
Hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f'(x_i)=0, x_i \in [a;b]$. Khi đó giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ là $M=\max\{f(a), f(b), f(x_i)\}$

- Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$

Hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f'(x_i)=0, x_i \in [a;b]$. Khi đó giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ là $m=Min\{f(a), f(b), f(x_i)\}$

- Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên đoạn $[a;b]$ thì $\underset{[a;b]}{Max} f(x)=f(b); \underset{[a;b]}{Min} f(x)=f(a)$
- Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên đoạn $[a;b]$ thì $\underset{[a;b]}{Max} f(x)=f(a); \underset{[a;b]}{Min} f(x)=f(b)$

Câu 1: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;1]$ và có đồ thị như hình vẽ.



Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1;1]$. Giá trị của $M-m$ bằng

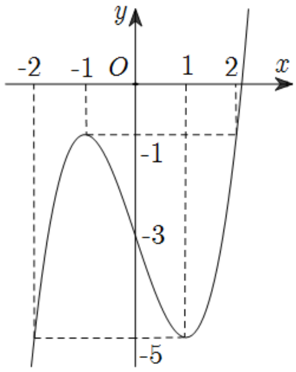
A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 2: Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ liên tục trên $\left[-3;2\right]$ và có bảng biến thiên như sau. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f\left(x\right)$ trên đoạn $\left[-1;2\right]$. Tính $M + m$.

x	-3		-1		0		1		2
$f(x)$	-2	$\nearrow$	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	1

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

Câu 3: Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của hàm số $y = f\left(x\right)$ trên đoạn $\left[-2;2\right]$.



A. $m = -5; M = -1$. **B.** $m = -2; M = 2$. **C.** $m = -1; M = 0$. **D.** $m = -5; M = 0$.

Câu 4: Xét hàm số $y = f(x)$ với $x \in \left[-1;5\right]$ có bảng biến thiên như sau:

x	-1		0		2		5
y'		+	0	-	0	+	
y	3	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Khẳng định nào sau đây là đúng

A. Hàm số đã cho không tồn tại GTLN trên đoạn $\left[-1;5\right]$

B. Hàm số đã cho đạt GTNN tại $x = -1$ và $x = 2$ trên đoạn $\left[-1;5\right]$

C. Hàm số đã cho đạt GTNN tại $x = -1$ và đạt GTLN tại $x = 5$ trên đoạn $\left[-1;5\right]$

D. Hàm số đã cho đạt GTNN tại $x = 0$ trên đoạn $\left[-1;5\right]$

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có bảng biến thiên như hình sau:

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
y'		$-$	$\|\|$	$+$	0	$+$	$\|\|$	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-3		$\nearrow$		2	$\searrow$	-4

Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào ***sai***?

A. Hàm số có hai điểm cực trị.

B. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 2 và giá trị nhỏ nhất bằng -3.

C. Đồ thị hàm số có đúng một đường tiệm cận.

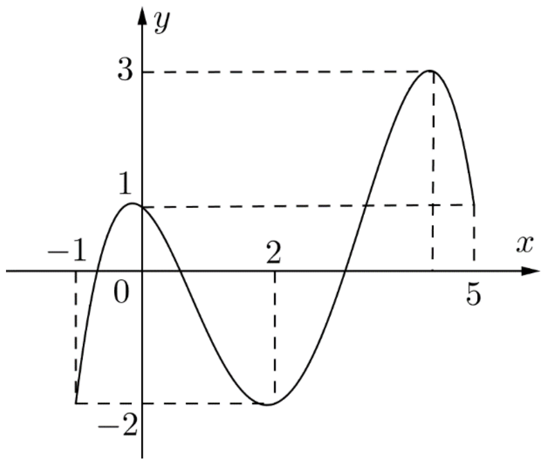
D. Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty;-1)$, $(2;+\infty)$.

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có bảng biến thiên trên đoạn $[-1;3]$ như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây ***đúng***?

x	-1		0		2		3
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	0	$\nearrow$	5	$\searrow$	1	$\nearrow$	4

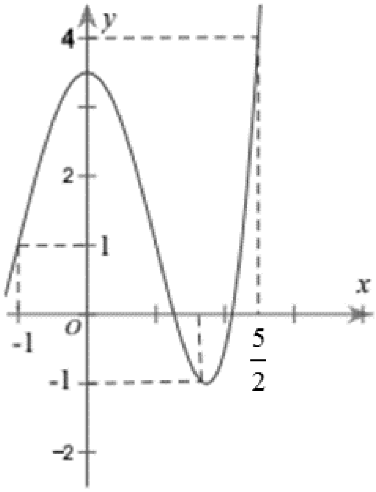
A. $\max\limits_{[-1;3]} f(x) = f(0)$. **B.** $\max\limits_{[-1;3]} f(x) = f(3)$. **C.** $\max\limits_{[-1;3]} f(x) = f(2)$. **D.** $\max\limits_{[-1;3]} f(x) = f(-1)$.

Câu 7: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-1;5]$ và có đồ thị trên đoạn $[-1;5]$ như hình vẽ bên dưới. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-1;5]$ bằng



A. -1 **B.** 4 **C.** 1 **D.** 2

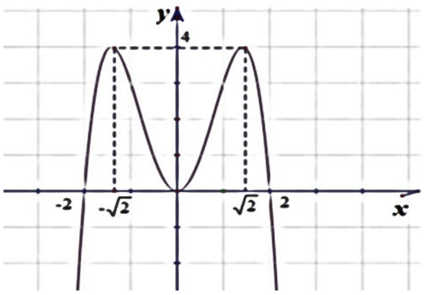
Câu 8: Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ xác định, liên tục trên $\left[-1,\frac{5}{2}\right]$ và có đồ thị là đường cong như hình vẽ.



Giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f\left(x\right)$ trên $\left[-1,\frac{5}{2}\right]$ là:

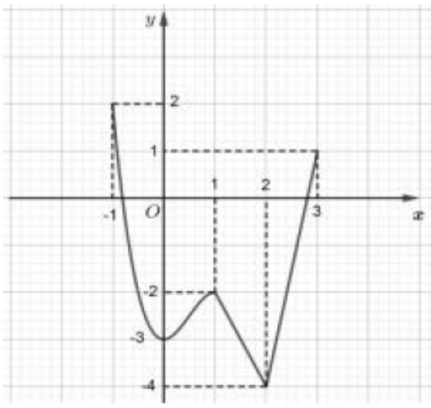
A. $M = 4, m = 1$ **B.** $M = 4, m = -1$ **C.** $M = \frac{7}{2}, m = -1$ **D.** $M = \frac{7}{2}, m = 1$

Câu 9: Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ. Giá trị lớn nhất của hàm số $f\left(x\right)$ trên đoạn $\left[0;2\right]$ là:



A. $\underset{[0;2]}{Max}\, f\left(x\right) = 2$. **B.** $\underset{[0;2]}{Max}\, f\left(x\right) = \sqrt{2}$. **C.** $\underset{[0;2]}{Max}\, f\left(x\right) = 4$. **D.** $\underset{[0;2]}{Max}\, f\left(x\right) = 0$.

Câu 10: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $\left[-1;3\right]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $\left[-1;3\right]$. Giá trị của $M + m$ là



A. 2 **B.** -6 **C.** -5 **D.** -2

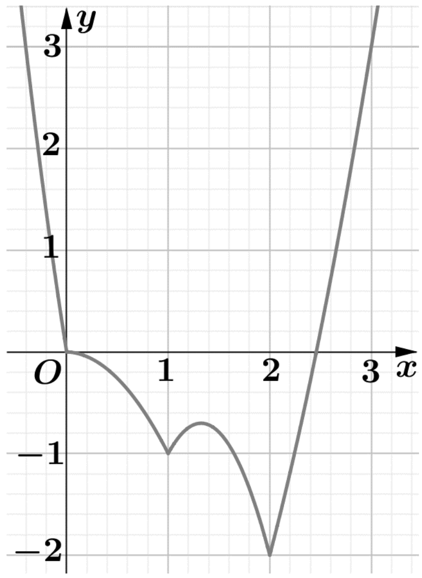
Câu 11: Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ có bảng biến thiên trên $\left[-5;7\right)$ như sau

x	-5		1		7
y'		$-$	0	$+$	‖
y	6	$\searrow$	2	$\nearrow$	9 ‖

Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

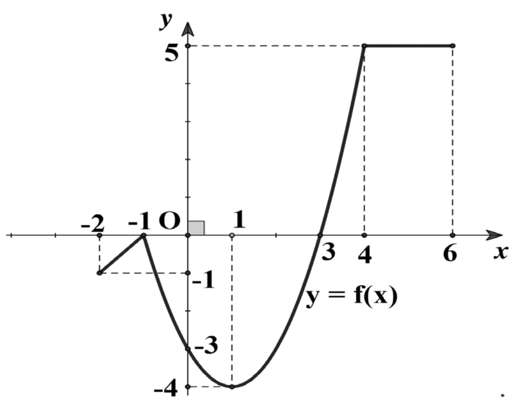
A. $\underset{[-5;7)}{\text{Min}}\, f(x)=6$. **B.** $\underset{[-5;7)}{\text{Min}}\, f(x)=2$. **C.** $\underset{[-5;7)}{\text{Max}}\, f(x)=9$. **D.** $\underset{[-5;7)}{\text{Max}}\, f(x)=6$.

Câu 12: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;3]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên $[0;3]$. Giá trị của $M+m$ bằng?



A. 5. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

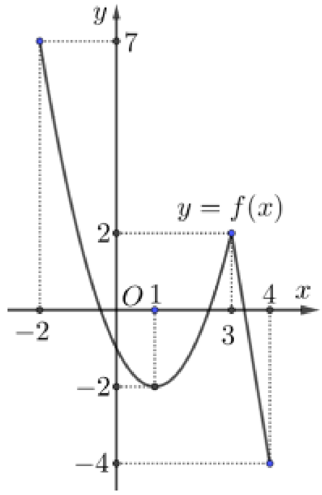
Câu 13: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2;6]$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-2;6]$. Giá trị của $M-m$ bằng

A. 9. **B.** -8. **C.** -9. **D.** 8.

Câu 14: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và có đồ thị trên đoạn $[-2;4]$ như hình vẽ bên. Tổng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[-2;4]$ bằng



A. 5 **B.** 3 **C.** 0 **D.** -2

Câu 15: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	0	$-$	

Mệnh đề nào sau đây đúng

A. $\max\limits_{(-1;1]} f(x) = f(0)$ **B.** $\max\limits_{(0;+\infty)} f(x) = f(1)$ **C.** $\min\limits_{(-\infty;-1)} f(x) = f(-1)$ **D.** $\min\limits_{(-1;+\infty)} f(x) = f(0)$

DẠNG 2. XÁC ĐỊNH GIÁ TRỊ LỚN NHẤT – GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ TRÊN ĐOẠN

Bước 1: Hàm số đã cho $y = f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[a;b]$.

Tìm các điểm $x_1, x_2, ..., x_n$ trên khoảng $(a;b)$, tại đó $f'(x) = 0$ hoặc $f'(x)$ không xác định.

Bước 2: Tính $f(a), f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n), f(b)$.

Bước 3: Khi đó:

$$\max\limits_{[a,b]} f(x) = max\{f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n), f(a), f(b)\}.$$

$$\min\limits_{[a,b]} f(x) = min\{f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n), f(a), f(b)\}.$$

Câu 16: Tìm tập giá trị của hàm số $y = \sqrt{x-1} + \sqrt{9-x}$

A. $T = [1;\ 9]$. **B.** $T = [2\sqrt{2};\ 4]$. **C.** $T = (1;\ 9)$. **D.** $T = [0;\ 2\sqrt{2}]$.

Câu 17: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 + \dfrac{2}{x}$ trên đoạn $[2;3]$ bằng

A. $\dfrac{15}{2}$. **B.** 5. **C.** $\dfrac{29}{3}$. **D.** 3.

Câu 18: Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y = \dfrac{3x-1}{x-3}$ trên đoạn $[0;2]$

A. $M = \dfrac{1}{3}$. **B.** $M = -\dfrac{1}{3}$. **C.** $M = 5$. **D.** $M = -5$

Câu 19: Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\sqrt{4-x^2}$ là

A. 2. **B.** 0. **C.** 4. **D.** 1.

Câu 20: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sin^2 x-4\sin x-5$.

A. -20. **B.** -8. **C.** -9. **D.** 0.

Câu 21: Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\frac{1}{2}x-\sqrt{x+1}$ trên đoạn $[0;3]$. Tính tổng $S=2m+3M$.

A. $S=-\frac{7}{2}$. **B.** $S=-\frac{3}{2}$. **C.** -3. **D.** $S=4$.

Câu 22: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\sin x+\cos 2x$ trên $[0;\pi]$ là

A. $\frac{9}{8}$. **B.** $\frac{5}{4}$. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 23: Giá trị lớn nhất của hàm số $y=2\cos x-\frac{4}{3}\cos^3 x$ trên $[0;\pi]$.

A. $\max\limits_{[0;\pi]} y=\frac{2}{3}$. **B.** $\max\limits_{[0;\pi]} y=\frac{10}{3}$. **C.** $\max\limits_{[0;\pi]} y=\frac{2\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\max\limits_{[0;\pi]} y=0$.

Câu 24: Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\frac{3\sin x+2}{\sin x+1}$ trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$. Khi đó giá trị của M^2+m^2 là

A. $\frac{31}{2}$. **B.** $\frac{11}{2}$. **C.** $\frac{41}{4}$. **D.** $\frac{61}{4}$.

Câu 25: Cho hàm số $y=\frac{\sin x+1}{\sin^2 x+\sin x+1}$. Gọi M là giá trị lớn nhất và m là giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho. Chọn mệnh đề **đúng**.

A. $M=m+\frac{3}{2}$. **B.** $M=\frac{3}{2}m$. **C.** $M=m+1$. **D.** $M=m+\frac{2}{3}$.

DẠNG 3. XÁC ĐỊNH GIÁ TRỊ LỚN NHẤT – GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ TRÊN KHOẢNG $(a;b)$.

□ *Bước 1:* Tính đạo hàm $f'(x)$.

□ *Bước 2:* Tìm tất cả các nghiệm $x_i \in (a;b)$ của phương trình $f'(x) = 0$ và tất cả các điểm $\alpha_i \in (a;b)$ làm cho $f'(x)$ không xác định.

□ *Bước 3.* Tính $A = \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$, $B = \lim\limits_{x \to b^-} f(x)$, $f(x_i)$, $f(\alpha_i)$.

□ *Bước 4.* So sánh các giá trị tính được và kết luận $M = \max\limits_{(a;b)} f(x)$, $m = \min\limits_{(a;b)} f(x)$.

Nếu giá trị lớn nhất là A hoặc B thì ta kết luận không có giá trị lớn nhất.

Câu 26: Gọi m là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x - 1 + \dfrac{4}{x-1}$ trên khoảng $(1;+\infty)$. Tìm m?

A. $m = 5$. **B.** $m = 4$. **C.** $m = 2$. **D.** $m = 3$.

Câu 27: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x - 5 + \dfrac{1}{x}$ trên khoảng $(0;+\infty)$ bằng bao nhiêu?

A. 0 **B.** -1 **C.** -3 **D.** -2

Câu 28: Gọi m là giá trị nhở nhất của hàm số $y = x + \dfrac{4}{x}$ trên khoảng $(0;+\infty)$. Tìm m

A. $m = 4$. **B.** $m = 2$. **C.** $m = 1$. **D.** $m = 3$.

Câu 29: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ trên nửa khoảng $[2;+\infty)$ là:

A. 2 **B.** $\dfrac{5}{2}$ **C.** 0 **D.** $\dfrac{7}{2}$

Câu 30: Gọi m là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x + \dfrac{4}{x}$ trên khoảng $(0;+\infty)$. Tìm m.

A. $m = 3$. **B.** $m = 4$. **C.** $m = 2$. **D.** $m = 1$.

Câu 31: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{4-x} + \sqrt{3}$ trên tập xác định của nó là

A. $2 + \sqrt{3}$. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** 0. **D.** $\sqrt{3}$.

Câu 32: Với giá trị nào của x thì hàm số $y = x^2 + \dfrac{1}{x}$ đạt giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(0;+\infty)$?

A. $\dfrac{3}{\sqrt[3]{4}}$. **B.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **C.** 1. **D.** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

Câu 33: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x + \dfrac{2}{x} - \left(1 + \sqrt{2}\right)^2$ trên khoảng $(0;+\infty)$

A. không tồn tại. **B.** -3. **C.** $-1 + \sqrt{2}$. **D.** 0.

Câu 34: Mệnh đề nào sau đây là đúng về hàm số $y = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+5}}$ trên tập xác định của nó.

A. Hàm số không có giá trị lớn nhất và không có giá trị nhỏ nhất.
B. Hàm số không có giá trị lớn nhất và có giá trị nhỏ nhất.
C. Hàm số có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất.
D. Hàm số có giá trị lớn nhất và không có giá trị nhỏ nhất.

CHƯƠNG I

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

BÀI 3: GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT VÀ GIÁ TRỊ LỚN NHẤT CỦA HÀM SỐ

III BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

DẠNG 1. XÁC ĐỊNH GIÁ TRỊ LỚN NHẤT – GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ THÔNG QUA ĐỒ THỊ, BẢNG BIẾN THIÊN

- Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$

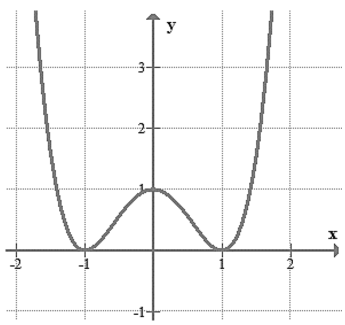
Hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f'(x_i)=0, x_i \in [a;b]$. Khi đó giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ là $M = \max\{f(a), f(b), f(x_i)\}$

- Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$

Hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f'(x_i)=0, x_i \in [a;b]$. Khi đó giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ là $m = Min\{f(a), f(b), f(x_i)\}$

- Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên đoạn $[a;b]$ thì $\underset{[a;b]}{Max} f(x) = f(b); \underset{[a;b]}{Min} f(x) = f(a)$
- Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên đoạn $[a;b]$ thì $\underset{[a;b]}{Max} f(x) = f(a); \underset{[a;b]}{Min} f(x) = f(b)$

Câu 1: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;1]$ và có đồ thị như hình vẽ.



Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1;1]$. Giá trị của $M-m$ bằng

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Từ đồ thị ta thấy $M=1, m=0$ nên $M-m=1$.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[-3;2]$ và có bảng biến thiên như sau. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1;2]$. Tính $M + m$.

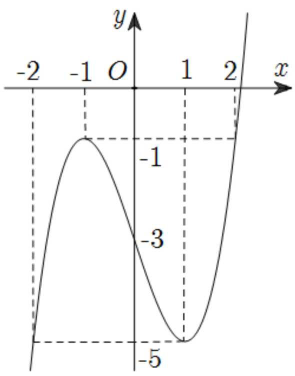
x	-3		-1		0		1		2
$f(x)$	-2	↗	3	↘	0	↗	2	↘	1

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Trên đoạn $[-1;2]$ ta có giá trị lớn nhất $M = 3$ khi $x = -1$ và giá trị nhỏ nhất $m = 0$ khi $x = 0$.
Khi đó $M + m = 3 + 0 = 3$.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-2;2]$.



A. $m = -5; M = -1$. **B.** $m = -2; M = 2$. **C.** $m = -1; M = 0$. **D.** $m = -5; M = 0$.

Lời giải

Nhìn vào đồ thị ta thấy:

$M = \max\limits_{[-2;2]} f(x) = -1$ khi $x = -1$ hoặc $x = 2$.

$m = \min\limits_{[-2;2]} f(x) = -5$ khi $x = -2$ hoặc $x = 1$.

Câu 4: Xét hàm số $y = f(x)$ với $x \in [-1;5]$ có bảng biến thiên như sau:

x	-1		0		2		5
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	3	↗	4	↘	0	↗	$+\infty$

Khẳng định nào sau đây là đúng

A. Hàm số đã cho không tồn tại GTLN trên đoạn $[-1;5]$

B. Hàm số đã cho đạt GTNN tại $x = -1$ và $x = 2$ trên đoạn $[-1;5]$

C. Hàm số đã cho đạt GTNN tại $x = -1$ và đạt GTLN tại $x = 5$ trên đoạn $[-1;5]$

D. Hàm số đã cho đạt GTNN tại $x=0$ trên đoạn $[-1;5]$

Lời giải

A. Đúng. Vì $\lim\limits_{x\to 5^-} y=+\infty$ nên hàm số không có GTLN trên đoạn $[-1;5]$.

B. Sai. Hàm số đã cho chỉ đạt GTNN tại $x=2$ trên đoạn $[-1;5]$.

C. Sai. Hàm số đã cho chỉ đạt GTNN tại $x=2$ trên đoạn $[-1;5]$ và $\lim\limits_{x\to 5} y=+\infty$.

D. Sai. Hàm số đã cho chỉ đạt GTNN tại $x=2$ trên đoạn $[-1;5]$.

Câu 5: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có bảng biến thiên như hình sau:

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
y'		$-$	$\|\|$	$+$	0	$+$	$\|\|$	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$		$\nearrow$	2	$\searrow$	-4

Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào ***sai***?

A. Hàm số có hai điểm cực trị.

B. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 2 và giá trị nhỏ nhất bằng -3.

C. Đồ thị hàm số có đúng một đường tiệm cận.

D. Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty;-1)$, $(2;+\infty)$.

Lời giải

Dựa vào BBT ta thấy hàm số không có GTLN, GTNN.

Câu 6: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và có bảng biến thiên trên đoạn $[-1;3]$ như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây ***đúng***?

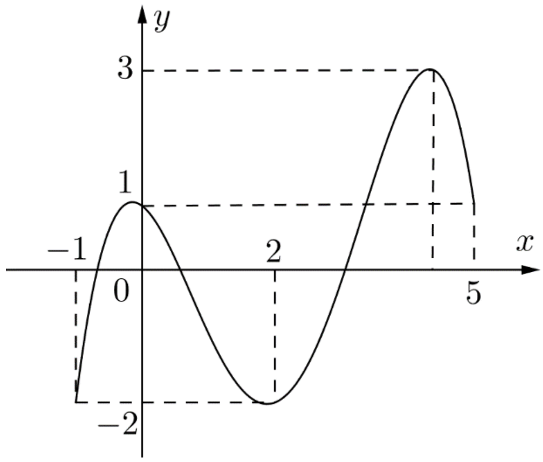
x	-1		0		2		3
y'		$+$	0	-	0	$+$	
y	0	$\nearrow$	5	$\searrow$	1	$\nearrow$	4

A. $\max\limits_{[-1;3]} f(x)=f(0)$. **B.** $\max\limits_{[-1;3]} f(x)=f(3)$. **C.** $\max\limits_{[-1;3]} f(x)=f(2)$. **D.** $\max\limits_{[-1;3]} f(x)=f(-1)$.

Lời giải

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy $\max\limits_{[-1;3]} f(x)=f(0)$.

Câu 7: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-1;5]$ và có đồ thị trên đoạn $[-1;5]$ như hình vẽ bên dưới. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-1;5]$ bằng

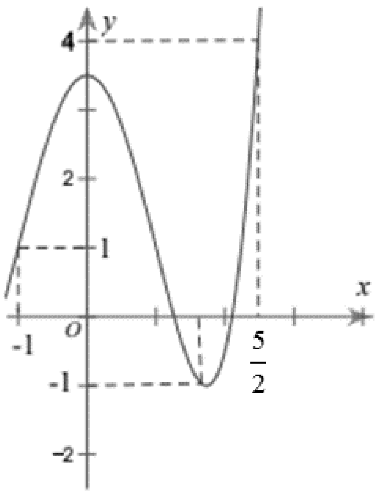


A. -1 **B.** 4 **C.** 1 **D.** 2

Lời giải

Từ đồ thị ta thấy: $\begin{cases} M = \max\limits_{[-1;5]} f(x) = 3 \\ n = \min\limits_{[-1;5]} f(x) = -2 \end{cases} \Rightarrow M + n = 1.$

Câu 8: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\left[-1, \frac{5}{2}\right]$ và có đồ thị là đường cong như hình vẽ.



Giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f(x)$ trên $\left[-1, \frac{5}{2}\right]$ là:

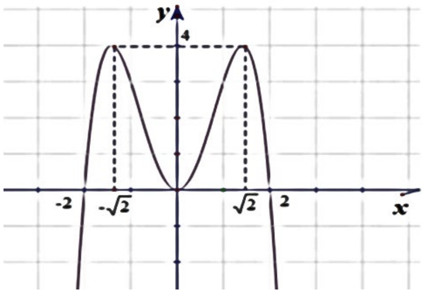
A. $M = 4, m = 1$ **B.** $M = 4, m = -1$ **C.** $M = \frac{7}{2}, m = -1$ **D.** $M = \frac{7}{2}, m = 1$

Lời giải

Chọn B

Dựa vào đồ thị $M = 4,\ m = -1$.

Câu 9: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[0;2]$ là:



A. $\underset{[0;2]}{Max}\, f(x) = 2$. **B.** $\underset{[0;2]}{Max}\, f(x) = \sqrt{2}$.

C. $\underset{[0;2]}{Max}\, f(x) = 4$. **D.** $\underset{[0;2]}{Max}\, f(x) = 0$.

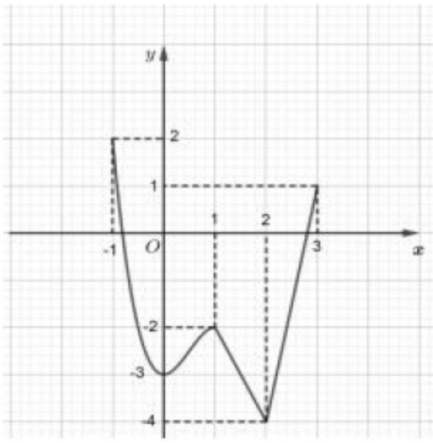
Lời giải

Chọn C

Dựa vào đồ thị ta thấy trên đoạn $[0;2]$ hàm số $f(x)$ có giá trị lớn nhất bằng 4 khi $x = \sqrt{2}$

Suy ra $\underset{[0;2]}{Max}\, f(x) = 4$

Câu 10: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;3]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1;3]$. Giá trị của $M + m$ là



A. 2 **B.** -6 **C.** -5 **D.** -2

Lời giải

Dựa vào đồ thị ta thấy GTLN của hàm số trên đoạn $[-1;3]$ là $M = 2$ đạt được tại $x = -1$ và GTNN của hàm số số trên đoạn $[-1;3]$ là $m = -4$ đạt được tại $x = 2$

$\Rightarrow M + m = 2 + (-4) = -2$

Câu 11: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên trên $[-5;7)$ như sau

x	-5		1		7
y'		$-$	0	$+$	‖
y	6	↘	2	↗	9 ‖

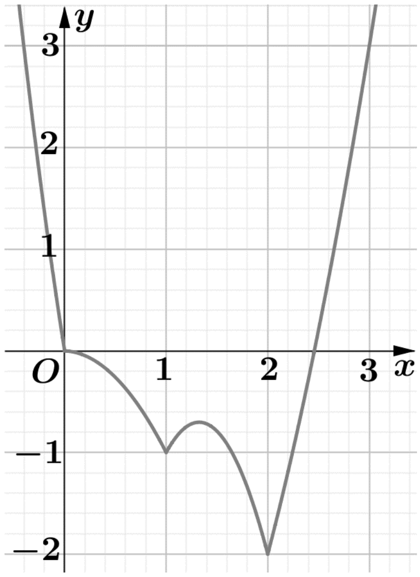
Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. $\underset{[-5;7)}{\text{Min}} f(x)=6$. **B.** $\underset{[-5;7)}{\text{Min}} f(x)=2$. **C.** $\underset{[-5;7)}{\text{Max}} f(x)=9$. **D.** $\underset{[-5;7)}{\text{Max}} f(x)=6$.

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên trên $[-5;7)$, ta có: $\underset{[-5;7)}{\text{Min}} f(x)=f(1)=2$.

Câu 12: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;3]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên $[0;3]$. Giá trị của $M+m$ bằng?

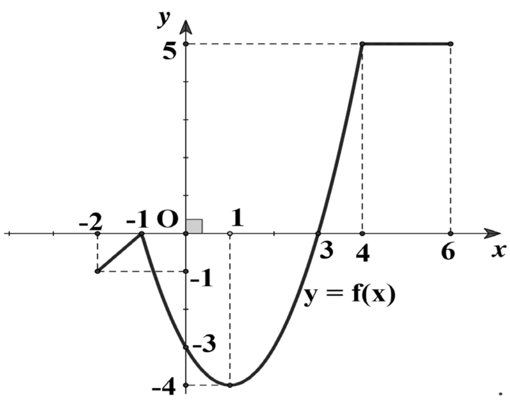


A. 5. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Dựa vào hình vẽ ta có: $M=3$, $m=-2$ nên $M+m=1$.

Câu 13: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2;6]$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-2;6]$. Giá trị của $M-m$ bằng

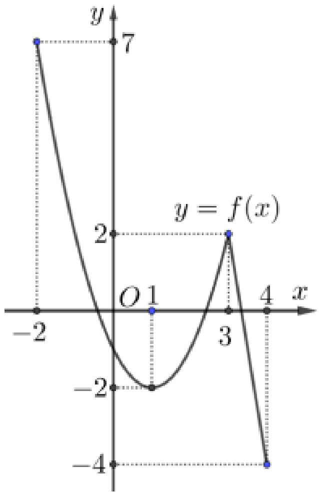
A. 9. **B.** -8. **C.** -9. **D.** 8.

Lời giải

Từ đồ thị suy ra $-4\le f(x)\le 5 \ \ \forall x\in[-2;6]$; $f(1)=-4; f(4)=5$

$$\Rightarrow \begin{cases} M=5 \\ m=-4 \end{cases} \Rightarrow M-m=9.$$

Câu 14: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đồ thị trên đoạn $[-2;4]$ như hình vẽ bên. Tổng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-2;4]$ bằng



A. 5   **B.** 3   **C.** 0   **D.** -2

Lời giải

Chọn B

Dựa vào đồ thị hàm số ta có

$m = \underset{x\in[-2;4]}{Min} f(x) = -4$, $M = \underset{x\in[-2;4]}{Max} f(x) = 7$

Khi đó $M + m = 3$

Câu 15: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	

Mệnh đề nào sau đây đúng

A. $\max\limits_{(-1;1]} f(x) = f(0)$ **B.** $\max\limits_{(0;+\infty)} f(x) = f(1)$ **C.** $\min\limits_{(-\infty;-1)} f(x) = f(-1)$ **D.** $\min\limits_{(-1;+\infty)} f(x) = f(0)$

Lời giải

Chọn B

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	
y			$f(-1)$		$f(0)$		$f(1)$		

DẠNG 2. XÁC ĐỊNH GIÁ TRỊ LỚN NHẤT – GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ TRÊN ĐOẠN

□ ***Bước 1***: Hàm số đã cho $y = f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[a;b]$.

Tìm các điểm $x_1, x_2, \dots, x_n$ trên khoảng $(a;b)$, tại đó $f'(x) = 0$ hoặc $f'(x)$ không xác định.

□ ***Bước 2***: Tính $f(a), f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), f(b)$.

□ ***Bước 3***: Khi đó:

$\max\limits_{[a,b]} f(x) = \max\{f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), f(a), f(b)\}$.

$\min\limits_{[a,b]} f(x) = \min\{f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), f(a), f(b)\}$.

Câu 16: Tìm tập giá trị của hàm số $y = \sqrt{x-1} + \sqrt{9-x}$

A. $T = [1;\ 9]$. **B.** $T = \left[2\sqrt{2};\ 4\right]$. **C.** $T = (1;\ 9)$. **D.** $T = \left[0;\ 2\sqrt{2}\right]$.

Lời giải

Tập xác định: $D = [1;\ 9]$

$y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}} - \dfrac{1}{2\sqrt{9-x}} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{9-x} = \sqrt{x-1} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1 \\ 9-x = x-1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 5$.

$f(1) = f(9) = 2\sqrt{2}$; $f(5) = 4$

Vậy tập giá trị là $T = \left[2\sqrt{2};\ 4\right]$.

Câu 17: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 + \dfrac{2}{x}$ trên đoạn $[2;3]$ bằng

A. $\dfrac{15}{2}$. **B.** 5. **C.** $\dfrac{29}{3}$. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

+ Ta có hàm số $y = f(x) = x^2 + \dfrac{2}{x}$ xác định và liên tục trên $[2;3]$.

+ $y' = f'(x) = 2x - \dfrac{2}{x^2}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \notin [2;3]$ mà $f(2) = 5$, $f(3) = \dfrac{29}{3}$.

+ Vậy $\min\limits_{[2;3]} y = 5$ tại $x = 2$.

Câu 18: Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y = \dfrac{3x-1}{x-3}$ trên đoạn $[0;2]$

A. $M = \dfrac{1}{3}$. **B.** $M = -\dfrac{1}{3}$. **C.** $M = 5$. **D.** $M = -5$

Lời giải

Chọn A

Trên đoạn $[0;2]$ ta luôn có $y' = -\dfrac{8}{(x-3)^2} < 0\ \forall x \in (0;2))$

Vì $y(0) = \dfrac{1}{3}, y(2) = -5$ nên $M = \max\limits_{[0;2]} y = \dfrac{1}{3}$.

Câu 19: Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\sqrt{4-x^2}$ là

A. 2. **B.** 0. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

• Tập xác định: $D=[-2;2]$

• Ta có: $y'=\dfrac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$ $\Rightarrow y'=0 \Leftrightarrow x=0\in(-2;2)$

• Ta có: $\begin{cases} y(-2)=y(2)=0 \\ y(0)=2 \end{cases} \Rightarrow \max\limits_{[-2;2]} y=2$.

Câu 20: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sin^2 x-4\sin x-5$.

A. -20. **B.** -8. **C.** -9. **D.** 0.

Lời giải

Đặt $t=\sin x, t\in[-1;1]$. Xét $f(t)=t^2-4t-5$, $t\in[-1;1]$.

$f'(t)=2t-4=0 \Leftrightarrow t=2\notin[-1;1]$.

$f(1)=-8, f(-1)=0$.

Ta thấy $\min\limits_{[-1;1]} f(t)=f(1)=-8$. Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số là -8.

Câu 21: Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{2}x-\sqrt{x+1}$ trên đoạn $[0;3]$. Tính tổng $S=2m+3M$.

A. $S=-\dfrac{7}{2}$. **B.** $S=-\dfrac{3}{2}$. **C.** -3. **D.** $S=4$.

Lời giải

Ta có: $f'(x)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}=\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{2\sqrt{x+1}}$, cho $f'(x)=0\Rightarrow\sqrt{x+1}=1\Leftrightarrow x=0\in[0;3]$.

Khi đó: $f(0)=-1$, $f(3)=-\dfrac{1}{2}$ nên $m=-1$ và $M=-\dfrac{1}{2}$.

Vậy $S=2m+3M=-\dfrac{7}{2}$.

Câu 22: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\sin x+\cos 2x$ trên $[0;\pi]$ là

A. $\dfrac{9}{8}$. **B.** $\dfrac{5}{4}$. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

$f(x)=\sin x+\cos 2x=\sin x+1-2\sin^2 x$

Đặt $\sin x = t\ \left(0 \le t \le 1\right)$

$f\left(t\right) = -2t^2 + t + 1$, $f'\left(t\right) = -4t + 1$

$f'\left(t\right) = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{1}{4}$

$f\left(0\right) = 1$, $f\left(1\right) = 0$, $f\left(\dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{9}{8}$

Vậy $\max\limits_{[0;1]} f\left(x\right) = \dfrac{9}{8}$.

Câu 23: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = 2\cos x - \dfrac{4}{3}\cos^3 x$ trên $\left[0;\pi\right]$.

A. $\max\limits_{[0;\pi]} y = \dfrac{2}{3}$. **B.** $\max\limits_{[0;\pi]} y = \dfrac{10}{3}$. **C.** $\max\limits_{[0;\pi]} y = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\max\limits_{[0;\pi]} y = 0$.

Lời giải

Đặt: $t = \cos x \Rightarrow t \in \left[-1;1\right] \Rightarrow y = 2t - \dfrac{4}{3}t^3$.

$y' = 2 - 4t^2$ $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} \in \left[-1;1\right] \\ x = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \in \left[-1;1\right] \end{array}\right.$.

Tính: $y\left(-1\right) = \dfrac{-2}{3}$, $y\left(\dfrac{-1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{-2\sqrt{2}}{3}$, $y\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$, $y\left(1\right) = \dfrac{2}{3}$.

Vậy: $\max\limits_{[0;\pi]} y = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

Câu 24: Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{3\sin x + 2}{\sin x + 1}$ trên đoạn $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$. Khi đó giá trị của $M^2 + m^2$ là

A. $\dfrac{31}{2}$. **B.** $\dfrac{11}{2}$. **C.** $\dfrac{41}{4}$. **D.** $\dfrac{61}{4}$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t = \sin x$, $t \in \left[0;1\right]$.

Xét hàm $f\left(t\right) = \dfrac{3t+2}{t+1}$ liên tục trên đoạn $\left[0;1\right]$ có $f'\left(t\right) = \dfrac{1}{\left(t+1\right)^2} > 0, t \in \left[0;1\right]$.

Suy ra hàm số đồng biến trên $\left[0;1\right]$.

$\Rightarrow M = \underset{[0;1]}{\text{Max}}\, f(t) = f(1) = \dfrac{5}{2}$ và $m = \underset{[0;1]}{\text{Min}}\, f(t) = f(0) = 2$.

Khi đó $M^2+m^2=\left(\frac{5}{2}\right)^2+2^2=\frac{41}{4}$.

Câu 25: Cho hàm số $y=\frac{\sin x+1}{\sin^2 x+\sin x+1}$. Gọi M là giá trị lớn nhất và m là giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho. Chọn mệnh đề **đúng**.

A. $M=m+\frac{3}{2}$. **B.** $M=\frac{3}{2}m$. **C.** $M=m+1$. **D.** $M=m+\frac{2}{3}$.

Lời giải

Đặt $\sin x=t$, $(-1\le t\le 1)$ ta được $y=\frac{t+1}{t^2+t+1}$.

Xét hàm số $y=\frac{t+1}{t^2+t+1}$ trên đoạn $[-1;1]$ ta có $y'=\frac{-t^2-2t}{\left(t^2+t+1\right)^2}$.

Giải phương trình $y'=0\Leftrightarrow -t^2-2t=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0\ (t/m) \\ t=-2\ (loai) \end{array}\right.$.

Vì $y(-1)=0$; $y(0)=1$; $y(1)=\frac{2}{3}$ nên

$\max\limits_{[-1;1]} y=y(0)=1\Rightarrow M=1$; $\min\limits_{[-1;1]} y=y(-1)=0\Rightarrow m=0$.

Vậy $M=m+1$.

DẠNG 3. XÁC ĐỊNH GIÁ TRỊ LỚN NHẤT – GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ TRÊN KHOẢNG $(a;b)$.

- *Bước 1:* Tính đạo hàm $f'(x)$.
- *Bước 2:* Tìm tất cả các nghiệm $x_i\in(a;b)$ của phương trình $f'(x)=0$ và tất cả các điểm $\alpha_i\in(a;b)$ làm cho $f'(x)$ không xác định.
- *Bước 3.* Tính $A=\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$, $B=\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$, $f(x_i)$, $f(\alpha_i)$.
- *Bước 4.* So sánh các giá trị tính được và kết luận $M=\max\limits_{(a;b)} f(x)$, $m=\min\limits_{(a;b)} f(x)$.

Nếu giá trị lớn nhất là A hoặc B thì ta kết luận không có giá trị lớn nhất .

Câu 26: Gọi m là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x-1+\frac{4}{x-1}$ trên khoảng $(1;+\infty)$. Tìm m?

A. $m=5$. **B.** $m=4$. **C.** $m=2$. **D.** $m=3$.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định $D=R\setminus\{1\}$.

$y'=\frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$, $y'=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=3 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y					‖ $+\infty$	↘	4	↗	$+\infty$

$\Rightarrow m = \min\limits_{(1;+\infty)} y = 4$ khi $x = 3$

Câu 27: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x - 5 + \frac{1}{x}$ trên khoảng $(0;+\infty)$ bằng bao nhiêu?

A. 0 **B.** -1 **C.** -3 **D.** -2

Lời giải

Chọn C

Áp dụng bất đẳng thức Cô – si ta có:

$y = x + \frac{1}{x} - 5 \geq 2\sqrt{x.\frac{1}{x}} - 5 = -3$

Dấu bằng xảy ra khi $x = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1$.

Vậy $\min\limits_{(0;+\infty)} y = -3$

Câu 28: Gọi m là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x + \frac{4}{x}$ trên khoảng $(0;+\infty)$. Tìm m

A. $m = 4$. **B.** $m = 2$. **C.** $m = 1$. **D.** $m = 3$.

Lời giải

$y' = 1 - \frac{4}{x^2}$

$y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2; \quad x = 2 \in (0;+\infty)$.

Bảng biến thiên:

x	0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	4	↗	$+\infty$

Suy ra giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng $y(2) = 4 \Rightarrow m = 4$.

Câu 29: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x + \frac{1}{x}$ trên nửa khoảng $[2;+\infty)$ là:

A. 2 **B.** $\frac{5}{2}$ **C.** 0 **D.** $\frac{7}{2}$

Lời giải

Chọn B

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta được: $f(x)=x+\frac{1}{x}=\frac{3x}{4}+\frac{x}{4}+\frac{1}{x}\geq\frac{3.2}{4}+2\sqrt{\frac{x}{4}.\frac{1}{x}}=\frac{5}{2}$.

Dấu bằng xảy ra khi $x=2$.

Câu 30: Gọi m là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x+\frac{4}{x}$ trên khoảng $(0;+\infty)$. Tìm m.

A. $m=3$. **B.** $m=4$. **C.** $m=2$. **D.** $m=1$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1:

Hàm số $y=x+\frac{4}{x}$ liên tục và xác định trên $(0;+\infty)$.

Ta có $y'=1-\frac{4}{x^2}=\frac{x^2-4}{x^2}\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\in(0;+\infty)\\x=-2\notin(0;+\infty)\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	0		2		$+\infty$
y'		-	0	+	
y	$+\infty$	↘	4	↗	$+\infty$

Vậy giá trị nhỏ nhất là $m=4$ khi $x=2$.

Cách 2:

Với $x\in(0;+\infty)\Rightarrow x;\frac{4}{x}>0$. Áp dụng bất đẳng thức Cô si ta có: $x+\frac{4}{x}\geq2\sqrt{x.\frac{4}{x}}=4$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}x>0\\x=\frac{4}{x}\end{cases}\Leftrightarrow x=2$. Vậy $m=4$ khi $x=2$.

Câu 31: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sqrt{4-x}+\sqrt{3}$ trên tập xác định của nó là

A. $2+\sqrt{3}$. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** 0. **D.** $\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định của hàm số là: $D=(-\infty;4]$.

Ta có $y'=\frac{-1}{2\sqrt{4-x}}<0,\forall x\in D$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		4
y'		$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$\sqrt{3}$

Từ bảng biến thiên suy ra $\min\limits_{(-\infty;4]} y = \sqrt{3}$ khi $x = 4$. Vậy chọn D.

Câu 32: Với giá trị nào của x thì hàm số $y = x^2 + \dfrac{1}{x}$ đạt giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(0;+\infty)$?

A. $\dfrac{3}{\sqrt[3]{4}}$. **B.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **C.** 1. **D.** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

Lời giải

Chọn D

TXD: $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$y' = 2x - \dfrac{1}{x^2}$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$		$+\infty$
y'		$-$	||	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	$\sqrt[3]{2} + \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào BBT thì $x = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ hàm số đạt giá trị nhỏ nhất trên $(0;+\infty)$.

Câu 33: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x + \dfrac{2}{x} - \left(1+\sqrt{2}\right)^2$ trên khoảng $(0;+\infty)$

A. không tồn tại. **B.** -3. **C.** $-1+\sqrt{2}$. **D.** 0.

Lời giải

Chọn B

Hàm số xác định và liên tục trên khoảng $(0;+\infty)$.

$y' = 1 - \dfrac{2}{x^2} = \dfrac{x^2-2}{x^2}$.

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \sqrt{2} \\ x = -\sqrt{2} \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
y					|| $+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy $\min\limits_{(0;+\infty)} y = f\left(\sqrt{2}\right) = -3$.

Câu 34: Mệnh đề nào sau đây là đúng về hàm số $y = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+5}}$ trên tập xác định của nó.

A. Hàm số không có giá trị lớn nhất và không có giá trị nhỏ nhất.
B. Hàm số không có giá trị lớn nhất và có giá trị nhỏ nhất.
C. Hàm số có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất.
D. Hàm số có giá trị lớn nhất và không có giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$$y' = \frac{\sqrt{x^2+5} - (x+1)\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+5}}}{x^2+5} = \frac{x^2+5-x^2-x}{\sqrt{x^2+5}\left(x^2+5\right)} = \frac{5-x}{\sqrt{x^2+5}\left(x^2+5\right)}.$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \frac{5-x}{\sqrt{x^2+5}\left(x^2+5\right)} = 0 \Leftrightarrow 5-x=0 \Leftrightarrow x=5.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		5		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	-1	$\nearrow$	$\dfrac{\sqrt{30}}{5}$	$\searrow$	1

Từ bảng biến thiên có $\max\limits_{\mathbb{R}} y = y(5) = \dfrac{\sqrt{30}}{5}$ khi $x = 5$.

Hàm số $y = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+5}}$ không có giá trị nhỏ nhất.

Vậy hàm số có giá trị lớn nhất và không có giá trị nhỏ nhất.

CHƯƠNG I

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

BÀI 3: GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT VÀ GIÁ TRỊ LỚN NHẤT CỦA HÀM SỐ

III BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

DẠNG. ĐỊNH M ĐỂ GTLN-GTNN CỦA HÀM SỐ THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC

Bước 1. Tìm nghiệm $x_i (i=1,2,...)$ của $y'=0$ thuộc $[a;b]$

Bước 2. Tính các giá trị $f(x_i); f(a); f(b)$ theo tham số

Bước 3. So sánh các giá trị, suy ra giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất.

Bước 4. Biện luận m theo giả thuyết đề để kết luận

Lưu ý:

- Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên đoạn $[a;b]$ thì $\underset{[a;b]}{Max} f(x)=f(b); \underset{[a;b]}{Min} f(x)=f(a)$
- Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên đoạn $[a;b]$ thì $\underset{[a;b]}{Max} f(x)=f(a); \underset{[a;b]}{Min} f(x)=f(b)$

Câu 1: Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{x+m}{x+1}$ trên đoạn $[1;2]$ bằng 8 (m là tham số thực). Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $m>10$. **B.** $8<m<10$. **C.** $0<m<4$. **D.** $4<m<8$.

Câu 2: Có bao nhiêu giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y=\dfrac{x-m^2-2}{x-m}$ trên đoạn $[0;4]$ bằng -1.

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

Câu 3: Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-m^2}$ thỏa mãn $\min\limits_{[-3;-2]} y=\dfrac{1}{2}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $3<m\le 4$. **B.** $-2<m\le 3$. **C.** $m>4$. **D.** $m\le -2$.

Câu 4: Tìm giá trị dương của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{m^2x-1}{x+2}$ trên đoạn $[1;3]$ bằng 1.

A. $m=\sqrt{2}$. **B.** $m=\sqrt{3}$. **C.** $m=4$. **D.** $m=2$.

Câu 5: Cho hàm số $y=\dfrac{x-m^2}{x+8}$ với m là tham số thực. Giả sử m_0 là giá trị dương của tham số m để hàm số có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;3]$ bằng -3. Giá trị m_0 thuộc khoảng nào trong các khoảng cho dưới đây?

A. $(2;5)$. **B.** $(1;4)$. **C.** $(6;9)$. **D.** $(20;25)$.

Câu 6: Tìm giá trị của tham số thực m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{2x+m}{x+1}$ trên đoạn $[0;4]$ bằng 3.

A. $m=3$. **B.** $m=1$. **C.** $m=7$. **D.** $m=5$

Câu 7: Tìm các giá trị của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{x-m^2+m}{x+1}$ trên đoạn $[0;1]$ bằng -2.

A. $\left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=-2 \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=2 \end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-2 \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=2 \end{array}\right.$.

Câu 8: Cho hàm số $y=\dfrac{x+m}{x+1}$ (m là tham số thực) thỏa mãn $\min\limits_{[0;1]} y=3$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $1\le m<3$ **B.** $m>6$ **C.** $m<1$ **D.** $3<m\le 6$

Câu 9: Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{x+m}{x+1}$ trên $[1;2]$ bằng 8 (m là tham số thực). Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $m>10$. **B.** $8<m<10$. **C.** $0<m<4$. **D.** $4<m<8$.

Câu 10: Gọi A,B lần lượt là giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số $y=\dfrac{x+m^2+m}{x-1}$ trên đoạn $[2;3]$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để $A+B=\dfrac{13}{2}$.

A. $m=1;m=-2$. **B.** $m=-2$. **C.** $m=\pm 2$. **D.** $m=-1;m=2$.

Câu 11: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x-m^2}{x+8}$ với m là tham số thực. Giả sử m_0 là giá trị dương của tham số m để hàm số có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;3]$ bằng -3. Giá trị m_0 thuộc khoảng nào trong các khoảng cho dưới đây?

A. $(20;25)$. **B.** $(5;6)$. **C.** $(6;9)$. **D.** $(2;5)$.

Câu 12: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=-x^3-3x^2+m$ trên đoạn $[-1;1]$ bằng 0.

A. $m=2$. **B.** $m=6$. **C.** $m=0$. **D.** $m=4$.

Câu 13: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=x^3-3x^2+m$ có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-1;1]$ bằng $\sqrt{2}$

A. $m=\sqrt{2}$. **B.** $m=2+\sqrt{2}$. **C.** $m=4+\sqrt{2}$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m=2+\sqrt{2} \\ m=4+\sqrt{2} \end{array}\right.$.

Câu 14: Có một giá trị m_0 của tham số m để hàm số $y=x^3+(m^2+1)x+m+1$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 5 trên đoạn $[0;1]$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $2018m_0-m_0^2\geq 0$. **B.** $2m_0-1<0$. **C.** $6m_0-m_0^2<0$. **D.** $2m_0+1<0$.

Câu 15: Nếu hàm số $y=x+m+\sqrt{1-x^2}$ có giá trị lớn nhất bằng $2\sqrt{2}$ thì giá trị của m là

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $-\sqrt{2}$. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 16: Cho hàm số $y=2x^3-3x^2-m$. Trên $[-1;1]$ hàm số có giá trị nhỏ nhất là -1. Tính m?

A. $m=-6$. **B.** $m=-3$. **C.** $m=-4$. **D.** $m=-5$.

Câu 17: Biết S là tập giá trị của m để tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^4-m^2x^3-2x^2-m$ trên đoạn $[0;1]$ bằng -16. Tính tích các phần tử của S.

A. 2. **B.** -2. **C.** -15. **D.** -17.

Câu 18: Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x^2+mx+1}{x+m}$ liên tục và đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;2]$ tại một điểm $x_0\in(0;2)$.

A. $0<m<1$ **B.** $m>1$ **C.** $m>2$ **D.** $-1<m<1$

Câu 19: Cho hàm số $y=\dfrac{1-m\sin x}{\cos x+2}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[0;10]$ để giá trị nhỏ nhất của hàm số nhỏ hơn -2?

A. 1. **B.** 9. **C.** 3. **D.** 6.

Câu 20: Cho hàm số $y=ax^3+cx+d,\ a\neq 0$ có $\min\limits_{x\in(-\infty;0)} f(x)=f(-2)$. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[1;3]$ bằng

A. $d-11a$. **B.** $d-16a$. **C.** $d+2a$. **D.** $d+8a$.

Câu 21: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x+m}{x^2+x+1}$ có giá trị lớn nhất trên $\mathbb{R}$ nhỏ hơn hoặc bằng 1.

A. $m\leq 1$. **B.** $m\geq 1$. **C.** $m\geq -1$. **D.** $m\leq -1$.

Câu 22: Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\dfrac{x^3+x^2-m}{x+1}$ trên $[0;2]$ bằng 5. Tham số m nhận giá trị là

A. -5. **B.** 1. **C.** -3. **D.** -8.

Câu 23: Cho hàm số $y=(x^3-3x+m)^2$. Tổng tất cả các giá trị của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1;1]$ bằng 1 là

A. 1. **B.** -4. **C.** 0. **D.** 4.

Câu 24: Tìm tất cả các giá trị của $m>0$ để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^3-3x+1$ trên đoạn $[m+1;m+2]$ luôn bé hơn 3.

A. $m\in(0;2)$. **B.** $m\in(0;1)$. **C.** $m\in(1;+\infty)$. **D.** $m\in(0;+\infty)$.

Câu 25: Biết rằng giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = mx + \dfrac{36}{x+1}$ trên $[0;3]$ bằng 20. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $0 < m \le 2$. **B.** $4 < m \le 8$. **C.** $2 < m \le 4$. **D.** $m > 8$.

Câu 26: Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3\left(m^2 - 1\right)x + 2020$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m sao cho hàm số có giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(0;+\infty)$?

A. 2. **B.** 1. **C.** Vô số. **D.** 3.

Câu 27: Cho hàm số $f(x) = m\sqrt{x-1}$. Gọi m_1, m_2 là hai giá trị của m thoả mãn $\min\limits_{[2;5]} f(x) + \max\limits_{[2;5]} f(x) = m^2 - 10$. Giá trị của $m_1 + m_2$ bằng

A. 3. **B.** 5. **C.** 10. **D.** 2.

Câu 28: Cho hàm số $y = \dfrac{m\sin x + 1}{\cos x + 2}$ có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-5;5]$ để giá trị nhỏ nhất của y nhỏ hơn -1.

A. 4. **B.** 2. **C.** 6. **D.** 8.

Câu 29: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \dfrac{34}{\sqrt{\left(x^3 - 3x + 2m\right)^2 + 1}}$ trên đoạn $[0;3]$ bằng 2. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

A. 8. **B.** -8. **C.** -6. **D.** -1.

Câu 30: Cho hàm số $y = \left(x^3 - 3x + m + 1\right)^2$. Tổng tất cả các giá trị của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1;1]$ bằng 1 là

A. -2. **B.** 4. **C.** -4. **D.** 0.

Câu 31: Cho hàm số $y = f(x) = m^2\left(\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x}\right) + 4\sqrt{4-x^2} + m + 1$. Tính tổng tất cả các giá trị của m để hàm số $y = f(x)$ có giá trị nhỏ nhất bằng 4.

A. $-\dfrac{7}{2}$. **B.** $\dfrac{5}{2}$. **C.** $-\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Câu 32: Cho hàm số $f(x) = \dfrac{2x - m}{x+1}$ với $m \ne -2$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. $\max\limits_{[1;3]} f(x) = \max\left\{\dfrac{2-m}{2}; \dfrac{6-m}{4}\right\}$. **B.** $\max\limits_{[1;3]} f(x) = \dfrac{6-m}{4}$ khi $m < -2$.

C. $\min\limits_{[1;3]} f(x) = \min\left\{\dfrac{2-m}{2}; \dfrac{6-m}{4}\right\}$. **D.** $\min\limits_{[1;3]} f(x) = \dfrac{2-m}{2}$ khi $m > -2$.

Câu 33: Có bao nhiêu số nguyên m thuộc đoạn $[-20\,;\,20]$ để giá trị lớn nhất của hàm số $y = \dfrac{x+m+6}{x-m}$ trên đoạn $[1\,;\,3]$ là số dương?

A. 9. **B.** 8. **C.** 11. **D.** 10.

CHƯƠNG I

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

BÀI 3: GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT VÀ GIÁ TRỊ LỚN NHẤT CỦA HÀM SỐ

III BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

DẠNG. ĐỊNH M ĐỂ GTLN-GTNN CỦA HÀM SỐ THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC

Bước 1. Tìm nghiệm $x_i (i=1,2,...)$ của $y'=0$ thuộc $[a;b]$

Bước 2. Tính các giá trị $f(x_i); f(a); f(b)$ theo tham số

Bước 3. So sánh các giá trị, suy ra giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất.

Bước 4. Biện luận m theo giả thuyết đề để kết luận

Lưu ý:

- Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên đoạn $[a;b]$ thì $\underset{[a;b]}{Max} f(x)=f(b); \underset{[a;b]}{Min} f(x)=f(a)$
- Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên đoạn $[a;b]$ thì $\underset{[a;b]}{Max} f(x)=f(a); \underset{[a;b]}{Min} f(x)=f(b)$

Câu 1: Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{x+m}{x+1}$ trên đoạn $[1;2]$ bằng 8 (m là tham số thực). Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $m>10$. **B.** $8<m<10$. **C.** $0<m<4$. **D.** $4<m<8$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y'=\dfrac{1-m}{(x+1)^2}$.

- Nếu $m=1 \Rightarrow y=1$.

- Nếu $m\neq 1$khi đó $y'<0, \forall x\in[1;2]$ hoặc $y'>0, \forall x\in[1;2]$ nên hàm số đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất tại $x=1$, $x=2$.

Theo bài ra: $\max\limits_{[1;2]} y+\min\limits_{[1;2]} y=8 \Leftrightarrow y(1)+y(2)=\dfrac{1+m}{2}+\dfrac{2+m}{3}=8 \Leftrightarrow m=\dfrac{41}{5}\in(8;10)$.

Câu 2: Có bao nhiêu giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y=\dfrac{x-m^2-2}{x-m}$ trên đoạn $[0;4]$ bằng -1.

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{m\}$.

$y'=\dfrac{m^2-m+2}{(x-m)^2}>0,\forall x\neq m$. Do đó hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty;m)$ và $(m;+\infty)$

.

Bảng biến thiên của hàm số:

x	$-\infty$		m		$+\infty$
y'		$+$	||	$+$	
y	1	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	1

Từ bảng biến thiên suy ra, hàm số đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $[0;4]$ bằng -1 khi $\begin{cases} m<0 \\ f(4)=-1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m<0 \\ \dfrac{2-m^2}{4-m}=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<0 \\ m^2+m-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<0 \\ m=2,m=-3 \end{cases} \Leftrightarrow m=-3$.

Câu 3: Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-m^2}$ thỏa mãn $\min\limits_{[-3;-2]} y=\dfrac{1}{2}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $3<m\leq 4$. **B.** $-2<m\leq 3$. **C.** $m>4$. **D.** $m\leq -2$.

Lời giải

Chọn B

+TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{m^2\},[-3;-2]\subset D$.

+ Ta có $y'=\dfrac{-m^2-1}{(x-m^2)^2}<0,\forall x\in D$. Nên hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định.

Nên $\min\limits_{[-3;-2]} y=\dfrac{1}{2}=y(-2)=\dfrac{-2+1}{-2-m^2}\Rightarrow -2-m^2=-2\Leftrightarrow m=0\Rightarrow -2<m\leq 3$.

Câu 4: Tìm giá trị dương của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{m^2x-1}{x+2}$ trên đoạn $[1;3]$ bằng 1.

A. $m=\sqrt{2}$. **B.** $m=\sqrt{3}$. **C.** $m=4$. **D.** $m=2$.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

Ta có: $y'=\dfrac{2m^2+1}{(x+2)^2}>0,\forall x\neq -2$.

Hàm số đồng biến trên đoạn $[1;3]$ nên $\max\limits_{[1;3]} y = y(3) \Leftrightarrow \dfrac{3m^2-1}{5}=1 \Leftrightarrow m=\sqrt{2}$.

Câu 5: Cho hàm số $y=\dfrac{x-m^2}{x+8}$ với m là tham số thực. Giả sử m_0 là giá trị dương của tham số m để hàm số có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;3]$ bằng -3. Giá trị m_0 thuộc khoảng nào trong các khoảng cho dưới đây?

A. $(2;5)$. **B.** $(1;4)$. **C.** $(6;9)$. **D.** $(20;25)$.

Lời giải

Chọn A

+ TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{-8\}$.

+ $y'=\dfrac{8+m^2}{(x+8)^2}>0, \forall x\in D$

Vậy hàm số $y=\dfrac{x-m^2}{x+8}$ đồng biến trên $[0;3]$.

$\Rightarrow \min\limits_{[0;3]} y = y(0)=\dfrac{-m^2}{8}$

Để $\min\limits_{[0;3]} y=-3 \Leftrightarrow \dfrac{-m^2}{8}=-3 \Leftrightarrow m=\pm 2\sqrt{6}$.

$\Rightarrow m_0=2\sqrt{6}\in(2;5)$. Vậy chọn**A.**

Câu 6: Tìm giá trị của tham số thực m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{2x+m}{x+1}$ trên đoạn $[0;4]$ bằng 3.

A. $m=3$. **B.** $m=1$. **C.** $m=7$. **D.** $m=5$

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y'=\dfrac{2-m}{(x+1)^2}$.

+ Xét $m=2$.

$\Rightarrow$Hàm số trở thành: $y=2$ là hàm số hằng nên không đạt giá trị nhỏ nhất bằng 3

$\Rightarrow m=2$

+ Xét $m>2$.

$\Rightarrow y'=\dfrac{2-m}{(x+1)^2}<0\ (\forall x\neq -1) \Rightarrow \min\limits_{[0;4]} y=y(4)=\dfrac{8+m}{5}$.

$\Rightarrow \dfrac{8+m}{5}=3 \Leftrightarrow m=7$.

+ Xét $m<2$.

$\Rightarrow y' = \dfrac{2-m}{(x+1)^2} > 0\ (\forall x \neq -1) \Rightarrow \min\limits_{[0;4]} y = y(0) = m$.

$\Rightarrow m = 3$.

Vậy $m = 7$.

Câu 7: Tìm các giá trị của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{x - m^2 + m}{x+1}$ trên đoạn $[0;1]$ bằng -2.

A. $\left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=-2 \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=2 \end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-2 \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=2 \end{array}\right.$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Hàm số đã cho liên tục trên $[0;1]$.

Ta có: $y' = \dfrac{1-\left(-m^2+m\right)}{(x+1)^2} = \dfrac{m^2 - m + 1}{(x+1)^2} > 0;\ \forall x \in D$.

$\Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên đoạn $[0;1]$.

Trên $[0;1]$ hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = 0$.

Ta có: $y(0) = -2 \Leftrightarrow -m^2 + m = -2 \Leftrightarrow m^2 - m - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=2 \end{array}\right.$.

Câu 8: Cho hàm số $y = \dfrac{x+m}{x+1}$ (m là tham số thực) thỏa mãn $\min\limits_{[0;1]} y = 3$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $1 \le m < 3$ **B.** $m > 6$ **C.** $m < 1$ **D.** $3 < m \le 6$

Lời giải

Chọn D

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Với $m = 1 \Rightarrow y = 1,\ \forall x \in [0;1]$ thì $\min\limits_{[0;1]} y \neq 3$.

Suy ra $m \neq 1$. Khi đó $y' = \dfrac{1-m}{(x+1)^2}$ không đổi dấu trên từng khoảng xác định.

TH 1: $y' > 0 \Leftrightarrow m < 1$ thì $\min\limits_{[0;1]} y = y(0) \Rightarrow m = 3$.

TH 2: $y' < 0 \Leftrightarrow m > 1$ thì $\min\limits_{[0;1]} y = y(1) \Rightarrow m = 5$.

Câu 9: Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{x+m}{x+1}$ trên $[1;2]$ bằng 8 (m là tham số thực). Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $m>10$. **B.** $8<m<10$. **C.** $0<m<4$. **D.** $4<m<8$.

Lời giải

Nếu $m=1$ thì $y=1$

Nếu $m\neq 1$ thì hàm số đã cho liên tục trên $[1;2]$ và $y'=\dfrac{1-m}{(x+1)^2}$.

Khi đó đạo hàm của hàm số không đổi dấu trên đoạn $[1;2]$.

Do vậy $\underset{x\in[1;2]}{Min}\,y+\underset{x\in[1;2]}{Max}\,y=y(1)+y(2)=\dfrac{m+1}{2}+\dfrac{m+2}{3}=8\Leftrightarrow m=\dfrac{41}{5}$.

Câu 10: Gọi A,B lần lượt là giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số $y=\dfrac{x+m^2+m}{x-1}$ trên đoạn $[2;3]$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để $A+B=\dfrac{13}{2}$.

A. $m=1;m=-2$. **B.** $m=-2$. **C.** $m=\pm 2$. **D.** $m=-1;m=2$.

Lời giải

Xét hàm số $y=\dfrac{x+m^2+m}{x-1}$ trên đoạn $[2;3]$.

$$y'=\frac{-m^2-m-1}{(x-1)^2}<0\ \forall x\in[2;3]\Rightarrow A=f(3)=\frac{m^2+m+3}{2},B=f(2)=\frac{m^2+m+2}{1}.$$

$$A+B=\frac{13}{2}\Leftrightarrow\frac{m^2+m+3}{2}+\frac{m^2+m+2}{1}=\frac{13}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\m=-2\end{array}\right..$$

Câu 11: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x-m^2}{x+8}$ với m là tham số thực. Giả sử m_0 là giá trị dương của tham số m để hàm số có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;3]$ bằng -3. Giá trị m_0 thuộc khoảng nào trong các khoảng cho dưới đây?

A. $(20;25)$. **B.** $(5;6)$. **C.** $(6;9)$. **D.** $(2;5)$.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{x-m^2}{x+8}$ trên đoạn $[0;3]$.

Ta có: $y'=\dfrac{8+m^2}{(x+8)^2}>0,\forall x\in[0;3]\Rightarrow$ hàm số $f(x)=\dfrac{x-m^2}{x+8}$ đồng biến trên đoạn $[0;3]$

$\Rightarrow \min\limits_{[0;3]}f(x)=f(0)=\dfrac{-m^2}{8}$.

Theo giả thiết, ta có: $\min\limits_{[0;3]} f(x) = -3 \Leftrightarrow \dfrac{-m^2}{8} = -3 \Leftrightarrow m^2 = 24 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 2\sqrt{6} \\ m = -2\sqrt{6} \end{array}\right.$.

Mà $m > 0$, $m \in \mathbb{R} \Rightarrow m = 2\sqrt{6} \approx 4,9 \in (2;5)$.

Câu 12: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = -x^3 - 3x^2 + m$ trên đoạn $[-1;1]$ bằng 0.

A. $m = 2$. **B.** $m = 6$. **C.** $m = 0$. **D.** $m = 4$.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $y = -x^3 - 3x^2 + m$ trên đoạn $[-1;1]$, ta có $y' = -3x^2 - 6x$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \in [-1;1] \\ x = -2 \notin [-1;1] \end{array}\right.$

Mà $\begin{cases} y'(-1) = \text{m} - 2 \\ y'(0) = \text{m} \\ y'(1) = \text{m} - 4 \end{cases}$

Do đó $\min\limits_{[-1;1]} y = -4 + m = 0 \Leftrightarrow m = 4$.

Vậy $m = 4$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 13: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + m$ có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-1;1]$ bằng $\sqrt{2}$

A. $m = \sqrt{2}$. **B.** $m = 2 + \sqrt{2}$. **C.** $m = 4 + \sqrt{2}$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m = 2 + \sqrt{2} \\ m = 4 + \sqrt{2} \end{array}\right.$.

Lời giải

Chọn C

$y' = 3x^2 - 6x$

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$

Trên $[-1;1]$ thì $y'_{(-1)} = m - 4; y'_{(0)} = m; y'_{(1)} = m - 2$

nên $\underset{[-1;1]}{Min y} = \sqrt{2} \Leftrightarrow m - 4 = \sqrt{2} \Leftrightarrow m = 4 + \sqrt{2}$

Câu 14: Có một giá trị m_0 của tham số m để hàm số $y = x^3 + (m^2 + 1)x + m + 1$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 5 trên đoạn $[0;1]$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $2018m_0 - m_0^2 \geq 0$. **B.** $2m_0 - 1 < 0$. **C.** $6m_0 - m_0^2 < 0$. **D.** $2m_0 + 1 < 0$.

Lời giải

+ Đặt $f(x) = x^3 + (m^2 + 1)x + m + 1$.

+ Ta có: $y' = 3x^2 + m^2 + 1$. Dễ thấy rằng $y' > 0$ với mọi x, m thuộc $\mathbb{R}$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$, suy ra hàm số đồng biến trên $[0;1]$. Vì thế $\min\limits_{[0;1]} y = \min\limits_{[0;1]} f(x) = f(0) = m+1$.

+ Theo bài ra ta có: $m+1=5$, suy ra $m=4$.

+ Như vậy $m_0 = 4$ và mệnh đề đúng là $2018m_0 - m_0^2 \geq 0$.

Câu 15: Nếu hàm số $y = x + m + \sqrt{1-x^2}$ có giá trị lớn nhất bằng $2\sqrt{2}$ thì giá trị của m là

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $-\sqrt{2}$. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Xét hàm số $y = x + m + \sqrt{1-x^2}$

Tập xác định: $D = [-1;1]$.

Ta có: $y' = 1 - \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{1-x^2} = x \\ 1 - x^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 > x \geq 0 \\ \sqrt{1-x^2} = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 > x \geq 0 \\ 2x^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 > x \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}.$$

Ta có: $y(-1) = -1 + m,\ y(1) = 1 + m,\ y\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2} + m$.

Do hàm số $y = x + m + \sqrt{1-x^2}$ liên tục trên $[-1;1]$ nên $\text{Max}\limits_{[-1;1]} y = m + \sqrt{2}$.

Theo bài ra thì $\text{Max}\limits_{[-1;1]} y = 2\sqrt{2}$, suy ra $m + \sqrt{2} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow m = \sqrt{2}$.

Câu 16: Cho hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 - m$. Trên $[-1;1]$ hàm số có giá trị nhỏ nhất là -1. Tính m?

A. $m=-6$. **B.** $m=-3$. **C.** $m=-4$. **D.** $m=-5$.

Lời giải

Chọn C

Xét $[-1;1]$ có $y' = 6x^2 - 6x$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \in [-1;1] \\ x = 1 \in [-1;1] \end{array}\right..$$

Khi đó

$y(-1) = -5 - m$; $y(0) = -m$; $y(1) = -1 - m$

Ta thấy $-5 - m < -1 - m < -m$ nên $\min\limits_{[-1;1]} y = -5 - m$.

Theo bài ra ta có $\min\limits_{[-1;1]} y = -1$ nên $-5 - m = -1 \Leftrightarrow m = -4$.

Câu 17: Biết S là tập giá trị của m để tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^4 - m^2x^3 - 2x^2 - m$ trên đoạn $[0;1]$ bằng -16. Tính tích các phần tử của S.

A. 2. **B.** -2. **C.** -15. **D.** -17.

Lời giải

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 4x^3 - 3m^2x^2 - 4x$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 3m^2x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 4x^2 - 3m^2x - 4 = 0 \ \left(\Delta = 9m^2 + 64\right) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \dfrac{3m^2 + \sqrt{9m^4 + 64}}{8} > 1 \\ x = \dfrac{3m^2 - \sqrt{9m^4 + 64}}{8} < 0 \end{array}\right.$$

Nên hàm số đơn điệu trên $(0;1)$.

Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[0;1]$ bằng -16 nên $y(0) + y(1) = -16 \Leftrightarrow -m + \left(-m^2 - m - 1\right) = -16 \Leftrightarrow -m^2 - 2m + 15 = 0$.

Vậy $m_1.m_2 = -15$.

Câu 18: Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \dfrac{x^2 + mx + 1}{x + m}$ liên tục và đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;2]$ tại một điểm $x_0 \in (0;2)$.

A. $0 < m < 1$ **B.** $m > 1$ **C.** $m > 2$ **D.** $-1 < m < 1$

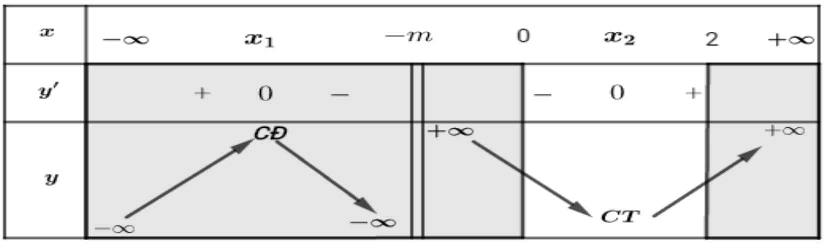
Lời giải

Chọn A

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$. Hàm số liên tục trên $[0;2]$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -m < 0 \\ -m > 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 0 \\ m < -2 \end{array}\right.$

Ta có $y' = \dfrac{x^2 + 2mx + m^2 - 1}{(x+m)^2} = \dfrac{(x+m)^2 - 1}{(x+m)^2}$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = -m - 1 \\ x_2 = -m + 1 \end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên



Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_0 \in (0;2)$ nên $0 < -m+1 < 2 \Leftrightarrow -1 < m < 1$

So với điều kiện hàm số liên tục trên đoạn $[0;2]$. Ta có $0 < m < 1$.

<u>C</u>Ó THỂ GIẢI NHƯ S<u>A</u>U:

Điều kiện xác định $x \neq -m$

Hàm số liên tục trên đoạn $[0;2]$ nên $-m \not\subset [0;2] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} -m < 0 \\ -m > 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 0 \\ m < -2 \end{array}\right.$ $(*)$

$$y' = \frac{x^2 + 2mx + m^2 - 1}{(x+m)^2} = \frac{(x+m)^2 - 1}{(x+m)^2}$$

$y' = 0$ có hai nghiệm là $\left[\begin{array}{l} x_1 = -m+1 \\ x_2 = -m-1 \end{array}\right.$,

$x_1 - x_2 = 2$ nên chỉ có nhiều nhất một nghiệm thuộc $(0;2)$

Ta thấy $-m+1 > -m-1, \forall m$ và do đó để hàm số liên tục và đạt giá trị nhỏ nhất trên $[0;2]$ tại một điểm $x_0 \in (0;2)$ thì $0 < -m+1 < 2 \Leftrightarrow -1 < m < 1$ $(**)$

Từ $(*), (**)$ ta có $0 < m < 1$

Câu 19: Cho hàm số $y = \dfrac{1 - m\sin x}{\cos x + 2}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[0;10]$ để giá trị nhỏ nhất của hàm số nhỏ hơn -2?

A. 1. **B.** 9. **C.** 3. **<u>D</u>.** 6.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y = \dfrac{1 - m\sin x}{\cos x + 2} \Leftrightarrow y\cos x + m\sin x = 1 - 2y$.

Phương trình có nghiệm khi và chỉ khi: $y^2 + m^2 \geq 1 - 4y + 4y^2 \Leftrightarrow 3y^2 - 4y + 1 - m^2 \leq 0$

$$\Leftrightarrow \frac{2 - \sqrt{1+3m^2}}{3} \leq y \leq \frac{2 + \sqrt{1+3m^2}}{3}.$$

Theo đề bài, ta có: $\begin{cases} \min\limits_{x\in\mathbb{R}} y = \dfrac{2-\sqrt{1+3m^2}}{3} < -2 \\ m \in [0;10] \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{1+3m^2} > 8 \\ m \in [0;10] \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m^2 > 63 \\ m \in [0;10] \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 > 21 \\ m \in [0;10] \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$\Leftrightarrow m \in \{5,6,7,8,9,10\}$.

Vậy có 6 giá trị nguyên của tham số m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 20: Cho hàm số $y = ax^3 + cx + d,\ a \neq 0$ có $\min\limits_{x\in(-\infty;0)} f(x) = f(-2)$. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[1;3]$ bằng

A. $d - 11a$. **B.** $d - 16a$. **C.** $d + 2a$. **D.** $d + 8a$.

Lời giải

Vì $y = ax^3 + cx + d,\ a \neq 0$ là hàm số bậc ba và có $\min\limits_{x\in(-\infty;0)} f(x) = f(-2)$ nên $a < 0$ và $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

Ta có $y' = 3ax^2 + c = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow ac < 0$.

Vậy với $a < 0,\ c > 0$ thì $y' = 0$ có hai nghiệm đối nhau $x = \pm\sqrt{-\dfrac{c}{3a}}$

Từ đó suy ra $\min\limits_{x\in(-\infty;0)} f(x) = f\left(-\sqrt{-\dfrac{c}{3a}}\right) \Leftrightarrow -\sqrt{-\dfrac{c}{3a}} = -2 \Leftrightarrow \sqrt{-\dfrac{c}{3a}} = 2 \Leftrightarrow c = -12a$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2	0	1	2	3	$+\infty$
y'		$-$	0	$+$		0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$f(-2)$	$\nearrow$		$f(2)$	$\searrow$	$-\infty$

Ta suy ra $\max\limits_{x\in[1;3]} f(x) = f(2) = 8a + 2c + d = -16a + d$.

Câu 21: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \dfrac{x+m}{x^2+x+1}$ có giá trị lớn nhất trên $\mathbb{R}$ nhỏ hơn hoặc bằng 1.

A. $m \leq 1$. **B.** $m \geq 1$. **C.** $m \geq -1$. **D.** $m \leq -1$.

Lời giải

Chọn A

+ TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

+ $\lim\limits_{x\to\infty} y = 0$

+ $y' = \dfrac{-x^2 - 2mx + 1 - m}{\left(x^2 + x + 1\right)^2}$.

$y' = 0 \Leftrightarrow -x^2 - 2mx + 1 - m = 0$ (*)

$\Delta'_{(*)} = m^2 - m + 1 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$ nên có 2 nghiệm phân biệt $x_1 < x_2, \forall m \in \mathbb{R}$

+ BBT:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	0	$\searrow$	$f(x_1)$	$\nearrow$	$f(x_2)$	$\searrow$	0

Vậy hàm số đạt giá trị lớn nhất là $f\left(x_2\right) = \dfrac{1}{2x_2 + 1}$ với $x_2 = -m + \sqrt{m^2 - m + 1}$

$$YCBT \Leftrightarrow \frac{1}{-2m + 2\sqrt{m^2 - m + 1} + 1} \le 1 \Leftrightarrow 1 - 2m + 2\sqrt{m^2 - m + 1} \ge 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{m^2 - m + 1} \ge m \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < 0 \\ \begin{cases} m \ge 0 \\ m^2 - m + 1 \ge m^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow m \le 1$$

Câu 22: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \dfrac{x^3 + x^2 - m}{x + 1}$ trên $[0;2]$ bằng 5. Tham số m nhận giá trị là

A. -5. **B.** 1. **<u>C</u>.** -3. **D.** -8.

Lời giải

Chọn C

<u>Cách 1:</u>

Tập xác định của hàm số: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\} \Rightarrow [0;2] \subset D$.

Ta có: $y = \dfrac{x^3 + x^2 - m}{x + 1} \Rightarrow y' = \dfrac{2x^3 + 4x^2 + 2x + m}{(x + 1)^2}$.

$y' = 0 \Leftrightarrow 2x^3 + 4x^2 + 2x + m = 0 \Leftrightarrow -\left(2x^3 + 4x^2 + 2x\right) = m$.

Ta có $y(0) = -m; y(2) = 4 - \dfrac{m}{3}$

Đặt $g(x) = -\left(2x^3 + 4x^2 + 2x\right) \Rightarrow g'(x) = -\left(6x^2 + 8x + 2\right) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = -\dfrac{1}{3}$.

Trên $[0;2]$ ta có bảng biến thiên:

x	0		2
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	0	$\searrow$	-36

Từ bảng biến thiên ta có $g(x)\in[-36;0],\forall x\in[0;2]$.

Trường hợp 1: $m>0\Rightarrow$ phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình $y'=0$ vô nghiệm.

Dễ thấy $y(0)=-m<y(2)=4-\dfrac{m}{3}$ $khi\, m>0$.

Khi đó $\underset{[0;2]}{\text{Max}}\, y=y(2)=4-\dfrac{m}{3}=5\Leftrightarrow m=-3$ loại do $m>0$.

Trường hợp 2: $m<-36\Rightarrow$ phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình $y'=0$ vô nghiệm.

Dễ thấy $y(0)=-m>y(2)=4-\dfrac{m}{3}$ $khi\ m<-36$.

Khi đó $\underset{[0;2]}{\text{Max}}\, y=y(0)=-m=5\Leftrightarrow m=-5$ loại do $m<-36$.

Trường hợp 3: $m\in[-36;0]\Rightarrow$ phương trình $y'=0$ có nghiệm duy nhất .

Trên $[0;2]$ ta có bảng biến thiên:

x	0		x_0		2
$g'(x)$			$-$		
$g(x)$	0	$\searrow$	$y(x_0)$ $y=m$	$\searrow$	-36

Nhìn vào bảng biến thiên ta có:

$+x=x_0:g(x)=m\Leftrightarrow-(2x^3+4x^2+2x)=m\Leftrightarrow 2x^3+4x^2+2x+m=0\Leftrightarrow y'=0$.

$+x\in(0;x_0):g(x)>m\Leftrightarrow-(2x^3+4x^2+2x)>m\Leftrightarrow 2x^3+4x^2+2x+m<0\Leftrightarrow y'<0$.

$+x\in(x_0;0):g(x)<m\Leftrightarrow-(2x^3+4x^2+2x)<m\Leftrightarrow 2x^3+4x^2+2x+m>0\Leftrightarrow y'>0$.

Ta có bảng biến thiên sau:

x	0		x_0		2
y'		$-$	0	$+$	
y	$y(0)$	$\searrow$	$y(x_0)$	$\nearrow$	$y(2)$

Từ bảng biến thiên ta thấy $\underset{[0;2]}{\text{Max}}\, y\in\{y(2);y(0)\}$.

Nếu $\text{m}\in[-36;-6]\Rightarrow y(0)\ge y(2)\Rightarrow\underset{[0;2]}{\text{Max}}\, y=y(0)=-m=5\Leftrightarrow m=-5\ (l)$.

Nếu $\text{m}\in[-6;0]\Rightarrow y(0)\le y(2)\Rightarrow\underset{[0;2]}{\text{Max}}\, y=y(2)=4-\dfrac{m}{3}=5\Leftrightarrow m=-3(n)$.

Vậy $m=-3$ thỏa đề.

Cách 2:

Tập xác định của hàm số: $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}\Rightarrow[0;2]\subset D$.

Ta có: $y=\dfrac{x^3+x^2-m}{x+1}=x^2-\dfrac{m}{x+1}\Rightarrow y'=2x+\dfrac{m}{(x+1)^2}$.

Trường hợp 1: $m\ge 0\Rightarrow y'\ge 0,\forall x\in[0;2]\Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên $[0;2]$.

$\Rightarrow \underset{[0;2]}{\text{Max}}\,y=y(2)=4-\dfrac{m}{3}=5\Leftrightarrow m=-3$ loại do $m>0$.

Trường hợp 2: $m<0$, giả sử $\Rightarrow \underset{[0;2]}{\text{Max}}\,y=y(x_0)$ với $x_0\in(0;2)$. Do hàm số liên tục trên $[0;2]$

$$\Rightarrow \begin{cases} y'(x_0)=0 \\ y(x_0)=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=-2x_0(x_0+1)^2 \\ \dfrac{x_0^3+x_0^2-m}{x_0+1}=5 \end{cases}$$

$\Rightarrow x_0^3+x_0^2+2x_0(x_0+1)^2=5(x_0+1)\Leftrightarrow x_0=\dfrac{-5}{3}\vee x=1(n)\Rightarrow m=-8$.

Khi đó: $y'=2x+\dfrac{-8}{(x+1)^2}=\dfrac{2x^3+4x^2+2x-8}{(x+1)^2}\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow x=1$.

Ta có bảng biến thiên:

x	0		1		2
y'		$-$	0	$+$	
y	8	$\searrow$	5	$\nearrow$	$\dfrac{20}{3}$

$\Rightarrow m=-8$ không thỏa yêu cầu đề.

Nên không tồn tại $x_0\in(0;2)$ để $\underset{[0;2]}{\text{Max}}\,y=y(x_0)$.

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \underset{[0;2]}{\text{Max}}\,y=y(2)\Rightarrow m=-5 \\ \underset{[0;2]}{\text{Max}}\,y=y(0)\Rightarrow m=-3 \end{array}\right..$$

Nếu $m=-5\Rightarrow y(0)=5;y(2)=\dfrac{17}{3}\Rightarrow \underset{[0;2]}{\text{Max}}\,y=y(2)=\dfrac{17}{3}\ne 5\Rightarrow m=-5(l)$.

Nếu $m=-3\Rightarrow y(0)=3;y(2)=5\Rightarrow \underset{[0;2]}{\text{Max}}\,y=y(2)=5\Rightarrow m=-3(n)$.

Vậy $m=-3$ thỏa đề.

Câu 23: Cho hàm số $y=\left(x^3-3x+m\right)^2$. Tổng tất cả các giá trị của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1;1]$ bằng 1 là

A. 1. **B.** -4. **C.** 0. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

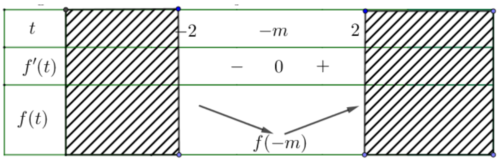
$D=\mathbb{R}$.

Đặt $t=x^3-3x,\ x\in[-1;1]\Rightarrow t\in[-2;2]$.

Khi đó ta có hàm số $f(t)=(t+m)^2$.

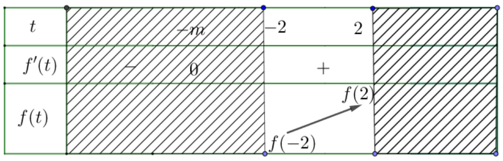
$f'(t)=2(t+m);f'(t)=0\Leftrightarrow t=-m.$

Trường hợp 1: $-2<-m<2\Leftrightarrow -2<m<2.$



Từ bảng biến thiên ta thấy: $\min\limits_{[-2;2]} f(t)=f(-m)=0$ không thỏa mãn yêu cầu.

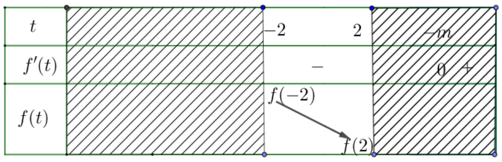
Trường hợp 2: $-m\le -2\Leftrightarrow m\ge 2$



Từ bảng biến thiên ta thấy: $\min\limits_{[-2;2]} f(t)=f(-2)=(m-2)^2$.

Theo yêu cầu bài toán: $(m-2)^2=1\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=3\\ m=1\end{array}\right. \xrightarrow{m\ge 2} m=3.$

Trường hợp 3: $-m\ge 2\Leftrightarrow m\le -2$



Từ bảng biến thiên ta thấy: $\min\limits_{[-2;2]} f(t)=f(2)=(m+2)^2$.

Theo yêu cầu bài toán: $(m+2)^2=1\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-3\\ m=-1\end{array}\right. \xrightarrow{m\le -2} m=-3.$

Vậy tổng các giá trị của tham số m thỏa mãn yêu cầu là: $3+(-3)=0$.

Câu 24: Tìm tất cả các giá trị của $m>0$ để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^3-3x+1$ trên đoạn $[m+1;m+2]$ luôn bé hơn 3.

A. $m\in(0;2)$. **B.** $m\in(0;1)$. **C.** $m\in(1;+\infty)$. **D.** $m\in(0;+\infty)$.

Lời giải

Ta có $y'=3x^2-3$, $y'=0\Leftrightarrow x=\pm 1$ do đó $y_{CT}=y(1)=-1$ và $y_{CĐ}=y(-1)=3$.

Thấy ngay với $m>0$ thì trên đoạn $[m+1;m+2]$ hàm số luôn đồng biến.

Vậy GTNN của hàm số đã cho trên đoạn $[m+1;m+2]$ là $y(m+1)=(m+1)^3-3(m+1)+1$.

GTNN luôn bé hơn 3 $\Leftrightarrow (m+1)^3-3(m+1)-2<0\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} m+1<2\\ m+1\ne -1\end{array}\right.\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} m<1\\ m\ne -2\end{array}\right.$.

Kết hợp điều kiện $m>0$ ta được $m\in(0;1)$.

Câu 25: Biết rằng giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = mx + \dfrac{36}{x+1}$ trên $[0;3]$ bằng 20. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $0 < m \le 2$. **B.** $4 < m \le 8$. **C.** $2 < m \le 4$. **D.** $m > 8$.

Lời giải

$y = mx + \dfrac{36}{x+1} \Rightarrow y' = m - \dfrac{36}{(x+1)^2}$

Trường hợp 1: $m = 0$, ta có $y' = -\dfrac{36}{(x+1)^2} < 0, \forall x \ne -1$.Khi đó $\min\limits_{x\in[0;3]} y = y(3) = 9$.

Trường hợp 2: $m \ne 0$

□ Nếu $m < 0$, ta có $y' < 0$, $\forall x \ne -1$ Khi đó $\min\limits_{x\in[0;3]} y = y(3) \Leftrightarrow 20 = 3m + 9 \Leftrightarrow m = \dfrac{11}{3}$.

□ Nếu $m > 0$, khi đó $y' = 0 \Leftrightarrow m - \dfrac{36}{(x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 = \dfrac{36}{m} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{6}{\sqrt{m}} - 1 \\ x = -\dfrac{6}{\sqrt{m}} - 1 \ (l) \end{array}\right.$.

□ $0 < \dfrac{6}{\sqrt{m}} - 1 \le 3 \Leftrightarrow \dfrac{4}{9} < m \le 36$, $\min\limits_{x\in[0;3]} y = y\left(\dfrac{6}{\sqrt{m}} - 1\right) = 12\sqrt{m} - m = 20 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 4 \\ m = 100\,(l) \end{array}\right.$.

□ $\dfrac{6}{\sqrt{m}} - 1 > 3 \Leftrightarrow m < \dfrac{9}{4}$, $\min\limits_{x\in[0;3]} y = y(3) \Leftrightarrow 20 = 3m + 9 \Leftrightarrow m = \dfrac{11}{3}(l)$.

Câu 26: Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x + 2020$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m sao cho hàm số có giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(0;+\infty)$?

A. 2. **B.** 1. **C.** Vô số. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y' = 3x^2 - 6mx + 3(m^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = m - 1 \\ x_2 = m + 1 \end{array}\right.$.

Để hàm số có giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(0;+\infty)$ thì $x_1 \le 0 < x_2$ hoặc $0 < x_1 < x_2$.

TH1: $x_1 \le 0 < x_2 \Leftrightarrow m - 1 \le 0 < m + 1 \Leftrightarrow -1 < m \le 1$. Do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{0;1\}$.

BBT của hàm số:

x	0		$m+1$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y		$\searrow$		$\nearrow$	

TH2: $0 < x_1 < x_2$.

BBT của hàm số

x	0		$m-1$		$m+1$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Hàm số có giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(0;+\infty)$ khi và chỉ khi $\begin{cases} m-1>0 \\ y(m+1)\le y(0) \end{cases}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m>1 \\ (m+1)^3-3m(m+1)^2+3(m^2-1)(m+1)+2020\le 2020 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m>1 \\ (m+1)^2(m-2)\le 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m>1 \\ \left[\begin{array}{l} m\le 2 \\ m=-1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow 1<m\le 2.$$

Do $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m=2$.

Vậy $m\in\{0;1;2\}$.

Câu 27: Cho hàm số $f(x)=m\sqrt{x-1}$. Gọi m_1,m_2 là hai giá trị của m thoả mãn $\min\limits_{[2;5]} f(x)+\max\limits_{[2;5]} f(x)=m^2-10$. Giá trị của m_1+m_2 bằng

A. 3. **B.** 5. **C.** 10. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f'(x)=m.\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}$;

Do $m\ne 0$ nên $f'(x)$ khác 0 và có dấu không thay đổi với $\forall x\in(1;+\infty)$.

Nếu $m>0$ thì $f'(x)>0,\forall x\in[2;5]$. Do đó $\min\limits_{[2;5]} f(x)=f(2)=m$; $\max\limits_{[2;5]} f(x)=f(5)=2m$.

$$\min\limits_{[2;5]} f(x)+\max\limits_{[2;5]} f(x)=m^2-10$$

$$\Leftrightarrow m+2m=m^2-10$$

$$\Leftrightarrow m^2-3m-10=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m_1=-2 \\ m_2=5 \end{array}\right.$$

Do $m>0$ nên nhận $m_2=5$.

Nếu $m<0$ thì $f'(x)<0,\forall x\in[2;5]$. Do đó $\min\limits_{[2;5]} f(x)=f(5)=2m$; $\max\limits_{[2;5]} f(x)=f(2)=m$.

$\min\limits_{[2;5]} f\left(x\right)+\max\limits_{[2;5]} f\left(x\right)=m^2-10$

$\Leftrightarrow 2m+m=m^2-10$

$\Leftrightarrow m^2-3m-10=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m_1=-2 \\ m_2=5 \end{array}\right.$

Do $m<0$ nên nhận $m_1=-2$.

Vậy $m_1+m_2=3$.

Câu 28: Cho hàm số $y=\dfrac{m\sin x+1}{\cos x+2}$ có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $\left[-5;5\right]$ để giá trị nhỏ nhất của y nhỏ hơn -1.

A. 4. **B.** 2. **C.** 6. **D.** 8.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $\cos x+2\neq 0$ luôn đúng $\forall x\in\mathbb{R}$.

$y=\dfrac{m\sin x+1}{\cos x+2}\Leftrightarrow y\left(\cos x+2\right)=m\sin x+1$

$\Leftrightarrow m\sin x-y\cos x=2y-1$.

Phương trình có nghiệm

$\Leftrightarrow m^2+y^2\geq\left(2y-1\right)^2\Leftrightarrow 3y^2-4y+1-m^2\leq 0\Leftrightarrow \dfrac{2-\sqrt{1+3m^2}}{3}\leq y\leq\dfrac{2+\sqrt{1+3m^2}}{3}$.

Vậy $\underset{\mathbb{R}}{Min}\, y=\dfrac{2-\sqrt{1+3m^2}}{3}$.

$\underset{\mathbb{R}}{Min}\, y<-1\Leftrightarrow\dfrac{2-\sqrt{1+3m^2}}{3}<-1\Leftrightarrow\sqrt{1+3m^2}>5\Leftrightarrow m^2-8>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m>2\sqrt{2}\approx 2,82 \\ m<-2\sqrt{2}\approx -2,82 \end{array}\right.$.

Mà $m\in\mathbb{Z}, m\in\left[-5;5\right]$ nên $m\in\left\{-5;-4;-3;3;4;5\right\}$.

Câu 29: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{34}{\sqrt{\left(x^3-3x+2m\right)^2+1}}$ trên đoạn $\left[0;3\right]$ bằng 2. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

A. 8. **B.** -8. **C.** -6. **D.** -1.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\sqrt{\left(x^3-3x+2m\right)^2}=\left|x^3-3x+2m\right|$

Nhận thấy $\min\limits_{[0;3]} f\left(x\right)=2\Leftrightarrow\max\limits_{[0;3]}\left|x^3-3x+2m\right|=16 \quad (1)$.

Xét hàm số $g\left(x\right)=x^3-3x+2m$ trên $\left[0;3\right]$, ta có:

+ $g'(x)=3x^2-3$, $g'(x)=3x^2-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\in(0;3) \\ x=-1\notin(0;3) \end{array}\right.$

+ $g(0)=2m,\ g(1)=2m-2,\ g(3)=2m+18$

Do đó $2m-2\le g(x)\le 2m+18, \forall x\in[0;3]$, tức $\max\limits_{[0;3]}\left|x^3-3x+2m\right|=\max\limits_{[0;3]}\left\{|2m-2|;|2m+18|\right\}$.

Từ đây ta có $(1)\Leftrightarrow \max\limits_{[0;3]}\left\{|2m-2|;|2m+18|\right\}=16$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} |2m+18|>|2m-2| \\ |2m+18|=16 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} |2m+18|\le|2m-2| \\ |2m-2|=16 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=-7 \end{array}\right.$. Suy ra $S=\{-7;-1\}$. Vậy, tổng các phần tử của S là -8.

Câu 30: Cho hàm số $y=\left(x^3-3x+m+1\right)^2$. Tổng tất cả các giá trị của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1;1]$ bằng 1 là

A. -2. **B.** 4. **C.** -4. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

Đặt $y=f(x)=\left(x^3-3x+m+1\right)^2$ là hàm số xác định và liên tục trên đoạn $[-1;1]$.

Ta có $y'=f'(x)=2\left(x^3-3x+m+1\right)\left(3x^2-3\right)$.

$f'(x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm1 \\ m=-x^3+3x-1=g(x) \end{array}\right.$.

Ta khảo sát hàm số $g(x)$ trên đoạn $[-1;1]$.

Bảng biến thiên của $g(x)$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0
$g(x)$	$+\infty$	↘	-3	↗	1	↘	$-\infty$

Nếu $m\in[-3;1]$ thì luôn tồn tại $x_0\in[-1;1]$ sao cho $m=g(x_0)$ hay $f(x_0)=0$. Suy ra $\min\limits_{[-1;1]} y=0$, tức là không tồn tại m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Nếu $m\notin[-3;1]$ thì $f'(x)=0\Leftrightarrow x=\pm1\in[-1;1]$.

Ta có: $\min\limits_{[-1;1]} f(x)=\min\{f(1);f(-1)\}=\min\left\{(m-1)^2;(m+3)^2\right\}$

Trường hợp 1: $m>1$ tức là $m+3>m-1>0$ suy ra

$$\min_{[-1;1]} f(x)=(m-1)^2=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=2\ \ (TM) \\ m=0\ \ (KTM) \end{array}\right.$$

Trường hợp 2: $m<-3$ tức là $m-1<m+3<0$ suy ra

$$\min_{[-1;1]} f(x)=(m+3)^2=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-4\ \ (TM) \\ m=-2\ \ (KTM) \end{array}\right.$$

Vậy có hai giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán: $m=2; m=-4$, từ đó tổng tất cả các giá trị của m là -2.

Câu 31: Cho hàm số $y=f\left(x\right)=m^2\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}\right)+4\sqrt{4-x^2}+m+1$. Tính tổng tất cả các giá trị của m để hàm số $y=f\left(x\right)$ có giá trị nhỏ nhất bằng 4.

A. $-\dfrac{7}{2}$. **B.** $\dfrac{5}{2}$. **C.** $-\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn C

TXĐ: $D=\left[-2;2\right]$.

Đặt $t=\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}$; $t\in\left[2;2\sqrt{2}\right]$.

$\Leftrightarrow t^2=4+2\sqrt{4-x^2} \Leftrightarrow 2\sqrt{4-x^2}=t^2-4$.

$\Rightarrow y=g\left(t\right)=m^2t+2\left(t^2-4\right)+m+1 =2t^2+m^2t+m-7$ với $t\in\left[2;2\sqrt{2}\right]$.

Ta có: $g'\left(t\right)=4t+m^2$.

$g'\left(t\right)=0 \Leftrightarrow t=\dfrac{-m^2}{4}<0;\forall m\in\mathbb{R} \Rightarrow g\left(t\right)$ đồng biến trên $\left[2;2\sqrt{2}\right] \Rightarrow \min\limits_{\left[2;2\sqrt{2}\right]} g\left(t\right)=g\left(2\right)=4$.

Mà $g\left(2\right)=2m^2+m+1 \Leftrightarrow 2m^2+m+1=4 \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-\dfrac{3}{2} \end{array}\right.$.

Tổng các giá trị của m thỏa mãn ycbt là $S=1+\left(-\dfrac{3}{2}\right)=-\dfrac{1}{2}$.

Câu 32: Cho hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{2x-m}{x+1}$ với $m\neq-2$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. $\max\limits_{[1;3]} f\left(x\right)=\max\left\{\dfrac{2-m}{2};\dfrac{6-m}{4}\right\}$.

B. $\max\limits_{[1;3]} f\left(x\right)=\dfrac{6-m}{4}$ khi $m<-2$.

C. $\min\limits_{[1;3]} f\left(x\right)=\min\left\{\dfrac{2-m}{2};\dfrac{6-m}{4}\right\}$.

D. $\min\limits_{[1;3]} f\left(x\right)=\dfrac{2-m}{2}$ khi $m>-2$.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{2x-m}{x+1}$ với $m\ne -2$.

Tập xác định $x\ne -1$.

Ta có $f'\left(x\right)=\dfrac{2+m}{\left(x+1\right)^2}$ suy đạo hàm không đổi dấu $x\in\left[1;3\right]$ suy ra

$\max\limits_{[1;3]} f\left(x\right)=\max\left\{f\left(1\right);f\left(3\right)\right\}=\max\left\{\dfrac{2-m}{2};\dfrac{6-m}{4}\right\}$;

$\min\limits_{[1;3]} f\left(x\right)=\min\left\{f\left(1\right);f\left(3\right)\right\}=\min\left\{\dfrac{2-m}{2};\dfrac{6-m}{4}\right\}$.

Xét với $m<-2\Rightarrow f'\left(x\right)<0\ \forall x\in\left[1;3\right]$. Vậy $\forall x\in\left[1;3\right]\Rightarrow f\left(x\right)\le f\left(1\right)=\dfrac{2-m}{2}$

$\Rightarrow \max\limits_{[1;3]} f\left(x\right)=\dfrac{2-m}{2}$.

Xét với $m>-2\Rightarrow f'\left(x\right)>0\ \forall x\in\left[1;3\right]$. Vậy $\forall x\in\left[1;3\right]\Rightarrow f\left(x\right)\ge f\left(1\right)=\dfrac{2-m}{2}$

$\Rightarrow \min\limits_{[1;3]} f\left(x\right)=\dfrac{2-m}{2}$.

Câu 33: Có bao nhiêu số nguyên m thuộc đoạn $\left[-20\ ;\ 20\right]$ để giá trị lớn nhất của hàm số $y=\dfrac{x+m+6}{x-m}$ trên đoạn $\left[1\ ;\ 3\right]$ là số dương?

A. 9. **B.** 8. **C.** 11. **D.** 10.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\left\{m\right\}$.

Để hàm số có giá trị lớn nhất trên $\left[1\ ;\ 3\right]$ thì $m\notin\left[1\ ;\ 3\right]$.

$y'=\dfrac{-2m-6}{\left(x-m\right)^2}$.

Trường hợp 1: $-2m-6>0\Leftrightarrow m<-3$.

Khi đó $\max\limits_{x\in[1\,;\,3]} y=y\left(3\right)=\dfrac{m+9}{3-m}$.

Để giá trị lớn nhất trên đoạn $\left[1\ ;\ 3\right]$ là số dương thì $\dfrac{m+9}{3-m}>0\Leftrightarrow m+9>0\Leftrightarrow m>-9$.

Vậy các số nguyên m thỏa là $-8,\ -7,\ -6,\ -5,\ -4$.

Trường hợp 2: $-2m-6<0\Leftrightarrow m>-3$.

Khi đó $\max\limits_{x\in[1\,;\,3]} y=y\left(1\right)=\dfrac{m+7}{1-m}$.

Để giá trị lớn nhất trên đoạn $\left[1\ ;\ 3\right]$ là số dương thì $\dfrac{m+7}{1-m}>0 \Leftrightarrow 1-m>0 \Leftrightarrow m<1.$

Vậy các số nguyên m thỏa mãn là $-2,\ -1,\ 0.$

Trường hợp 3: $-2m-6=0 \Leftrightarrow m=-3.$

Khi đó $y=1.$ Nên $\max\limits_{x\in[1\ ;\ 3]} y=1.$

Vậy $m=-3$ thỏa.

Kết luận: có 9 số nguyên m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

CHƯƠNG I

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

BÀI 3: GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT VÀ GIÁ TRỊ LỚN NHẤT CỦA HÀM SỐ

III BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM. (MỨC 9 – 10)

DẠNG 1. ĐỊNH M ĐỂ GTLN-GTNN CỦA HÀM SỐ CHỨA DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC

Dạng 1: Tìm m để $\max\limits_{[\alpha;\beta]} y=\left|f(x)+m\right|=a\quad(a>0)$.

Phương pháp:

Cách 1: Trước tiên tìm $\max\limits_{[\alpha;\beta]} f(x)=K;\qquad \min\limits_{[\alpha;\beta]} f(x)=k\ (K>k)$.

Kiểm tra $\max\left\{|m+K|,|m+k|\right\}\ge\dfrac{|m+K|+|m+k|}{2}\ge\dfrac{|m+K-m-k|}{2}=\dfrac{|K-k|}{2}$.

TH1: $\dfrac{|K-k|}{2}\le a$. Để $\max\limits_{[\alpha;\beta]} y=a\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m+k=-a\\m+K=a\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-a-k\\m=a-K\end{array}\right.\Rightarrow m\in\{-a-k;a-K\}$.

TH2: $\dfrac{|K-k|}{2}>a\ \Rightarrow m\in\varnothing$.

Cách 2: Xét trường hợp

TH1: $Max=|m+K|\Leftrightarrow\begin{cases}|m+K|=a\\|m+K|\ge|m+k|\end{cases}$

TH2: $Max=|m+k|\Leftrightarrow\begin{cases}|m+k|=a\\|m+k|\ge|m+K|\end{cases}$

Dạng 2: Tìm m để $\min\limits_{[\alpha;\beta]} y=\left|f(x)+m\right|=a\quad(a>0)$.

Phương pháp:

Trước tiên tìm $\max\limits_{[\alpha;\beta]} f(x)=K;\qquad \min\limits_{[\alpha;\beta]} f(x)=k\ (K>k)$.

Để $\min\limits_{[\alpha;\beta]} y=a\Leftrightarrow\begin{cases}m+k=a\\m+k>0\end{cases}\vee\begin{cases}m+K=-a\\m+K<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=a-k\\m>-k\end{cases}\vee\begin{cases}m=-a-K\\m<-K\end{cases}$. Vậy $m\in S_1\cup S_2$.

Dạng 3: Tìm m để $\max\limits_{[\alpha;\beta]} y=\left|f(x)+m\right|$ không vượt quá giá trị M cho trước.

Phương pháp: Trước tiên tìm $\max\limits_{[\alpha;\beta]} f(x)=K;\qquad \min\limits_{[\alpha;\beta]} f(x)=k\ (K>k)$.

Để $\max\limits_{[\alpha;\beta]} y\le M \Rightarrow \begin{cases} m+k\ge -M \\ m+K\le M \end{cases} \Leftrightarrow -M-k\le m\le M-K$.

Dạng 4: Tìm m để $\min\limits_{[\alpha;\beta]} y=\left|f(x)+m\right|$ không vượt quá giá trị a cho trước.

Phương pháp: Trước tiên tìm $\max\limits_{[\alpha;\beta]} f(x)=K;\qquad \min\limits_{[\alpha;\beta]} f(x)=k\ (K>k)$.

Để

$$\min\limits_{[\alpha;\beta]} y\le a \Leftrightarrow \begin{cases} m+k\le a \\ m+k\ge 0 \end{cases} \vee \begin{cases} m+K\ge -a \\ m+K\le 0 \end{cases} \vee (m+K)(m+k)<0 \Leftrightarrow \begin{cases} m\le a-k \\ m\ge -k \end{cases} \vee \begin{cases} m\ge -a-K \\ m\le -K \end{cases} \vee -K<m<-k.$$

Dang 5: Tìm m để $\max\limits_{[a;b]} y=\left|f(x)+m\right|$ đạt min.

Phương pháp:

Trước tiên tìm $\max\limits_{[a;b]} f(x)=K;\qquad \min\limits_{[a;b]} f(x)=k\ (K>k)$.

Đề hỏi tìm $m\Rightarrow m=-\dfrac{K+k}{2}$. Đề hỏi tìm min của $\max\limits_{[a;b]} y\Rightarrow$ giá trị này là $\dfrac{K-k}{2}$.

Dạng 6: Tìm m để $\min\limits_{[a;b]} y=\left|f(x)+m\right|$ đạt min.

Phương pháp: Trước tiên tìm $\max\limits_{[a;b]} f(x)=K;\qquad \min\limits_{[a;b]} f(x)=k\ (K>k)$.

Đề hỏi tìm $m\Rightarrow (m+K)(m+k)\le 0\Leftrightarrow -K\le m\le -k$. Đề hỏi tìm min của $\min\limits_{[a;b]} y\Rightarrow$ giá trị này là 0.

Dạng 7: Cho hàm số $y=\left|f(x)+m\right|$.Tìm m để $\max\limits_{[a;b]} y\le h.\min\limits_{[a;b]} y\,(h>0)$ hoặc $Min+\max =$

Phương pháp: Trước tiên tìm $\max\limits_{[a;b]} f(x)=K;\qquad \min\limits_{[a;b]} f(x)=k\ (K>k)$.

TH1: $\left|K+m\right|\le h\left|k+m\right| \xrightarrow[K+m \text{ cung dau } k+m]{|K+m|\ge|k+m|} m\in S_1$.

TH2: $\left|k+m\right|\le h\left|K+m\right| \xrightarrow[K+m \text{ cung dau } k+m]{|k+m|\ge|K+m|} m\in S_2$.

Vậy $m\in S_1\cup S_2$.

Dạng 8: Cho hàm số $y=\left|f(x)+m\right|$.

Phương pháp: Trước tiên tìm $\max\limits_{[a;b]} f(x)=K;\qquad \min\limits_{[a;b]} f(x)=k\ (K>k)$.

BT1: Tìm m để $\min\limits_{[a;b]} y+\max\limits_{[a;b]} y=\alpha \Leftrightarrow \left|m+K\right|+\left|m+k\right|=\alpha$.

BT2: Tìm m để $\min\limits_{[a;b]} y*\max\limits_{[a;b]} y=\beta \Leftrightarrow \left|m+K\right|*\left|m+k\right|=\beta$.

Câu 1: Tìm m để giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|x^3-3x+2m-1\right|$ trên đoạn $[0;2]$ là nhỏ nhất. Giá trị của m thuộc khoảng nào?

A. $\left(-\frac{3}{2};-1\right)$. **B.** $\left(\frac{2}{3};2\right)$. **C.** $[-1;0]$. **D.** $(0;1)$.

Câu 2: Tính tổng tất cả các giá trị của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|x^2-2x+m\right|$ trên đoạn $[-1;2]$ bằng 5.

A. -1. **B.** 2. **C.** -2. **D.** 1.

Câu 3: Cho hàm số $y=\left|x^2+2x+a-4\right|$ (a là tham số). Tìm a để giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-2;1]$ đạt giá trị nhỏ nhất

A. $a=1$. **B.** $a=3$. **C.** $a=2$. **D.** $a=5$.

Câu 4: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|\frac{x^2+mx+m}{x+1}\right|$ trên $[1;2]$ bằng 2. Số phần tử của tập S.

A. 3. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 2.

Câu 5: Xét hàm số $f(x)=\left|x^2+ax+b\right|$, với a, b là tham số. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-1;3]$. Khi M nhận giá trị nhỏ nhất có thể được, tính $a+2b$.

A. 2. **B.** 4. **C.** -4. **D.** 3.

Câu 6: Cho hàm số $y=\left|x^3+x^2+\left(m^2+1\right)x+27\right|$. Giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-3;-1]$ có giá trị nhỏ nhất bằng

A. 26. **B.** 18. **C.** 28. **D.** 16.

Câu 7: Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|x^2+2x+m-4\right|$ trên đoạn $[-2;1]$ bằng 4?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 8: Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|\frac{1}{4}x^4-\frac{19}{2}x^2+30x+m-20\right|$ trên đoạn $[0;2]$ không vượt quá 20. Tổng các phần tử của S bằng

A. 210. **B.** -195. **C.** 105. **D.** 300.

Câu 9: Cho hàm số $y=\left|\frac{x^4+ax+a}{x+1}\right|$, với a là tham số thực. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[1;2]$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số a để $M\geq 2m$?

A. 10. **B.** 14. **C.** 5. **D.** 20.

Câu 10: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số thực m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|\frac{1}{4}x^4-14x^2+48x+m-30\right|$ trên đoạn $[0;2]$ không vượt quá 30. Tổng giá trị các phần tử của tập hợp S bằng bao nhiêu?

A. 120. **B.** 210. **C.** 108. **D.** 136.

Câu 11: Cho hàm số $y=\left|x^4-2x^3+x^2+a\right|$. Có bao nhiêu số thực a để $\min\limits_{[1;2]} y+\max\limits_{[1;2]} y=10$?

A. 3. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 12: Biết giá trị lớn nhất của hàm số $y=f\left(x\right)=\left|2x^3-15x+m-5\right|+9x$ trên $\left[0;3\right]$ bằng 60. Tính tổng tất cả các giá trị của tham số thực m.

A. 48. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 62.

Câu 13: Cho hàm số $f\left(x\right)=\left|x^4-2x^3+x^2+m\right|$ (m là tham số thực). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho $\min\limits_{[-1;2]} f\left(x\right)+\max\limits_{[-1;2]} f\left(x\right)=10$. Số phần tử của S là?

A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 1.

Câu 14: Cho hàm số $y=\left|x^4-2x^2+3m\right|$ với m là tham số. Biết rằng có đúng hai giá trị m_1,m_2 của m để giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên $\left[-1;2\right]$ bằng 2021. Tính giá trị $\left|m_1-m_2\right|$.

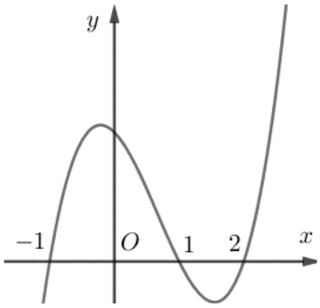
A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** $\dfrac{4052}{3}$. **C.** $\dfrac{8}{3}$. **D.** $\dfrac{4051}{3}$.

Câu 15: Cho hàm số $f\left(x\right)=x^3-3x^2+m+1$ (m là tham số thực). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m thuộc đoạn $\left[-2020;2020\right]$ sao cho $\max\limits_{[1;4]}\left|f\left(x\right)\right|\le 3\min\limits_{[1;4]}\left|f\left(x\right)\right|$. Số phần tử của S là

A. 4003. **B.** 4002. **C.** 4004. **D.** 4001.

DẠNG 2. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT – GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT HÀM ẨN, HÀM HỢP

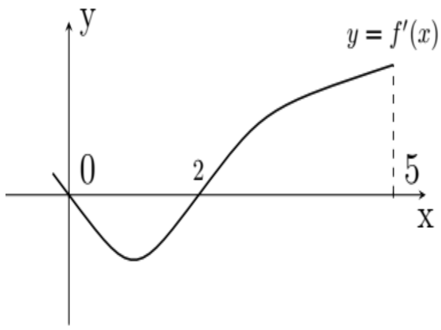
Câu 16: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, đồ thị của hàm số $y=f'\left(x\right)$ như hình vẽ.



Giá trị lớn nhất của hàm số $y=f\left(x\right)$ trên đoạn $\left[-1;2\right]$ là

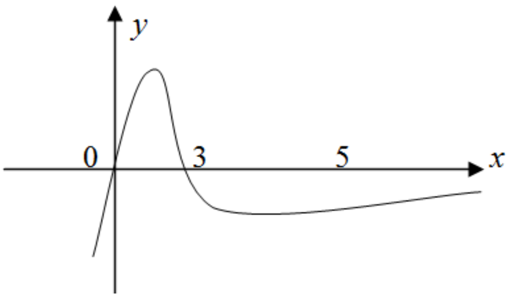
A. $f\left(1\right)$. **B.** $f\left(-1\right)$. **C.** $f\left(2\right)$. **D.** $f\left(0\right)$.

Câu 17: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm là hàm $f'(x)$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ được cho như hình vẽ. Biết rằng $f(0)+f(3)=f(2)+f(5)$. Giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của $y=f(x)$ trên đoạn $[0;5]$ lần lượt là:



A. $f(2)$; $f(5)$. **B.** $f(0)$; $f(5)$. **C.** $f(2)$; $f(0)$. **D.** $f(1)$; $f(5)$.

Câu 18: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ được cho như hình vẽ bên. Biết rằng $f(0)+f(1)-2f(3)=f(5)-f(4)$. Tìm giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của $f(x)$ trên đoạn $[0;5]$.



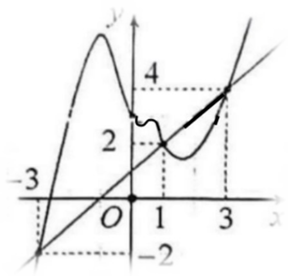
A. $m=f(5), M=f(3)$ **B.** $m=f(5), M=f(1)$
C. $m=f(0), M=f(3)$ **D.** $m=f(1), M=f(3)$

Câu 19: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $g(x)=f(4x-x^2)+\frac{1}{3}x^3-3x^2+8x+\frac{1}{3}$ trên đoạn $[1;3]$.

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	5	$\searrow$	$-\infty$

A. 15. **B.** $\frac{25}{3}$. **C.** $\frac{19}{3}$. **D.** 12.

Câu 20: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Đặt $g(x) = 2f(x) - (x+1)^2$. Mệnh đề dưới đây đúng.



A. $\max\limits_{[-3;3]} g(x) = g(3)$. **B.** $\min\limits_{[-3;3]} g(x) = g(1)$. **C.** $\max\limits_{[-3;3]} g(x) = g(0)$. **D.** $\max\limits_{[-3;3]} g(x) = g(1)$.

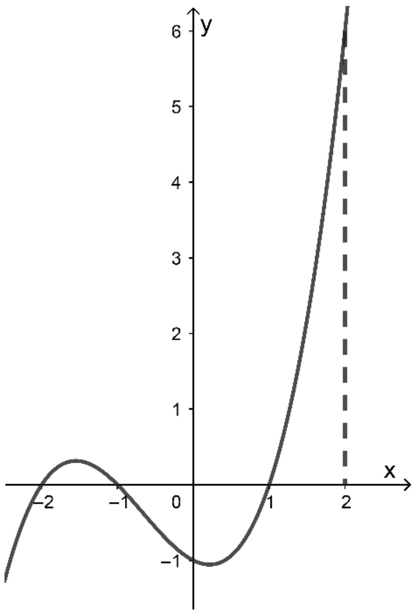
Câu 21: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên $\mathbb{R}$. Biết $f'(0) = 3$, $f'(2) = -2018$ và bảng xét dấu của $f''(x)$ như sau:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y = f(x+2017) + 2018x$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm x_0 thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(-\infty; -2017)$ **B.** $(2017; +\infty)$ **C.** $(0;2)$ **D.** $(-2017;0)$

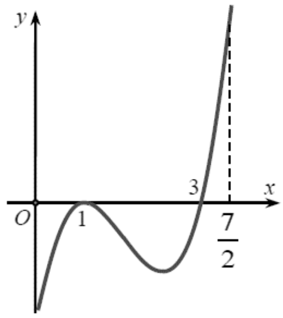
Câu 22: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ được cho như hình vẽ dưới đây:



Biết rằng $f(-1) + f(0) < f(1) + f(2)$. Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1;2]$ lần lượt là:

A. $f(1)$; $f(2)$. **B.** $f(2)$; $f(0)$. **C.** $f(0)$; $f(2)$. **D.** $f(1)$; $f(-1)$.

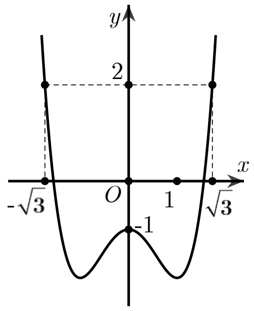
Câu 23: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $\left[0; \dfrac{7}{2}\right]$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ.



Hàm số $y=f\left(x\right)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $\left[0;\frac{7}{2}\right]$ tại điểm x_0 nào dưới đây?

A. $x_0=0$. **B.** $x_0=\frac{7}{2}$. **C.** $x_0=1$. **D.** $x_0=3$.

Câu 24: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$. Đồ thị hàm $y=f'\left(x\right)$ như hình vẽ

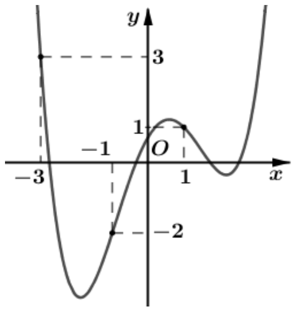


Đặt $h\left(x\right)=3f\left(x\right)-x^3+3x$. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A. $\max\limits_{[-\sqrt{3};\sqrt{3}]} h(x)=3f\left(1\right)$. **B.** $\max\limits_{[-\sqrt{3};\sqrt{3}]} h(x)=3f\left(-\sqrt{3}\right)$.

C. $\max\limits_{[-\sqrt{3};\sqrt{3}]} h(x)=3f\left(\sqrt{3}\right)$. **D.** $\max\limits_{[-\sqrt{3};\sqrt{3}]} h(x)=3f\left(0\right)$.

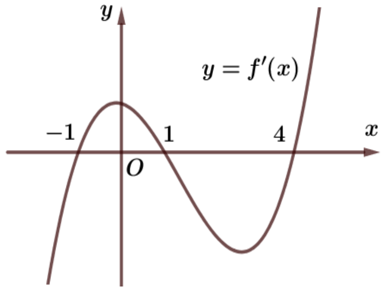
Câu 25: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị $y=f'\left(x\right)$ ở hình vẽ bên. Xét hàm số $g\left(x\right)=f\left(x\right)-\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{4}x^2+\frac{3}{2}x+2018$, mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $\min\limits_{[-3;1]} g\left(x\right)=g\left(-1\right)$. **B.** $\min\limits_{[-3;1]} g\left(x\right)=\frac{g\left(-3\right)+g\left(1\right)}{2}$.

C. $\min\limits_{[-3;1]} g\left(x\right)=g\left(-3\right)$. **D.** $\min\limits_{[-3;1]} g\left(x\right)=g\left(1\right)$.

Câu 26: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên R. Hàm số $y=f'\left(x\right)$ có đồ thị như hình sau:



Cho bốn mệnh đề sau:

1) Hàm số $y = f(x)$ có hai cực trị

2) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$

3) $f(1) > f(2) > f(4)$.

4) Trên đoạn $[-1;4]$, giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ là $f(1)$.

Số mệnh đề đúng trong bốn mệnh đề trên là:

A. 3. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 2.

Câu 27: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f(4x - x^2) + \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x + \frac{1}{3}$ trên đoạn $[1;3]$.

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	-3	↗	5	↘	$-\infty$

A. $\frac{25}{3}$. **B.** 15. **C.** $\frac{19}{3}$. **D.** 12.

Câu 28: Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f(2x) - \sin^2 x$ trên đoạn $[-1;1]$ là

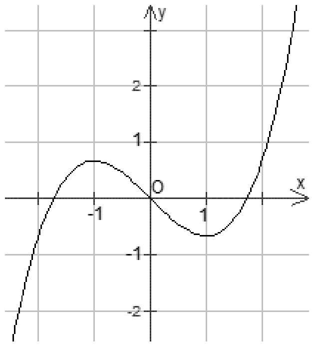
x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	↗	0	↗ ↘	0	↘ ↗	0	↗

A. $f(-1)$. **B.** $f(0)$. **C.** $f(2)$. **D.** $f(1)$.

Câu 29: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ sao cho $\max\limits_{[-1;2]} f(x)=3$. Xét hàm số $g(x)=f(3x-1)+m$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để $\max\limits_{[0;1]} g(x)=-10$.

A. 13. **B.** -7. **C.** -13. **D.** -1.

Câu 30: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm cấp 2 trên $\mathbb{R}$, hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



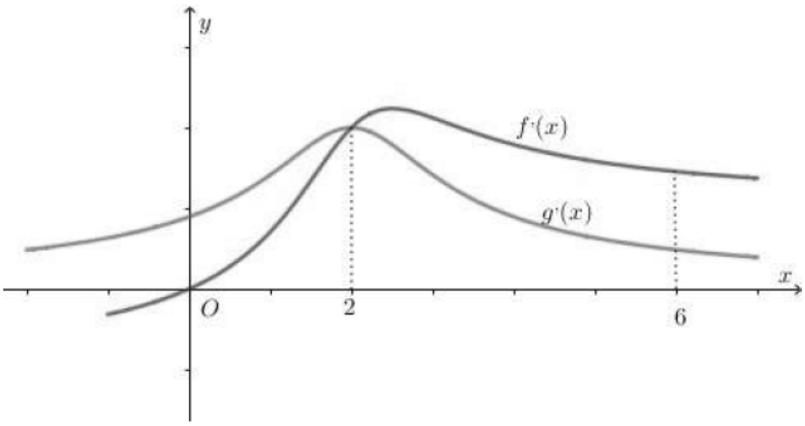
Giá trị lớn nhất của hàm số $y=f\left(\dfrac{\sin x+\sqrt{3}\cos x}{2}\right)$ trên đoạn $\left[-\dfrac{5\pi}{6};\dfrac{\pi}{6}\right]$ bằng

A. $f\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$. **B.** $f(0)$. **C.** $f\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right)$. **D.** $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$.

Câu 31: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ sao cho $\max\limits_{x\in[0;10]} f(x)=f(2)=4$. Xét hàm số $g(x)=f(x^3+x)-x^2+2x+m$. Giá trị của tham số m để $\max\limits_{x\in[0;2]} g(x)=8$ là

A. 5. **B.** 4. **C.** -1. **D.** 3.

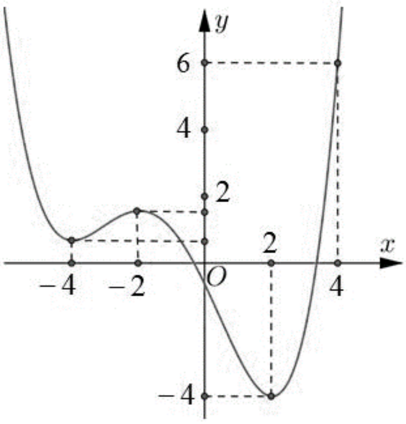
Câu 32: Cho hai hàm số $y=f(x)$, $y=g(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$, $g'(x)$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ và $g'(x)$ được cho như hình vẽ bên dưới.



Biết rằng $f(0)-f(6)<g(0)-g(6)$. Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $h(x)=f(x)-g(x)$ trên đoạn $[0;6]$ lần lượt là:

A. $h(6),h(2)$. **B.** $h(2),h(6)$. **C.** $h(0),h(2)$. **D.** $h(2),h(0)$.

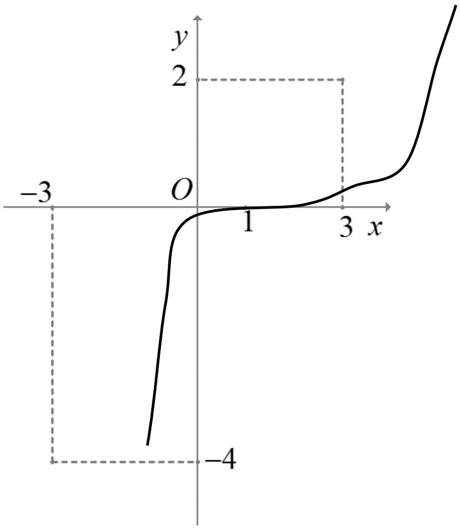
Câu 33: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị như hình vẽ



Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\left|f\left(\dfrac{8x}{x^2+1}\right)+m-1\right|$ có giá trị lớn nhất không vượt quá 2020?

A. 4029. **B.** 4035.
C. 4031. **D.** 4041.

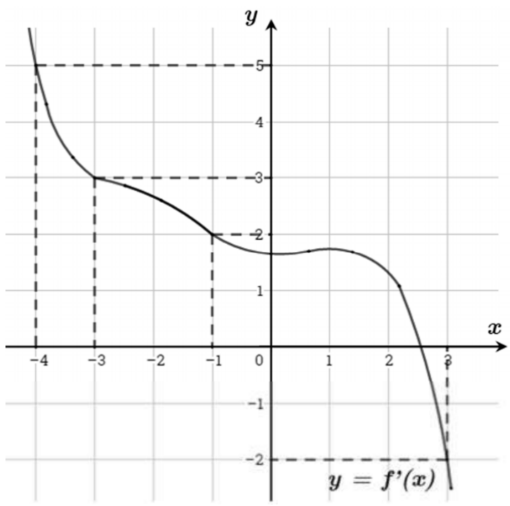
Câu 34: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị $y=f'(x)$ như hình bên. Đặt $g(x)=2f(x)-(x-1)^2$.



Khi đó $y=g(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-3;3]$ tại

A. $x=-3$. **B.** $x=3$. **C.** $x=0$. **D.** $x=1$.

Câu 35: Cho hàm số $f(x)$. Biết hàm số $f'(x)$ có đồ thị như hình dưới đây. Trên $[-4;3]$, hàm số $g(x)=2f(x)+(1-x)^2$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm



A. $x=-3$. **B.** $x=-4$. **C.** $x=3$. **D.** $x=-1$.

Câu 36: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm cấp hai trên $\mathbb{R}$. Biết $f'\left(0\right)=3, f'\left(2\right)=f'\left(-2018\right)=0$, và bảng xét dấu của $f''\left(x\right)$ như sau

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f''\left(x\right)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y=f\left(\left|x-1\right|-2018\right)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại x_0 thuộc khoảng nào sau đây?

A. $\left(-\infty;-2015\right)$. **B.** $\left(1;3\right)$. **C.** $\left(-1009;2\right)$. **D.** $\left(-2015;1\right)$.

Câu 37: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm cấp hai trên $\mathbb{R}$. Biết $f'\left(0\right)=3$, $f'\left(2\right)=-2020$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f'\left(x\right)=-\infty$ và bảng xét dấu của $f''\left(x\right)$ như hình sau:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f''\left(x\right)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y=f\left(x+2019\right)+2020x$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm x_0 thuộc khoảng nào sau đây?

A. $\left(-\infty;-2019\right)$. **B.** $\left(0;2\right)$. **C.** $\left(-2019;0\right)$. **D.** $\left(2019;+\infty\right)$.

DẠNG 3. ỨNG DỤNG GTLN-GTNN GIẢI BÀI TOÁN THỰC TẾ

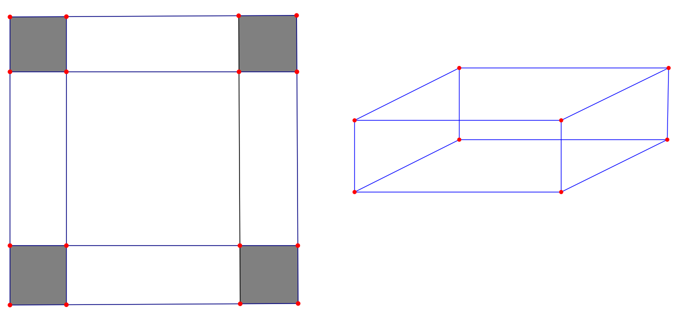
Câu 38: Cho số $a>0$. Trong số các tam giác vuông có tổng một cạnh góc vuông và cạnh huyền bằng a, tam giác có diện tích lớn nhất bằng

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}a^2$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{6}a^2$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{9}a^2$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{18}a^2$.

Câu 39: Một loại thuốc được dùng cho một bệnh nhân và nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân được giám sát bởi bác sĩ. Biết rằng nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân sau khi tiêm vào cơ thể trong t giờ được cho bởi công thức $c\left(t\right)=\dfrac{t}{t^2+1}$ $\left(mg/L\right)$. Sau khi tiêm thuốc bao lâu thì nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân cao nhất?

A. 4 giờ. **B.** 1 giờ. **C.** 3 giờ. **D.** 2 giờ.

Câu 40: Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 12 cm. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng x, rồi gập tấm nhôm lại như hình vẽ dưới đây để được một cái hộp không nắp. Tìm x để hộp nhận được có thể tích lớn nhất.

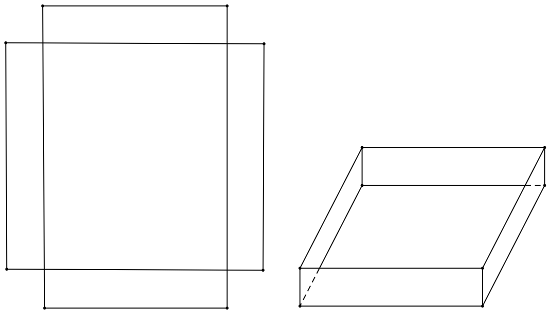


A. $x=3$ **B.** $x=2$ **C.** $x=4$ **D.** $x=6$

Câu 41: Một sợi dây có chiều dài $28m$ được cắt thành hai đoạn để làm thành một hình vuông và một hình tròn. Tính chiều dài của đoạn dây làm thành hình vuông được cắt ra sao cho tổng diện tích của hình vuông và hình tròn là nhỏ nhất?

A. $\dfrac{56}{4+\pi}$. **B.** $\dfrac{112}{4+\pi}$. **C.** $\dfrac{84}{4+\pi}$. **D.** $\dfrac{92}{4+\pi}$.

Câu 42: Cho một tấm nhôm hình chữ nhật có chiều dài bằng $10cm$ và chiều rộng bằng $8cm$. Người ta cắt bỏ ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng $x\left(cm\right)$, rồi gập tấm nhôm lại để được một cái hộp không nắp. Tìm x để hộp nhận được có thể tích lớn nhất.

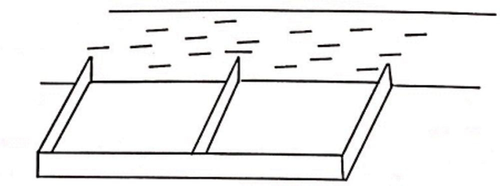


A. $x=\dfrac{8-2\sqrt{21}}{3}$ **B.** $x=\dfrac{10-2\sqrt{7}}{3}$ **C.** $x=\dfrac{9+\sqrt{21}}{9}$. **D.** $x=\dfrac{9-\sqrt{21}}{3}$

Câu 43: Ông A dự định sử dụng hết $5\,m^2$ kính để làm một bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng . Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu ?

A. $1,01\,m^3$. **B.** $0,96\,m^3$. **C.** $1,33\,m^3$. **D.** $1,51\,m^3$.

Câu 44: Một người nông dân có 15.000.000 đồng muốn làm một cái hàng rào hình chữ E dọc theo một con sông để làm một khu đất có hai phần chữ nhật để trồng rau. Đối với mặt hàng rào song song với bờ sông thì chi phí nguyên vật liệu là 60.000 đồng một mét, còn đối với ba mặt hàng rào song song nhau thì chi phí nguyên vật liệu là 50.000 đồng một mét. Tìm diện tích lớn nhất của đất rào thu được

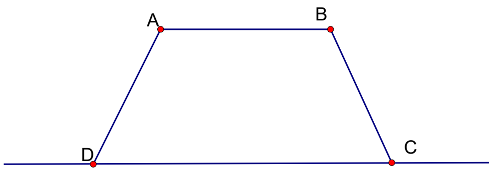


A. $3125\,m^2$. **B.** $50\,m^2$. **C.** $1250\,m^2$. **D.** $6250\,m^2$.

Câu 45: Ông Khoa muốn xây một cái bể chứa nước lớn dạng một khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng $288\,\mathrm{m}^3$. Đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng, giá thuê nhân công để xây bể là 500000 đồng/ m^2. Nếu ông Khoa biết xác định các kích thước của bể hợp lí thì chi phí thuê nhân công sẽ thấp nhất. Hỏi ông Khoa trả chi phí thấp nhất để xây dựng bể đó là bao nhiêu ?

A. 90 triệu đồng. **B.** 168 triệu đồng. **C.** 54 triệu đồng. **D.** 108 triệu đồng.

Câu 46: Một người nông dân có 3 tấm lưới thép B40, mỗi tấm dài $12\left(m\right)$ và muốn rào một mảnh vườn dọc bờ sông có dạng hình thang cân $ABCD$ như hình vẽ . Hỏi ông ta có thể rào được mảnh vườn có diện tích lớn nhất là bao nhiêu m^2 ?

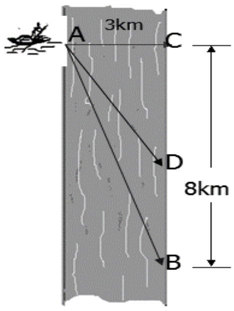


A. $100\sqrt{3}$. **B.** $106\sqrt{3}$. **C.** $108\sqrt{3}$. **D.** $120\sqrt{3}$.

Câu 47: Cho nửa đường tròn đường kính $AB = 2$ và hai điểm C, D thay đổi trên nửa đường tròn đó sao cho $ABCD$ là hình thang. Diện tích lớn nhất của hình thang $ABCD$ bằng

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{3\sqrt{3}}{4}$. **C.** 1. **D.** $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Câu 48: Một người đàn ông muốn chèo thuyền ở vị trí A tới điểm B về phía hạ lưu bờ đối diện, càng nhanh càng tốt, trên một bờ sông thẳng rộng 3 km. Anh có thể chèo thuyền của mình trực tiếp qua sông để đến C và sau đó chạy đến B, hay có thể chèo trực tiếp đến B, hoặc anh ta có thể chèo thuyền đến một điểm D giữa C và B và sau đó chạy đến B. Biết anh ấy có thể chèo thuyền 6 km/h, chạy 8 km/h và quãng đường $BC = 8\text{ km}$. Biết tốc độ của dòng nước là không đáng kể so với tốc độ chèo thuyền của người đàn ông. Tính khoảng thời gian ngắn nhất để người đàn ông đến B.



A. $\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{9}{\sqrt{7}}$. **C.** $\frac{\sqrt{73}}{6}$. **D.** $1+\frac{\sqrt{7}}{8}$.

DẠNG 4. DÙNG PHƯƠNG PHÁP HÀM SỐ ĐỂ TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA BIỂU THỨC

Câu 49: Cho ba số thực x, y, z thỏa mãn $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 1$, $x + y + z = 2$.Biết giá trị lớn nhất của biểu thức $P = xyz$ bằng $\frac{a}{b}$ với $a, b \in \mathbb{N}^*$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Giá trị của $2a + b$ bằng

A. 5. **B.** 43. **C.** 9. **D.** 6.

Câu 50: Cho $x^2 - xy + y^2 = 2$. Giá trị nhỏ nhất của $P = x^2 + xy + y^2$ bằng:

A. $\frac{2}{3}$ **B.** $\frac{1}{6}$ **C.** $\frac{1}{2}$ **D.** 2

Câu 51: Cho x, y là các số thực thỏa mãn $x + y = \sqrt{x-1} + \sqrt{2y+2}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $P = x^2 + y^2 + 2(x+1)(y+1) + 8\sqrt{4-x-y}$. Tính giá trị $M + m$

A. 42 **B.** 41 **C.** 43 **D.** 44

Câu 52: Cho x, $y > 0$ thỏa mãn $x + y = \frac{3}{2}$ và biểu thức $P = \frac{4}{x} + \frac{1}{4y}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $x^2 + y^2$.

A. $\frac{153}{100}$. **B.** $\frac{5}{4}$. **C.** $\frac{2313}{1156}$. **D.** $\frac{25}{16}$.

Câu 53: Cho $x,y>0$ và $x+y=\frac{5}{4}$ sao cho biểu thức $P=\frac{4}{x}+\frac{1}{4y}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó

A. $x^2+y^2=\frac{25}{32}$. **B.** $x^2+y^2=\frac{17}{16}$. **C.** $x^2+y^2=\frac{25}{16}$. **D.** $x^2+y^2=\frac{13}{16}$.

Câu 54: Xét các số thực dương $x,\ y,\ z$ thỏa mãn $x+y+z=4$ và $xy+yz+zx=5$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\left(x^3+y^3+z^3\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$ bằng:

A. 20. **B.** 25. **C.** 15. **D.** 35.

Câu 55: Cho x,y là các số thực dương thỏa mãn $2\left(x^2+y^2\right)+xy=\left(x+y\right)\left(xy+2\right)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=4\left(\frac{x^3}{y^3}+\frac{y^3}{x^3}\right)-9\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}\right)$.

A. $-\frac{25}{4}$. **B.** 5. **C.** $-\frac{23}{4}$. **D.** -13.

Câu 56: Cho các số thực dương x, y thỏa mãn $2x+y=\frac{5}{4}$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức $P=\frac{2}{x}+\frac{1}{4y}$.

A. $P_{\min}=\frac{34}{5}$. **B.** $P_{\min}=\frac{65}{4}$. **C.** $P_{\min}$ không tồn tại. **D.** $P_{\min}=5$.

CHƯƠNG

I ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

BÀI 3: GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT VÀ GIÁ TRỊ LỚN NHẤT CỦA HÀM SỐ

III BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM. (MỨC 9 – 10)

DẠNG 1. ĐỊNH M ĐỂ GTLN-GTNN CỦA HÀM SỐ CHỨA DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC

Dạng 1: Tìm m để $\max\limits_{[\alpha;\beta]} y=\left|f(x)+m\right|=a \quad (a>0)$.

Phương pháp:

Cách 1: Trước tiên tìm $\max\limits_{[\alpha;\beta]} f(x)=K;\qquad \min\limits_{[\alpha;\beta]} f(x)=k\ (K>k)$.

Kiểm tra $\max\left\{|m+K|,|m+k|\right\}\ge\dfrac{|m+K|+|m+k|}{2}\ge\dfrac{|m+K-m-k|}{2}=\dfrac{|K-k|}{2}$.

TH1: $\dfrac{|K-k|}{2}\le a$. Để $\max\limits_{[\alpha;\beta]} y=a\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m+k=-a\\ m+K=a\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-a-k\\ m=a-K\end{array}\right.\Rightarrow m\in\{-a-k;a-K\}$.

TH2: $\dfrac{|K-k|}{2}>a\ \Rightarrow m\in\varnothing$.

Cách 2: Xét trường hợp

TH1: $Max=|m+K|\Leftrightarrow\begin{cases}|m+K|=a\\ |m+K|\ge|m+k|\end{cases}$

TH2: $Max=|m+k|\Leftrightarrow\begin{cases}|m+k|=a\\ |m+k|\ge|m+K|\end{cases}$

Dạng 2: Tìm m để $\min\limits_{[\alpha;\beta]} y=\left|f(x)+m\right|=a \quad (a>0)$.

Phương pháp:

Trước tiên tìm $\max\limits_{[\alpha;\beta]} f(x)=K;\qquad \min\limits_{[\alpha;\beta]} f(x)=k\ (K>k)$.

Để $\min\limits_{[\alpha;\beta]} y=a\Leftrightarrow\begin{cases}m+k=a\\ m+k>0\end{cases}\vee\begin{cases}m+K=-a\\ m+K<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=a-k\\ m>-k\end{cases}\vee\begin{cases}m=-a-K\\ m<-K\end{cases}$. Vậy $m\in S_1\cup S_2$.

Dạng 3: Tìm m để $\max\limits_{[\alpha;\beta]} y=\left|f(x)+m\right|$ không vượt quá giá trị M cho trước.

Phương pháp: Trước tiên tìm $\max\limits_{[\alpha;\beta]} f(x)=K;\quad \min\limits_{[\alpha;\beta]} f(x)=k\ (K>k)$.

Để $\max\limits_{[\alpha;\beta]} y\le M \Rightarrow \begin{cases} m+k\ge -M \\ m+K\le M \end{cases} \Leftrightarrow -M-k\le m\le M-K$.

Dạng 4: Tìm m để $\min\limits_{[\alpha;\beta]} y=|f(x)+m|$ không vượt quá giá trị a cho trước.

Phương pháp: Trước tiên tìm $\max\limits_{[\alpha;\beta]} f(x)=K;\quad \min\limits_{[\alpha;\beta]} f(x)=k\ (K>k)$.

Để

$$\min\limits_{[\alpha;\beta]} y\le a \Leftrightarrow \begin{cases} m+k\le a \\ m+k\ge 0 \end{cases} \vee \begin{cases} m+K\ge -a \\ m+K\le 0 \end{cases} \vee (m+K)(m+k)<0 \Leftrightarrow \begin{cases} m\le a-k \\ m\ge -k \end{cases} \vee \begin{cases} m\ge -a-K \\ m\le -K \end{cases} \vee -K<m<-k.$$

Dang 5: Tìm m để $\max\limits_{[a;b]} y=|f(x)+m|$ đạt min.

Phương pháp:

Trước tiên tìm $\max\limits_{[a;b]} f(x)=K;\quad \min\limits_{[a;b]} f(x)=k\ (K>k)$.

Đề hỏi tìm $m \Rightarrow m=-\dfrac{K+k}{2}$. Đề hỏi tìm min của $\max\limits_{[a;b]} y \Rightarrow$ giá trị này là $\dfrac{K-k}{2}$.

Dạng 6: Tìm m để $\min\limits_{[a;b]} y=|f(x)+m|$ đạt min.

Phương pháp: Trước tiên tìm $\max\limits_{[a;b]} f(x)=K;\quad \min\limits_{[a;b]} f(x)=k\ (K>k)$.

Đề hỏi tìm $m \Rightarrow (m+K)(m+k)\le 0 \Leftrightarrow -K\le m\le -k$. Đề hỏi tìm min của $\min\limits_{[a;b]} y \Rightarrow$ giá trị này là 0.

Dạng 7: Cho hàm số $y=|f(x)+m|$.Tìm m để $\max\limits_{[a;b]} y\le h.\min\limits_{[a;b]} y\,(h>0)$ hoặc $Min+\max =$

Phương pháp: Trước tiên tìm $\max\limits_{[a;b]} f(x)=K;\quad \min\limits_{[a;b]} f(x)=k\ (K>k)$.

TH1: $|K+m|\le h|k+m| \xrightarrow[K+m \text{ cung dau } k+m]{|K+m|\ge|k+m|} m\in S_1$.

TH2: $|k+m|\le h|K+m| \xrightarrow[K+m \text{ cung dau } k+m]{|k+m|\ge|K+m|} m\in S_2$.

Vậy $m\in S_1\cup S_2$.

Dạng 8: Cho hàm số $y=|f(x)+m|$.

Phương pháp: Trước tiên tìm $\max\limits_{[a;b]} f(x)=K;\quad \min\limits_{[a;b]} f(x)=k\ (K>k)$.

BT1: Tìm m để $\min\limits_{[a;b]} y+\max\limits_{[a;b]} y=\alpha \Leftrightarrow |m+K|+|m+k|=\alpha$.

BT2: Tìm m để $\min\limits_{[a;b]} y*\max\limits_{[a;b]} y=\beta \Leftrightarrow |m+K|*|m+k|=\beta$.

Câu 1: Tìm m để giá trị lớn nhất của hàm số $y=|x^3-3x+2m-1|$ trên đoạn $[0;2]$ là nhỏ nhất. Giá trị của m thuộc khoảng nào?

A. $\left(-\frac{3}{2};-1\right)$. **B.** $\left(\frac{2}{3};2\right)$. **C.** $\left[-1;0\right]$. **D.** $\left(0;1\right)$.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $y=f\left(x\right)=x^3-3x+2m-1$ trên đoạn $\left[0;2\right]$.

Ta có $f'\left(x\right)=3x^2-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1\notin\left[0;2\right] \\ x=1 \end{array}\right.$.

Ta có $f\left(0\right)=2m-1$, $f\left(1\right)=2m-3$ và $f\left(2\right)=2m+1$

Suy ra $\underset{[0;2]}{max}\left|f\left(x\right)\right|=max\left\{\left|2m-1\right|;\left|2m-3\right|;\left|2m+1\right|\right\}=max\left\{\left|2m-3\right|;\left|2m+1\right|\right\}=P$.

Trường hợp 1: Xét $\left|2m-3\right|\geq\left|2m+1\right|\Leftrightarrow -4\left(4m-2\right)\geq 0\Leftrightarrow m\leq\frac{1}{2}$.

Khi đó $P=\left|2m-3\right|\geq 2, \forall m\leq\frac{1}{2}$. Suy ra $P_{\min}=2\Leftrightarrow m=\frac{1}{2}$.

Trường hợp 2: Xét $\left|2m-3\right|<\left|2m+1\right|\Leftrightarrow -4\left(4m-2\right)<0\Leftrightarrow m>\frac{1}{2}$.

Khi đó $P=\left|2m+1\right|>2, \forall m>\frac{1}{2}$. Suy ra $P_{\min}$ không tồn tại.

Vậy $m=\frac{1}{2}$.

Câu 2: Tính tổng tất cả các giá trị của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|x^2-2x+m\right|$ trên đoạn $\left[-1;2\right]$ bằng 5.

A. -1. **B.** 2. **C.** -2. **D.** 1.

Lời giải

Ta có $y'=\frac{2x-2}{\left|x^2-2x+m\right|}$, $y'=0\Rightarrow x=1$.

Do đó yêu cầu bài toán tương đương $\max\left\{y\left(-1\right),y\left(2\right),y\left(1\right)\right\}=5$.

$\Leftrightarrow \max\left\{\left|3+m\right|,\left|m\right|,\left|m-1\right|\right\}=5$.

+ Trường hợp $m\geq -1$, ta có $\max\left\{\left|3+m\right|,\left|m\right|,\left|m-1\right|\right\}=5\Leftrightarrow\left|3+m\right|=5\Rightarrow m=2$.

+ Trường hợp $m<-1$ ta có $\max\left\{\left|3+m\right|,\left|m\right|,\left|m-1\right|\right\}=5\Leftrightarrow\left|m-1\right|=5\Rightarrow m=-4$.

Vậy tổng các giá trị m bằng -2.

Câu 3: Cho hàm số $y=\left|x^2+2x+a-4\right|$ (a là tham số). Tìm a để giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $\left[-2;1\right]$ đạt giá trị nhỏ nhất

A. $a=1$. **B.** $a=3$. **C.** $a=2$. **D.** $a=5$.

Lời giải

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên đoạn $\left[-2;1\right]$.

Ta có: $y=\left|x^2+2x+a-4\right|=\left|(x+1)^2+a-5\right|$ $(*)$

Đặt $t=(x+1)^2$, $x\in[-2;1]\Rightarrow a\in[0;4]$.

Lúc đó hàm số trở thành: $f(t)=|t+a-5|$ với $t\in[0;4]$.

Nên $\max\limits_{x\in[-2;1]} y=\max\limits_{t\in[0;4]} f(t)=\max\limits_{t\in[0;4]}\{f(0);f(4)\}=\max\limits_{t\in[0;4]}\{|a-5|;|a-1|\}$

$\geq\dfrac{|a-1|+|a-5|}{2}\geq\dfrac{|a-1+5-a|}{2}=2$

Đẳng thức xảy ra khi $|a-1|=|a-5|=2\Leftrightarrow a=3$.

Do đó giá trị nhỏ nhất của $\max\limits_{t\in[0;4]} f(t)$ là 2 khi $a=3$.

Câu 4: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|\dfrac{x^2+mx+m}{x+1}\right|$ trên $[1;2]$ bằng 2. Số phần tử của tập S

A. 3. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Xét $y=\dfrac{x^2+mx+m}{x+1}$. Ta có: $f'(x)=\dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}$, $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\notin[1;2]\\x=-2\notin[1;2]\end{array}\right.$.

Mà $f(1)=\dfrac{2m+1}{2}, \mathrm{f}(2)=\dfrac{3m+4}{3}\Rightarrow\max\limits_{x\in[1;2]} y=\left\{\left|\dfrac{2m+1}{2}\right|;\left|\dfrac{3m+4}{3}\right|\right\}$.

Trường hợp 1: $\max\limits_{x\in[1;2]} y=\left|\dfrac{2m+1}{2}\right|=2\Rightarrow\left[\begin{array}{l}m=\dfrac{3}{2}\\m=-\dfrac{5}{2}\end{array}\right.$.

• Với $m=\dfrac{3}{2}\Rightarrow\left|\dfrac{3m+4}{3}\right|=\dfrac{17}{6}>2$

• Với $m=-\dfrac{5}{2}\Rightarrow\left|\dfrac{3m+4}{3}\right|=\dfrac{7}{6}<2$

Trường hợp 2: $\max\limits_{x\in[1;2]} y=\left|\dfrac{3m+4}{3}\right|=2\Rightarrow\left[\begin{array}{l}3m+4=6\\3m+4=-6\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=\dfrac{2}{3}\\m=-\dfrac{10}{3}\end{array}\right.$.

• Với $m=\dfrac{2}{3}\Rightarrow\left|\dfrac{2m+1}{2}\right|=\dfrac{7}{6}<2$

• Với $m=-\frac{10}{3}\Rightarrow\left|\frac{2m+1}{2}\right|=\frac{17}{6}>2$

Vậy có 2 giá trị của m thỏa mãn.

Câu 5: Xét hàm số $f\left(x\right)=\left|x^2+ax+b\right|$, với a, b là tham số. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số trên $\left[-1;3\right]$. Khi M nhận giá trị nhỏ nhất có thể được, tính $a+2b$.

A. 2. **B.** 4. **C.** -4. **D.** 3.

Lời giải

Xét hàm số $f\left(x\right)=\left|x^2+ax+b\right|$. Theo đề bài, M là giá trị lớn nhất của hàm số trên $\left[-1;3\right]$.

Suy ra $\begin{cases} M\ge f\left(-1\right)\\ M\ge f\left(3\right)\\ M\ge f\left(1\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} M\ge\left|1-a+b\right|\\ M\ge\left|9+3a+b\right|\\ M\ge\left|1+a+b\right|\end{cases}\Rightarrow 4M\ge\left|1-a+b\right|+\left|9+3a+b\right|+2\left|-1-a-b\right|$

$\ge\left|1-a+b+9+3a+b+2(-1-a-b)\right|\Rightarrow 4M\ge 8\Rightarrow M\ge 2$.

Nếu $M=2$ thì điều kiện cần là $\left|1-a+b\right|=\left|9+3a+b\right|=\left|-1-a-b\right|=2$ và $1-a+b$, $9+3a+b$, $-1-a-b$ cùng dấu $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}1-a+b=9+3a+b=-1-a-b=2\\1-a+b=9+3a+b=-1-a-b=-2\end{array}\right.\Leftrightarrow\begin{cases}a=-2\\b=-1\end{cases}$.

Ngược lại, khi $\begin{cases}a=-2\\b=-1\end{cases}$ ta có, hàm số $f\left(x\right)=\left|x^2-2x-1\right|$ trên $\left[-1;3\right]$.

Xét hàm số $g\left(x\right)=x^2-2x-1$ xác định và liên tục trên $\left[-1;3\right]$.

$g'\left(x\right)=2x-2$; $g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow x=1\in\left[-1;3\right]$

M là giá trị lớn nhất của hàm số $f\left(x\right)$ trên $\left[-1;3\right]\Rightarrow M=\max\left\{\left|g\left(-1\right)\right|;\left|g\left(3\right)\right|;\left|g\left(1\right)\right|\right\}=2$.

Vậy $\begin{cases}a=-2\\b=-1\end{cases}$. Ta có: $a+2b=-4$.

Câu 6: Cho hàm số $y=\left|x^3+x^2+\left(m^2+1\right)x+27\right|$. Giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $\left[-3;-1\right]$ có giá trị nhỏ nhất bằng

A. 26. **B.** 18. **C.** 28. **D.** 16.

Lời giải

Chọn B

Xét $u=x^3+x^2+\left(m^2+1\right)x+27$ trên đoạn $\left[-3;-1\right]$ ta có: $u'=3x^2+2x+m^2+1>0,\ \forall x$.

Do đó $A=\max\limits_{[-3;-1]}u=u\left(-1\right)=26-m^2$; $a=\min\limits_{[-3;-1]}u=u\left(-3\right)=6-3m^2$.

Do $\mathrm{M}=\max\limits_{[-3;-1]}y=\max\left\{\left|26-m^2\right|,\left|6-3m^2\right|\right\}$ và $4M\ge 3\left|26-m^2\right|+\left|6-3m^2\right|\ge 72$.

Vậy $M\ge 18$.

Dấu bằng xảy ra khi $\left|26-m^2\right|=\left|6-3m^2\right|=18\Leftrightarrow m=\pm 2\sqrt{2}$.

Câu 7: Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|x^2+2x+m-4\right|$ trên đoạn $[-2;1]$ bằng 4?

A. 1. **<u>B</u>.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

$f(x)=x^2+2x+m-4$ có $f'(x)=2x+2$, $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=-1$. Do đó

$\max\limits_{[-2;1]}\left|x^2+2x+m-4\right|=\max\left\{|m-1|;|m-4|;|m-5|\right\}$.

Ta thấy $m-5<m-4<m-1$ với mọi $m\in\mathbb{R}$, suy ra $\max\limits_{[-2;1]} y$ chỉ có thể là $|m-5|$ hoặc $|m-1|$.

Nếu $\max\limits_{[-2;1]} y=|m-5|$ thì $\begin{cases}|m-5|=4\\|m-5|\ge|m-1|\end{cases}\Leftrightarrow m=1$.

Nếu $\max\limits_{[-2;1]} y=|m-1|$ thì $\begin{cases}|m-1|=4\\|m-1|\ge|m-5|\end{cases}\Leftrightarrow m=5$.

Vậy $m\in\{1;\,5\}$.

Câu 8: Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|\dfrac{1}{4}x^4-\dfrac{19}{2}x^2+30x+m-20\right|$ trên đoạn $[0;2]$ không vượt quá 20. Tổng các phần tử của S bằng

A. 210. **B.** -195. **<u>C</u>.** 105. **D.** 300.

Lời giải

Xét hàm số $g(x)=\dfrac{1}{4}x^4-\dfrac{19}{2}x^2+30x+m-20$ trên đoạn $[0;2]$

Ta có $g'(x)=x^3-19x+30$; $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-5\notin[0;2]\\x=2\\x=3\notin[0;2]\end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-5	0		2		3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$				$g(0)$	$\nearrow$	$g(2)$				

$g(0)=m-20$; $g(2)=m+6$.

Để $\max\limits_{[0;2]}|g(x)|\le 20$ thì $\begin{cases}g(0)\le 20\\g(2)\le 20\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|m-20|\le 20\\|m+6|\le 20\end{cases}\Leftrightarrow 0\le m\le 14$.

Mà $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{0;1;2;...;14\}$.

Vậy tổng các phần tử của S là 105.

Câu 9: Cho hàm số $y=\left|\dfrac{x^4+ax+a}{x+1}\right|$, với a là tham số thực. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[1;2]$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số a để $M\ge 2m$?

A. 10. **B.** 14. **C.** 5. **D.** 20.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $y=\dfrac{x^4+ax+a}{x+1}=\dfrac{x^4}{x+1}+a$.

Ta có $y'=\dfrac{3x^4+4x^3}{(x+1)^2}\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{4}{3} \\ x=0 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\dfrac{4}{3}$		-1		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗		↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘		↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra $M=\max\left\{\left|a+\dfrac{1}{2}\right|;\left|a+\dfrac{16}{3}\right|\right\}$ và $m=\min\left\{\left|a+\dfrac{1}{2}\right|;\left|a+\dfrac{16}{3}\right|\right\}$.

Trường hợp 1. $a+\dfrac{1}{2}\ge 0\Leftrightarrow a\ge -\dfrac{1}{2}\Rightarrow \begin{cases} M=\left|a+\dfrac{16}{3}\right|=a+\dfrac{16}{3} \\ m=\left|a+\dfrac{1}{2}\right|=a+\dfrac{1}{2} \end{cases}$.

Khi đó $M\ge 2m\Leftrightarrow a+\dfrac{16}{3}\ge 2\left(a+\dfrac{1}{2}\right)\Leftrightarrow a\le \dfrac{13}{3}$.

Kết hợp điều kiện, ta có $-\dfrac{1}{2}\le a\le \dfrac{13}{3}\Rightarrow$ có 5 giá trị nguyên thỏa mãn điều kiện.

Trường hợp 2. $a+\dfrac{16}{3}\le 0\Leftrightarrow a\le -\dfrac{16}{3}\Rightarrow \begin{cases} M=\left|a+\dfrac{1}{2}\right|=-a-\dfrac{1}{2} \\ m=\left|a+\dfrac{16}{3}\right|=-a-\dfrac{16}{3} \end{cases}$.

$M\ge 2m\Leftrightarrow -a-\dfrac{1}{2}\ge 2\left(-a-\dfrac{16}{3}\right)\Leftrightarrow a\ge -\dfrac{61}{6}$.

Kết hợp điều kiện ta có $-\dfrac{61}{6}\le a\le -\dfrac{16}{3}$. Suy ra có 5 giá trị nguyên của a thỏa mãn.

Trường hợp 3. $\begin{cases} a+\dfrac{1}{2}<0 \\ a+\dfrac{16}{3}>0 \end{cases} \Leftrightarrow -\dfrac{16}{3}<a<-\dfrac{1}{2}$.

Nếu $\left|a+\dfrac{1}{2}\right|>\left|a+\dfrac{16}{3}\right| \Leftrightarrow -a-\dfrac{1}{2}>a+\dfrac{16}{3} \Leftrightarrow a<-\dfrac{35}{12}$ thì

$$\begin{cases} M=-a-\dfrac{1}{2} \\ m=a+\dfrac{16}{3} \end{cases} \Rightarrow M\ge 2m \Leftrightarrow -a-\dfrac{1}{2}\ge 2\left(a+\dfrac{16}{3}\right) \Leftrightarrow a\le -\dfrac{67}{18}.$$

Kết hợp điều kiện, ta có $-\dfrac{16}{3}<a\le -\dfrac{67}{18}$. Suy ra có 2 giá trị nguyên của a thỏa mãn điều kiện.

Nếu $\left|a+\dfrac{1}{2}\right|\le\left|a+\dfrac{16}{3}\right| \Leftrightarrow -a-\dfrac{1}{2}\le a+\dfrac{16}{3} \Leftrightarrow a\ge -\dfrac{35}{12}$ thì

$$\begin{cases} M=a+\dfrac{16}{3} \\ m=-a-\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow M\ge 2m \Leftrightarrow a+\dfrac{16}{3}\ge 2\left(-a-\dfrac{1}{2}\right) \Leftrightarrow a\ge -\dfrac{19}{9}.$$

Kết hợp điều kiện, ta có $-\dfrac{19}{9}\le a<-\dfrac{1}{2}$. Suy ra có 2 giá trị nguyên của a thỏa mãn điều kiện.

Vậy có 14 giá trị nguyên của a thỏa mãn điều kiện.

Câu 10: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số thực m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|\dfrac{1}{4}x^4-14x^2+48x+m-30\right|$ trên đoạn $[0;2]$ không vượt quá 30. Tổng giá trị các phần tử của tập hợp S bằng bao nhiêu?

A. 120. **B.** 210. **C.** 108. **D.** 136.

Lời giải

Chọn D

Đặt $f(x)=\dfrac{1}{4}x^4-14x^2+48x+m-30$ là hàm số xác định và liên tục trên $[0;2]$.

Với mọi $x\in[0;2]$ ta có $f'(x)=0 \Leftrightarrow x^3-28x+48=0 \Leftrightarrow x=2$.

Suy ra $\max\limits_{[0;2]}|f(x)|=\max\{|f(0)|;|f(2)|\}$.

Theo đề $\max\limits_{[0;2]}|f(x)|\le 30 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} |m-30|\le 30 \\ |m+14|\le|m-30| \end{cases} \\ \begin{cases} |m+14|\le 30 \\ |m-30|\le|m+14| \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} |m-30|\le 30 \\ |m+14|\le 30 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -30\le m-30\le 30 \\ -30\le m+14\le 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0\le m\le 60 \\ -44\le m\le 16 \end{cases} \Leftrightarrow 0\le m\le 16.$$

Do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in S = \{0;1;2;...;16\}$. Vậy tổng tất cả 17 giá trị trong tập S là 136.

Câu 11: Cho hàm số $y = \left|x^4 - 2x^3 + x^2 + a\right|$. Có bao nhiêu số thực a để $\min\limits_{[1;2]} y + \max\limits_{[1;2]} y = 10$?

A. 3. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải.

Chọn C.

Đặt $y = \left|x^4 - 2x^3 + x^2 + a\right| = \left|f(x)\right|$.

Xét hàm số $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 + a$

Khi đó $f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2x = 2x(2x^2 - 3x + 1) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{0;\frac{1}{2};1\right\}$.

$\Rightarrow f'(x) \geq 0, \forall x \in [1;2]$ và $f(1) = a; f(2) = a + 4$

Ta có $\forall x \in [1;2]$ thì $\begin{cases} \max y \in \{|a|,|a+4|\} \\ \min y \in \{|a|,0,|a+4|\} \end{cases}$.

Xét các trường hợp

+ $a \geq 0 \Rightarrow \max y = a + 4; \min y = a \Rightarrow 2a + 4 = 10 \Rightarrow a = 3$, nhận.

+ $a \leq -4 \Rightarrow \max y = -a; \min y = -a - 4 \Rightarrow -a - 4 - a = 10 \Rightarrow a = -7$, nhận.

+ $\begin{cases} a < 0 \\ a + 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -4 < a < 0 \Rightarrow \min y = 0; \max y \in \{a+4; -a\}$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} a + 4 = 10 \\ -a = 10 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = 6 \\ a = -10 \end{array}\right.$.

Vậy tồn tại hai giá trị a thỏa mãn.

Câu 12: Biết giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x) = \left|2x^3 - 15x + m - 5\right| + 9x$ trên $[0;3]$ bằng 60. Tính tổng tất cả các giá trị của tham số thực m.

A. 48. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 62.

Lời giải

Chọn C

Có $\max\limits_{[0;3]} f(x) = 60 \Leftrightarrow f(x) \leq 60, \forall x \in [0;3]$ và $\exists x_0 \in [0;3]$ sao cho $f(x_0) = 60$.

Có $f(x) \leq 60 \Leftrightarrow \left|2x^3 - 15x + m - 5\right| + 9x \leq 60 \Leftrightarrow \left|2x^3 - 15x + m - 5\right| \leq 60 - 9x$

$\Leftrightarrow 9x - 60 \leq 2x^3 - 15x + m - 5 \leq 60 - 9x \Leftrightarrow -2x^3 + 24x - 55 \leq m \leq -2x^3 + 6x + 65, \forall x \in [0;3]$.

Có $-2x^3 + 6x + 65 \geq 29, \forall x \in [0;3]$ nên $m \leq -2x^3 + 6x + 65, \forall x \in [0;3] \Leftrightarrow m \leq 29$.

Tương tự $-2x^3 + 24x - 55 \leq -23$ nên $-2x^3 + 24x - 55 \leq m, \forall x \in [0;3] \Leftrightarrow m \geq -23$.

Vậy $-23 \le m \le 29$ thì $f(x) \le 60, \forall x \in [0;3]$.

Để $\exists x_0 \in [0;3]$ sao cho $f(x_0) = 60$ thì $\left[\begin{array}{l} -2x^3 + 24x - 55 = m \\ -2x^3 + 6x + 65 = m \end{array}\right.$ có nghiệm trên $[0;3]$.

Hay $\left[\begin{array}{l} m \ge 29 \\ m \le -23 \end{array}\right.$. Vậy $\left[\begin{array}{l} m = 29 \\ m = -23 \end{array}\right.$ thì $\max\limits_{[0;3]} f(x) = 60$.

Khi đó tổng các giá trị của m là $29 - 23 = 6$.

Câu 13: Cho hàm số $f(x) = \left|x^4 - 2x^3 + x^2 + m\right|$ (m là tham số thực). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho $\min\limits_{[-1;2]} f(x) + \max\limits_{[-1;2]} f(x) = 10$. Số phần tử của S là?

A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Đặt $g(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 + m \Rightarrow g'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \dfrac{1}{2} \\ x = 1 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên của hàm $g(x)$

x	-1		0		$\frac{1}{2}$		1		2
$g'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	
$g(x)$	$m+4$	↘	m	↗	$m+\frac{1}{16}$	↘	m	↗	$m+4$

Dựa vào bảng biến thiên của $g(x)$ ta suy ra bảng biến thiên của

$f(x) = |g(x)| = \left|x^4 - 2x^3 + x^2 + m\right|$. Ta có các trường hợp sau:

Trường hợp 1: $m \ge 0$. Bảng biến thiên của $f(x) = |g(x)| = \left|x^4 - 2x^3 + x^2 + m\right|$

x	-1		0		$\frac{1}{2}$		1		2
$f(x)$	$m+4$	↘	m	↗	$m+\frac{1}{16}$	↘	m	↗	$m+4$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\min\limits_{[-1;2]} f(x) + \max\limits_{[-1;2]} f(x) = 10 \Leftrightarrow m + m + 4 = 10 \Leftrightarrow m = 3$

Trường hợp 2: $m < 0 < m + \frac{1}{16} \Leftrightarrow -\frac{1}{16} < m < 0$. Bảng biến thiên:

x	-1				0				$\frac{1}{2}$				1				2
$f(x)$	$m+4$	↘	0	↗	$-m$	↘	0	↗	$m+\frac{1}{16}$	↘	0	↗	$-m$	↘	0	↗	$m+4$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\min\limits_{[-1;2]} f(x) + \max\limits_{[-1;2]} f(x) = 10 \Leftrightarrow 0 + m + 4 = 10 \Leftrightarrow m = 6$

Trường hợp 3: $m + \frac{1}{16} = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{16}$. Tương tự ta có:

$\min\limits_{[-1;2]} f(x) + \max\limits_{[-1;2]} f(x) = 10 \Leftrightarrow 0 + m + 4 = 10 \Leftrightarrow m = 6$

Trường hợp 4: $m + \frac{1}{16} < 0 < m + 4 \Leftrightarrow -4 < m < -\frac{1}{16}$. Bảng biến thiên:

x	-1				0		$\frac{1}{2}$		1				2
$f(x)$	$m+4$	↘	0	↗	$-m$	↘	$-m-\frac{1}{16}$	↗	$-m$	↘	0	↗	$m+4$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\left[\begin{array}{l} \min\limits_{[-1;2]} f(x) + \max\limits_{[-1;2]} f(x) = 10 \\ \min\limits_{[-1;2]} f(x) + \max\limits_{[-1;2]} f(x) = 10 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 + m + 4 = 10 \\ 0 + (-m) = 10 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 6 \\ m = -10 \end{array}\right.$

Trường hợp 5: $m + 4 = 0 \Leftrightarrow m = -4$. Ta có:

$\min\limits_{[-1;2]} f(x) + \max\limits_{[-1;2]} f(x) = 10 \Leftrightarrow 0 - m = 10 \Leftrightarrow m = -10$

Trường hợp 6: $m + 4 < 0 \Leftrightarrow m < -4$. Ta có:

$\min\limits_{[-1;2]} f(x) + \max\limits_{[-1;2]} f(x) = 10 \Leftrightarrow -m - m - 4 = 10 \Leftrightarrow m = -7$

Vậy $m \in \{-7; 3\}$.

Câu 14: Cho hàm số $y = \left|x^4 - 2x^2 + 3m\right|$ với m là tham số. Biết rằng có đúng hai giá trị m_1, m_2 của m để giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên $[-1;2]$ bằng 2021. Tính giá trị $\left|m_1 - m_2\right|$.

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{4052}{3}$. **C.** $\frac{8}{3}$. **D.** $\frac{4051}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $f(x)=x^4-2x^2+3m$, ta có $f'(x)=4x^3-4x=4x(x^2-1)$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 1 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên của hàm số trên $[-1;2]$:

x	-1		0		1		2
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$3m-1$	↗	$3m$	↘	$3m-1$	↗	$3m+8$

Vì $\min\limits_{[-1;2]} y=2021 \Rightarrow$ phương trình $f(x)=0$ không có nghiệm thuộc $[-1;2]$.

Trường hợp 1 : $3m-1>0 \Leftrightarrow m>\frac{1}{3}$. Ta có $\min\limits_{[-1;2]} y=|3m-1|=3m-1=2021 \Leftrightarrow m=\frac{2022}{3}$

Trường hợp 2 : $3m+8<0 \Leftrightarrow m<-\frac{8}{3}$. Ta có $\min\limits_{[-1;2]} y=|3m+8|=-3m-8=2021$

$\Leftrightarrow m=-\frac{2029}{3}$.

Vậy $|m_1-m_2|=\left|\frac{2022}{3}+\frac{2029}{3}\right|=\frac{4051}{3}$.

Câu 15: Cho hàm số $f(x)=x^3-3x^2+m+1$ (m là tham số thực). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-2020;2020]$ sao cho $\max\limits_{[1;4]}|f(x)|\le 3\min\limits_{[1;4]}|f(x)|$. Số phần tử của S là

A. 4003. **B.** 4002. **C.** 4004. **D.** 4001.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $y=f(x)=x^3-3x^2+m+1 \Rightarrow y'=f'(x)=3x^2-6x$.

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-6x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0(l) \\ x=2 \end{array}\right.$.

$f(1)=m-1;\ f(2)=m-3;\ f(4)=17+m$.

$\max\limits_{[1;4]} f(x)=m+17;\ \min\limits_{[1;4]} f(x)=m-3$.

+Nếu $m-3\ge 0 \Leftrightarrow m\ge 3$ thì $\max\limits_{[1;4]}|f(x)| = m+17$, $\min\limits_{[1;4]}|f(x)| = m-3$. Khi đó:

$\max\limits_{[1;4]}|f(x)| \le 3\min\limits_{[1;4]}|f(x)| \Leftrightarrow 17+m \le 3(m-3) \Leftrightarrow m\ge 13$.

+Nếu $m+17\le 0 \Leftrightarrow m\le -17$ thì $\max\limits_{[1;4]}|f(x)| = -m+3$, $\min\limits_{[1;4]}|f(x)| = -17-m$.

Khi đó: $\max\limits_{[1;4]}|f(x)| \le 3\min\limits_{[1;4]}|f(x)| \Leftrightarrow -m+3 \le 3(-17-m) \Leftrightarrow m\le -27$.

+Nếu $(m-3)(m+17)<0 \Leftrightarrow -17<m<3$ thì

$\max\limits_{[1;4]}|f(x)| = \max\{|m+17|,|m-3|\} = \max\{m+17, 3-m\} > 0; \min\limits_{[1;4]}|f(x)| = 0$.

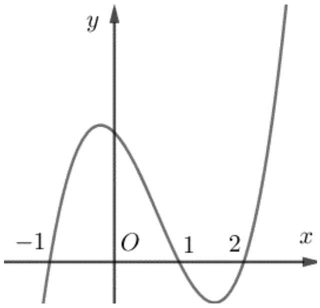
Khi đó, không thỏa điều kiện $\max\limits_{[1;4]}|f(x)| \le 3\min\limits_{[1;4]}|f(x)|$.

Do đó: $\left[\begin{array}{l} m\le -27 \\ m\ge 13 \end{array}\right.$ kết hợp với $m\in[-2020;2020]$ ta có $m\in[-2020;-27]\cup[13;2020]$

Vậy 4002 giá trị nguyên của m cần tìm.

DẠNG 2. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT – GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT HÀM ẨN, HÀM HỢP

Câu 16: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ.



Giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[-1;2]$ là

A. $f(1)$. **B.** $f(-1)$. **C.** $f(2)$. **D.** $f(0)$.

Lời giải

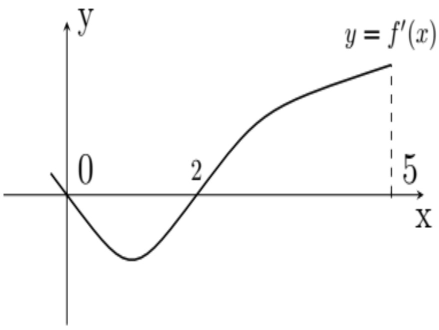
$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1 \\ x=2 \end{array}\right..$$

Từ đồ thị hàm $y=f'(x)$ ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	$f(-1)$	↗	$f(1)$	↘	$f(2)$	↗	$+\infty$

Từ đó suy ra giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-1;2]$ là $f(1)$.

Câu 17: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm là hàm $f'(x)$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ được cho như hình vẽ. Biết rằng $f(0)+f(3)=f(2)+f(5)$. Giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của $y=f(x)$ trên đoạn $[0;5]$ lần lượt là:



A. $f(2)$; $f(5)$. **B.** $f(0)$; $f(5)$. **C.** $f(2)$; $f(0)$. **D.** $f(1)$; $f(5)$.

Lời giải

Dựa vào đồ thị hàm số $f'(x)$ ta có bảng biến thiên.

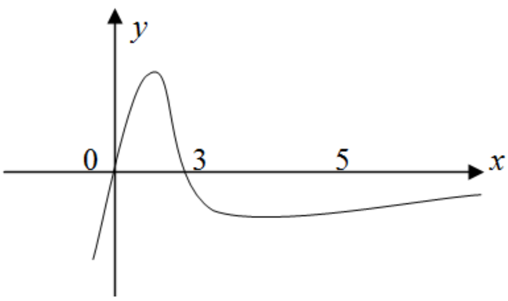
x	0		2		5
f'	0		0		
f	$f(0)$	↘	$f(2)$	↗	$f(5)$

Khi đó: $\begin{cases} \min\limits_{[0;5]} f(x)=f(2) \\ f(3)>f(2) \end{cases}$,

mà $f(0)+f(3)=f(2)+f(5) \Rightarrow f(0)+f(2)<f(2)+f(5) \Rightarrow f(0)<f(5)$.

Vậy giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của $y=f(x)$ trên đoạn $[0;5]$ lần lượt là: $f(2)$; $f(5)$.

Câu 18: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ được cho như hình vẽ bên. Biết rằng $f(0)+f(1)-2f(3)=f(5)-f(4)$. Tìm giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của $f(x)$ trên đoạn $[0;5]$.



A. $m=f(5), M=f(3)$ **B.** $m=f(5), M=f(1)$

C. $m=f(0), M=f(3)$ **D.** $m=f(1), M=f(3)$

Lời giải

Chọn A

Từ đồ thị ta có bảng biến thiên của $f(x)$ trên đoạn $[0;5]$

x	0		3		5
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$f(0)$	$\nearrow$	$f(3)$	$\searrow$	$f(5)$

$\Rightarrow M = f(3)$ và $f(1) < f(3), f(4) < f(3)$

$f(5) - f(0) = f(1) - f(3) + f(4) - f(3) < 0 \Rightarrow f(5) < f(0) \Rightarrow m = f(5)$.

Câu 19: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f(4x - x^2) + \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x + \frac{1}{3}$ trên đoạn $[1;3]$.

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	5	$\searrow$	$-\infty$

A. 15. **B.** $\frac{25}{3}$. **C.** $\frac{19}{3}$. **D.** 12.

Lời giải

$g'(x) = (4 - 2x) f'(4x - x^2) + x^2 - 6x + 8 = (2 - x)\left[2f'(4x - x^2) + 4 - x\right]$.

Với $x \in [1;3]$ thì $4 - x > 0$; $3 \le 4x - x^2 \le 4$ nên $f'(4x - x^2) > 0$.

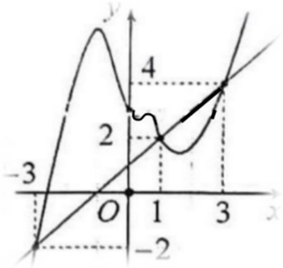
Suy ra $2f'(4x - x^2) + 4 - x > 0$, $\forall x \in [1;3]$.

Bảng biến thiên

x	1		2		3
g'		$+$	0	$-$	
g	$g(1)$	$\nearrow$	$g(2)$	$\searrow$	$g(3)$

Suy ra $\max\limits_{[1;3]} g(x) = g(2) = f(4) + 7 = 12$.

Câu 20: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Đặt $g(x) = 2f(x) - (x+1)^2$. Mệnh đề dưới đây đúng.



A. $\max\limits_{[-3;3]} g(x) = g(3)$. **B.** $\min\limits_{[-3;3]} g(x) = g(1)$. **C.** $\max\limits_{[-3;3]} g(x) = g(0)$. **D.** $\max\limits_{[-3;3]} g(x) = g(1)$.

Lời giải

Chọn D

$g(x) = 2f(x) - (x+1)^2 \Rightarrow g'(x) = 2f'(x) - 2(x+1)$

Dựa vào đồ thị ta thấy

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x+1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=1 \\ x=3 \end{array}\right.$$

Và

với $x \in (-\infty;-3): f'(x) < x+1 \Rightarrow g'(x) < 0$

với $x \in (-3;1): f'(x) > x+1 \Rightarrow g'(x) > 0$,

với $x \in (1;3): f'(x) < x+1 \Rightarrow g'(x) < 0$

với $x \in (3;+\infty): f'(x) > x+1 \Rightarrow g'(x) > 0$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-3		1		3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	**0**	$+$	**0**	$-$	**0**	$+$	
$g(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Dựa vào bảng biến thiên suy ra $\max\limits_{[-3;3]} g(x) = g(1)$.

Câu 21: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên $\mathbb{R}$. Biết $f'(0) = 3$, $f'(2) = -2018$ và bảng xét dấu của $f''(x)$ như sau:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y = f(x+2017) + 2018x$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm x_0 thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(-\infty;-2017)$ **B.** $(2017;+\infty)$ **C.** $(0;2)$ **D.** $(-2017;0)$

Lời giải

Dựa vào bảng xét dấu của $f''(x)$ ta có bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	
$f'(x)$		$\nearrow$	3	$\searrow$	-2018	$\nearrow$	

Đặt $t = x + 2017$.

Ta có $y = f(x+2017) + 2018x = f(t) + 2018t - 2017.2018 = g(t)$.

$g'(t) = f'(t) + 2018$.

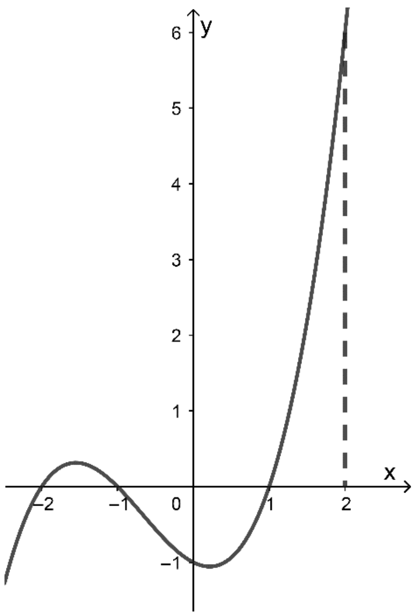
Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ suy ra phương trình $g'(t)$ có một nghiệm đơn $\alpha \in (-\infty;0)$ và một nghiệm kép $t = 2$.

Ta có bảng biến thiên $g(t)$

Hàm số $g(t)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $t_0 = \alpha \in (-\infty;0)$.

Suy ra hàm số $y = f(x+2017) + 2018x$ đạt giá trị nhỏ nhất tại x_0 mà $x_0 + 2017 \in (-\infty;0) \Leftrightarrow x_0 \in (-\infty;-2017)$.

Câu 22: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ được cho như hình vẽ dưới đây:



Biết rằng $f(-1) + f(0) < f(1) + f(2)$. Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1;2]$ lần lượt là:

A. $f(1)$; $f(2)$. **B.** $f(2)$; $f(0)$. **C.** $f(0)$; $f(2)$. **D.** $f(1)$; $f(-1)$.

Lời giải

Từ đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1;2]$ như sau

x	-1		0		1		2
y'			$-$		0	$+$	
y	$f(-1)$	$\searrow$	$f(0)$	$\searrow$	$f(1)$	$\nearrow$	$f(2)$

Nhận thấy

□ $\min\limits_{[-1;2]} f(x) = f(1)$.

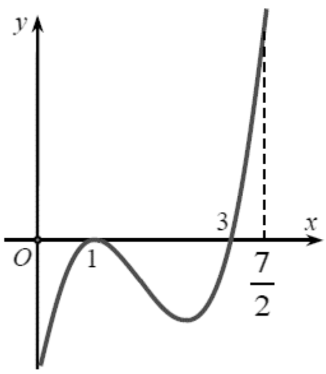
□ Để tìm $\max\limits_{[-1;2]} f(x)$ ta so sánh $f(-1)$ và $f(2)$.

Theo giả thiết, $f(-1) + f(0) < f(1) + f(2) \Leftrightarrow f(2) - f(-1) > f(0) - f(1)$.

Từ bảng biến thiên, ta có $f(0) - f(1) > 0$. Do đó $f(2) - f(-1) > 0 \Leftrightarrow f(2) > f(-1)$.

Hay $\max\limits_{[-1;2]} f(x) = f(2)$.

Câu 23: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $\left[0;\frac{7}{2}\right]$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ.



Hàm số $y = f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $\left[0;\frac{7}{2}\right]$ tại điểm x_0 nào dưới đây?

A. $x_0 = 0$. **B.** $x_0 = \frac{7}{2}$. **C.** $x_0 = 1$. **D.** $x_0 = 3$.

Lời giải

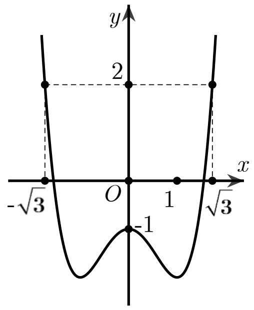
Chọn D

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ta có bảng biến thiên trên đoạn $\left[0;\frac{7}{2}\right]$ như sau:

x	0		1		3		$\frac{7}{2}$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$f(0)$				$f(3)$		$f\left(\frac{7}{2}\right)$

Do đó hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_0 = 3$.

Câu 24: Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm $y = f'(x)$ như hình vẽ



Đặt $h(x) = 3f(x) - x^3 + 3x$. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A. $\max\limits_{[-\sqrt{3};\sqrt{3}]} h(x) = 3f(1)$. **B.** $\max\limits_{[-\sqrt{3};\sqrt{3}]} h(x) = 3f\left(-\sqrt{3}\right)$.

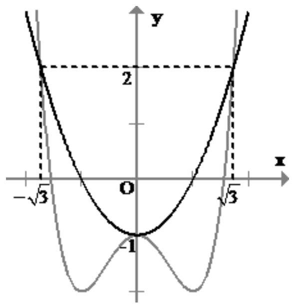
C. $\max\limits_{[-\sqrt{3};\sqrt{3}]} h(x) = 3f\left(\sqrt{3}\right)$. **D.** $\max\limits_{[-\sqrt{3};\sqrt{3}]} h(x) = 3f(0)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $h'(x) = 3f'(x) - 3x^2 + 3 \Leftrightarrow h'(x) = 3\left[f'(x) - \left(x^2 - 1\right)\right]$.

Đồ thị hàm số $y = x^2 - 1$ là một parabol có toạ độ đỉnh $C(0;-1)$, đi qua $A\left(-\sqrt{3};2\right)$, $B\left(\sqrt{3};2\right)$.



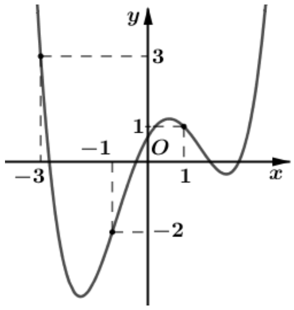
Từ đồ thị hai hàm số $y = f'(x)$ và $y = x^2 - 1$ ta có bảng biến thiên của hàm số $y = h(x)$.

x	$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$
$h'(x)$		$-$	0	$-$	
$h(x)$	$h\left(-\sqrt{3}\right)$				$h\left(\sqrt{3}\right)$

Với $h\left(-\sqrt{3}\right)=3f\left(-\sqrt{3}\right)$, $h\left(\sqrt{3}\right)=3f\left(\sqrt{3}\right)$.

Vậy $\max\limits_{[-\sqrt{3};\sqrt{3}]} h(x)=3f\left(-\sqrt{3}\right)$.

Câu 25: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị $y=f'\left(x\right)$ ở hình vẽ bên. Xét hàm số $g\left(x\right)=f\left(x\right)-\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{4}x^2+\frac{3}{2}x+2018$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

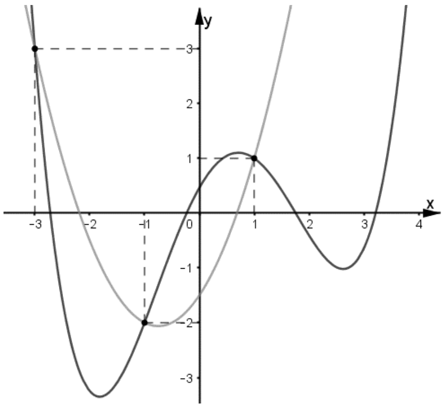


A. $\min\limits_{[-3;1]} g\left(x\right)=g\left(-1\right)$. **B.** $\min\limits_{[-3;1]} g\left(x\right)=\frac{g\left(-3\right)+g\left(1\right)}{2}$.

C. $\min\limits_{[-3;1]} g\left(x\right)=g\left(-3\right)$. **D.** $\min\limits_{[-3;1]} g\left(x\right)=g\left(1\right)$.

Lời giải

Chọn A



Ta có $g'\left(x\right)=f'\left(x\right)-x^2-\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}=f'\left(x\right)-\left(x^2+\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}\right)$.

Vẽ parabol $\left(P\right): y=x^2+\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}$. Ta thấy $\left(P\right)$ đi qua các điểm có toạ độ $\left(-3;3\right)$, $\left(-1;2\right)$, $\left(1;1\right)$.

□ Trên khoảng $\left(-3;-1\right)$ đồ thị hàm số $f'\left(x\right)$ nằm phía dưới $\left(P\right)$ nên

$$f'\left(x\right)<\left(x^2+\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}\right)\Rightarrow g'\left(x\right)<0.$$

□ Trên khoảng $\left(-1;1\right)$ đồ thị hàm số $f'\left(x\right)$ nằm phía trên $\left(P\right)$ nên

$$f'\left(x\right)>\left(x^2+\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}\right)\Rightarrow g'\left(x\right)>0.$$

□ Trên khoảng $\left(1;+\infty\right)$ đồ thị hàm số $f'\left(x\right)$ nằm phía dưới $\left(P\right)$ nên

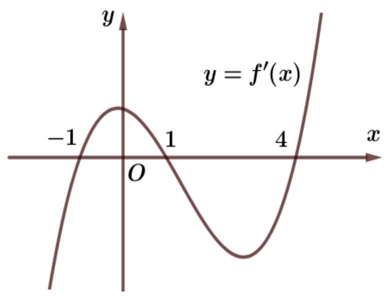
$$f'\left(x\right)<\left(x^2+\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}\right)\Rightarrow g'\left(x\right)<0.$$

Bảng biến thiên

x	-3		-1		1		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	0	$+$	
g	$g(-3)$	$\searrow$	$g(-1)$	$\nearrow$	$g(1)$	$\searrow$	$-\infty$

Từ bảng biến thiên, ta có $\min\limits_{[-3;1]} g(x) = g(-1)$.

Câu 26: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên R. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình sau:



Cho bốn mệnh đề sau:

1) Hàm số $y = f(x)$ có hai cực trị

2) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$

3) $f(1) > f(2) > f(4)$.

4) Trên đoạn $[-1;4]$, giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ là $f(1)$.

Số mệnh đề đúng trong bốn mệnh đề trên là:

A. 3. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Dựa vào đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ ta thấy:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1 \\ x = 4 \end{array}\right.$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty;-1) \cup (1;4)$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-1;1) \cup (4;+\infty)$$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$

x	$-\infty$		-1		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	CT	$\nearrow$	$CĐ$	$\searrow$	CT	$\nearrow$	

Dựa vào bảng biến thiên đáp án đúng là mệnh đề số 3 và 4

Câu 27: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $g(x)=f\left(4x-x^2\right)+\frac{1}{3}x^3-3x^2+8x+\frac{1}{3}$ trên đoạn $[1;3]$.

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	5	$\searrow$	$-\infty$

A. $\frac{25}{3}$. **B.** 15. **C.** $\frac{19}{3}$. **D.** 12.

Lời giải

Chọn D

Ta có $g'(x)=f'\left(4x-x^2\right).(4-2x)+x^2-6x+8=2(2-x)\left[f'(4x-x^2)+\frac{4-x}{2}\right]$

Xét thấy $\forall x\in[1;3]\Rightarrow 3\le 4x-x^2\le 4\Rightarrow f'(4x-x^2)>0$

Mặt khác $\frac{4-x}{2}>0\ \forall x\in[1;3]$

Suy ra $g'(x)=0\Leftrightarrow x=2$

$g(1)=f(3)+\frac{19}{3}<f(4)+\frac{17}{3}=5+\frac{17}{3}=\frac{32}{3}$

$g(3)=f(3)+\frac{19}{3}<f(4)+\frac{19}{3}=5+\frac{19}{3}=\frac{34}{3}$

$g(2)=5+7=12.$

$\Rightarrow g(1)<g(3)<g(2)$

Vậy $\max\limits_{[1;3]} g(x)=12$ tại $x=2$.

Câu 28: Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x)=f(2x)-\sin^2 x$ trên đoạn $[-1;1]$ là

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		↗	0	↗		↘	0	↘		↗	0	↗	

A. $f(-1)$. **B.** $f(0)$. **C.** $f(2)$. **D.** $f(1)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $x \in [-1;1] \Rightarrow 2x \in [-2;2]$.

Từ bảng biến thiên của $y = f'(x)$ thì bảng biến thiên $y = f(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	
$f(x)$		↘		↗		↘		↗	

Ta thấy $\forall x \in [-1;1]$ ta có $\begin{cases} f(2x) \le f(0) \\ -\sin^2 x \le 0 = \sin(0) \end{cases}$, do đó $g(x) \le g(0) = f(0)$.

Dấu "=" xảy ra khi $x = 0$.

Câu 29: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ sao cho $\max\limits_{[-1;2]} f(x) = 3$. Xét hàm số $g(x) = f(3x-1) + m$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để $\max\limits_{[0;1]} g(x) = -10$.

A. 13. **B.** -7. **C.** -13. **D.** -1.

Lời giải

Chọn C

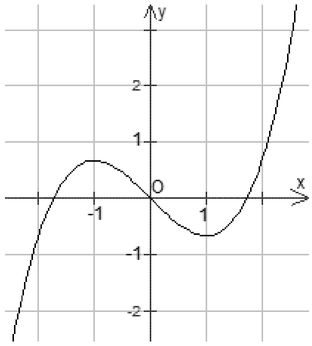
Đặt $u = 3x - 1 \Rightarrow g(x) = f(u) + m$.

$x \in [0;1] \Rightarrow u \in [-1;2]$.

Do $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $\max\limits_{[0;1]} g(x) = \max\limits_{[-1;2]} \left(f(u) + m\right) = \max\limits_{[-1;2]} f(u) + m = 3 + m$.

Để $\max\limits_{[0;1]} g(x) = 10 \Leftrightarrow m = -13$.

Câu 30: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp 2 trên $\mathbb{R}$, hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Giá trị lớn nhất của hàm số $y=f\left(\dfrac{\sin x+\sqrt{3}\cos x}{2}\right)$ trên đoạn $\left[-\dfrac{5\pi}{6};\dfrac{\pi}{6}\right]$ bằng

A. $f\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$. **B.** $f(0)$. **C.** $f\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right)$. **D.** $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=\dfrac{\sin x+\sqrt{3}\cos x}{2}=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$.

Vì $x\in\left[-\dfrac{5\pi}{6};\dfrac{\pi}{6}\right]\Rightarrow x+\dfrac{\pi}{3}\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]\Rightarrow t\in[-1;1]$.

Dựa vào đồ thị của hàm số $f'(x)$, ta có bảng biến thiên

t	-1		0		1
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	$f(-1)$	↗	$f(0)$	↘	$f(1)$

Ta có: $\max\limits_{\left[-\frac{5\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right]} f\left(\dfrac{\sin x+\sqrt{3}\cos x}{2}\right)=\max\limits_{[-1;1]} f(t) \Leftrightarrow t=0\Leftrightarrow \sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=0\Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{3}$.

Vậy $\max\limits_{\left[-\frac{5\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right]} f\left(\dfrac{\sin x+\sqrt{3}\cos x}{2}\right)=f\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$.

Câu 31: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ sao cho $\max\limits_{x\in[0;10]} f(x)=f(2)=4$. Xét hàm số $g(x)=f\left(x^3+x\right)-x^2+2x+m$. Giá trị của tham số m để $\max\limits_{x\in[0;2]} g(x)=8$ là

A. 5. **B.** 4. **C.** -1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t=x^3+x$. Vì $x\in[0;2]\Rightarrow t\in[0;10]$.

Ta có: $\max\limits_{x\in[0;2]} g(x)=\max\limits_{x\in[0;2]}\left[f\left(x^3+x\right)-x^2+2x+m\right]\le \max\limits_{x\in[0;2]} f\left(x^3+x\right)+\max\limits_{x\in[0;2]}\left[-x^2+2x+m\right]$

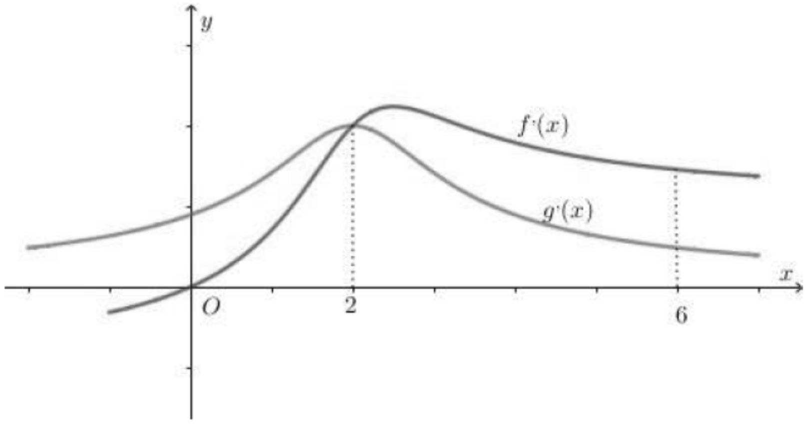
$= \max\limits_{t\in[0;10]} f(t)+1+m$.

$\leq \max\limits_{x\in[0;10]} f(x)+1+m = 4+1+m = 5+m$.

Suy ra: $\max\limits_{x\in[0;2]} g(x) = 5+m \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ t=2 \end{cases} \Leftrightarrow x=1$.

Theo giả thiết, ta có: $\max\limits_{x\in[0;2]} g(x) = 8 \Leftrightarrow m+5=8 \Leftrightarrow m=3$.

Câu 32: Cho hai hàm số $y=f(x)$, $y=g(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$, $g'(x)$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ và $g'(x)$ được cho như hình vẽ bên dưới.



Biết rằng $f(0)-f(6) < g(0)-g(6)$. Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $h(x)=f(x)-g(x)$ trên đoạn $[0;6]$ lần lượt là:

A. $h(6), h(2)$. **B.** $h(2), h(6)$. **C.** $h(0), h(2)$. **D.** $h(2), h(0)$.

Lời giải

Ta có $h'(x) = f'(x) - g'(x)$.

$h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Từ đồ thị ta có bảng biến thiên:

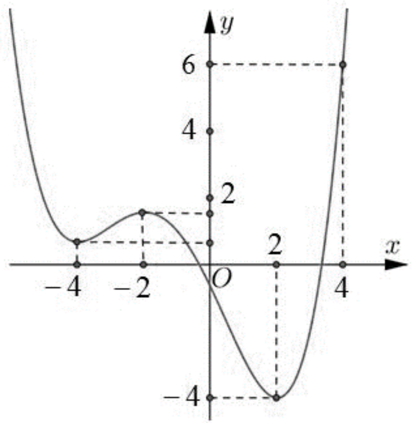
x	0		2		6
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	$h(0)$	$\searrow$	$h(2)$	$\nearrow$	$h(6)$

Và $f(0)-f(6) < g(0)-g(6) \Leftrightarrow f(0)-g(0) < f(6)-g(6)$.

Hay $h(0) < h(6)$.

Vậy $\max\limits_{[0;6]} h(x) = h(6)$; $\min\limits_{[0;6]} h(x) = h(2)$.

Câu 33: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị như hình vẽ



Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\left|f\left(\dfrac{8x}{x^2+1}\right)+m-1\right|$ có giá trị lớn nhất không vượt quá 2020 ?

A. 4029. **B.** 4035. **C.** 4031. **D.** 4041.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t=\dfrac{8x}{x^2+1}$. Ta có: $t'=\dfrac{-8x^2+8}{\left(x^2+1\right)^2}$; $t'=0\Leftrightarrow x=\pm1$.

BBT:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
t'		$-$	0	$+$	0	$-$	
t	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	4	$\searrow$	0

$\Rightarrow t\in[-4;4]$.

Hàm số $y=\left|f\left(\dfrac{8x}{x^2+1}\right)+m-1\right|$ trở thành $g(t)=\left|f(t)+m-1\right|, t\in[-4;4]$.

Đặt $h(t)=f(t)+m-1, t\in[-4;4]$, ta có: $h'(t)=f'(t)$.

$$h'(t)=0\Leftrightarrow f'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-4\in[-4;4]\\t=-2\in[-4;4]\\t=2\in[-4;4]\end{array}\right..$$

Ta có: $h(-4)\approx0,8+m-1=m-0,2$;

$h(4)=6+m-1=m+5$;

$h(-2)\approx1,6+m-1=m+0,6$;

$h(2) = -4 + m - 1 = m - 5$.

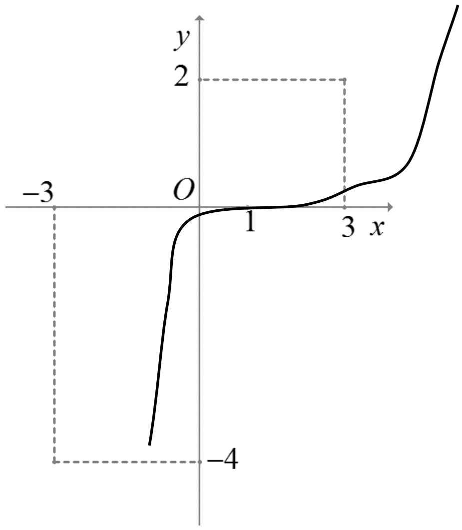
$\underset{\mathbb{R}}{\text{Max}}\, y = \underset{[-4;4]}{\text{Max}}\left|h(t)\right| = \text{Max}\left\{|m+5|;|m-5|\right\}$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} |m+5| \le 2020 \\ |m-5| \le 2020 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2020 \le m+5 \le 2020 \\ -2020 \le m-5 \le 2020 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2025 \le m \le 2015 \\ -2015 \le m \le 2025 \end{cases}$

$\Leftrightarrow -2015 \le m \le 2015$.

Vậy có tất cả 4031 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 34: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị $y = f'(x)$ như hình bên. Đặt $g(x) = 2f(x) - (x-1)^2$.



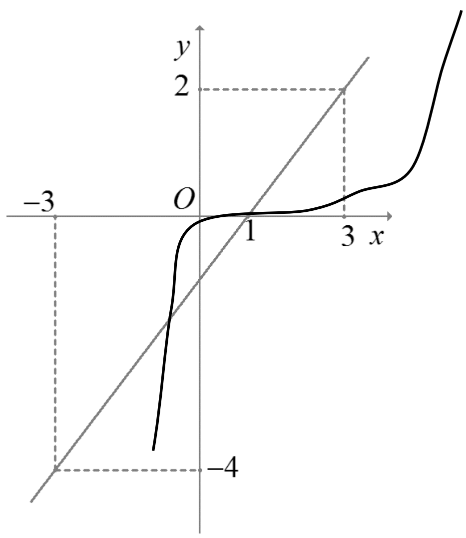
Khi đó $y = g(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-3;3]$ tại

A. $x = -3$. **B.** $x = 3$. **C.** $x = 0$. **D.** $x = 1$.

Lời giải.

Chọn A

Ta có $g(x) = 2f(x) - (x-1)^2 \Rightarrow g'(x) = 2\left(f'(x) - (x-1)\right)$. Vẽ đồ thị hàm số $y = x - 1$ trên cùng hệ trục tọa độ với đồ thị hàm số $y = f'(x)$.



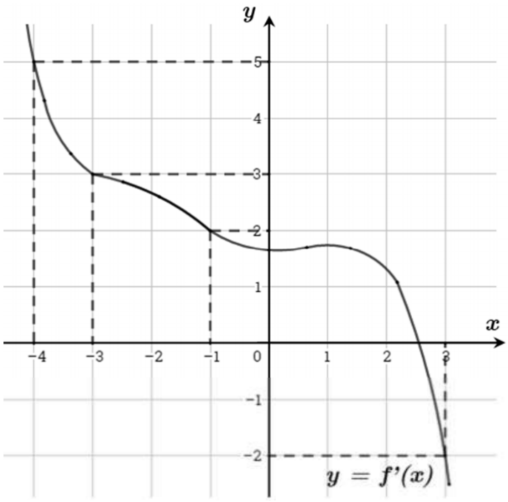
Dựa vào đồ thị ta thấy

+ $\int_{-3}^{1} g'(x)\mathrm{d}x > 0 \Rightarrow g(1) > g(-3); \int_{1}^{3} g'(x)\mathrm{d}x < 0 \Rightarrow g(1) > g(3)$. Do đó $y = g(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-3;3]$ tại $x = 3$ hoặc $x = -3$.

+ Phần hình phẳng giới hạn bởi $y = f'(x); y = x-1; x = -3; x = 1$ có diện tích lớn hơn phần hình phẳng giới hạn bởi $y = f'(x); y = x-1; x = 1; x = 3$ nên $\int_{-3}^{1} |g'(x)|\mathrm{d}x > \int_{1}^{3} |g'(x)|\mathrm{d}x \Rightarrow g(3) > g(-3)$.

Vậy $y = g(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-3;3]$ tại $x = -3$.

Câu 35: Cho hàm số $f(x)$. Biết hàm số $f'(x)$ có đồ thị như hình dưới đây. Trên $[-4;3]$, hàm số $g(x) = 2f(x) + (1-x)^2$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm



A. $x = -3$. **B.** $x = -4$. **C.** $x = 3$. **D.** $x = -1$.

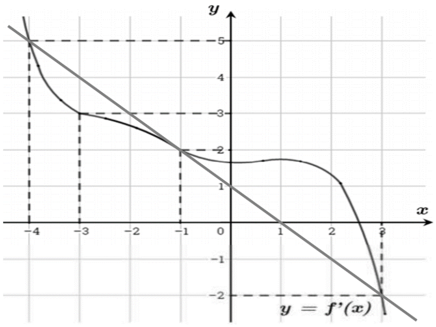
Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $g(x) = 2f(x) + (1-x)^2$ trên $[-4;3]$.

Ta có: $g'(x) = 2f'(x) - 2(1-x)$.

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 1-x$. Trên đồ thị hàm số $f'(x)$ ta vẽ thêm đường thẳng $y = 1-x$.



Từ đồ thị ta thấy $f'(x) = 1-x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -4 \\ x = -1 \\ x = 3 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$ như sau:

x	-4		-1		3
$g'(x)$	0	$-$	0	$+$	0
$g(x)$	$g(-4)$	↘	$g(-1)$	↗	$g(3)$

Vậy $\min\limits_{[-4;3]} g(x) = g(-1) \Leftrightarrow x = -1$.

Câu 36: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên $\mathbb{R}$. Biết $f'(0) = 3, f'(2) = f'(-2018) = 0$, và bảng xét dấu của $f''(x)$ như sau

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y = f(|x-1| - 2018)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại x_0 thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(-\infty; -2015)$. **B.** $(1;3)$. **C.** $(-1009;2)$. **D.** $(-2015;1)$.

Lời giải.

Chọn C

Từ bảng xét dấu của $f''(x)$ và giả thiết $f'(0) = 3, f'(2) = f'(-2018) = 0$ suy ra bảng biến thiên của hàm số $y = f'(x)$ như sau

x	$-\infty$		-2018		0		2		$+\infty$
$f''(x)$		$+$		$+$	0	-	0	$+$	
$f'(x)$		↗	0	↗	3	↘	0	↗	

Từ đó suy ra bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$:

x	$-\infty$		-2018		2		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$		↘		↗		↗	

Hàm số $y = f(|x-1| - 2018)$ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $|x-1| - 2018 = -2018$ $\Leftrightarrow |x-1| = 0 \Leftrightarrow x = 1 \in (-1009;2)$.

Câu 37: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên $\mathbb{R}$. Biết $f'(0) = 3$, $f'(2) = -2020$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f'(x) = -\infty$ và bảng xét dấu của $f''(x)$ như hình sau:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y = f(x+2019) + 2020x$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm x_0 thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(-\infty;-2019)$. **B.** $(0;2)$. **C.** $(-2019;0)$. **D.** $(2019;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Theo giả thiết ta có

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	$-\infty$	↗	3	↘	-2020	↗	

Ta có $y' = f'(x+2019) + 2020 \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow f'(x+2019) = -2020$.

Từ bảng biến thiên trên ta có $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+2019 = a \\ x+2019 = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = a-2019 \\ x = -2017 \end{array}\right.$, với $a < 0$.

Từ đó ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x+2019) + 2020x$

x	$-\infty$		$a-2019$		-2017		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$+$	
y		↘		↗		↗	

Từ bảng biến thiên có hàm số $y = f(x+2019) + 2020x$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_0 = a - 2019$.

Vì $a < 0$ nên $x_0 \in (-\infty;-2019)$.

DẠNG 3. ỨNG DỤNG GTLN-GTNN GIẢI BÀI TOÁN THỰC TẾ

Câu 38: Cho số $a > 0$. Trong số các tam giác vuông có tổng một cạnh góc vuông và cạnh huyền bằng a, tam giác có diện tích lớn nhất bằng

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}a^2$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{6}a^2$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{9}a^2$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{18}a^2$.

Lời giải

Chọn D

Giả sử tam giác ABC vuông ở A thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Giả sử $AB + BC = a \Rightarrow AB = a - BC$

Đặt $BC = x; 0 < x < a$.

$\Rightarrow AB = a - x$ và $AC = \sqrt{x^2 - (a-x)^2} = \sqrt{2ax - a^2}$

Diện tích tam giác ABC là $S = \frac{1}{2}AB.AC = \frac{1}{2}(a-x)\sqrt{2ax - a^2}$

Xét hàm số $f\left(x\right)=\frac{1}{2}\left(a-x\right)\sqrt{2ax-a^2}$

$$f'\left(x\right)=\frac{1}{2}\left(-\sqrt{2ax-a^2}+\left(a-x\right).\frac{a}{\sqrt{2ax-a^2}}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{-2ax+a^2+a^2-ax}{\sqrt{2x^2-a^2}}\right)=\frac{1}{2}.\frac{2a^2-3ax}{\sqrt{2x^2-a^2}}$$

$f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow x=\frac{2a}{3}$.

x	0		$\frac{2a}{3}$		a
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

Vậy diện tích lớn nhất của tam giác ABC là $S=f\left(\frac{2a}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{18}a^2$.

Câu 39: Một loại thuốc được dùng cho một bệnh nhân và nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân được giám sát bởi bác sĩ. Biết rằng nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân sau khi tiêm vào cơ thể trong t giờ được cho bởi công thức $c\left(t\right)=\frac{t}{t^2+1}$ $\left(mg/L\right)$. Sau khi tiêm thuốc bao lâu thì nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân cao nhất?

A. 4 giờ. **B.** 1 giờ. **C.** 3 giờ. **D.** 2 giờ.

Lời giải

Xét hàm số $c\left(t\right)=\frac{t}{t^2+1}$, $(t>0)$.

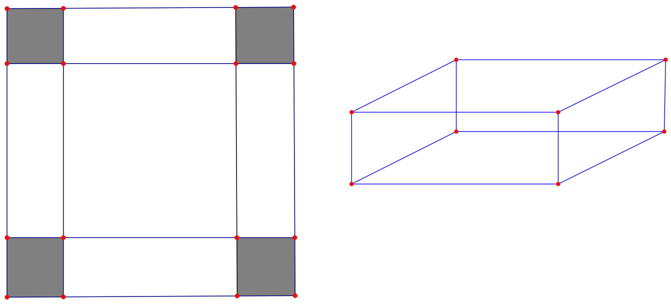
$c'\left(t\right)=\frac{1-t^2}{\left(t^2+1\right)^2}$.

$c'\left(t\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\t=-1\end{array}\right.$.

t	0		1		$+\infty$
$c'(t)$		$+$	0	$-$	
$c(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0

Với $t=1$ giờ thì nồng độ thuốc trong máu của bênh nhân cao nhất.

Câu 40: Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 12 cm. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng x, rồi gập tấm nhôm lại như hình vẽ dưới đây để được một cái hộp không nắp. Tìm x để hộp nhận được có thể tích lớn nhất.



A. $x=3$ **B.** $x=2$ **C.** $x=4$ **D.** $x=6$

Lời giải

Chọn B

Ta có : $h=x\,(cm)$ là đường cao hình hộp

Vì tấm nhôm được gấp lại tạo thành hình hộp nên cạnh đáy của hình hộp là: $12-2x\,(cm)$

Vậy diện tích đáy hình hộp $S=(12-2x)^2\,(cm^2)$. Ta có: $\begin{cases} x>0 \\ 12-2x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x<6 \end{cases} \Leftrightarrow x\in(0;6)$

Thể tích của hình hộp là: $V=S.h=x.(12-2x)^2$

Xét hàm số: $y=x.(12-2x)^2\ \forall x\in(0;6)$

Ta có : $y'=(12-2x)^2-4x(12-2x)=(12-2x)(12-6x)$;

$y'=0 \Leftrightarrow (12-2x).(12-6x)=0 \Leftrightarrow x=2$ hoặc $x=6$.

x	0		2		6
y'		+	0	−	
y		↗		↘	

Suy ra với $x=2$ thì thể tích hộp là lớn nhất và giá trị lớn nhất đó là $y(2)=128$.

Câu 41: Một sợi dây có chiều dài $28m$ được cắt thành hai đoạn để làm thành một hình vuông và một hình tròn. Tính chiều dài của đoạn dây làm thành hình vuông được cắt ra sao cho tổng diện tích của hình vuông và hình tròn là nhỏ nhất?

A. $\dfrac{56}{4+\pi}$. **B.** $\dfrac{112}{4+\pi}$. **C.** $\dfrac{84}{4+\pi}$. **D.** $\dfrac{92}{4+\pi}$.

Lời giải

Gọi chiều dài của đoạn dây làm thành hình vuông là $x\,(m)$
=> chiều dài của đoạn dây làm thành hình tròn là $28-x\,(m)$

+) Diện tích hình vuông là: $\left(\dfrac{x}{4}\right)^2=\dfrac{x^2}{16}$

+) Bán kính hình tròn là: R = $\dfrac{28-x}{2\pi}$

=> Diện tích hình tròn: $\pi R^2 = \pi.\left(\frac{28-x}{2\pi}\right)^2 = \frac{784-56x+x^2}{4\pi}$

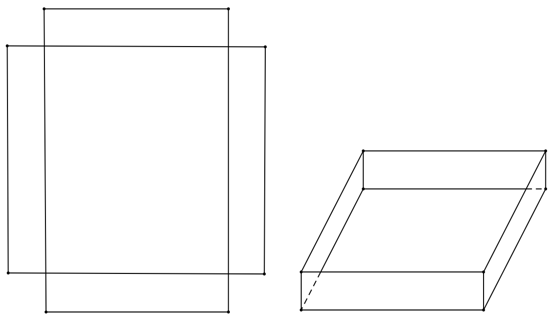
+) Tổng diện tích hai hình: $\frac{x^2}{16}+\frac{784-56x+x^2}{4\pi}=\left(\frac{\pi+4}{16\pi}\right)x^2-\frac{14}{\pi}x+\frac{196}{\pi}$

Xét $f(x)=\left(\frac{\pi+4}{16\pi}\right)x^2-\frac{14}{\pi}x+\frac{196}{\pi}$. Nhận thấy $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại

$x=\frac{-b}{2a}=\frac{14}{\pi}.\frac{16\pi}{2(\pi+4)}=\frac{112}{\pi+4}$

Vậy chiều dài của đoạn dây làm thành hình vuông để tổng diện tích của hai hình đạt giá trị nhỏ nhất là $\frac{112}{4+\pi}m$

Câu 42: Cho một tấm nhôm hình chữ nhật có chiều dài bằng $10cm$ và chiều rộng bằng $8cm$. Người ta cắt bỏ ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng $x(cm)$, rồi gập tấm nhôm lại để được một cái hộp không nắp. Tìm x để hộp nhận được có thể tích lớn nhất.



A. $x=\frac{8-2\sqrt{21}}{3}$ **B.** $x=\frac{10-2\sqrt{7}}{3}$ **C.** $x=\frac{9+\sqrt{21}}{9}$. **D.** $x=\frac{9-\sqrt{21}}{3}$

Lời giải

Chọn D

Ta có : $h=x\ (cm)$ là đường cao hình hộp

Vì tấm nhôm được gấp lại tạo thành hình hộp nên cạnh đáy của hình hộp là: $10-2x\ (cm)$ và $8-2x\ (cm)$

Vậy diện tích đáy hình hộp $S=(10-2x)(8-2x)(cm^2)$. Ta có: $\begin{cases} x>0 \\ 10-2x>0 \\ 8-2x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x<4 \end{cases} \Leftrightarrow x\in(0;4)$

Thể tích của hình hộp là: $V=S.h=x.(10-2x).(8-2x)$

Xét hàm số: $y=x.(10-2x).(8-2x)\forall x\in(0;4)$

Ta có : $y'=12x^2-72x+80$;

$$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{9+\sqrt{21}}{3}>4\ (l) \\ x=\dfrac{9-\sqrt{21}}{3}\quad (n) \end{array}\right.$$

x	0		$\dfrac{9-\sqrt{21}}{3}$		4
y'		$+$	0	$-$	
y		$\nearrow$		$\searrow$	

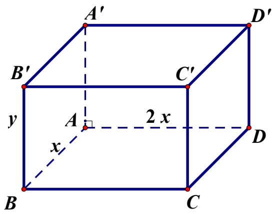
Suy ra với $x=\dfrac{9-\sqrt{21}}{3}$ thì thể tích hộp là lớn nhất và giá trị lớn nhất.

Câu 43: Ông A dự định sử dụng hết $5\,m^2$ kính để làm một bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng . Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu ?

A. $1,01\,m^3$. **B.** $0,96\,m^3$. **C.** $1,33\,m^3$. **D.** $1,51\,m^3$.

Lời giải

Chọn A



Gọi x, y lần lượt là chiều rộng và chiều cao của bể cá .

Ta có thể tích bể cá $V=2x^2y$.

Theo đề bài ta có: $2xy+2.2xy+2x^2=5 \Leftrightarrow 6xy+2x^2=5$

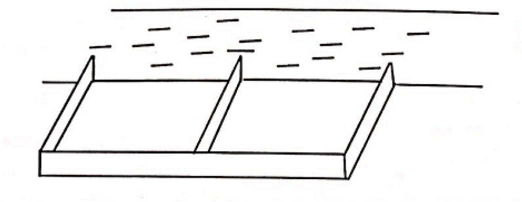
$$\Leftrightarrow y=\frac{5-2x^2}{6x}$$

$$\Rightarrow V=2x^2\frac{5-2x^2}{6x}=\frac{5x-2x^3}{3} \Rightarrow V'=\frac{5-6x^2}{3} \Rightarrow V'=0 \Leftrightarrow 5-6x^2=0 \Leftrightarrow x=\sqrt{\frac{5}{6}}$$

x	0		$\sqrt{\frac{5}{6}}$		$\sqrt{\frac{5}{2}}$
V'		$+$	0	$-$	
V	0	$\nearrow$	$\frac{5\sqrt{30}}{27}$	$\searrow$	0

$$\Rightarrow V_{\max}=\frac{5\sqrt{30}}{27}\approx 1,01\,m^3.$$

Câu 44: Một người nông dân có 15.000.000 đồng muốn làm một cái hàng rào hình chữ E dọc theo một con sông để làm một khu đất có hai phần chữ nhật để trồng rau. Đối với mặt hàng rào song song với bờ sông thì chi phí nguyên vật liệu là 60.000 đồng một mét, còn đối với ba mặt hàng rào song song nhau thì chi phí nguyên vật liệu là 50.000 đồng một mét. Tìm diện tích lớn nhất của đất rào thu được



A. $3125\,m^2$. **B.** $50\,m^2$. **C.** $1250\,m^2$. **D.** $6250\,m^2$.

Lời giải

Chọn D

Gọi x là chiều dài 1 mặt hàng rào hình chữ E .

Gọi y là chiều dài mặt hàng rào hình chữ E song song với bờ sông ($y>0$).

Số tiền phải làm là: $x.3.50000+y.60000=15.000.000 \Leftrightarrow y=\dfrac{500-5x}{2}$.

Diện tích đất: $S=x.y=x.\dfrac{500-5x}{2}=250x-\dfrac{5}{2}x^2$

Ta có: $S'=250-5x$.

$S'=0 \Leftrightarrow 250-5x \Leftrightarrow x=50$.

Bảng biến thiên:

x	0		50		$+\infty$
S'		+	0	−	
S	0	↗	6250	↘	$-\infty$

Vậy: $\max\limits_{(0;+\infty)} S=6250\ (m^2)$ khi $x=50$.

Câu 45: Ông Khoa muốn xây một cái bể chứa nước lớn dạng một khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng $288\,\text{m}^3$. Đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng, giá thuê nhân công để xây bể là 500000 đồng/m^2. Nếu ông Khoa biết xác định các kích thước của bể hợp lí thì chi phí thuê nhân công sẽ thấp nhất. Hỏi ông Khoa trả chi phí thấp nhất để xây dựng bể đó là bao nhiêu ?

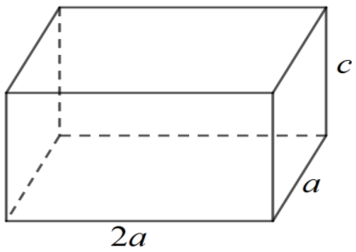
A. 90 triệu đồng. **B.** 168 triệu đồng. **C.** 54 triệu đồng. **D.** 108 triệu đồng.

Lời giải

Chọn D

Theo bài ra ta có để chi phí thuê nhân công là thấp nhất thì ta phải xây dựng bể sao cho tổng diện tích xung quanh và diện tích đáy là nhỏ nhất.

Gọi ba kích thước của bể là a, $2a$, c $\left(a(m)>0, c(m)>0\right)$.



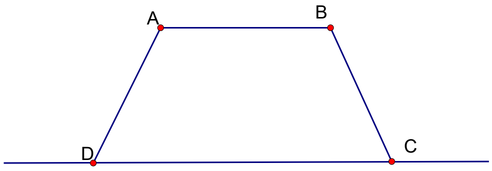
Ta có diện tích cách mặt cần xây là $S = 2a^2 + 4ac + 2ac = 2a^2 + 6ac$.

Thể tích bể $V = a.2a.c = 2a^2c = 288 \Rightarrow c = \dfrac{144}{a^2}$.

Suy ra $S = 2a^2 + 6a.\dfrac{144}{a^2} = 2a^2 + \dfrac{864}{a} = 2a^2 + \dfrac{432}{a} + \dfrac{432}{a} \geq 3.\sqrt[3]{2a^2.\dfrac{432}{a}.\dfrac{432}{a}} = 216$.

Vậy $S_{\min} = 216\,\text{m}^2$, khi đó chi phí thấp nhất là $216.500000 = 108$ triệu đồng.

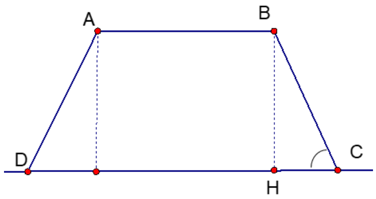
Câu 46: Một người nông dân có 3 tấm lưới thép B40, mỗi tấm dài $12(m)$ và muốn rào một mảnh vườn dọc bờ sông có dạng hình thang cân $ABCD$ như hình vẽ . Hỏi ông ta có thể rào được mảnh vườn có diện tích lớn nhất là bao nhiêu m^2?



A. $100\sqrt{3}$. **B.** $106\sqrt{3}$. **C.** $108\sqrt{3}$. **D.** $120\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C



Kẻ đường cao BH, gọi số đo 2 góc ở đáy CD của hình thang là $x, x \in (0°;90°)$.

Diện tích mảnh vườn là:

$$S = \frac{1}{2}BH(AB + CD) = \frac{1}{2}BC.\sin x(2.AB + 2BC.\cos x) = \frac{1}{2}AB^2(2\sin x + \sin 2x)$$

Xét hàm số $f(x) = 2\sin x + \sin 2x$ với $x \in (0^0;90^0)$ có $f'(x) = 2\cos x + 2\cos 2x$.

Ta có: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2\cos x + 2\cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = \dfrac{1}{2} \\ \cos x = -1\end{array}\right.$

Do $x \in (0^0;90^0)$ nên ta nhận $\cos x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = 60^0$. Ta có bảng biến thiên:

x	0^0		60^0		90^0
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		↗	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	↘	

Từ bảng biến thiên ta thấy: $\max\limits_{(0^0;90^0)} f(x) \le \frac{3\sqrt{3}}{2}$ đạt được tại $x = 60^0$.

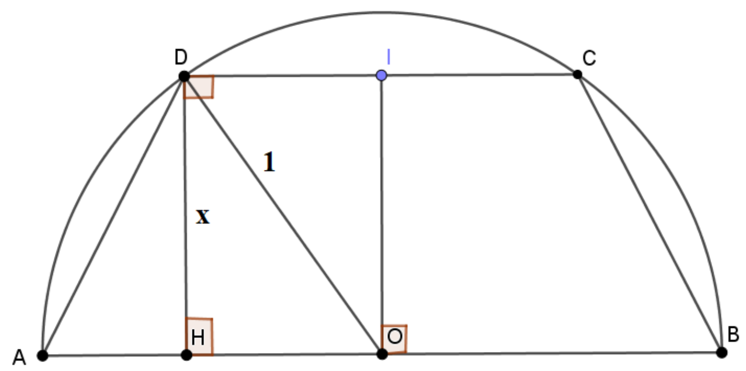
$\Rightarrow \max S = 108\sqrt{3}\left(m^2\right)$ khi góc ở đáy CD của hình thang bằng 60^0 $\left(\widehat{C} = \widehat{D} = 60^0\right)$.

Câu 47: Cho nửa đường tròn đường kính $AB = 2$ và hai điểm C, D thay đổi trên nửa đường tròn đó sao cho $ABCD$ là hình thang. Diện tích lớn nhất của hình thang $ABCD$ bằng

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{3\sqrt{3}}{4}$. **C.** 1. **D.** $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi H là hình chiếu vuông góc của D lên AB, I là trung điểm của đoạn CD và O là trung điểm của AB. Đặt $DH = x$, $0 < x < 1$. Ta có $DC = 2DI = 2OH = 2\sqrt{OD^2 - DH^2} = 2\sqrt{1 - x^2}$.

Diện tích của hình thang $ABCD$ là $S = f(x) = \frac{(AB + CD)DH}{2} = \left(1 + \sqrt{1 - x^2}\right)x$.

Ta có $f'(x) = \frac{\sqrt{1 - x^2} + 1 - 2x^2}{\sqrt{1 - x^2}}$. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{1 - x^2} + 1 - 2x^2 = 0$

Đặt $t = \sqrt{1 - x^2}$, khi đó phương trình trở thành $2t^2 + t - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = \frac{1}{2} \end{array}\right.$.

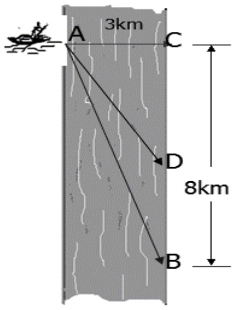
$t = -1$ loại. $t = \frac{1}{2}$ ta có $\sqrt{1 - x^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 = \frac{3}{4} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Bảng biến thiên

x	0		$\frac{\sqrt{3}}{2}$		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	1

Vậy diện tích lớn nhất của hình thang $ABCD$ bằng $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

Câu 48: Một người đàn ông muốn chèo thuyền ở vị trí A tới điểm B về phía hạ lưu bờ đối diện, càng nhanh càng tốt, trên một bờ sông thẳng rộng 3 km. Anh có thể chèo thuyền của mình trực tiếp qua sông để đến C và sau đó chạy đến B, hay có thể chèo trực tiếp đến B, hoặc anh ta có thể chèo thuyền đến một điểm D giữa C và B và sau đó chạy đến B. Biết anh ấy có thể chèo thuyền 6 km/h, chạy 8 km/h và quãng đường $BC = 8\text{ km}$. Biết tốc độ của dòng nước là không đáng kể so với tốc độ chèo thuyền của người đàn ông. Tính khoảng thời gian ngắn nhất để người đàn ông đến B.



A. $\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{9}{\sqrt{7}}$. **C.** $\frac{\sqrt{73}}{6}$. **D.** $1+\frac{\sqrt{7}}{8}$.

Lời giải

❍ Cách 1: Anh chèo thuyền của mình trực tiếp qua sông để đến C và sau đó chạy đến B

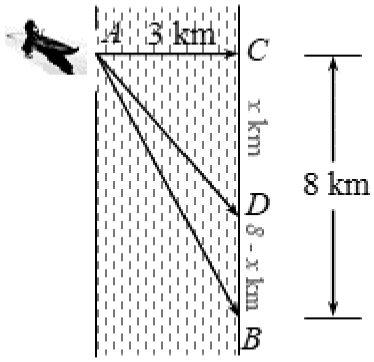
Thời gian chèo thuyền trên quãng đường AC: $\frac{3}{6} = 0,5$

Thời gian chạy trên quãng đường CB: $\frac{8}{8} = 1$

Tổng thời gian di chuyển từ A đến B là $1,5$.

❍ Cách 2: chèo trực tiếp trên quãng đường $AB = \sqrt{3^2+8^2} = \sqrt{73}$ mất $\frac{\sqrt{73}}{6} \approx 1^{\text{h}}26'$.

❍ Cách 3:



Gọi $x\ (\text{km})$ là độ dài quãng đường BD; $8-x\ (\text{km})$ là độ dài quãng đường CD.

Thời gian chèo thuyền trên quãng đường $AD=\sqrt{x^2+9}$ là: $\dfrac{\sqrt{x^2+9}}{6}$

Thời gian chạy trên quãng đường DB là: $\dfrac{8-x}{8}$

Tổng thời gian di chuyển từ A đến B là $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+9}}{6}+\dfrac{8-x}{8}$

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+9}}{6}+\dfrac{8-x}{8}$ trên khoảng $(0;\,8)$

Ta có $f'(x)=\dfrac{x}{6\sqrt{x^2+9}}-\dfrac{1}{8}$; $f'(x)=0 \Leftrightarrow 3\sqrt{x^2+9}=4x \Leftrightarrow x=\dfrac{9}{\sqrt{7}}$

Bảng biến thiên

x	0		$\frac{9}{\sqrt{7}}$		8
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	$1+\frac{\sqrt{7}}{8}$	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{73}}{6}$

Dựa vào BBT ta thấy thời gian ngắn nhất để di chuyển từ A đến B là $1+\dfrac{\sqrt{7}}{8}\approx 1^{\text{h}}20'$.

Vậy khoảng thời gian ngắn nhất để người đàn ông đến B là $1+\dfrac{\sqrt{7}}{8}\approx 1^{\text{h}}20'$.

DẠNG 4. DÙNG PHƯƠNG PHÁP HÀM SỐ ĐỂ TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA BIỂU THỨC

Câu 49: Cho ba số thực x,y,z thỏa mãn $x\ge 0, y\ge 0, z\ge 1$, $x+y+z=2$.Biết giá trị lớn nhất của biểu thức $P=xyz$ bằng $\dfrac{a}{b}$ với $a,b\in\mathbb{N}^*$ và $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Giá trị của $2a+b$ bằng

A. 5. **B.** 43. **C.** 9. **D.** 6.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $P = xyz \le \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 .z = \left(\frac{2-z}{2}\right)^2 .z = \frac{1}{4}\left(4z - 4z^2 + z^3\right)$.

Xét hàm số $f(z) = \frac{1}{4}\left(4z - 4z^2 + z^3\right)$ trên $[1;2]$.

Ta có: $f'(z) = \frac{1}{4}\left(4 - 8z + 3z^2\right); f'(z) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = \frac{2}{3}(loai) \\ z = 2 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

z	1		2
$f'(z)$		$-$	
$f(z)$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	0

Dựa vào bảng biến thiên, ta có: $P \le \frac{1}{4}$.

Vậy $P_{\max} = \frac{1}{4}$ khi $\begin{cases} z = 1 \\ x = y = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow a = 1; b = 4 \Rightarrow 2a + b = 6$.

Câu 50: Cho $x^2 - xy + y^2 = 2$. Giá trị nhỏ nhất của $P = x^2 + xy + y^2$ bằng:

A. $\frac{2}{3}$ **B.** $\frac{1}{6}$ **C.** $\frac{1}{2}$ **D.** 2

Lời giải

Chọn A

Xét $\frac{P}{2} = \frac{x^2 + xy + y^2}{2} = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2 - xy + y^2}$

+nếu $y = 0$ thì $x^2 = 2$. Do đó $P = x^2 = 2$ suy ra $\min P = 2$

+nếu $y \ne 0$ ta chia tử mẫu cho y^2 ta được

$$\frac{P}{2} = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2 - xy + y^2} = \frac{1 + \left(\frac{x}{y}\right) + \left(\frac{x}{y}\right)^2}{1 - \left(\frac{x}{y}\right) + \left(\frac{x}{y}\right)^2}$$

Đặt $t = \frac{x}{y}$, khi đó $\frac{P}{2} = \frac{1 + t + t^2}{1 - t + t^2}$

Xét $f(t) = \frac{1 + t + t^2}{1 - t + t^2} \Rightarrow f'(t) = \frac{-2t^2 + 2}{\left(1 - t + t^2\right)^2}$

$f'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -1 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

t	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(t)$	1	$\searrow$	$\frac{1}{3}$	$\nearrow$	3	$\searrow$	1

Khi đó $\min\frac{P}{2}=\frac{1}{3}$ do đó $\min P=\frac{2}{3}$.

Câu 51: Cho x, y là các số thực thỏa mãn $x+y=\sqrt{x-1}+\sqrt{2y+2}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $P=x^2+y^2+2(x+1)(y+1)+8\sqrt{4-x-y}$. Tính giá trị $M+m$

A. 42 **B.** 41 **C.** 43 **D.** 44

Lời giải

Chọn C

$(x+y)^2=\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{2}\sqrt{y+1}\right)^2\le 3(x+y)\Leftrightarrow 0\le x+y\le 3$

$P=x^2+y^2+2(x+1)(y+1)+8\sqrt{4-x-y}=(x+y)^2+2(x+y)+2+8\sqrt{4-(x+y)}$

Đặt $t=\sqrt{4-(x+y)}, t\in[1;2]$.

Ta có: $f(t)=\left(4-t^2\right)^2+2\left(4-t^2\right)+2+8t=t^4-10t^2+8t+26$.

$f'(t)=4t^3-20t+8$

$$f'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=2\\t^2+2t-1=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=2\in[1;2]\\t=-1+\sqrt{2}\notin[1;2]\\t=-1-\sqrt{2}\notin[1;2]\end{array}\right.$$

$f(1)=25; f(2)=18$.

Suy ra $m=\min\limits_{[1;2]}f(t)=f(2)=18; M=\max\limits_{[1;2]}f(t)=f(1)=25$.

Vậy $M+m=43$.

Câu 52: Cho x, $y>0$ thỏa mãn $x+y=\frac{3}{2}$ và biểu thức $P=\frac{4}{x}+\frac{1}{4y}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính x^2+y^2.

A. $\frac{153}{100}$. **B.** $\frac{5}{4}$. **C.** $\frac{2313}{1156}$. **D.** $\frac{25}{16}$.

Lời giải

Chọn A

Từ $x+y=\frac{3}{2}$ suy ra $y=\frac{3}{2}-x$. Ta có: $0<x,y<\frac{3}{2}$.

Xét hàm $P(x)=\frac{4}{x}+\frac{1}{4\left(\frac{3}{2}-x\right)}=\frac{4}{x}+\frac{1}{6-4x}$ trên khoảng $\left(0;\frac{3}{2}\right)$, ta có:

$P'(x)=-\frac{4}{x^2}-\frac{-4}{(6-4x)^2}$.

$P'(x)=0\Leftrightarrow\frac{4}{(6-4x)^2}=\frac{4}{x^2}\Leftrightarrow x^2=(6-4x)^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=6-4x\\x=4x-6\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{6}{5}\\x=2\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên của $P(x)$ trên $\left(0;\frac{3}{2}\right)$:

x	0		$\frac{6}{5}$		$\frac{3}{2}$
$P'(x)$		$-$	0	$+$	
$P(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{25}{6}$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $\min\limits_{\left(0;\frac{3}{2}\right)}P(x)=\frac{25}{6}$ khi $x=\frac{6}{5}$.

Với $x=\frac{6}{5}$ thì $y=\frac{3}{10}$.

Như vậy $\min P=\frac{25}{6}$ khi $x=\frac{6}{5}$, $y=\frac{3}{10}$.

Khi đó, $x^2+y^2=\frac{153}{100}$.

Câu 53: Cho $x,y>0$ và $x+y=\frac{5}{4}$ sao cho biểu thức $P=\frac{4}{x}+\frac{1}{4y}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó

A. $x^2+y^2=\frac{25}{32}$. **B.** $x^2+y^2=\frac{17}{16}$. **C.** $x^2+y^2=\frac{25}{16}$. **D.** $x^2+y^2=\frac{13}{16}$.

Lời giải

Từ $x+y=\frac{5}{4}\Rightarrow y=\frac{5}{4}-x$, nên $P=\frac{4}{x}+\frac{1}{5-4x}$.

Xét hàm số $P=\frac{4}{x}+\frac{1}{5-4x}$ với $0<x<\frac{5}{4}$.

$P'=-\frac{4}{x^2}+\frac{4}{(5-4x)^2}$; $P'=0\Leftrightarrow x^2=(5-4x)^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\in\left(0;\frac{5}{4}\right)\\x=\frac{5}{3}\notin\left(0;\frac{5}{4}\right)\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	0		1		$\frac{5}{4}$
P'		$-$	0	$+$	
P		$\searrow$	5	$\nearrow$	

Như vậy: $\min P = 5$ khi $x = 1$; $y = \frac{1}{4}$.

Khi đó $x^2 + y^2 = \frac{17}{16}$.

Câu 54: Xét các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 4$ và $xy + yz + zx = 5$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\left(x^3 + y^3 + z^3\right)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)$ bằng:

A. 20. **B.** 25. **C.** 15. **D.** 35.

Lời giải

Ta có: $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ xy + yz + zx = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 4 - z \\ xy = 5 - z(x + y) = 5 - 4z + z^2 \end{cases}$.

Lại có: $(x + y)^2 \ge 4xy \Rightarrow (4 - z)^2 \ge 4\left(5 - 4z + z^2\right) \Rightarrow \frac{2}{3} \le z \le 2$. Dấu "=" xảy ra khi $x = y$.

Và $(x + y + z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3(x + y + z)(x + y)z + 3xy(x + y)$

$\Rightarrow x^3 + y^3 + z^3 = 4^3 - 12(x + y)z - 3xy(x + y) = 64 - 3(4 - z)\left(5 + z^2\right)$.

Ta có: $P = \left(x^3 + y^3 + z^3\right)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = \left(3z^3 - 12z^2 + 15z + 4\right)\left(\frac{5}{z^3 - 4z^2 + 5z}\right)$.

Đặt $t = z^3 - 4z^2 + 5z$, với $\frac{2}{3} \le z \le 2 \Rightarrow \frac{50}{27} \le t \le 2$.

Do đó xét hàm số $f(t) = 5\left(\frac{4}{t} + 3\right)$, với $\frac{50}{27} \le t \le 2$.

Ta có $f'(t) = \frac{-20}{t^2} < 0,\ \forall t \in \left[\frac{50}{27}; 2\right]$ nên hàm số $f(t)$ liên tục và nghịch biến.

Do đó $P_{\min} = f(2) = 25$ đạt tại $x = y = 1$, $z = 2$.

Câu 55: Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $2\left(x^2 + y^2\right) + xy = (x + y)(xy + 2)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 4\left(\frac{x^3}{y^3} + \frac{y^3}{x^3}\right) - 9\left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2}\right)$.

A. $-\frac{25}{4}$. **B.** 5. **C.** $-\frac{23}{4}$. **D.** -13.

Lời giải

Ta có $2\left(x^2+y^2\right)+xy=(x+y)(xy+2)\geq(x+y)2\sqrt{2xy}$.

Đặt $a=x^2+y^2; b=xy$ ta được: $(2a+b)^2\geq 8b(a+2b)\Leftrightarrow 4a^2-4ab-15b^2\geq 0$

$\Rightarrow \frac{a}{b}\geq\frac{5}{2}$. Suy ra: $\frac{x^2+y^2}{xy}\geq\frac{5}{2}\Leftrightarrow t=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq\frac{5}{2}$.

Ta có:

$$P=4\left(\frac{x^3}{y^3}+\frac{y^3}{x^3}\right)-9\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}\right)=4\left(t^3-3t\right)-9\left(t^2-2\right)=4t^3-9t^2-12t+18=f(t) \text{ với } t\geq\frac{5}{2}.$$

Khảo sát hàm số $f(t)$ với $t\geq\frac{5}{2}$ ta được $f(t)\geq-\frac{23}{4}$. Vậy **chọn C**

Câu 56: Cho các số thực dương x, y thỏa mãn $2x+y=\frac{5}{4}$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức $P=\frac{2}{x}+\frac{1}{4y}$.

A. $P_{\min}=\frac{34}{5}$. **B.** $P_{\min}=\frac{65}{4}$. **C.** $P_{\min}$ không tồn tại. **D.** $P_{\min}=5$.

Lời giải

Từ giả thiết ta có $y=\frac{5}{4}-2x$. Vì $y>0$ nên $\frac{5}{4}-2x>0\Rightarrow x<\frac{5}{8}$. Do đó $0<x<\frac{5}{8}$.

Ta có $P=\frac{2}{x}+\frac{1}{4\left(\frac{5}{4}-2x\right)}=\frac{2}{x}+\frac{1}{5-8x}=\frac{10-15x}{-8x^2+5x}$ với $0<x<\frac{5}{8}$.

$$P'=\frac{-15\left(-8x^2+5x\right)-(-16x+5)(10-15x)}{\left(-8x^2+5x\right)^2}=\frac{120x^2-75x-\left(-160x+240x^2+50-75x\right)}{\left(-8x^2+5x\right)^2}$$

$$P'=\frac{-120x^2+160x-50}{\left(-8x^2+5x\right)^2}. \text{ Có } P'=0\Rightarrow -120x^2+160x-50=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{5}{6}\notin\left(0;\frac{5}{8}\right)\\ x=\frac{1}{2}\in\left(0;\frac{5}{8}\right)\end{array}\right..$$

Bảng biến thiên

x	0		$\frac{1}{2}$		$\frac{5}{8}$
y'	||	$-$	0	$+$	||
y	|| $+\infty$	$\searrow$	5	$\nearrow$	$+\infty$ ||

Dựa vào bảng biến thiên ta có $P_{\min} = 5$.