

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

(Đề thi có 01 trang, gồm 5 câu)

Môn thi: **TOÁN LỚP 11**
Thời gian làm bài: **180** phút

Câu 1. (5 điểm)

- a) Giải phương trình $3\tan 2x + 2\cos 2x = \frac{3}{\cos 2x} + 2\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$.
- b) Tính giới hạn $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 2017)\sqrt[5]{1-5x} - 2017}{x}$.

Câu 2. (5 điểm)

- a) Năm 2018 là năm kỷ niệm 50 năm Chiến thắng Đồng Lộc (24/7/1968-24/7/2018), trường học X cho học sinh trong các đội tuyển học sinh giỏi Toán khối 10, khối 11 của trường về tham quan khu di tích Ngã ba Đồng lộc. Biết rằng đội tuyển Toán khối 10 có 4 em gồm 2 nam, 2 nữ; đội tuyển Toán khối 11 có 4 em gồm 3 nam, 1 nữ. Trong đợt tham quan thứ nhất, trường chọn 3 học sinh với yêu cầu có cả đội tuyển 10, cả đội tuyển 11; có cả nam và cả nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn.
- b) Cho n là số tự nhiên thỏa mãn $C_{2017}^0 + 3^2 C_{2017}^2 + \dots + 3^{2016} C_{2017}^{2016} = 2^n (2^{n+1} - 1)$. Tìm hệ số của số hạng chứa x^{2016} trong khai triển $(x+2)^n (x^2+x+4)$.

Câu 3. (5 điểm)

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh $2a$, H là trung điểm của AB , $SH \perp (ABC)$, $SH = x$. Gọi M là hình chiếu vuông góc của H lên đường thẳng AC và N là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{MH} = \overrightarrow{HN}$.

- a) Khi $x = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, chứng minh đường thẳng SN vuông góc với mặt phẳng (SAC) .
- b) Tìm x theo a để góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC) bằng 45° .

Câu 4. (2,5 điểm)

Cho $a > 1$ và dãy số (x_n) xác định như sau:

$$x_1 = a; \quad x_{n+1} = \sqrt{a \cdot x_n^2 + 3x_n + 2018} \quad \text{với } n = 1, 2, \dots$$

Tìm a để $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 2018$.

Câu 5. (2,5 điểm)

Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $x^4 + y^4 + z^4 + 2x^2 y^2 z^2 = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + y^2 + z^2 - \sqrt{2}|xyz|$.

-----**Hết**-----

- Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.
- Giám thị không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:Số báo danh:

ĐÁP ÁN

Câu 1.

$$\text{a) } \text{ĐK} \begin{cases} \cos 2x \neq 0 \\ \cos x + \sin x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \cos 2x \neq 0$$

Khi đó phương trình đã cho trở thành:

$$\frac{3 \sin 2x - 3}{\cos 2x} - 2 \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} + 2 \cos 2x = 0 \Leftrightarrow \frac{3 \sin 2x - 3}{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)} + 2 \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x} + 2 \cos 2x = 0$$

$$3 \sin 2x - 3 + 2(\cos x - \sin x)^2 + 2 \cos^2 2x = 0 \Leftrightarrow 3 \sin 2x - 3 + 2(1 - \sin 2x) + 2(1 - \sin^2 2x) = 0$$

$$\Leftrightarrow -2 \sin^2 2x + \sin 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = 1; \sin 2x = -\frac{1}{2}$$

+) $\sin 2x = 1 \Rightarrow \cos 2x = 0$ không thỏa mãn ĐK

$$\text{+) } \sin 2x = -\frac{1}{2} \text{ (thỏa mãn ĐK)} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 2x = \pi + \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{7\pi}{12} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{b) } I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 2017)^{\sqrt[5]{1-5x}} - 2017}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[x^{\sqrt[5]{1-5x}} + \frac{2017(\sqrt[5]{1-5x} - 1)}{x} \right]$$

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow 0} x^{\sqrt[5]{1-5x}} = 0$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2017(\sqrt[5]{1-5x} - 1)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2017(-5x)}{\left(\sqrt[5]{(1-5x)^4} + \sqrt[5]{(1-5x)^3} + \sqrt[5]{(1-5x)^2} + \sqrt[5]{(1-5x)} + 1\right)x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-5 \cdot 2017}{\left(\sqrt[5]{(1-5x)^4} + \sqrt[5]{(1-5x)^3} + \sqrt[5]{(1-5x)^2} + \sqrt[5]{(1-5x)} + 1\right)} = -2017 \end{aligned}$$

Câu 2. (5 điểm)

a) Ta xét các trường hợp

TH1: 2 học sinh khối 10, 1 học sinh khối 11

KN1: 2 nam khối 10, 1 nữ khối 11 có $C_2^2 \cdot C_1^1 = 1$ cách

KN2: 2 nữ khối 10, 1 nam khối 11 có $C_2^2 \cdot C_1^1 = 3$ cách

KN3: 1 nữ và 1 nam khối 10, 1 học sinh khối 11 có $C_2^1 \cdot C_2^1 \cdot C_1^1 = 16$ cách

Vậy TH1 có 20 cách chọn

TH2: 2 học sinh khối 11, 1 học sinh khối 10

KN1: 2 nam khối 11, 1 nữ khối 10 có $C_3^2 \cdot C_2^1 = 6$ cách

KN2: 1 nữ và 1 nam khối 11, 1 học sinh khối 10 có $C_3^1 \cdot C_1^1 \cdot C_1^1 = 12$ cách

Vậy TH2 có 18 cách chọn

Kết hợp hai trường hợp ta thấy có 38 cách chọn

$$\text{b) Ta có } C_{2017}^0 + 3C_{2017}^1 + 3^2 C_{2017}^2 + \dots + 3^{2016} C_{2017}^{2016} + 3^{2017} C_{2017}^{2017} = (1+3)^{2017} = 4^{2017} \quad (1)$$

$$C_{2017}^0 - 3C_{2017}^1 + 3^2 C_{2017}^2 + \dots + 3^{2016} C_{2017}^{2016} - 3^{2017} C_{2017}^{2017} = (1-3)^{2017} = -2^{2017} \quad (2)$$

Cộng vế theo vế hai đẳng thức trên ta có

$$C_{2017}^0 + 3^2 C_{2017}^2 + \dots + 3^{2016} C_{2017}^{2016} = \frac{1}{2} (4^{2017} - 2^{2017}) = 2^{2016} (2^{2017} - 1)$$

$$\text{Từ giả thiết suy ra } C_{2017}^0 + 3^2 C_{2017}^2 + \dots + 3^{2016} C_{2017}^{2016} = 2^n (2^{n+1} - 1)$$

$$2^n(2^{n+1}-1)=2^{2016}(2^{2017}-1) \text{ hay } n=2016$$

$$(x+2)^n(x^2+x+4)=(x+2)^{n+2}-3x(x+2)^n=(x+2)^{2018}-3x(x+2)^{2016}$$

Xét khai triển $(x+2)^{2018}$, số hạng chứa x^{2016} là $C_{2018}^2 2^2 x^{2016}$

Xét khai triển $(x+2)^{2016}$, số hạng chứa x^{2015} là $C_{2016}^1 2x^{2015}$

Số hạng chứa x^{2016} trong khai triển $(x+2)^n(x^2+x+4)$ là $C_{2018}^2 2^2 x^{2016} - 3C_{2016}^1 2x^{2016}$

Do đó hệ số cần tìm là : $4C_{2018}^2 - 6C_{2016}^1$

Câu 3.

a) Ta có $AC \perp HM, AC \perp SH \Rightarrow AC \perp SN$ (1)

Từ giả thiết ta có H là trung điểm của MN

Gọi K là trung điểm của AC, ta có $HM = \frac{1}{2}BK = \frac{a\sqrt{3}}{2}$,

do đó ta có $HM = HN = SH = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \triangle NSM$ vuông tại S

suy ra $SM \perp SN$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $SN \perp (SAC)$

b) Gọi I là hình chiếu vuông góc của H lên SM, ta có $HI \perp (SAC)$

Trong mặt (ABI) kẻ đường thẳng qua B, song song với HI cắt AI tại P.

Ta có $BP \perp (SAC)$

Gọi φ là góc giữa SB và (SAC), ta có $\varphi = \angle BSP$.

Tam giác SHM vuông tại H và HI là đường cao nên

$$HI = \frac{SH \cdot HM}{SM} = \frac{\sqrt{3}ax}{\sqrt{3a^2 + 4x^2}} \Rightarrow BP = \frac{2\sqrt{3}ax}{\sqrt{3a^2 + 4x^2}}.$$

$$SB = \sqrt{SH^2 + HB^2} = \sqrt{x^2 + a^2}$$

$$\sin \varphi = \frac{BP}{SB} = \frac{2\sqrt{3}ax}{\sqrt{(4x^2 + 3a^2)(x^2 + a^2)}}$$

$$\text{Theo giả thiết ta có } \frac{2\sqrt{3}ax}{\sqrt{(4x^2 + 3a^2)(x^2 + a^2)}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow 24a^2x^2 = 4x^4 + 3x^4 + 7x^2a^2$$

$$4x^4 - 17x^2a^2 + 3x^4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{17 \pm \sqrt{241}}{8}a^2$$

$$\Rightarrow x = a\sqrt{\frac{17 \pm \sqrt{241}}{8}}$$

Câu 4.

Bằng quy nạp ta chứng minh được $x_n > 0 \forall n$

Vì $x_{n+1} = \sqrt{ax_n^2 + 3x_n + 2018}$ và $a > 1$ nên $x_{n+1} > x_n \forall n$ suy ra (x_n) là dãy số tăng

Giả sử dãy (x_n) bị chặn trên $\Rightarrow \exists \alpha > 1$ để $\lim x_n = \alpha$. Khi đó:

$$\alpha = \sqrt{a\alpha^2 + 3\alpha + 2018} \Leftrightarrow (a-1)\alpha^2 + 3\alpha + 2018 = 0, \text{ vô lý vì } a > 1$$

Vậy $\lim x_n = +\infty$ (1)

$$\text{Ta có } x_{n+1} = \sqrt{ax_n^2 + 3x_n + 2018} \Leftrightarrow \frac{x_{n+1}}{x_n} = \sqrt{a + \frac{3}{x_n} + \frac{2018}{x_n^2}} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra : $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \sqrt{a}$

Do đó $\sqrt{a} = 2018 \Leftrightarrow a = 2018^2$

Câu 5.

TH1: Nếu có một số bằng 0, giả sử là z , khi đó ta có $x^4 + y^4 = 1$

và $P = x^2 + y^2 \geq \sqrt{x^4 + y^4} = 1$, có “=” khi một số = 0; một số $= \pm 1$.

TH2: Nếu các số đều khác không.

Từ giả thiết suy ra tồn tại ΔABC nhọn sao cho:

$$x^2 = \cos A; \quad y^2 = \cos B; \quad z^2 = \cos C;$$

$$P = \cos A + \cos B + \cos C - \sqrt{2 \cos A \cos B \cos C} = 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} - \sqrt{2 \cos A \cos B \cos C}$$

$$\text{Ta sẽ chứng minh } 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \geq \sqrt{2 \cos A \cos B \cos C} \quad (1)$$

$$\text{Ta có } (1) \Leftrightarrow 8 \sin^2 \frac{A}{2} \sin^2 \frac{B}{2} \sin^2 \frac{C}{2} \geq \cos A \cos B \cos C$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \frac{8 \sin^2 \frac{A}{2} \sin^2 \frac{B}{2} \sin^2 \frac{C}{2}}{\sin A \sin B \sin C} &\geq \frac{\cos A \cos B \cos C}{\sin A \sin B \sin C} \Leftrightarrow \cot A \cdot \cot B \cdot \cot C \leq \tan \frac{A}{2} \cdot \tan \frac{B}{2} \cdot \tan \frac{C}{2} \\ \Leftrightarrow \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C &\geq \cot \frac{A}{2} \cdot \cot \frac{B}{2} \cdot \cot \frac{C}{2} \Leftrightarrow \tan A + \tan B + \tan C \geq \cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} \quad (2) \end{aligned}$$

Bất đẳng thức (2) đúng do $\tan A + \tan B \geq 2 \cot \frac{C}{2}$ và hai bất đẳng thức tương tự

Có dấu “=” khi tam giác đều $\Leftrightarrow x^2 = y^2 = z^2 = \frac{1}{2}$.

suy ra $P \geq 1$, có “=” khi hai số = 0; một số $= \pm 1$ hoặc $x^2 = y^2 = z^2 = \frac{1}{2}$.

Vậy GTNN của P là 1