

Câu 1. (2,0 điểm) Giải phương trình sau: $2\sin^2 x - \sin x = 0$.

Câu 2. (4,0 điểm)

a. Từ các số 1,2,3,4,5,6 lập được bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau.

b. Tính tổng $S = 2C_{2020}^1 + 3.2^3.C_{2020}^3 + 5.2^5.C_{2020}^5 + \dots + 2019.2^{2019}.C_{2020}^{2019}$.

Câu 3. (2,0 điểm) Cho hàm số $y = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1}, & x > 1 \\ x^2 + ax - 2, & x \leq 1 \end{cases}$. Tìm a để hàm số liên tục tại $x_0 = 1$

Câu 4. (2,0 điểm) Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_1 = 2021 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{2020}{u_n} \right), n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$.

Chứng minh rằng dãy (u_n) có giới hạn hữu hạn khi $n \rightarrow +\infty$ và tính giới hạn đó.

Câu 5. (2,0 điểm) Cho hàm số $y = \frac{2x-3}{x-1}$ có đồ thị (C) . Cho biết $I(1;2)$; $d_1 : x = 1$; $d_2 : y = 2$. Gọi d tiếp tuyến bất kỳ của (C) ; A, B lần lượt là giao điểm của d với d_1 và d_2 . Chứng minh rằng $IA \cdot IB$ là hằng số.

Câu 6. (2,0 điểm) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C) xác định và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f^3(1+x) + 2f(1+2x) - 21x - 3 = 0$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ bằng 1.

Câu 7. (4,0 điểm) Cho tam giác đều ABC cạnh là a . Gọi D là điểm đối xứng với A qua BC . Trên đường thẳng d đi qua D và vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại D lấy điểm S sao cho $SD = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. Chứng minh rằng $(SAD) \perp (SBC)$ và $(SAB) \perp (SAC)$

Câu 8. (2,0 điểm) Cho hình chóp $S.ABC$ và điểm M tùy ý nằm bên trong tam giác ABC . Ba đường thẳng đi qua M , song song với SA, SB, SC cắt lần lượt các mặt phẳng $(SBC), (SAC), (SAB)$ tại A_1, B_1, C_1 . Chứng minh rằng $\frac{SA}{MA_1} + \frac{SB}{MB_1} + \frac{SC}{MC_1} \geq 9$.

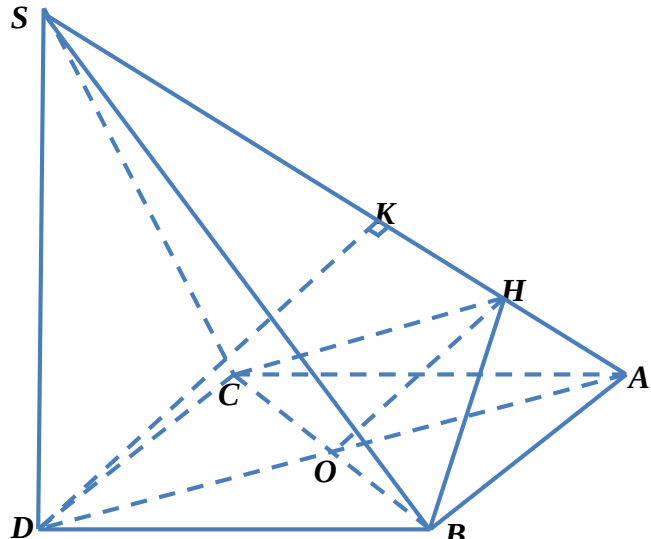
----- Hết -----

Họ và tên: Số báo danh:

HƯỚNG DẪN CHẤM

Câu	Nội dung	Điểm
Câu 1 (2,0 điểm)	Giải phương trình sau: $2\sin^2 x - \sin x = 0$.	
	Phương trình tương đương: $2\sin^2 x - \sin x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases}$	1,0đ
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases}$	1,0đ
Câu 2 (4,0 điểm)	a. Từ các số tự nhiên 1,2,3,4,5,6 lập được bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau.	
	b. Tính tổng $S = 2C_{2020}^1 + 3.2^3.C_{2020}^3 + 5.2^5.C_{2020}^5 + \dots + 2019.2^{2019}.C_{2020}^{2019}$.	
	a. Từ các số tự nhiên 1,2,3,4,5,6 lập được bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau từng đôi một.	
	Mỗi số tự nhiên tạo thành là một chỉnh hợp chập 4 của 6 phần tử.	1,0đ
	Số các số tự nhiên thỏa mãn bài toán là $A_6^4 = 360$ số.	1,0đ
	b. Tính tổng $S = 2C_{2020}^1 + 3.2^3.C_{2020}^3 + 5.2^5.C_{2020}^5 + \dots + 2019.2^{2019}.C_{2020}^{2019}$.	
	Xét khai triển: $(1+x)^{2020} = C_{2020}^0 + C_{2020}^1 x + C_{2020}^2 x^2 + C_{2020}^3 x^3 + \dots + C_{2020}^{2019} x^{2019} + C_{2020}^{2020} x^{2020}$	0,5đ
	Lấy đạo hàm 2 vế: $2020(1+x)^{2019} = C_{2020}^1 + 2C_{2020}^2 x + 3C_{2020}^3 x^2 + \dots + 2019C_{2020}^{2019} x^{2018} + 2020C_{2020}^{2020} x^{2019}$	0,5đ
	Chọn $x=2$ ta có: $2020.3^{2019} = C_{2020}^1 + 2.2C_{2020}^2 + 3.2^2 C_{2020}^3 + \dots + 2019.2^{2018} C_{2020}^{2019} + 2020.2^{2019} C_{2020}^{2020} \quad (1)$ Chọn $x=-2$ ta có $-2020 = C_{2020}^1 - 2.2C_{2020}^2 + 3.2^2 C_{2020}^3 - \dots + 2019.2^{2018} C_{2020}^{2019} - 2020.2^{2019} C_{2020}^{2020} \quad (2)$	0,5đ
	Lấy (1)+(2) ta được $S = 2C_{2020}^1 + 3.2^3.C_{2020}^3 + 5.2^5.C_{2020}^5 + \dots + 2019.2^{2019}.C_{2020}^{2019} = 2020(3^{2019} - 1)$	0,5đ
Câu 3 (2,0 điểm)	Cho hàm số $y = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1}, & x > 1 \\ x^2 + ax - 2, & x \leq 1 \end{cases}$. Tìm a để hàm số liên tục tại $x_0 = 1$	

	Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$ Với $x_0 = 1 \Rightarrow x_0 \in \mathbb{R}$; $f(x_0) = f(1) = a - 1$	0,5đ
	$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x + 1) = 2$	0,5đ
	$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + ax - 2) = a - 1$	0,5đ
	Hàm số liên tục tại $x_0 = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) \Leftrightarrow a - 1 = 2 \Leftrightarrow a = 3$	0,5đ
Câu 4 (2,0 điểm)	Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_1 = 2021 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{2020}{u_n} \right), n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$ Chứng minh rằng dãy (u_n) có giới hạn hữu hạn khi $n \rightarrow +\infty$ và tính giới hạn đó.	
	Bằng quy nạp ta dễ dàng chứng minh được $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$	0.25đ
	Ta có: $u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{2020}{u_n} \right) \geq \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{u_n \cdot \frac{2020}{u_n}} = \sqrt{2020}, \forall n \geq 1.$ vậy (u_n) là dãy bị chặn dưới.	0.5đ
	Chứng minh (u_n) là dãy giảm. Xét $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{2020}{u_n} \right) - u_n = \frac{2020 - (u_n)^2}{2u_n} \leq 0$, vậy (u_n) là dãy giảm.	0.5đ
	Vì (u_n) là dãy giảm và bị chặn dưới nên tồn tại $\lim u_n = l$ ($l \geq 0, l$ hữu hạn).	0.25đ
	Lấy giới hạn 2 vế của đẳng thức $u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{2020}{u_n} \right)$ ta có: $l = \frac{1}{2} \left(l + \frac{2020}{l} \right) \Leftrightarrow l = \sqrt{2020}.$ Vậy (u_n) là dãy số giảm có hữu hạn hữu hạn và $\lim(u_n) = \sqrt{2020}$	0.5đ
Câu 5 (2,0 điểm)	Cho hàm số $y = \frac{2x-3}{x-1}$ có đồ thị (C). Cho biết $I(1;2); d_1: x=1; d_2: y=2$. Gọi d tiếp tuyến bất kỳ của (C); A,B lần lượt là giao điểm của d với d_1 và d_2. Chứng minh rằng $IA \cdot IB$ là hằng số.	
	Gọi $M(x_0; y_0) \in (C)$ với $x_0 \neq 1$ Phương trình tiếp tuyến d của (C) tại M có phương trình: $y = \frac{1}{(x_0 - 1)^2} (x - x_0) + \frac{2x_0 - 3}{x_0 - 1}$	0.5đ
	$d \cap d_1 = A \left(1; \frac{2x_0 - 4}{x_0 - 1} \right)$	0.5đ
	$d \cap d_2 = B(2x_0 - 1; 2)$	0.5đ
	Ta có $IA = \left \frac{2}{x_0 - 1} \right , IB = 2 x - 1$. Vậy $IA \cdot IB = 4$	0.5đ

Câu 6 (2,0 điểm)	Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C) xác định và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn: $f^3(1+x) + 2f(1+2x) - 21x - 3 = 0$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ bằng 1.	
	Từ đẳng thức $f^3(1+x) + 2f(1+2x) - 21x - 3 = 0$ Cho $x=0$ ta được $f^3(1) + 2f(1) - 3 = 0 \Leftrightarrow f(1) = 1$	0,75đ
	Lấy đạo hàm $f^3(1+x) + 2f(1+2x) - 21x - 3 = 0$ ta có: $3f^2(1+x) \cdot f'(1+x) + 4f'(1+2x) - 21 = 0$ Tại $x=0$ ta có $3f^2(1) \cdot f'(1) + 4f'(1) - 21 = 0 \Leftrightarrow 7f'(1) - 21 = 0 \Leftrightarrow f'(1) = 3$	0,75đ
	Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ bằng 1 có phương trình $y = 3(x-1) + 1 \Leftrightarrow y = 3x - 2$	0,5đ
Câu 7 (4,0 điểm)	Cho tam giác đều ABC cạnh là a. Gọi D là điểm đối xứng với A qua BC. Trên đường thẳng d đi qua D và vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại D lấy điểm S sao cho $SD = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. CMR $(SAD) \perp (SBC)$ và $(SAB) \perp (SAC)$	
		
	Chứng minh $(SAD) \perp (SBC)$	
	$\begin{cases} BC \perp AD \\ BC \perp SD \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAD) \text{ và } BC \subset (SBC) \text{ nên } (SAD) \perp (SBC)$	1,5đ
	Chứng minh $(SAB) \perp (SAC)$	
	Gọi K là hình chiếu của D trên SA và H là trung điểm của AK; $O = BC \cap AD$ ta có: $OH \perp SA$ vì $OH // DK \perp SA$ $BC \perp SA$ vì $BC \perp (SAD)$ Do đó $SA \perp (HBC) \Rightarrow HB \perp SA; HC \perp SA$	0,5đ
	Khi đó góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) là góc giữa HB và HC (1)	0,5đ
	Tam giác ABC đều cạnh a , $OA = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AD = a\sqrt{3}$	0,5đ
	Tam giác SAD vuông tại D, đường cao DK nên $\frac{1}{DK^2} = \frac{1}{SD^2} + \frac{1}{DA^2} = \frac{4}{6a^2} + \frac{1}{3a^2} = \frac{1}{a^2} \Rightarrow DK = a$	0,5đ

	Trong tam giác HBC có $OH = \frac{a}{2}$ (vì $OH = \frac{1}{2}DK$) nên ta có $OH = OB = OC$ suy ra tam giác HBC vuông tại H $\Rightarrow HB \perp HC$ (2) Vậy từ (1), (2) ta kết luận $(SAB) \perp (SAD)$	0,5đ
Câu 8 (2,0 điểm)	Cho hình chóp $S.ABC$ và điểm M tùy ý nằm bên trong tam giác ABC. Ba đường thẳng đi qua M, song song với SA, SB, SC cắt lần lượt các mặt phẳng $(SBC), (SAC), (SAB)$ tại A_1, B_1, C_1. Chứng minh rằng $\frac{SA}{MA_1} + \frac{SB}{MB_1} + \frac{SC}{MC_1} \geq 9$.	
	Gọi $H = AM \cap BC; K = BM \cap AC; I = CM \cap AB$. Theo định lý Thales ta có: $\frac{SA}{MA_1} + \frac{SB}{MB_1} + \frac{SC}{MC_1} = \frac{AH}{MH} + \frac{BK}{MK} + \frac{CI}{MI}$	1,0đ
	Do M nằm bên trong tam giác ABC nên ta có: $\begin{aligned} \frac{AH}{MH} + \frac{BK}{MK} + \frac{CI}{MI} &= \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle MBC}} + \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle MAC}} + \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle MAB}} = S_{\triangle ABC} \left(\frac{1}{S_{\triangle MBC}} + \frac{1}{S_{\triangle MAC}} + \frac{1}{S_{\triangle MAB}} \right) \\ &= (S_{\triangle MBC} + S_{\triangle MAC} + S_{\triangle MAB}) \left(\frac{1}{S_{\triangle MBC}} + \frac{1}{S_{\triangle MAC}} + \frac{1}{S_{\triangle MAB}} \right) \geq 9 \end{aligned}$	1,0đ

Chú ý: Học sinh có thể làm theo cách khác. Nếu bài làm đúng vẫn được điểm tối đa theo các phần tương ứng.