SỞ GD VÀ ĐT HÀ NỘI
TRƯỜNG THPT ĐAN PHƯỢNG

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI MÔN TOÁN

LỚP 12 – Năm học 2017-2018

Thời gian làm bài: 180 phút.

(Đề thi gồm 01 trang)

Họ tên thí sinh ……………............................... Số báo danh …………

<u>Câu 1 (5.0 *điểm*)</u>

1. Cho hàm số: $y = \dfrac{x-1}{2(x+1)}$ (C)

Tìm những điểm M trên (C) sao cho tiếp tuyến với (C) tại M tạo với hai trục tọa độ một tam giác có trọng tâm nằm trên đường thẳng 4x + y = 0.

2. Cho hàm số $y = x^3 - 3(m+1)x - 2$ với m là tham số. Tìm các giá trị của m để đồ thị hàm số cắt trục Ox tại một điểm.

<u>Câu 2 (4.0 *điểm*)</u>

1.Giải hệ phương trình sau : $\begin{cases} 2(x-2)\sqrt{x+6} = 6 - y \\ (x-2)\sqrt{y+2} = \sqrt{y+1}.\sqrt{x^2-4x+5} \end{cases}$ ($x \in R$).

2.Giải phương trình sau:

$$x^2 - 3x + 1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{x^4 + x^2 + 1} \quad (x \in R).$$

<u>Câu 3 (3.0 *điểm*)</u>Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $5\left(x^2+y^2+z^2\right) = 9\left(xy+2yz+zx\right)$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = \dfrac{x}{y^2+z^2} - \dfrac{1}{(x+y+z)^3}$

<u>Câu 4 (3.0 *điểm*)</u>

1.Tìm số hạng tổng quát của dãy số (u_n) xác định bởi : $\begin{cases} u_{n+1} = 3u_n + n^2 + 1, n \ge 1, n \in N \\ u_1 = 2 \end{cases}$.

2. Tính $u_1 + u_2 + \ldots + u_{2017}$.

<u>Câu 5 (5.0 *điểm*)</u>

1. Cho tam giác *ABC* vuông tại *A, D* là một điểm nằm trong tam giác *ABC* sao cho *CD = CA*. M là một điểm trên cạnh AB sao cho $\widehat{BDM} = \dfrac{1}{2}\widehat{ACD}$, N là giao điểm của MD và đường cao AH của tam giác *ABC*. Chứng minh *DM = DN*.

2. Cho tam giác ABC cân tại A có *AB=AC=a*, góc *BAC = 120*^{0}. Điểm S thay đổi trong không gian nhưng luôn nằm về 1 phía của mặt phẳng *(ABC)* và *AS= a*, góc *SAB= 60*^{0}. Gọi H là hình chiếu của S trên mặt phẳng *(ABC)*

a) Chứng minh rằng H thuộc đường thẳng cố định.

b) Chứng minh rằng khi độ dài *SH* lớn nhất thì hai mặt phẳng *(SAB)* và *(ABC)* vuông góc với nhau và khi đó tính độ dài SC.

…………….Hết……………..

Đáp án bài thi chọn HSG Toán 12 (2017-2018)

<u>Câu 1</u>(5.0 điểm):

<table>
<tr><th>Câu</th><th>Nội dung</th><th>Điểm</th></tr>
<tr><td>1 .1</td><td>Gọi M($x_0;\dfrac{x_0-1}{2(x_0+1)}$) $\in(C)$ là điểm cần tìm ($x_0 \neq -1$)
Gọi Δ tiếp tuyến với (C) tại M ta có phương trình.
$\Delta: y=f^{'}(x_0)(x-x_0)+\dfrac{x_0-1}{2(x_0+1)} \Rightarrow y=\dfrac{1}{\left(x_0+1\right)^2}(x-x_0)+\dfrac{x_0-1}{2(x_0+1)}$</td><td>1.0đ</td></tr>
<tr><td></td><td>Gọi A = $\Delta\cap$ox $\Rightarrow$ A($-\dfrac{x_0^2-2x_0-1}{2}$;0) B = $\Delta\cap$oy $\Rightarrow$ B(0; $\dfrac{x_0^2-2x_0-1}{2(x_0+1)^2}$).
Khi đó Δ tạo với hai trục tọa độ ΔOAB có trọng tâm là:
G($\left(-\dfrac{x_0^2-2x_0-1}{6};\dfrac{x_0^2-2x_0-1}{6(x_0+1)^2}\right)$.</td><td>1.0đ</td></tr>
<tr><td></td><td>Do G $\in$ đường thẳng:4x + y = 0 $\Rightarrow -4.\dfrac{x_0^2-2x_0-1}{6}+\dfrac{x_0^2-2x_0-1}{6(x_0+1)^2}=0$
$\Leftrightarrow 4=\dfrac{1}{\left(x_0+1\right)^2}$ (vì A, B $\neq$ O nên $x_0^2-2x_0-1\neq 0$)
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0+1=\dfrac{1}{2} \\ x_0+1=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=-\dfrac{1}{2} \\ x_0=-\dfrac{3}{2}\end{array}\right.$
Với $x_0=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow M(-\dfrac{1}{2};-\dfrac{3}{2})$; với $x_0=-\dfrac{3}{2}\Rightarrow M(-\dfrac{3}{2};\dfrac{5}{2})$.</td><td>1.0đ</td></tr>
<tr><td>1.2</td><td>Xét phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số và trục Ox
$x^3-3\left(m+1\right)x-2=0$ (1) $\Leftrightarrow \dfrac{x^3-3x-2}{x}=3m$ (2)
(vì x = 0 không là nghiệm của phương trình (1))</td><td>0.5đ</td></tr>
<tr><td></td><td>Xét hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{x^3-3x-2}{x},\ x\in\mathbb{R}\setminus\left\{0\right\}$.
$f'\left(x\right)=\dfrac{2x^3+2}{x^2};\ f'(x)=0\Leftrightarrow x=-1$</td><td>0.5đ</td></tr>
<tr><td></td><td>Bảng biến thiên:<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$ -1 0 $+\infty$</td></tr>
<tr><td>$f'\left(x\right)$</td><td>$-$ 0 $+$ ‖ $+$</td></tr>
<tr><td>$f\left(x\right)$</td><td>$+\infty \searrow 0 \nearrow +\infty$ ‖ $-\infty \nearrow +\infty$</td></tr>
</table></td><td>0.5đ</td></tr>
</table>

	Đồ thị hàm số cắt trục Ox tại một điểm duy nhất $\Leftrightarrow$ pt (2) có nghiệm duy nhất. Từ bảng biến thiên kết luận $m<0$.	0.5đ

<u>Câu 2</u>(4.0 điểm):

Câu	Nội dung	Điểm
1 (2.5đ)	Điều kiện : $y\ge -2; x\ge -6$ $(x-2)\sqrt{y+2}=\sqrt{y+1}.\sqrt{x^2-4x+5}$ Từ (2) : $\Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{y+2}}{\sqrt{y+1}}=.\dfrac{\sqrt{(x-2)^2+1}}{(x-2)}$ $\Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{y+2}{y+1}}=.\sqrt{\dfrac{(x-2)^2+1}{(x-2)^2}}$ $\Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{(y+1)+1}{y+1}}=.\sqrt{\dfrac{(x-2)^2+1}{(x-2)^2}}$. Xét hàm số $f(t)=\sqrt{\dfrac{t+1}{t}}\quad (t>0)\Rightarrow f'(t)=\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{t}}\right)'=-\dfrac{1}{2t^2\sqrt{1+\dfrac{1}{t}}}<0$. Chứng tỏ hàm số nghịch biến Để $f((x-2)^2)=f(y+1)$ chỉ xảy ra khi : $y+1=(x-2)^2$. Thay vào (1) ta được phương trình : $(1)\Leftrightarrow (x-2)^2+2(x-2)\sqrt{x+6}-7=0\Leftrightarrow \begin{cases} t=x-2\ge 0\\ t^2+2t\sqrt{t+8}=7\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} t=x-2\ge 0\\ 2t\sqrt{t+8}=7-t^2\end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 0\le t=x-2\le \sqrt{7}\\ 4t^2(t+8)=(7-t^2)^2\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} 0\le t=x-2\le \sqrt{7}\\ t^4-4t^3-46t^2+49=0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} 0\le t=x-2\le \sqrt{7}\\ (t-1)(t^3-3t^2-49t-49)=0\end{cases}$ +/ Trường hợp : t=1 hay x-2=1 suy ra x=3 và y+1=1 hay y=0 . Vậy nghiệm hệ là (x;y)=(3;0) +/ Trường hợp : $f(t)=t^3-3t^2-49t-49=0\Rightarrow f'(t)=3t^2-6t-49=3(t-1)^2-52<0\forall t\in\left[0;\sqrt{7}\right]$ Hàm số nghịch biến và f(0)= -49<0 chứng tỏ f(t)<0 với mọi $t\in\left[0;\sqrt{7}\right]$. Phương trình vô nghiệm .	0.5đ 0.5đ 0.5đ 0.5đ 0.5đ
2(1.5đ)	$\sqrt{x^4+x^2+1}=\sqrt{x^4+2x^2+1-x^2}$ $=\sqrt{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}$ Khi đó đặt $\begin{matrix} u=\sqrt{(x^2-x+1)}\\ v=\sqrt{(x^2+x+1)}\end{matrix}$	0.5đ

	thì $x^2-3x+1=2u^2-v^2$ Ta có phương trình: $6u^2+\sqrt{3}uv-3v^2=0$ $\Rightarrow u=\dfrac{\sqrt{3}}{3}v$ Giải ra được $x = 1$	0.5đ 0.5đ

<u>Câu 3</u> (3.0 điểm):

Câu	Nội dung	Điểm
	Từ điều kiện: $5x^2 + 5(y^2 + z^2) = 9x(y + z) + 18yz$ $\Leftrightarrow 5x^2 - 9x(y + z) = 18yz - 5(y^2 + z^2)$ Áp dụng BĐT Côsi ta có: $yz \le \frac{1}{4}(y+z)^2; y^2+z^2 \ge \frac{1}{2}(y+z)^2 \Rightarrow 18yz - 5(y^2 + z^2) \le 2(y + z)^2$. Do đó: $5x^2 - 9x(y + z) \le 2(y + z)^2 \Leftrightarrow [x - 2(y + z)](5x + y + z) \le 0$ $\Rightarrow x \le 2(y + z)$ $P=\dfrac{x}{y^2+z^2}-\dfrac{1}{(x+y+z)^3}\le\dfrac{2x}{(y+z)^2}-\dfrac{1}{(x+y+z)^3}\le\dfrac{4}{y+z}-\dfrac{1}{27(y+z)^3}$ Đặt $y + z = t > 0$, ta có: $P \le 4t - \dfrac{1}{27}t^3$ Xét hàm $\Rightarrow P \le 16$. Vậy MaxP = 16 khi $\begin{cases} y=z=\dfrac{1}{12} \\ x=\dfrac{1}{3} \end{cases}$	0.5đ 0.5đ 0.5đ 0.5đ 0.5đ 0.5đ

<u>Câu 4</u>(3.0 điểm):

Câu	Nội dung	Điểm

1	Đặt $g(n) = an^2 + bn + c$ và $v_n = u_n + g(n)$ (a, b, c $\in$ R) với $v_{n+1} = 3v_n$. Khi đó : $v_{n+1} = 3v_n \Leftrightarrow u_{n+1} + g(n+1) = 3(u_n + g(n))$ $\Leftrightarrow 3u_n + n^2 + 1 + g(n+1) = 3u_n + 3g(n)$ $\Leftrightarrow n^2 + 1 + a(n+1)^2 + b(n+1) + c = 3an^2 + 3bn + 3c$ $\Leftrightarrow (a+1)n^2 + (2a+b)n + 1 + a + b + c = 3an^2 + 3bn + 3c$ Nên : $\begin{cases} a+1=3a \\ 2a+b=3b \\ 1+a+b+c=3c \end{cases} \Leftrightarrow$ a = $\frac{1}{2}$; b = $\frac{1}{2}$; c = 1. Do đó ta được : $g(n) = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + 1$. Như vậy $v_n = u_n + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + 1 \Leftrightarrow u_n = v_n - (\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + 1)$ thì $\begin{cases} u_{n+1} = 3u_n + n^2 + 1, n \geq 1, n \in N \\ u_1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_{n+1} = 3v_n \ , n \geq 1 \\ v_1 = u_1 + g(1) = 4 \end{cases}$. Suy ra : $v_n = 3^{n-1}.v_1 = 4.3^{n-1}$. Vậy : $u_n = 4.3^{n-1} - \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n - 1 = 4.3^{n-1} - \frac{1}{2}(n^2 + n + 2)$. Ta có +) $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ +) $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ +) $4(3^0 + 3^1 + 3^2 + \ldots + 3^{n-1})$ $= 4\frac{3^n - 1}{3 - 1}$ Thay n= 2017	0.5đ 0.5đ 0.5đ 0.5đ 0.5đ 0.5đ

Câu 5(5.0 điểm):

Câu	Nội dung	Điểm
1(2đ)	Vẽ đường tròn (C;CA) cắt đường thẳng BD tại E (E $\neq$ D), khi đó BA là tiếp tuyến của đường tròn. Ta có BD.BE = BA^2 (do ΔBDA ~ΔBAE), BH.BC = BA^2 suy ra BH.BC = BD.BE $\Rightarrow \frac{BD}{BH} = \frac{BC}{BE}$ $\Rightarrow \Delta BDH \sim \Delta BCE$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{BHD} = \widehat{BEC} \Rightarrow$ tứ giác DHCE nội tiếp $\Rightarrow \widehat{BHD} = \widehat{BEC} = \widehat{CDE} = \widehat{CHE} \Rightarrow \widehat{AHD} = \widehat{AHE}$. Do $AH \perp BC$ nên HA, HB tương ứng là đường phân giác trong và phân giác ngoài của góc $\widehat{DHE}$	0.5đ 0.5đ 0.5đ 0.5đ

	Gọi I là giao điểm của AH và BE suy ra $\frac{ID}{IE}=\frac{HD}{HE}=\frac{BD}{BE}$ (*) giả thiết $\widehat{MDB}=\frac{1}{2}\widehat{ACD}=\widehat{AEB}$ nên MN // AE. Do đó $\frac{MD}{AE}=\frac{BD}{BE},\frac{DN}{AE}=\frac{DI}{IE}$. Kết hợp với (*) ta có $\frac{MD}{AE}=\frac{DN}{AE}\Rightarrow DM=DN$.	
2(3đ)	a) Tam giác SAB đều nên S thuộc mặt phẳng trung trực (P) của AB Mặt phẳng (P) cố định và (P) vuông góc với (ABC) Gọi d là giao tuyến của mp(ABC) và mp(P) thì d là đường thẳng cố định H là hình chiếu của S nên H thuộc d KL	0.5đ 0.5đ
	b)Gọi I là trung điểm của AB thì SI = $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ SH $\leq$ SI = $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ SH đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ khi H trùng I. Khi đó SH vuông góc với mặt phẳng (ABC) nên (ABC) vuông góc với (SAB) Tính được $CI=\frac{a\sqrt{7}}{2}$; $SC=\frac{a\sqrt{10}}{2}$	 0.5đ 0.5đ 1.0đ