



**ĐỀ ÔN LUYỆN CÁC NHÓM CÂU HỎI
VẬN DỤNG CAO TRONG ĐỀ THI THPT QUỐC GIA**

*Đề gồm 40 câu trắc nghiệm
Quà tặng mừng ngày nhà giáo Việt Nam 20/11*

Tuyển chọn 40 câu vận dụng cao có lời giải chi tiết là một sản phẩm được biên soạn, sưu tầm và sáng tác bởi nhóm Chinh Phục Olympic Toán và được đăng trên Fanpage Tạp chí và tư liệu Toán học. Đồng thời đây cũng là một quà tặng gửi tới các thầy cô nhân ngày nhà giáo Việt Nam, và cũng nhân dịp này cả nhóm chúc các thầy cô trên cả nước có sức khỏe, hạnh phúc trong cuộc sống, thành đạt hơn trong công việc và có một ngày 20/11 thật ý nghĩa và vui vẻ. Xin cảm ơn mọi người!

ĐỀ BÀI

Câu 1 : Biết rằng tập hợp các giá trị của m để phương trình sau có nghiệm là đoạn $[a;b]$ $(m-2)\sqrt{x+3}+(2m-1)\sqrt{1-x}+m-1=0$ có nghiệm là đoạn $[a;b]$. Tính giá trị của biểu thức $S=a^2+b^2-3ab$?

- A. 1 B. 2 C. 0 D. 3

Câu 2: Gọi $z_1=a+bi, z_2=c+di$ là nghiệm của phương trình $|z-2\sqrt{2}|+|z+2\sqrt{2}|=6$ đồng thời thỏa mãn $ac+bd=0$. Gọi M, n lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P=\frac{1}{2}|z_1z_2|$. Tính giá trị của biểu thức $S=M+n$

- A. $S=\frac{14}{5}$ B. $S=\frac{13}{5}$ C. $S=\frac{12}{5}$ D. $S=\frac{11}{5}$

Câu 3: Cho hai hàm $f(x)$ và $g(x)$ có đạo hàm trên $[1;2]$, thỏa mãn $f(1)=g(1)=0$ và

$$\begin{cases} \frac{x}{(x+1)^2}g(x)+2018x=(x+1)f'(x) \\ \frac{x^3}{x+1}g'(x)+f(x)=2019x^2 \end{cases}, \forall x \in [1;2]. \text{ Tính } I=\int_1^2 \left[\frac{x}{x+1}g(x)-\frac{x+1}{x}f(x) \right] dx.$$

- A. $I=\frac{1}{2}$. B. $I=1$. C. $I=\frac{3}{2}$. D. $I=2$.

Câu 4: Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có $AB=6, BC=12, \angle ABC=60^\circ$. Thể tích khối chóp C'.ABB'A' bằng 216. Gọi M là điểm nằm trong tam giác A'B'C' sao cho tổng diện tích các mặt bên của hình chóp M.ABC đạt giá trị nhỏ nhất. Tính cosin góc giữa 2 đường thẳng B'M, AC' ?

- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{3}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{4}$ D. $\frac{1}{2}$

Câu 5: Hai người bắn độc lập vào một mục tiêu, mỗi người bắn 1 lần. Xác suất trúng của người thứ nhất là 0,9; của người thứ hai là 0,7. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $M = 13p - 10p^2$, trong đó p là xác suất của một biến cố.

- A. $\frac{169}{40}$ B. $\frac{528}{125}$ C. $\frac{4221}{1000}$ D. 3

Câu 6: Cho tam giác ABC có $BAC = 60^\circ$ và AB, AC đã biết. Biểu thức $P = k.MA + MB + MC$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $(AB + AC)$ với mọi giá trị thực $k \geq k_0$. Giá trị của k_0 nằm trong khoảng nào dưới đây?

- A. $(0;1)$ B. $\left(\frac{3}{2}; 2\right)$ C. $\left(1; \frac{3}{2}\right)$ D. $(2;3)$

Câu 7: Cho $I_n = \int \tan^n x dx$ với $n \in \mathbb{N}$. Khi đó $I_0 + I_1 + 2(I_2 + I_3 + \dots + I_8) + I_9 + I_{10}$ bằng?

- A. $\sum_{r=1}^9 \frac{(\tan x)^r}{r} + C$ B. $\sum_{r=1}^9 \frac{(\tan x)^{r+1}}{r+1} + C$ C. $\sum_{r=1}^{10} \frac{(\tan x)^r}{r} + C$ D. $\sum_{r=1}^{10} \frac{(\tan x)^{r+1}}{r+1} + C$

Câu 8: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1;2]$ thỏa mãn đồng thời 2 điều kiện $2[f(2)]^2 - [f(1)]^2 = 63; 2[f(x)]^2 + x^2[f'(x)]^2 = 27x^2, \forall x \in [1;2]$. Tính giá trị của tích phân $\int_1^2 [f(x)]^2 dx$

- A. 15 B. 18 C. 21 D. 25

Câu 9: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $e.f(1) = 4f(0) = 4$ và đồng thời $\int_0^1 e^{2x} ([f'(x)]^2 - [f(x)]^2) dx + 4 \int_0^1 e^x . f(x) dx = \frac{8}{3}$. Tính tích phân $\int_0^1 f(x) dx$?

- A. $\frac{4(e-1)}{e}$ B. $\frac{3(e-1)}{e}$ C. $\frac{2(e+2)}{e}$ D. $\frac{5(e-2)}{e}$

Câu 10: Cho x, y là hai số thực dương thay đổi thỏa mãn điều kiện

$$(xy+1)(\sqrt{xy+1}-\sqrt{y}) \leq 1-x-\frac{1}{y}.$$

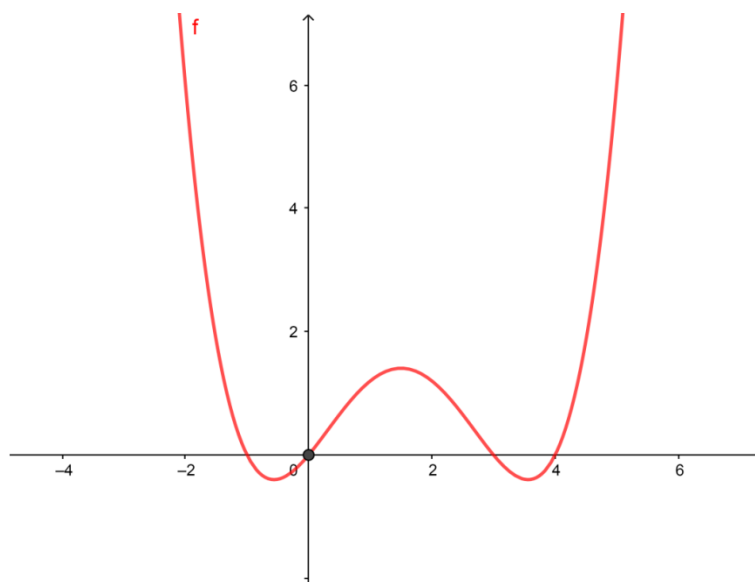
Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{x+y}{\sqrt{x^2-xy+3y^2}} - \frac{x-2y}{6(x+y)}$?

- A. $\frac{\sqrt{5}}{3} - \frac{7}{30}$ B. $\frac{7}{30} - \frac{\sqrt{5}}{3}$ C. $\frac{\sqrt{5}}{3} + \frac{7}{30}$ D. $\frac{\sqrt{5}+7}{30}$

Câu 11: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)^2(x^2-2x)$ với $\forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $f(x^2-8x+m)$ có 5 điểm cực trị?

- A. 15 B. 17 C. 16 D. 18

Câu 12: Biết rằng đồ thị hàm số bậc 4: $y = f(x)$ được cho như hình vẽ sau:



Tìm số giao điểm của đồ thị hàm số $y = g(x) = [f'(x)]^2 - f(x) \cdot f''(x)$ và trục Ox .

- A. 4 B. 6 C. 2 D. 0

Câu 13: Cho biểu thức $A = \log\left(2017 + \log\left(2016 + \log\left(2015 + \log\left(\dots + \log(3 + \log 2) \dots\right)\right)\right)\right)$

Biểu thức A có giá trị thuộc khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

- A. $(\log 2017; \log 2018)$ B. $(\log 2019; \log 2020)$
C. $(\log 2018; \log 2019)$ D. $(\log 2020; \log 2021)$

Câu 14: Cho dãy số (u_n) thỏa mãn
$$\begin{cases} \log\left(u_2 + \frac{391}{40}\right) + \sqrt{\log\left(\frac{1}{4}u_1 + \frac{39}{4}\right)} = 2 \\ u_n = \frac{2(n+1)u_{n+1}}{n} + \frac{2-n}{(n^2+n+1)^2+1}, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Giá trị nhỏ nhất của n để $u_n > \frac{5^{100} + n^2 + 1}{5^{100}(n^3 + n)}$.

- A. 235 B. 255 C. 233 D. 241

Câu 15: Xét tập hợp gồm $A = \{ax^2 + bx + c, ax^2 + bx, ax^2 + c, ax^2\}$ (trong đó a, b, c là các số nguyên dương nhỏ hơn). Lấy ngẫu nhiên ra một tam thức bậc hai thuộc A . Tính xác suất để lấy được tam thức bậc hai mà khi ghép các hệ số của x theo thứ tự từ bậc cao tới bậc thấp được một số chia hết cho 7 hoặc 11.

- A. $\frac{220}{900}$ B. $\frac{220}{999}$ C. $\frac{218}{999}$ D. $\frac{218}{900}$

Câu 16: Tính tổng $S = \frac{1}{2018} \left(C_{2018}^1\right)^2 + \frac{2}{2017} \left(C_{2018}^2\right)^2 + \dots + \frac{2017}{2} \left(C_{2018}^{2017}\right)^2 + \frac{2018}{1} \left(C_{2018}^{2018}\right)^2$

- A. $\frac{2018}{2019} C_{4036}^{2018}$ B. $\frac{2018}{2017} C_{4036}^{2018}$ C. $\frac{2019}{2018} C_{4036}^{2018}$ D. $\frac{2017}{2018} C_{4036}^{2018}$

Câu 17: Cho 2 số phức $\begin{cases} z_1 = a + bi \\ z_2 = c + di \end{cases}$ thỏa mãn $\begin{cases} a + 2b = 9 \\ c + 2d = 4 \end{cases}$. Tìm $|z_1| + |z_2|$ khi biểu thức $P = |z_1 - 6 - 4i| + |z_1 - z_2| + |z_2 - 2 + 4i|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

- A. $4 + \sqrt{29}$ B. $3 + \sqrt{29}$ C. $6 + \sqrt{29}$ D. $3 + \sqrt{29}$

Câu 18: Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $\begin{cases} z_1 - 3 - i = k(z_2 - 3 - i) (k < 0) \\ z_1 = mi (m \in \mathbb{R}^+) \\ z_2 \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$

Tìm k khi biểu thức $P = \frac{9}{|z_1|^2} + \frac{4}{|z_2|^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

- A. $k = 1$ B. $k = -3$ C. $k = -4$ D. $k = 2$

Câu 19: Trong mặt phẳng phức, xét hình bình hành tạo bởi các điểm $0, z, \frac{1}{z}$ và $z + \frac{1}{z}$.

Biết z có phần thực dương và diện tích hình bình hành bằng $\frac{35}{37}$. Tìm GTNN của $\left|z + \frac{1}{z}\right|^2$.

- A. $\frac{53}{20}$ B. $\frac{60}{37}$ C. $\frac{22}{9}$ D. $\frac{50}{37}$

Câu 20: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC . Điểm I thuộc đoạn SA . Biết mặt phẳng (MNI) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai phần, phần chứa đỉnh S có thể tích bằng $\frac{7}{13}$ lần phần còn lại. Tính tỉ số $k = \frac{IA}{IS}$?

- A. $\frac{3}{4}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{2}{3}$

Câu 21: Cho đa giác đều gồm 100 đỉnh. Tính số tam giác tù được chọn từ 3 đỉnh của đa giác trên?

- A. 117600 B. 117800 C. 116700 D. 117670

Câu 22: Cho hai số thực $x, y \geq 1$ thỏa mãn điều kiện:

$$\left| \log_2 2(x+y) \right| + \left| \log_2 \frac{2(x+y)}{x^2 + 4y^2 + 1} \right| = \log_2 (4xy + 1)$$

Giá trị lớn nhất của biểu thức $f(x, y) = 2xy + \sqrt{x + 2y} - x^2 - 4y^2$ bằng?

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{3}{7}$

Câu 23. Cho phương trình $3\sqrt{\tan x + 1}(\sin x + 2\cos x) = m(\sin x + 3\cos x)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2018; 2018]$ để phương trình trên có đúng một nghiệm thuộc $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$?

A. 2015. B. 2016. C. 2018. D. 4036.

Câu 24: Cho phương trình $2^{2017} (\sin^{2018} x + \cos^{2018} x) (\sin x + \cos x) \cos x = \frac{\cos 2x}{1 - \tan x}$. Nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình có dạng $\frac{\pi a}{b}$ với a, b là các số nguyên và nguyên tố cùng nhau. Tính $S = a + b$.

A. $S = 2$. B. $S = 3$. C. $S = 4$. D. $S = 7$.

Câu 25: Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $0 < a, b, c < 1$. Khi đó trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \log_a b + \log_b c + \frac{1}{4} \log_c^2 a$ được viết dưới dạng $\frac{m}{n}$, với m, n là các số nguyên dương và $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Hỏi $T = m^3 + n^3$ có giá trị là bao nhiêu?

A. 171 B. 89 C. 195 D. 163

Câu 26: Có bao nhiêu số nguyên $m \in [-2018; 2018]$ để phương trình $|2^{|x|+1} - 8| = \frac{3}{2}x^2 + m$ có đúng 2 nghiệm thực phân biệt?

A. 2013 B. 2012 C. 4024 D. 2014

Câu 27: Giả sử số tự nhiên $n \geq 2$ thỏa mãn đẳng thức dưới đây hãy tìm n ?

$$C_{2n}^0 + \frac{C_{2n}^2}{3} + \frac{C_{2n}^4}{5} + \frac{C_{2n}^6}{7} + \dots + \frac{C_{2n}^{2n-2}}{2n-1} + \frac{C_{2n}^{2n}}{2n+1} = \frac{4096}{13}$$

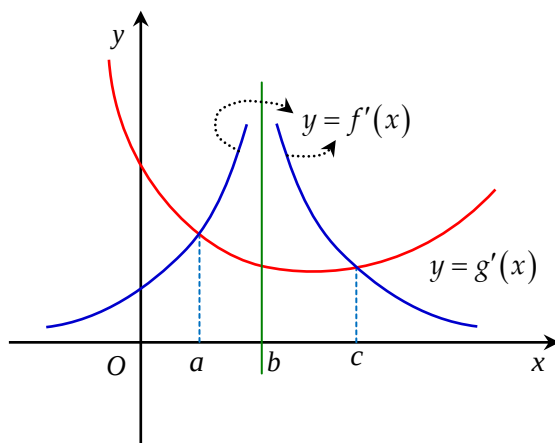
A. $n = 4$ B. $n = 5$ C. $n = 6$ D. $n = 7$

Câu 28: Tính tổng $S = C_{20}^0 + 3C_{20}^3 + 6C_{20}^6 + \dots + 3kC_{20}^{3k} + \dots + 15C_{20}^{15} + 18C_{20}^{18}$?

A. $S = \frac{10.2^{20}}{3} - 13$ B. $S = \frac{10.2^{20}}{3} - 14$ C. $S = \frac{10.2^{21}}{3} - 13$ D. $S = \frac{10.2^{19}}{3} - 13$

Câu 29: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R} \setminus \{b\}$ và hàm số $g(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết đồ thị của hai hàm số $y = f'(x), y = g'(x)$ như hình vẽ dưới.

Đặt $h(x) = f(x) - g(x), S = -[h(x^2 + b)]^2 + h(b + x^2)(1 + 2h(c)) - [h(c)]^2$ với a, b, c là các số thực đã biết. Khẳng định đúng với mọi $x \neq 0$ là?



A. $S \in [h(c); h(a+c)]$

B. $S \leq h(c)$

C. $S \leq [h(c); h(a+b)]$

D. $S \in [h(a); h(c)]$

Câu 30: Cho 3 số thực thỏa mãn $x \in [2; 4]; y \in [0; 4]; z \in [1; 5]$. Khi đó giá trị lớn nhất của biểu thức $T = (\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z})^2 - 5(\log_3(x-1) + 2\log_5(y+1) + 4\log_5 z)$ bằng?

A. 10

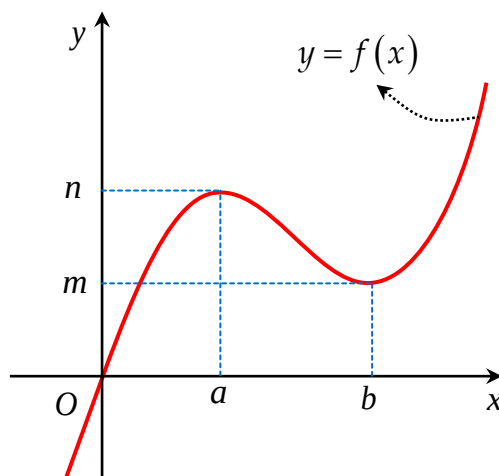
B. 11

C. $8\sqrt{5} - 14$

D. 12

Câu 31: Cho $0 < \sqrt{a} - 1 < \sqrt{b} - 1 < a$ và hàm số $y = g(x) = \frac{f(x)}{f((x+1)^2)}$ có đạo hàm trên

$[0; +\infty)$. Biết đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ dưới. Khẳng định nào sau đây đúng với mọi $x \in [\sqrt{a} - 1; \sqrt{b} - 1]$



A. $g(x) \geq \frac{f(\sqrt{b}-1)}{m}$

B. $g(x) \leq \frac{f(\sqrt{a}-1)}{n}$

C. $g(x) \leq \frac{f(\sqrt{b}-1)}{m}$

D. $-10 \leq g(x) \leq 0$

Câu 32: Cho các số thực dương a, b, c, m, n, p thỏa mãn điều kiện $2^{2017}\sqrt{m} + 2^{2017}\sqrt{n} + 3^{2017}\sqrt{p} \leq 7$

và $4a + 4b + 3c \geq 42$. Đặt $S = \frac{2(2a)^{2018}}{m} + \frac{2(2b)^{2018}}{n} + \frac{3c^{2018}}{p}$ thì khẳng định đúng là?

A. $42 < S \leq 7.6^{2018}$

B. $S > 6^{2018}$

C. $7 \leq S \leq 7.6^{2018}$

D. $4 \leq S \leq 42$

Câu 33: Có bao nhiêu cặp số nguyên a, b để phương trình sau đúng với mọi x

$$a(\cos x - 1) + b^2 = \cos(ax + b^2) - 1$$

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

Câu 34: Cho hệ phương trình $\begin{cases} (p-x^2)(p+x-2) < 0 \\ x^2 \leq 1 \end{cases}$ vô nghiệm khi $p \in (-\infty; a] \cup [b; +\infty)$.

Tính giá trị của biểu thức $A = a^2 + b^2$

- A. 10 B. 9 C. 13 D. 16

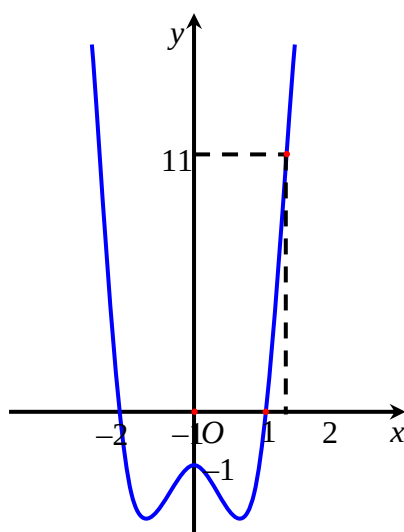
Câu 35: Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $u_1 = 2$; $u_n = 2u_{n-1} + 3n - 1$. Công thức số hạng tổng quát của dãy số đã cho là biểu thức có dạng $a \cdot 2^n + bn + c$, với a, b, c là các số nguyên, $n \geq 2$; $n \in \mathbb{N}$. Khi đó tổng $a + b + c$ có giá trị bằng

- A. -4 B. 4 C. -3 D. 3

Câu 36: Một ngày đẹp trời, trong lúc đi dạo công viên, cầm một khối cầu trong tay, một nhà khoa học yêu cái đẹp nảy ra ý tưởng muốn tạo ra một khối nón nội tiếp trong một khối cầu có bán kính R và đựng một loại dung dịch X do ông chế tạo ra vào trong đó, sao cho thể tích dung dịch X chứa được trong X là lớn nhất. Sau khi chế tạo xong, trong lúc mãi ngắm tác phẩm của mình, nhà khoa học đã vô tình làm vỡ cả khối cầu thủy tinh, tuy vậy ông đã thu hồi lại được lượng dung dịch X quý giá của mình. Lần này, vì rút kinh nghiệm, cũng lượng dung dịch X đó, nhà khoa học muốn chế tạo một cái hộp bằng một loại kim loại chịu lực trong suốt để đựng dung dịch của mình. Ông có hai sự lựa chọn cho hộp kim loại của mình, có dạng hình hộp chữ nhật hoặc là có dạng khối trụ. Tuy nhiên, kinh phí còn lại của ông có hạn, còn giá thành kim loại đó lại rất đắt vì nó hiếm. Ông muốn chi phí sản xuất kim loại cấu thành hộp là bé nhất, nhưng vẫn phải chứa được lượng dung dịch X đã có của mình. Hãy giúp nhà khoa học tính toán xem diện tích toàn phần nhỏ nhất của hộp kim loại là bao nhiêu?

- A. $3\pi R^2 \sqrt[3]{\frac{2^{11}}{3^8}}$ B. $\pi R^2 \sqrt[3]{\frac{2^{11}}{3^8}}$ C. $3\pi R^2 \sqrt[3]{\frac{2^6}{3^4}}$ D. $\pi R^2 \sqrt[3]{\frac{2^6}{3^4}}$

Câu 37:



Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ đồng thời $f(x+1) - f(x) = 2x(2x+1)(x+1)(*)$ Biết rằng $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$; $g(x) = mx^2 + nx + p$ và $f(x) = g(x^2 - 1)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)$

- A. $-\frac{1}{2}$ B. $-\frac{1}{4}$ C. -2 D. -4

Câu 38: Cho hàm số $y = -\frac{5}{3}x^3 + 3x^2 - \frac{1}{3}(C)$. Tìm những điểm trên đường thẳng $(d): y = ax + b$ đi qua gốc tọa độ và tạo với đường thẳng $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$ một góc 15° mà từ đó kẻ được đến (C) 2 tiếp tuyến.

- A. $\left(\frac{-1}{5}; \frac{-1}{5}\right); (1; 1)$ B. $\left(\frac{1}{5}; \frac{1}{5}\right); (1; 1)$ C. $\left(\frac{-1}{5}; \frac{-1}{5}\right); (-1; 1)$ D. $\left(\frac{-1}{5}; \frac{1}{5}\right); (1; -1)$

Câu 39: Cho hàm số $f(x) = \frac{\sqrt{8x+a} - bx - c}{x(x-1)2} + (c-3)\tan x$. Biết đồ thị hàm số có đúng 2 đường tiệm cận (chỉ tính tiệm cận đứng và tiệm cận ngang). Số giá trị nguyên tối đa có thể của tham số a thỏa mãn bài toán là?

- A. 8 B. 2 C. 10 D. 9

Câu 40: Cho tích phân $I = \int_{-7}^{11} (\sqrt{x+7} + \sqrt{11-x}) dx$, gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của I . Tính $S = M + m$?

- A. $54\sqrt{2} + 108$ B. $36\sqrt{2} + 108$ C. $6\sqrt{3} + 54$ D. $6\sqrt{3} + 36$

LỜI GIẢI CHI TIẾT ĐỀ VẬN DỤNG CAO

Câu 1 : Biết rằng tập hợp các giá trị của m để phương trình sau có nghiệm là đoạn $[a;b]$ $(m-2)\sqrt{x+3}+(2m-1)\sqrt{1-x}+m-1=0$ có nghiệm là đoạn $[a;b]$. Tính giá trị của biểu thức $S = a^2 + b^2 - 3ab$?

A. 1

B. 2

C. 0

D. 3

Giải

Biến đổi phương trình đầu tương đương PT $\Leftrightarrow m = \frac{2\sqrt{x+3} + \sqrt{1-x} + 1}{\sqrt{x+3} + 2\sqrt{1-x} + 1}$ (2)

Vì $(\sqrt{x+3})^2 + (\sqrt{1-x})^2 = 4$ nên đặt $\begin{cases} \sqrt{x+3} = 2\sin\alpha \\ \sqrt{1-x} = 2\cos\alpha \end{cases} \left(\alpha \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \right)$.

Đặt $t = \tan \frac{\alpha}{2}$ ($t \in [0;1]$) khi đó (2) trở thành

$$m = \frac{4\sin\alpha + 2\cos\alpha + 1}{2\sin\alpha + 4\cos\alpha + 1} = \frac{4 \cdot \frac{2t}{1+t^2} + 2 \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2} + 1}{2 \cdot \frac{2t}{1+t^2} + 4 \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2} + 1} = \frac{-t^2 + 8t + 3}{-3t^2 + 4t + 5} = \frac{1}{3} + \frac{20t + 4}{3(-3t^2 + 4t + 5)}$$

Xét $f(t) = \frac{20t + 4}{-3t^2 + 4t + 5}$ trên đoạn $[0;1]$ được: $f'(t) = \frac{60t^2 + 24t + 84}{(-3t^2 + 4t + 5)^2} > 0, \forall t \in [0;1]$. Suy ra

$$f(0) \leq f(t) \leq f(1) \Leftrightarrow \frac{4}{5} \leq f(t) \leq 4 \Rightarrow \frac{4}{15} \leq \frac{f(t)}{3} \leq \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{1}{3} + \frac{4}{15} \leq \frac{1}{3} + \frac{f(t)}{3} \leq \frac{1}{3} + \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{3}{5} \leq m \leq \frac{5}{3}$$

Câu 2: Gọi $z_1 = a + bi, z_2 = c + di$ là nghiệm của phương trình $|z - 2\sqrt{2}| + |z + 2\sqrt{2}| = 6$ đồng thời thỏa mãn $ac + bd = 0$. Gọi M, n lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P = \frac{1}{2}|z_1 z_2|$. Tính giá trị của biểu thức $S = M + n$

A. $S = \frac{14}{5}$

B. $S = \frac{13}{5}$

C. $S = \frac{12}{5}$

D. $S = \frac{11}{5}$

Giải

Gọi $A(z_1), B(z_2), ac + bd = 0 \Rightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \Rightarrow OA \perp OB$.

Trường hợp 1: Xét A,B lần lượt nằm trên hai trục tọa độ thì ta có: $P = \frac{1}{2}|z_1 z_2| = \frac{1}{2}OA \cdot OB = \frac{3}{2}$

Trường hợp 2: Xét hai điểm A,B lần lượt nằm trên hai đường vuông góc $y = kx, y = -\frac{1}{k}x$.

$$\text{Tọa độ điểm A thỏa mãn } \begin{cases} \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{1} = 1 \\ y = kx \end{cases} \Rightarrow x_A^2 = \frac{9}{9k^2 + 1} \Rightarrow y_A^2 = \frac{9k^2}{9k^2 + 1} \Rightarrow OA = 3\sqrt{\frac{k^2 + 1}{9k^2 + 1}}$$

Tương tự $OB = 3\sqrt{\frac{k^2+1}{9+k^2}}$. Theo giả thiết ta có: $P = \frac{1}{2}|z_1 z_2| = S_{OAB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{9(k^2+1)}{\sqrt{(9k^2+1)(k^2+9)}}$.

Theo AM - GM ta có $2\sqrt{(9k^2+1)(k^2+9)} \leq 10(k^2+1) \Rightarrow S \geq \frac{9}{10} \Leftrightarrow k^2 = 1$.

Theo Cauchy - Shwarz ta có $\sqrt{(9k^2+1)(k^2+9)} \geq 3(k^2+1) \Rightarrow S \leq \frac{3}{2}$. Dấu "=" xảy ra khi A,B là các giao điểm của elip với trục tọa độ và các hoán vị.

Vậy cả hai trường hợp ta có $\begin{cases} \min P = \frac{9}{10} \\ \max P = \frac{3}{2} \end{cases}$.

Câu 3: Cho hai hàm $f(x)$ và $g(x)$ có đạo hàm trên $[1;2]$, thỏa mãn $f(1) = g(1) = 0$ và

$$\begin{cases} \frac{x}{(x+1)^2} g(x) + 2018x = (x+1)f'(x) \\ \frac{x^3}{x+1} g'(x) + f(x) = 2019x^2 \end{cases}, \forall x \in [1;2]. \text{ Tính } I = \int_1^2 \left[\frac{x}{x+1} g(x) - \frac{x+1}{x} f(x) \right] dx.$$

A. $I = \frac{1}{2}$.

B. $I = 1$.

C. $I = \frac{3}{2}$.

D. $I = 2$.

Giải

Bài này có vẻ tương đối khó khăn rồi do đây là 2 hàm độc lập, tuy nhiên ta chú ý vẫn bám sát ý tưởng của các bài toán trong mục này!

Từ giả thiết ta có $\begin{cases} \frac{1}{(x+1)^2} g(x) - \frac{(x+1)}{x} f'(x) = -2018 \\ \frac{x}{x+1} g'(x) + \frac{1}{x^2} f(x) = 2019 \end{cases}$. Cộng lại vế theo vế ta được:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{(x+1)^2} g(x) + \frac{x}{x+1} g'(x) \right] - \left[\frac{(x+1)}{x} f'(x) - \frac{1}{x^2} f(x) \right] = 1 \\ \Leftrightarrow & \left[\frac{x}{x+1} g(x) \right]' - \left[\frac{(x+1)}{x} f(x) \right]' = 1 \Rightarrow \frac{x}{x+1} g(x) - \frac{(x+1)}{x} f(x) = x + C. \end{aligned}$$

Mà ta lại có $f(1) = g(1) = 0 \Rightarrow C = -1 \Rightarrow I = \int_1^2 \left[\frac{x}{x+1} g(x) - \frac{x+1}{x} f(x) \right] dx = \int_1^2 (x-1) dx = \frac{1}{2}$.

Câu 4: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB = 6, BC = 12, \angle ABC = 60^\circ$. Thể tích khối chóp $C'.ABB'A'$ bằng 216. Gọi M là điểm nằm trong tam giác $A'B'C'$ sao cho tổng diện tích các mặt bên của hình chóp $M.ABC$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính cosin góc giữa 2 đường thẳng $B'M, AC'$?

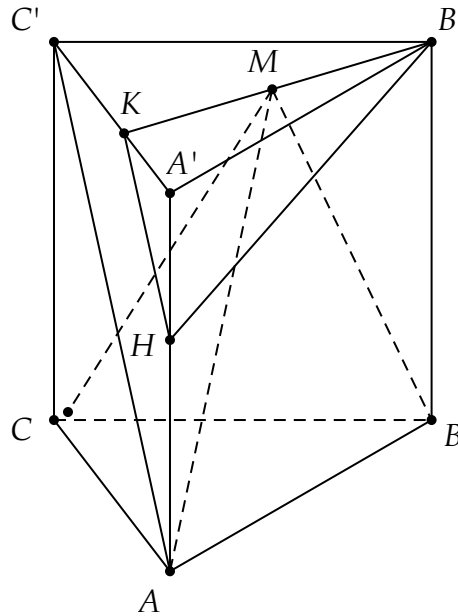
A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

B. $\frac{\sqrt{2}}{3}$

C. $\frac{\sqrt{2}}{4}$

D. $\frac{1}{2}$

Giải



Gọi I là hình chiếu của M lên (ABC) ; D, E, F lần lượt là hình chiếu của I lên AB, BC, CA.

Đặt $ID = x, IE = y, IF = z, AB = 2a, BC = 2b, CA = 2c, MI = AA' = h$.

Khi đó $S_{ABC} = S_{IAB} + S_{IAC} + S_{IBC} = ax + by + cz$. Diện tích toàn phần của hình chóp $M.ABC$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $S = S_{MAB} + S_{MBC} + S_{MCA}$ nhỏ nhất.

$$\text{Có } MD = \sqrt{MI^2 + ID^2} = \sqrt{x^2 + h^2} \Rightarrow S_{MAB} = \frac{1}{2} AB \cdot MD = a\sqrt{h^2 + x^2} = \sqrt{(ah)^2 + (ax)^2}$$

$$\text{Tương tự ta được } S = \sqrt{(ah)^2 + (ax)^2} + \sqrt{(bh)^2 + (by)^2} + \sqrt{(hc)^2 + (cz)^2}$$

$$\text{Theo Mincowski ta có } S \geq \sqrt{(ah + bh + ch)^2 + (ax + by + cz)^2} = \sqrt{(a + b + c)^2 h^2 + S_{ABC}^2} = \text{const}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi } \frac{ax}{ah} = \frac{by}{bh} = \frac{cz}{ch} \Leftrightarrow x = y = z.$$

$$\text{Khi đó ta có } S_{A'B'C'} = S_{ABC} = \frac{1}{2} BA \cdot BC \sin ABC = 18\sqrt{3},$$

$$A'C'^2 = AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos 60^\circ \Rightarrow A'C' = 6\sqrt{3}$$

$$\text{Vì } V_{LT} = \frac{3}{2} V_{C'.ABB'A'} = 324 \Rightarrow AA' = 6\sqrt{3}. \text{ Gọi K là chân đường phân giác trong của tam giác}$$

$A'B'C'$ kẻ từ B, từ K kẻ đường thẳng song song với AC' cắt AA' tại H, khi đó

$$\varphi = (B'M, AC) = (B'K, KH) \Rightarrow \cos \varphi = |\cos B'KH|$$

$$\text{Ta có } S_{B'C'A'} = S_{B'KC'} + S_{B'KA'} = \frac{1}{2} B'K = (B'A' + B'C') \sin 30^\circ \Rightarrow B'K = 4\sqrt{3}$$

$$\frac{A'K}{C'K} = \frac{A'B'}{C'B'} = \frac{1}{2} \Rightarrow A'K = \frac{1}{3} A'C' = 2\sqrt{3}$$

$$\text{Do } KH // AC' \Rightarrow \frac{A'H}{A'A} = \frac{A'K}{A'C'} = \frac{1}{3} \Rightarrow A'H = 2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow KH = 2\sqrt{6}, B'H = 4\sqrt{3} \Rightarrow \cos B'KH = \frac{\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \cos \varphi = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Câu 5: Hai người bắn độc lập vào một mục tiêu, mỗi người bắn 1 lần. Xác suất trúng của người thứ nhất là 0,9; của người thứ hai là 0,7. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $M = 13p - 10p^2$, trong đó p là xác suất của một biến cố.

A. $\frac{169}{40}$

B. $\frac{528}{125}$

C. $\frac{4221}{1000}$

D. 3

Giải

Gọi A_1 là biến cố người thứ nhất bắn trúng, A_2 là biến cố người thứ hai bắn trúng.

Khi đó $p(A_1) = 0,9$; $p(A_2) = 0,7$. Ta có $M = 13p - 10p^2 = \frac{169}{40} - 10\left(p - \frac{13}{20}\right)^2$.

Do đó M lớn nhất khi và chỉ khi $\left|p - \frac{13}{20}\right|$ nhỏ nhất

Giả sử p là xác suất của biến cố A . Ta quy ước $\begin{cases} 0.A = \emptyset \\ 1.A = A \end{cases}$

Khi đó $A = xA_1A_2 + y\overline{A_1}A_2 + zA_1\overline{A_2} + t\overline{A_1}\overline{A_2}$, trong đó $x, y, z, t \in \{0; 1\}$.

$$\Rightarrow p = p(A) = x.p(A_1A_2) + y.p(\overline{A_1}A_2) + z.p(A_1\overline{A_2}) + t.p(\overline{A_1}\overline{A_2}) = 0,63x + 0,07y + 0,27z + 0,03t$$

$$\Rightarrow \left|p - \frac{13}{20}\right| = |0,63x + 0,07y + 0,27z + 0,03t - 0,65| = |0,63x + 0,07y + 0,27z + 0,03t - 0,65|$$

$$\text{Nếu } x = 1: \left|p - \frac{13}{20}\right| = |0,07y + 0,27z + 0,03t - 0,02|$$

$$\text{Ta có } y, z, t \in \{0; 1\} \text{ thì } |0,07y + 0,27z + 0,03t - 0,02| \text{ nhỏ nhất khi } \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \\ t = 1 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } \left|p - \frac{13}{20}\right| = 0,01$$

$$\text{Nếu } x = 0: \left|p - \frac{13}{20}\right| = |0,07y + 0,27z + 0,03t - 0,65|$$

$$\text{Ta có } y, z, t \in \{0; 1\} \Rightarrow 0 \leq y, z, t \leq 1 \Rightarrow 0 \leq 0,07y + 0,27z + 0,03t \leq 0,37$$

$$-0,65 \leq 0,07y + 0,27z + 0,03t - 0,65 \leq -0,28$$

$$\Rightarrow \Rightarrow 0,65 \geq |0,07y + 0,27z + 0,03t - 0,65| \geq 0,28 \left|p - \frac{13}{20}\right| \geq 0,28 > 0,01$$

$$\text{Từ 2 trường hợp trên ta thấy } \left|p - \frac{13}{20}\right|_{\min} = 0,01 \Leftrightarrow \begin{cases} x = t = 1 \\ y = z = 0 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } M_{\max} = \frac{169}{40} - 10,01^2 = \frac{528}{125}$$

Câu 6: Cho tam giác ABC có $BAC = 60^\circ$ và AB, AC đã biết. Biểu thức $P = k.MA + MB + MC$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $(AB + AC)$ với mọi giá trị thực $k \geq k_0$. Giá trị của k_0 nằm trong khoảng nào dưới đây ?

- A. $(0;1)$ B. $\left(\frac{3}{2};2\right)$ C. $\left(1;\frac{3}{2}\right)$ D. $(2;3)$

Giải

Ta có: $|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \geq \vec{u} \cdot \vec{v} \Leftrightarrow |\vec{u}| \geq \vec{u} \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ và: $\vec{u} \cdot \vec{v} \geq -|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$. Áp dụng vào bài này, ta có :

$$\begin{aligned} P &= k.MA + MB + MC \geq k.MA + \overrightarrow{MB} \cdot \frac{\overrightarrow{AB}}{AB} + \overrightarrow{MC} \cdot \frac{\overrightarrow{AC}}{AC} = k.MA + (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}) \cdot \frac{\overrightarrow{AB}}{AB} + (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}) \cdot \frac{\overrightarrow{AC}}{AC} \\ &\Leftrightarrow P \geq k.MA + AB + AC + \overrightarrow{MA} \left(\frac{\overrightarrow{AB}}{AB} + \frac{\overrightarrow{AC}}{AC} \right) \geq k.MA + AB + AC - MA \left| \frac{\overrightarrow{AB}}{AB} + \frac{\overrightarrow{AC}}{AC} \right| \\ &\Leftrightarrow P \geq MA \left(k - \left| \frac{\overrightarrow{AB}}{AB} + \frac{\overrightarrow{AC}}{AC} \right| \right) + AB + AC. \end{aligned}$$

Theo giả thiết ta có $P \geq MA \left(k - \left| \frac{\overrightarrow{AB}}{AB} + \frac{\overrightarrow{AC}}{AC} \right| \right) + AB + AC \geq AB + AC$

$$\text{Suy ra } \left(k - \left| \frac{\overrightarrow{AB}}{AB} + \frac{\overrightarrow{AC}}{AC} \right| \right) \geq 0 \Rightarrow k \geq \left| \frac{\overrightarrow{AB}}{AB} + \frac{\overrightarrow{AC}}{AC} \right|$$

$$\text{Ta có } \left| \frac{\overrightarrow{AB}}{AB} + \frac{\overrightarrow{AC}}{AC} \right|^2 = \left(\frac{\overrightarrow{AB}}{AB} \right)^2 + \left(\frac{\overrightarrow{AC}}{AC} \right)^2 + 2 \frac{\overrightarrow{AB}}{AB} \cdot \frac{\overrightarrow{AC}}{AC} = 1 + 1 + 2 \cdot \cos 60^\circ = 3$$

$$\text{Suy ra: } k \geq \left| \frac{\overrightarrow{AB}}{AB} + \frac{\overrightarrow{AC}}{AC} \right| = \sqrt{3} = k_0.$$

Câu 7: Cho $I_n = \int \tan^n x dx$ với $n \in \mathbb{N}$. Khi đó $I_0 + I_1 + 2(I_2 + I_3 + \dots + I_8) + I_9 + I_{10}$ bằng?

- A. $\sum_{r=1}^9 \frac{(\tan x)^r}{r} + C$ B. $\sum_{r=1}^9 \frac{(\tan x)^{r+1}}{r+1} + C$ C. $\sum_{r=1}^{10} \frac{(\tan x)^r}{r} + C$ D. $\sum_{r=1}^{10} \frac{(\tan x)^{r+1}}{r+1} + C$

Giải

Biến đổi tích phân ban đầu ta có

$$\begin{aligned} I_n &= \int \tan^{n-2} x \cdot \tan^2 x dx = \int \tan^{n-2} x \cdot \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} - I_{n-2} + C \\ &= \int \tan^{n-2} x \cdot (\tan x)' dx - I_{n-2} \Rightarrow I_n + I_{n-2} = \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} + C. \end{aligned}$$

Khi đó $I_0 + I_1 + 2(I_2 + I_3 + \dots + I_8) + I_9 + I_{10} = (I_{10} + I_8) + (I_9 + I_7) + \dots + (I_3 + I_1) + (I_2 + I_0)$

$$= \frac{\tan^9 x}{9} + \frac{\tan^8 x}{8} + \dots + \frac{\tan^2 x}{2} + \tan x + C = \sum_{r=1}^9 \frac{\tan^r x}{r} + C.$$

Câu 8: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1;2]$ thỏa mãn đồng thời 2 điều kiện $2[f(2)]^2 - [f(1)]^2 = 63; 2[f(x)]^2 + x^2[f'(x)]^2 = 27x^2, \forall x \in [1;2]$. Tính giá trị của tích phân $\int_1^2 [f(x)]^2 dx$

A. 15

B. 18

C. 21

D. 25

Giải

Theo giả thiết ta có

$$\int_1^2 [f(x)]^2 dx + \int_1^2 [f(x)]^2 dx + \int_1^2 x^2 [f'(x)]^2 dx = \int_1^2 27x^2 dx = 63(1)$$

Xét tích phân $I = \int_1^2 [f(x)]^2 dx$, đặt $\begin{cases} u = [f(x)]^2 \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2f'(x)f(x) \\ v = x \end{cases}$

$$\Rightarrow I = x[f(x)]^2 \Big|_1^2 - 2 \int_1^2 xf'(x)f(x)dx = 63 - 2 \int_1^2 xf'(x)f(x)dx$$

Ta có:

$$(1) \Leftrightarrow \int_1^2 [f(x)]^2 dx - 2 \int_1^2 xf'(x)f(x)dx + \int_1^2 x^2 [f'(x)]^2 dx = 0 \Leftrightarrow \int_1^2 [f(x) - xf'(x)]^2 dx = 0$$

Do đó $f(x) - xf'(x) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{x}f(x)\right)' = 0 \Leftrightarrow f(x) \equiv Cx$

Vậy $2(Cx)^2 + x^2C^2 = 3C^2x^2 = 27x^2 \Rightarrow C = 3 \Rightarrow \int_1^2 [f(x)]^2 dx = 21$

Câu 9: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $e.f(1) = 4f(0) = 4$ và đồng thời $\int_0^1 e^{2x} ([f'(x)]^2 - [f(x)]^2) dx + 4 \int_0^1 e^x \cdot f(x) dx = \frac{8}{3}$. Tính tích phân $\int_0^1 f(x) dx$?

A. $\frac{4(e-1)}{e}$

B. $\frac{3(e-1)}{e}$

C. $\frac{2(e+2)}{e}$

D. $\frac{5(e-2)}{e}$

Giải

Xét tích phân $K = \int_0^1 e^{2x} ([f'(x)]^2 - [f(x)]^2) dx + 4 \int_0^1 e^x f(x) dx = \frac{8}{3}$

Đặt $u(x) = e^x f(x) \Rightarrow u' = e^x f(x) + e^x f'(x) \Rightarrow e^x f'(x) = u' - u$, khi đó ta được

$$K = \int_0^1 [(u' - u)^2 - u^2 + 4u] dx = \int_0^1 [(u')^2 - 2u.u' + 4u] dx \quad (u(1) = 4, u(0) = 1)$$

Ta có $\int_0^1 u.u' dx = \frac{u^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{15}{2}, \int_0^1 u dx = xu \Big|_0^1 - \int_0^1 xu' dx = 4 - \int_0^1 xu' dx$.

Suy ra $K = \int_0^1 [(u')^2 - 4xu'] dx = \frac{8}{3}$. Đến đây ta chọn $m \in \mathbb{R}$ sao cho

$$\begin{aligned} \int_0^1 [u' - 2x - m]^2 dx &= 0 \Leftrightarrow \int_0^1 [(u')^2 - 4xu'] dx - 2m \int_0^1 u' dx + \int_0^1 (2x + m)^2 dx = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{8}{3} - 6m + m^2 + 2m + \frac{4}{3} = 0 \Leftrightarrow m = 2 \end{aligned}$$

Vậy ta được $\int_0^1 [u' - 2x - 2]^2 dx = 0 \Leftrightarrow e^x f(x) + e^x f'(x) = 2x + 2$

$$\Leftrightarrow (e^x f(x))' = 2x + 2 \Leftrightarrow f(x) = \frac{x^2 + 2x + C}{e^x} \xrightarrow{f(0)=1} f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{e^x} \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = \frac{5(e-2)}{e}$$

Câu 10: Cho x, y là hai số thực dương thay đổi thỏa mãn điều kiện

$$(xy+1)(\sqrt{xy+1}-\sqrt{y}) \leq 1-x-\frac{1}{y}.$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{x+y}{\sqrt{x^2-xy+3y^2}} - \frac{x-2y}{6(x+y)}$?

A. $\frac{\sqrt{5}}{3} - \frac{7}{30}$

B. $\frac{7}{30} - \frac{\sqrt{5}}{3}$

C. $\frac{\sqrt{5}}{3} + \frac{7}{30}$

D. $\frac{\sqrt{5}+7}{30}$

Giải

Biến đổi giả thiết ta có $(xy+1)(\sqrt{xy+1}-\sqrt{y}) \leq 1-x-\frac{1}{y}$

$$\Leftrightarrow y(xy+1)(\sqrt{xy+1}-\sqrt{y}) + (\sqrt{xy+1}^2 - \sqrt{y}^2) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{xy+1}-\sqrt{y})[y(xy+1) + (\sqrt{xy+1} + \sqrt{y})] \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{xy+1}-\sqrt{y} \leq 0 \Leftrightarrow xy+1 \leq y \Leftrightarrow \frac{x}{y} \leq -\frac{1}{y^2} + \frac{1}{y} = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{x}{y} \leq \frac{1}{4}. \text{ Dấu bằng đạt được khi } y=2, x=\frac{1}{2}.$$

$$\Rightarrow P = \frac{x+y}{\sqrt{x^2-xy+3y^2}} - \frac{x-2y}{6(x+y)} = \frac{t+1}{\sqrt{t^2-t+3}} - \frac{t-2}{6(t+1)} \text{ với } t = \frac{x}{y} \text{ và } t \in \left(0; \frac{1}{4}\right].$$

Ta có $\frac{t+1}{\sqrt{t^2-t+3}} \leq \frac{\sqrt{5}}{27}(8t+7)$ với mọi $t \in \left(0; \frac{1}{4}\right]$

Thật vậy $\frac{t+1}{\sqrt{t^2-t+3}} \leq \frac{\sqrt{5}}{27}(8t+7) \Leftrightarrow -\frac{1}{729} \frac{(4t-1)^2(20t^2+25t+6)}{t^2-t+3} \leq 0$ với mọi $t \in \left(0; \frac{1}{4}\right]$.

Suy ra $P \leq \frac{\sqrt{5}}{27}(8t+7) - \frac{t-2}{6t+6} = f(t).$

Khi đó $f'(t) = \frac{1}{54} \cdot \frac{16\sqrt{5}t^2 + 32\sqrt{5}t + 16\sqrt{5} - 27}{(t+1)^2} > 0$ với mọi $t \in \left(0; \frac{1}{4}\right]$.

Vậy $P \leq \frac{\sqrt{5}}{27}(8t+7) - \frac{t-2}{6t+6} = f(t) \leq f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{7+10\sqrt{5}}{30}$, dấu bằng đạt được khi $x = \frac{1}{2}, y = 2$.

Câu 11: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)^2(x^2-2x)$ với $\forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $f(x^2-8x+m)$ có 5 điểm cực trị?

A. 15

B. 17

C. 16

D. 18

Giải

Đặt $g(x) = f(x^2-8x+m) \Rightarrow g'(x) = (x-1)^2(x^2-2x)$

$$\Rightarrow g'(x) = (2x-8)(x^2-8x+m-1)^2(x^2-8x+m)(x^2-8x+m-2)$$

$$\text{Ta có } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x^2 - 8x + m - 1 = 0 \quad (1) \\ x^2 - 8x + m = 0 \quad (2) \\ x^2 - 8x + m - 2 = 0 \quad (3) \end{cases}$$

Các phương trình (1), (2), (3) không có nghiệm chung từng đôi một và

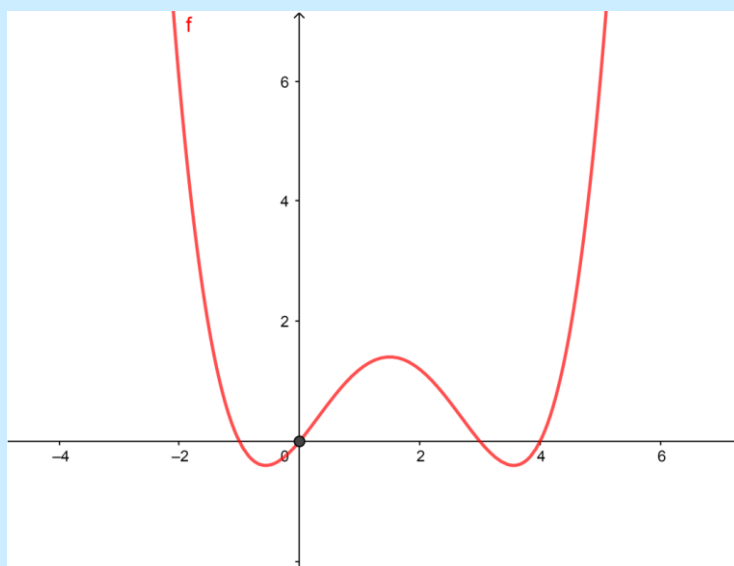
$$(x^2 - 8x + m - 1)^2 \geq 0 \text{ với } \forall x \in \mathbb{R}$$

Suy ra $g(x)$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi (2) và (3) có hai nghiệm phân biệt khác 4

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_2 = 16 - m > 0 \\ \Delta_3 = 16 - m + 2 > 0 \\ 16 - 32 + m \neq 0 \\ 16 - 32 + m - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 16 \\ m < 18 \\ m \neq 16 \\ m \neq 18 \end{cases} \Leftrightarrow m < 16.$$

Vì m nguyên dương và $m < 16$ nên có 15 giá trị m cần tìm.

Câu 12: Biết rằng đồ thị hàm số bậc 4: $y = f(x)$ được cho như hình vẽ sau:



Tìm số giao điểm của đồ thị hàm số $y = g(x) = [f'(x)]^2 - f(x) \cdot f''(x)$ và trục Ox .

A. 4

B. 6

C. 2

D. 0

Giải

Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = g(x) = [f'(x)]^2 - f(x) \cdot f''(x)$ và trục Ox bằng số nghiệm của phương trình: $[f'(x)]^2 - f(x) \cdot f''(x) = 0 \Leftrightarrow [f'(x)]^2 = f(x) \cdot f''(x)$.

Giả sử đồ thị hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, ($a, b, c, d, e \in \mathbb{R}; a \neq 0, b \neq 0$) cắt trục hoành Ox tại 4 điểm phân biệt x_1, x_2, x_3, x_4 .

Đặt $A = x - x_1$, $B = x - x_2$, $C = x - x_3$, $D = x - x_4$ ta có:

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) = a.ABCD.$$

Câu 14: Cho dãy số (u_n) thỏa mãn
$$\begin{cases} \log\left(u_2 + \frac{391}{40}\right) + \sqrt{\log\left(\frac{1}{4}u_1 + \frac{39}{4}\right)} = 2 \\ u_n = \frac{2(n+1)u_{n+1}}{n} + \frac{2-n}{(n^2+n+1)^2+1}, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Giá trị nhỏ nhất của n để $u_n > \frac{5^{100} + n^2 + 1}{5^{100}(n^3 + n)}$.

A. 235

B. 255

C. 233

D. 241

Giải

Ta có $(n^2 + n + 1)^2 + 1 = (n^2 + 1)^2 + 2n(n^2 + 1) + n^2 + 1 = (n^2 + 1)((n+1)^2 + 1)$

Biến đổi giả thiết tương đương

$$\begin{aligned} nu_n &= 2(n+1)u_{n+1} + \frac{2n-n^2}{(n^2+1)((n+1)^2+1)} = 2(n+1)u_{n+1} + \frac{(n+1)^2 - 2(n^2+1) + 1}{(n^2+1)((n+1)^2+1)} \\ \Leftrightarrow nu_n &= 2(n+1)u_{n+1} + \frac{1}{n^2+1} - \frac{2}{(n+1)^2+1} \Leftrightarrow (n+1)u_{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2+1} = \frac{1}{2} \left(nu_n - \frac{1}{n^2+1} \right) \end{aligned}$$

Đặt $v_n = nu_n - \frac{1}{n^2+1} \Rightarrow v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n \Rightarrow (v_n)$ là CSN có công bội $q = \frac{1}{2}$

Từ đó suy ra $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} v_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \left(u_1 - \frac{1}{2}\right) \Rightarrow u_n = \frac{1}{n^3+n} + \frac{1}{2^{n-1}n} \left(u_1 - \frac{1}{2}\right)$

Thay $u_2 = -\frac{1}{40} + \frac{1}{4}u_1$ vào giả thiết ta được

$$\log\left(\frac{1}{4}u_1 + \frac{39}{4}\right) + \sqrt{\log\left(\frac{1}{4}u_1 + \frac{39}{4}\right)} = 2 \Rightarrow u_1 = 1 \Rightarrow u_n = \frac{1}{n^3+n} + \frac{1}{2^n n}$$

Để $u_n > \frac{5^{100} + n^2 + 1}{5^{100}(n^3 + n)} \Rightarrow n > 100 \log_2 5 \Rightarrow n \geq 233$

Câu 15: Xét tập hợp gồm $A = \{ax^2 + bx + c, ax^2 + bx, ax^2 + c, ax^2\}$ (trong đó a, b, c là các số nguyên dương nhỏ hơn). Lấy ngẫu nhiên ra một tam thức bậc hai thuộc A . Tính xác suất để lấy được tam thức bậc hai mà khi ghép các hệ số của x theo thứ tự từ bậc cao tới bậc thấp được một số chia hết cho 7 hoặc 11.

A. $\frac{220}{900}$ B. $\frac{220}{999}$ C. $\frac{218}{999}$ D. $\frac{218}{900}$ **Giải**

Vì tam thức bậc hai có bốn dạng xảy ra:

- Dạng đầy đủ: $ax^2 + bx + c$ khi đó ta thu được số nguyên abc
- Dạng khuyết c : $ax^2 + bx$ khi đó ta thu được số nguyên ab
- Dạng khuyết b : $ax^2 + c$ khi đó ta thu được số nguyên ac

- Dạng khuyết b, c: ax^2 khi đó ta thu được số nguyên a.

Trong đó $a, b, c \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$

Do có 729 số có các chữ số khác 0; 81 số có hai chữ số có các chữ số khác 0 và 9 số có 1 chữ số khác không. Suy ra có $729 \times 81 \times 2 + 9 = 900$ tam thức bậc hai. Vì vậy, số phần tử của không gian mẫu là: 900.

Nhận xét: Các số nguyên chia hết cho d đều có dạng dk với k là số nguyên dương. Do đó, số các số nguyên dương chia hết cho d và không vượt quá n sẽ bằng số các số nguyên k với $0 < kd \leq n$ hay $0 < k \leq \frac{n}{d}$. Vì vậy có $\left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor$ số nguyên không vượt quá n chia hết cho d - $\left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor$ là số nguyên không vượt quá n).

Theo nhận xét trên thì:

- Số các số có 1 chữ số (các chữ số khác 0) chia hết cho 7 là 1;
- Số các số có 2 chữ số (các chữ số khác 0) chia hết cho 7 là 12;
- Số các số có 3 chữ số (các chữ số khác 0) chia hết cho 7 là 115;
- Số các số có 1 chữ số (các chữ số khác 0) chia hết cho 11 là 0;
- Số các số có 2 chữ số (các chữ số khác 0) chia hết cho 11 là 9;
- Số các số có 3 chữ số (các chữ số khác 0) chia hết cho 11 là 72;
- Số các số có 1 chữ số (các chữ số khác 0) chia hết cho 77 là 0;
- Số các số có 2 chữ số (các chữ số khác 0) chia hết cho 77 là 1;
- Số các số có 3 chữ số (các chữ số khác 0) chia hết cho 77 là 10;

Suy ra có $(1 + 12 + 115) + (0 + 9 + 72) + (12 + 9 - 1) - 0 - 1 - 10 = 218$ tam thức bậc hai có hệ số ghép (theo thứ tự từ bậc cao tới bậc thấp) tạo thành số chia hết cho 7 hoặc 11. Vậy xác suất để lấy ra 1 tam thức bậc hai thỏa mãn bài toán là $P = \frac{218}{900}$

Câu 16: Tính tổng $S = \frac{1}{2018} (C_{2018}^1)^2 + \frac{2}{2017} (C_{2018}^2)^2 + \dots + \frac{2017}{2} (C_{2018}^{2017})^2 + \frac{2018}{1} (C_{2018}^{2018})^2$

A. $\frac{2018}{2019} C_{4036}^{2018}$ B. $\frac{2018}{2017} C_{4036}^{2018}$ C. $\frac{2019}{2018} C_{4036}^{2018}$ D. $\frac{2017}{2018} C_{4036}^{2018}$

Giải

Ta có $C_n^k = \frac{n-k+1}{k} C_n^{k-1}$ với $\forall k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}, n \geq k$ nên:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2018} C_{2018}^1 \cdot \frac{2018}{1} C_{2018}^0 + \frac{2}{2017} C_{2018}^2 \cdot \frac{2017}{2} C_{2018}^1 + \dots + \frac{2018}{1} C_{2018}^{2018} \cdot \frac{1}{2018} C_{2018}^{2017} \\ &= C_{2018}^1 \cdot C_{2018}^0 + C_{2018}^2 \cdot C_{2018}^1 + \dots + C_{2018}^{2017} \cdot C_{2018}^{2016} + C_{2018}^{2018} \cdot C_{2018}^{2017} \end{aligned}$$

Mà $C_{2018}^k = C_{2018}^{2018-k}$ suy ra $S = C_{2018}^1 \cdot C_{2018}^{2018} + C_{2018}^2 \cdot C_{2018}^{2017} + \dots + C_{2018}^{2017} \cdot C_{2018}^2 + C_{2018}^{2018} \cdot C_{2018}^1$.

Mặt khác ta có $(1+x)^{2018} = \sum_{k=0}^{2018} C_{2018}^k x^k \Rightarrow (1+x)^{2018} \cdot (1+x)^{2018}$

$$= \sum_{k=0}^{2018} C_{2018}^k x^k \cdot \sum_{l=0}^{2018} C_{2018}^l x^l = \sum_{k,l=0}^{2018} C_{2018}^k \cdot C_{2018}^l \cdot x^{k+l} \quad (1).$$

Suy ra hệ số của số hạng chứa x^{2019} trong khai triển của (1) là

$$S = C_{2018}^1 \cdot C_{2018}^{2018} + C_{2018}^2 \cdot C_{2018}^{2017} + \dots + C_{2018}^{2017} \cdot C_{2018}^2 + C_{2018}^{2018} \cdot C_{2018}^1.$$

Lại do $(1+x)^{2018} \cdot (1+x)^{2018} = (1+x)^{4036}; (1+x)^{4036} = \sum_{n=0}^{4036} C_{4036}^n x^n \quad (2)$

Suy ra hệ số của số hạng chứa x^{2019} trong khai triển của (2) là C_{4036}^{2019} .

Vậy $S = C_{2018}^1 \cdot C_{2018}^{2018} + C_{2018}^2 \cdot C_{2018}^{2017} + \dots + C_{2018}^{2017} \cdot C_{2018}^2 + C_{2018}^{2018} \cdot C_{2018}^1 = C_{4036}^{2019}$

$$= \frac{4036!}{2019! \cdot (4036-2019)!} = \frac{4036-2018}{2019} \frac{4036!}{2018! \cdot (4036-2018)!} = \frac{2018}{2019} C_{4036}^{2018}.$$

Câu 17: Cho 2 số phức $\begin{cases} z_1 = a+bi \\ z_2 = c+di \end{cases}$ thỏa mãn $\begin{cases} a+2b=9 \\ c+2d=4 \end{cases}$. Tìm $|z_1|+|z_2|$ khi biểu thức

$P = |z_1 - 6 - 4i| + |z_1 - z_2| + |z_2 - 2 + 4i|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

- A. $4 + \sqrt{29}$ B. $3 + \sqrt{29}$ C. $6 + \sqrt{29}$ D. $3 + \sqrt{29}$

Giải

Gọi $A(6;4), D(2;-4), M(z_1), N(z_2)$. Mặt khác $\begin{cases} a+2b=9 \\ c+2d=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M \in d_1 : x+2y-9=0 \\ N \in d_2 : x+2y-4=0 \end{cases}$

Theo bất đẳng thức tam giác ta có:

$$P = |z_1 - 6 - 4i| + |z_1 - z_2| + |z_2 - 2 + 4i| = AM + MN + ND \geq AN + ND \geq AD = 4\sqrt{5}$$

Phương trình $AD: 2x - y - 8 = 0$. Khi đó $\begin{cases} M = d_1 \cap AD \Rightarrow M(5;2) \\ N = d_2 \cap AD \Rightarrow N(4;0) \end{cases}$.

Suy ra $|z_1| + |z_2| = 4 + \sqrt{29}$

Câu 18: Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $\begin{cases} z_1 - 3 - i = k(z_2 - 3 - i) (k < 0) \\ z_1 = mi (m \in \mathbb{R}^+) \\ z_2 \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$

Tìm k khi biểu thức $P = \frac{9}{|z_1|^2} + \frac{4}{|z_2|^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

- A. $k = 1$ B. $k = -3$ C. $k = -4$ D. $k = 2$

Giải

Gọi $M(3;1), A(z_1), B(z_2)$. Theo giả thiết thì ta có M, A, B thẳng hàng đồng thời A thuộc Oy , B thuộc Ox . Phương trình đoạn AB theo đoạn chắn là:

$$AB: \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, M \in AB \Rightarrow \frac{3}{a} + \frac{1}{b} = 1 (A(a;0), B(0;b) (a, b > 0))$$

Theo *Cauchy - Schwarz* ta có: $P = \frac{9}{a^2} + \frac{4}{b^2} \geq \frac{4}{5} \left(\frac{3}{a} + \frac{1}{b} \right)^2 = \frac{4}{5}$.

Dấu "=" xảy ra khi $a = \frac{15}{4}; b = 5 \Rightarrow k = -4$

Câu 19: Trong mặt phẳng phức, xét hình bình hành tạo bởi các điểm $0, z, \frac{1}{z}$ và $z + \frac{1}{z}$.

Biết z có phần thực dương và diện tích hình bình hành bằng $\frac{35}{37}$. Tìm GTNN của $\left|z + \frac{1}{z}\right|^2$.

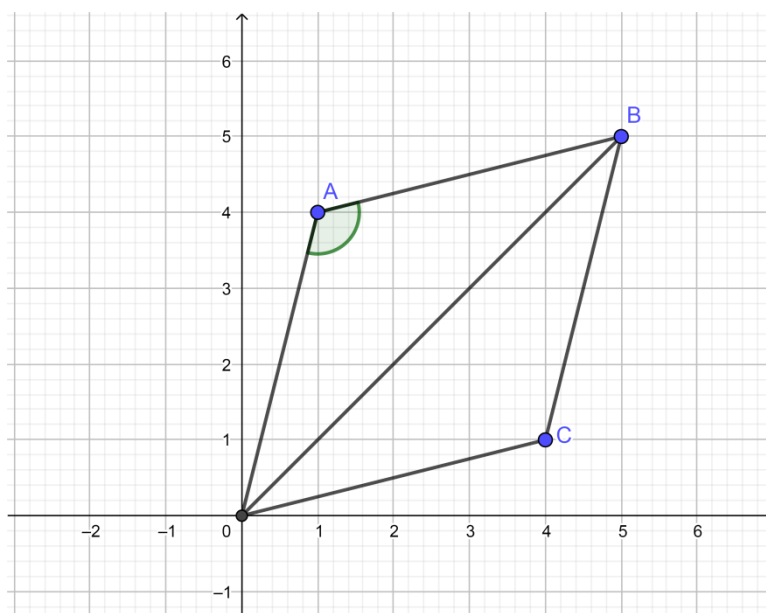
A. $\frac{53}{20}$

B. $\frac{60}{37}$

C. $\frac{22}{9}$

D. $\frac{50}{37}$

Giải



Gọi O, A, B, C lần lượt là điểm biểu diễn số phức $0, z, \frac{1}{z}$ và $z + \frac{1}{z}$.

Khi đó diện tích hình bình hành $OACB$ là $S = OA \cdot OB \cdot \sin \varphi = |z| \cdot \left|\frac{1}{z}\right| \cdot \sin \varphi = \frac{35}{37} \Leftrightarrow \sin \varphi = \frac{35}{37}$.

Suy ra $\cos \varphi = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \varphi} = \pm \frac{12}{37}$.

Áp dụng định lý cosin trong tam giác OAC ta có

$$\left|z + \frac{1}{z}\right|^2 = OC^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cdot \cos \varphi = |z|^2 + \left|\frac{1}{z}\right|^2 - 2\left|z\right|\left|\frac{1}{z}\right| \cdot \cos \varphi = |z|^2 + \frac{1}{|z|^2} - 2 \cos \varphi$$

$$\Leftrightarrow \left|z + \frac{1}{z}\right|^2 \geq 2 - 2 \cdot \frac{12}{37} = \frac{50}{37}. \text{ Vậy } \left|z + \frac{1}{z}\right|^2 \text{ nhỏ nhất bằng } \frac{50}{37}.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow |z| = 1$ và $\cos \varphi = \frac{12}{37}$.

Chẳng hạn như $z = \sin\left(\frac{1}{2} \arccos \frac{12}{37}\right) + i \cos\left(\frac{1}{2} \arccos \frac{12}{37}\right)$.

Câu 20: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC . Điểm I thuộc đoạn SA . Biết mặt phẳng (MNI) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai phần, phần chứa đỉnh S có thể tích bằng $\frac{7}{13}$ lần phần còn lại. Tính tỉ số $k = \frac{IA}{IS}$?

A. $\frac{3}{4}$

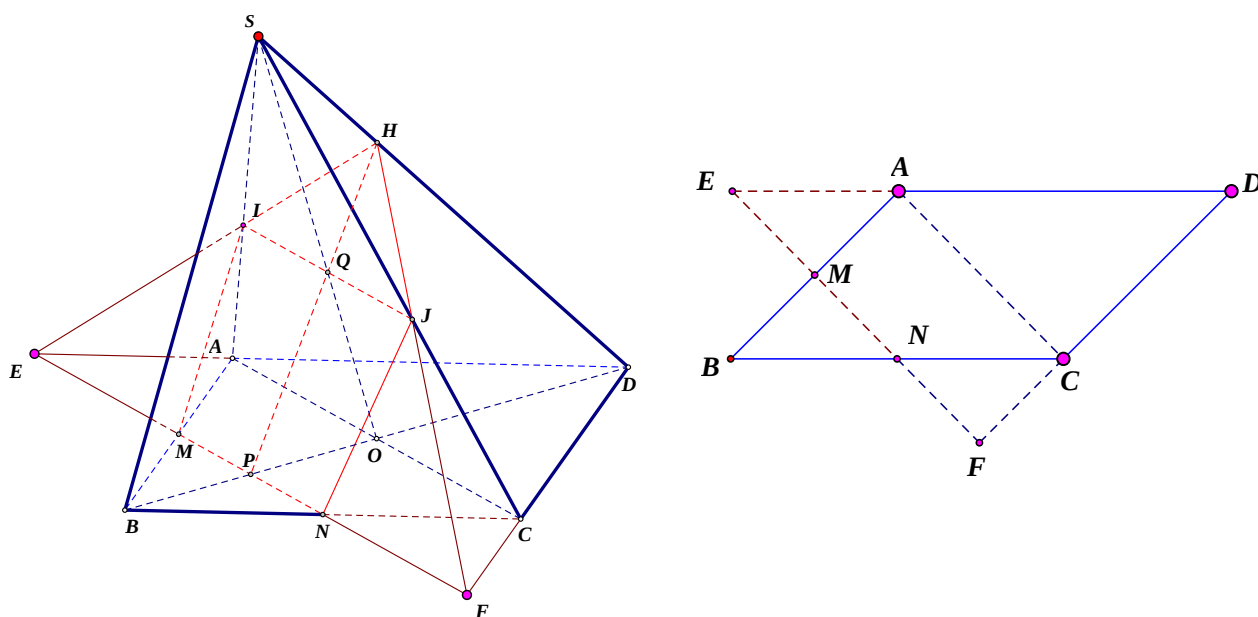
B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{1}{3}$

D. $\frac{2}{3}$

Giải

Ta có hình vẽ



Để thấy thiết diện tạo bởi mặt phẳng (MNI) với hình chóp là hình ngũ giác $IMNJH$ với $MN \parallel IJ$. Ta có MN, AD, IH đồng qui tại E với $EA = \frac{1}{3}ED$ và MN, CD, HJ đồng qui tại F với $FC = \frac{1}{3}FD$, chú ý E, F cố định.

Dùng định lí Menelaus với tam giác SAD ta có $\frac{HS}{HD} \cdot \frac{ED}{EA} \cdot \frac{IA}{SI} = 1 \Leftrightarrow \frac{HS}{HD} \cdot 3 \cdot k = 1 \Leftrightarrow \frac{HS}{HD} = \frac{1}{3k}$.

Từ đó $\frac{d(H, (ABCD))}{d(S, (ABCD))} = \frac{HD}{SD} = \frac{3k}{3k+1}$. Suy ra $V_{HJMIAMNCD} = V_{H, DFE} - V_{I, AEM} - V_{J, NFC}$.

Đặt $V = V_{S, ABCD}$ và $S = S_{ABCD}$, $h = d(S, (ABCD))$ ta có $S_{AEM} = S_{NFC} = \frac{1}{8}S$ và

$$\frac{d(I, (ABCD))}{d(S, (ABCD))} = \frac{IA}{SA} = \frac{k}{k+1}$$

Thay vào ta được $V_{HJMIAMNCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3k}{3k+1} h \cdot \left(\frac{9}{8}S\right) - 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{k}{k+1} h \cdot \frac{1}{8}S = \frac{1}{8} \cdot \frac{21k^2 + 25k}{(3k+1)(k+1)} V$.

Theo giả thiết ta có $V_{HJAMNCD} = \frac{13}{20}V$ nên ta có phương trình $\frac{1}{8} \cdot \frac{21k^2 + 25k}{(3k+1)(k+1)} = \frac{13}{20}$, giải phương trình này được $k = \frac{2}{3}$.

Câu 21: Cho đa giác đều gồm 100 đỉnh. Tính số tam giác tù được chọn từ 3 đỉnh của đa giác trên?

- A. 117600 B. 117800 C. 116700 D. 117670

Giải

Đánh số các đỉnh là $A_1, A_2, \dots, A_{100}$.

Xét đường chéo A_1A_{51} của đa giác là đường kính của đường tròn ngoại tiếp đa giác đều chia đường tròn ra làm hai phần, mỗi phần có 49 điểm: từ A_2 đến A_{50} và A_{52} đến A_{100} .

Khi đó, mỗi tam giác có dạng $A_1A_iA_j$ là tam giác tù nếu A_i và A_j cùng nằm trong nửa đường tròn

- Chọn nửa đường tròn: có 2 cách chọn.
- Chọn hai điểm A_i, A_j là hai điểm tùy ý được lấy từ 49 điểm $A_2, A_3, \dots, A_{50}$ có $C_{49}^2 = 1176$ cách chọn.

Giả sử A_i nằm giữa A_1 và A_j thì tam giác $A_1A_iA_j$ tù tại đỉnh A_i . Mà $\Delta A_jA_iA_1 \equiv \Delta A_1A_iA_j$ nên kết quả bị lặp hai lần. Có 100 cách chọn đỉnh.

Vậy số tam giác tù là $\frac{2 \cdot 1176 \cdot 100}{2} = 117600$.

Chú ý: Cho đa giác đều có n đỉnh. Công thức tổng quát tính số tam giác tù:

- Nếu n chẵn thì số tam giác tù là $n \cdot C_{\frac{n-2}{2}}^2$
- Nếu n lẻ thì số tam giác tù $n \cdot C_{\frac{n-1}{2}}^2$

Áp dụng công thức nhanh ta có $n \cdot C_{\frac{n-2}{2}}^2 = 100 \cdot C_{49}^2 = 117600$.

Câu 22: Cho hai số thực $x, y \geq 1$ thỏa mãn điều kiện:

$$\left| \log_2 2(x+y) \right| + \left| \log_2 \frac{2(x+y)}{x^2 + 4y^2 + 1} \right| = \log_2 (4xy + 1)$$

Giá trị lớn nhất của biểu thức $f(x, y) = 2xy + \sqrt{x+2y} - x^2 - 4y^2$ bằng?

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{3}{7}$

Giải

Áp dụng bất đẳng thức trị tuyệt đối ta có:

$$\begin{aligned} & \left| \log_2 2(x+y) \right| + \left| \log_2 \frac{2(x+y)}{x^2+4y^2+1} \right| = \left| \log_2(x+y) + 1 \right| + \left| 1 - \log_2 \frac{x^2+4y^2+1}{x+y} \right| \\ & = \left| \log_2(x+y) + 1 \right| + \left| \log_2 \frac{x^2+4y^2+1}{x+y} - 1 \right| \geq \left| \log_2(x^2+4y^2+1) \right| = \log_2(x^2+4y^2+1) \end{aligned}$$

Mặt khác theo bất đẳng thức AM - GM ta lại có $\log_2(x^2+4y^2+1) \geq \log_2(4xy+1) = VP$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} \left(1 - \log_2 \frac{x^2+4y^2+1}{x+y}\right)(\log_2(x+y)+1) \\ x=2y \end{cases}$

Thế vào $f(x, y)$ ta được $f(x, y) = g(x) = \sqrt{2x} - x^2$

Ta có $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2x}} = 2x \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow \max_{[1;+\infty)} g(x) = g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$

Câu 23. Cho phương trình $3\sqrt{\tan x + 1}(\sin x + 2\cos x) = m(\sin x + 3\cos x)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2018; 2018]$ để phương trình trên có đúng một nghiệm thuộc $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$?

- A. 2015. B. 2016. C. 2018. D. 4036.

Giải

Vì $\cos x \neq 0$ nên phương trình tương đương với $\Leftrightarrow 3(\tan x + 2)\sqrt{\tan x + 1} = m(\tan x + 3)$.

Đặt $t = \sqrt{\tan x + 1}$, vì $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow t \in (1; +\infty)$.

Khi đó phương trình trở thành $3t(t^2 + 1) = m(t^2 + 2) \Leftrightarrow m = \frac{3t^3 + 3t}{t^2 + 2}$.

Xét hàm $f(t) = \frac{3t^3 + 3t}{t^2 + 2}$ với $t \in (1; +\infty)$. Ta có $f'(t) = \frac{3(t^4 + 5t^2 + 2)}{(t^2 + 2)^2} > 0, \forall t \in (1; +\infty)$.

Lập bảng biến thiên suy ra phương trình có nghiệm khi $m > 2$

$\xrightarrow[m \in \mathbb{Z}]{m \in [-2018; 2018]} m \in \{3, 4, \dots, 2018\} \Rightarrow$ Có 2016 giá trị.

Câu 24: Cho phương trình $2^{2017}(\sin^{2018} x + \cos^{2018} x)(\sin x + \cos x)\cos x = \frac{\cos 2x}{1 - \tan x}$. Nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình có dạng $\frac{\pi a}{b}$ với a, b là các số nguyên và nguyên tố cùng nhau. Tính $S = a + b$.

- A. $S = 2$. B. $S = 3$. C. $S = 4$. D. $S = 7$.

Giải

Điều kiện: $\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \tan x \neq 1 \end{cases}$

Ta có $\frac{\cos 2x}{1 - \tan x} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{1 - \frac{\sin x}{\cos x}} = \cos x (\cos x + \sin x)$.

Do đó phương trình $\Leftrightarrow 2^{2017} (\sin^{2018} x + \cos^{2018} x) (\sin x + \cos x) \cos x = (\sin x + \cos x) \cos x$
 $\Leftrightarrow \cos x (\sin x + \cos x) \cdot [2^{2017} (\sin^{2018} x + \cos^{2018} x) - 1] = 0$.

- $\cos x = 0 (L)$
- $\sin x + \cos x = 0 \Leftrightarrow \tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.
- $2^{2017} (\sin^{2018} x + \cos^{2018} x) - 1 = 0 \Leftrightarrow 2^{2017} (\sin^{2018} x + \cos^{2018} x) = 1$: Vô nghiệm vì
 $\sin^{2018} x + \cos^{2018} x = 2 \cdot \left(\frac{a^{1009} + b^{1009}}{2} \right) \geq 2 \left(\frac{a+b}{2} \right)^{1009} = \frac{1}{2^{1008}}$ với $a = \sin^2 x, b = \cos^2 x$.

$\Rightarrow$ Nghiệm dương nhỏ nhất là $\frac{3\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=4 \end{cases} \Rightarrow S=7$

Câu 25: Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $0 < a, b, c < 1$. Khi đó trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \log_a b + \log_b c + \frac{1}{4} \log_c^2 a$ được viết dưới dạng $\frac{m}{n}$, với m, n là các số nguyên dương và $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Hỏi $T = m^3 + n^3$ có giá trị là bao nhiêu?

A. 171

B. 89

C. 195

D. 163

Giải

Theo bất đẳng thức AM - GM ta có:

- $P = \log_a b + \log_b c + \frac{1}{4} \log_c^2 a \geq 2\sqrt{\log_a b \log_b c} + \frac{1}{4} \log_c^2 a = 2\sqrt{\log_a c} + \frac{1}{4} \log_c^2 a$
- $2\sqrt{\log_a c} + \frac{1}{4} \log_c^2 a = \frac{1}{4} \sqrt{\log_a c} + \frac{1}{4} \sqrt{\log_a c} + \frac{1}{4} \sqrt{\log_a c} + \frac{1}{4} \sqrt{\log_a c} + \frac{1}{4} \log_c^2 a$
 $\geq 5\sqrt{\frac{1}{4} \sqrt{\log_a c} \cdot \frac{1}{4} \sqrt{\log_a c} \cdot \frac{1}{4} \sqrt{\log_a c} \cdot \frac{1}{4} \sqrt{\log_a c} \cdot \frac{1}{4} \log_c^2 a} = \frac{5}{4}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $P = \frac{5}{4}$, khi đó $T = 189$

Câu 26: Có bao nhiêu số nguyên $m \in [-2018; 2018]$ để phương trình $|2^{|x|+1} - 8| = \frac{3}{2}x^2 + m$ có đúng 2 nghiệm thực phân biệt?

A. 2013

B. 2012

C. 4024

D. 2014

Giải

Phương trình tương đương với $m = |2^{|x|+1} - 8| - \frac{3}{2}x^2$. Hàm số $f(x) = |2^{|x|+1} - 8| - \frac{3}{2}x^2$ là một hàm số chẵn do đó ta chỉ cần xét trên nửa khoảng $[0; +\infty)$ để suy ra bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên cả tập số thực.

Xét hàm số

$$f(x) = \left| 2^{|x|+1} - 8 \right| - \frac{3}{2}x^2 = \begin{cases} 2^{x+1} - 8 - \frac{3x^2}{2} & (x \geq 2) \\ -2^{x+1} + 8 - \frac{3x^2}{2} & (0 \leq x < 2) \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} g(x) = 2^{x+1} \ln 2 - 3x & (x > 2) \\ -2^{x+1} \ln 2 - 3x < 0 & (0 < x < 2) \end{cases}$$

Ta có $g'(x) = 2^{x+1} \ln^2 x - 3 > 8 \ln^2 2 - 3 > 0, \forall x > 2, g(2) = 8 \ln 2 - 6 < 0, g(3) = 16 \ln 2 - 9 > 0$ nên phương trình $g(x) = 0$ có nghiệm $x_0 \in (2; 3)$.

Vẽ bảng biến thiên cho hàm số $f(x)$ ta suy ra được phương trình có đúng 2 nghiệm thực

khi và chỉ khi $\begin{cases} m > 6 \\ m = f(x_0) = 2^{x_0+1} - 8 - \frac{3x_0^2}{2} \notin \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow m \in \{7, 8, \dots, 2018\}$

Câu 27: Giả sử số tự nhiên $n \geq 2$ thỏa mãn đẳng thức dưới đây hãy tìm n ?

$$C_{2n}^0 + \frac{C_{2n}^2}{3} + \frac{C_{2n}^4}{5} + \frac{C_{2n}^6}{7} + \dots + \frac{C_{2n}^{2n-2}}{2n-1} + \frac{C_{2n}^{2n}}{2n+1} = \frac{4096}{13}$$

A. $n = 4$

B. $n = 5$

C. $n = 6$

D. $n = 7$

Giải

Giả sử số tự nhiên $n \geq 2$ thỏa mãn $C_{2n}^0 + \frac{C_{2n}^2}{3} + \frac{C_{2n}^4}{5} + \frac{C_{2n}^6}{7} + \dots + \frac{C_{2n}^{2n-2}}{2n-1} + \frac{C_{2n}^{2n}}{2n+1} = \frac{8192}{15}$.

Ta có: $(1+x)^{2n} = C_{2n}^0 + C_{2n}^1 x + C_{2n}^2 x^2 + \dots + C_{2n}^{2n} x^{2n}$.

$$\Leftrightarrow \int_0^1 (1+x)^{2n} dx = \left(C_{2n}^0 x + \frac{1}{2} C_{2n}^1 x^2 + \frac{1}{3} C_{2n}^2 x^3 + \dots + \frac{1}{2n+1} C_{2n}^{2n} x^{2n+1} \right) \Big|_0^1$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1+x)^{2n+1}}{2n+1} \Big|_0^1 = \left(C_{2n}^0 x + \frac{1}{2} C_{2n}^1 x^2 + \frac{1}{3} C_{2n}^2 x^3 + \dots + \frac{1}{2n+1} C_{2n}^{2n} x^{2n+1} \right) \Big|_0^1$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(2^{2n+1} - 1)}{2n+1} = 2C_{2n}^0 + \frac{2}{2} C_{2n}^1 + \frac{2}{3} C_{2n}^2 + \dots + \frac{2}{2n+1} C_{2n}^{2n} \quad (1)$$

Mặt khác $\int_0^{-1} (1+x)^{2n} dx = \left(C_{2n}^0 x + \frac{1}{2} C_{2n}^1 x^2 + \frac{1}{3} C_{2n}^2 x^3 + \dots + \frac{1}{2n+1} C_{2n}^{2n} x^{2n+1} \right) \Big|_0^{-1}$

$$\Leftrightarrow \frac{-2}{2n+1} = -2C_{2n}^0 + \frac{2}{2} C_{2n}^1 - \frac{2}{3} C_{2n}^2 + \dots + \frac{2}{2n+1} C_{2n}^{2n} \quad (2)$$

Lấy (1) trừ (2), ta được:

$$\frac{2^{2n+1}}{2n+1} = 2 \left(C_{2n}^0 + \frac{C_{2n}^1}{3} + \frac{C_{2n}^4}{5} + \frac{C_{2n}^6}{7} + \dots + \frac{C_{2n}^{2n-2}}{2n-1} + \frac{C_{2n}^{2n}}{2n+1} \right) \Leftrightarrow \frac{2^{2n+1}}{2n+1} = 2 \cdot \frac{4096}{13} \Leftrightarrow n = 6.$$

Câu 28: Tính tổng $S = C_{20}^0 + 3C_{20}^3 + 6C_{20}^6 + \dots + 3kC_{20}^{3k} + \dots + 15C_{20}^{15} + 18C_{20}^{18}$?

A. $S = \frac{10.2^{20}}{3} - 13$

B. $S = \frac{10.2^{20}}{3} - 14$

C. $S = \frac{10.2^{21}}{3} - 13$

D. $S = \frac{10.2^{19}}{3} - 13$

Giải

Xét khai triển $(x+1)^{20} = C_{20}^0 + xC_{20}^1 + x^2C_{20}^2 + \dots + x^{19}C_{20}^{19} + x^{20}C_{20}^{20}$

Đạo hàm hai vế ta có $20(x+1)^{19} = C_{20}^1 + 2xC_{20}^2 + 3x^2C_{20}^3 + \dots + 19x^{18}C_{20}^{19} + 20x^{19}C_{20}^{20} (*)$

Nhân hai vế $(*)$ với x ta có $20x(x+1)^{19} = xC_{20}^1 + 2x^2C_{20}^2 + 3x^3C_{20}^3 + \dots + 19x^{19}C_{20}^{19} + 20x^{20}C_{20}^{20}$

Cho $x=1$ ta được $20.2^{19} = C_{20}^1 + 2C_{20}^2 + 3C_{20}^3 + \dots + 19C_{20}^{19} + 20C_{20}^{20} (1)$

Đặt $a = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$. Cho $x=a$ ta có

$$20a(1+a)^{19} = aC_{20}^1 + 2a^2C_{20}^2 + 3a^3C_{20}^3 + \dots + 19a^{19}C_{20}^{19} + 20a^{20}C_{20}^{20} (2)$$

Cho $x=a^2$ ta có $20a^2(1+a^2)^{19} = a^2C_{20}^1 + 2a^3C_{20}^2 + 3a^4C_{20}^3 + \dots + 19a^{19}C_{20}^{19} + 20a^{20}C_{20}^{20} (3)$

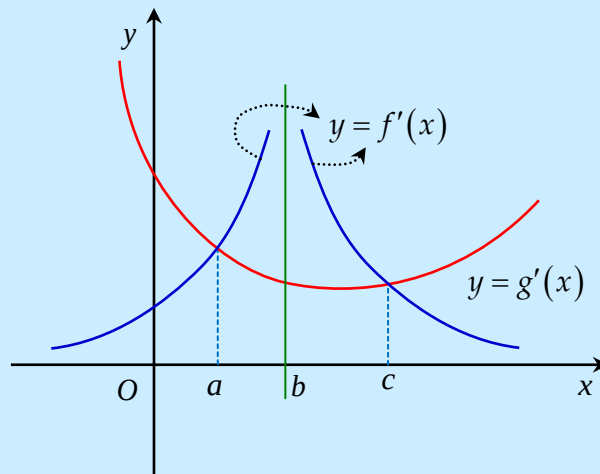
Cộng vế theo vế $(1), (2), (3)$ ta có $20[2^{19} + a(1+a)^{19} + a^2(1+a^2)^{19}] = 3S - C_{20}^0$

$$\text{Mặt khác } \begin{cases} a(1+a)^{19} = a(-a^2)^{19} = -a^{39} = -1 \\ a^2(1+a^2)^{19} = a^2(-a)^{19} = -a^{21} = -1 \end{cases} \Rightarrow S = \frac{10.2^{20}}{3} - 13$$

Câu 29: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R} \setminus \{b\}$ và hàm số $g(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$.

Biết đồ thị của hai hàm số $y=f'(x), y=g'(x)$ như hình vẽ dưới.

Đặt $h(x) = f(x) - g(x), S = -[h(x^2+b)]^2 + h(b+x^2)(1+2h(c)) - [h(c)]^2$ với a, b, c là các số thực đã biết. Khẳng định đúng với mọi $x \neq 0$ là?



A. $S \in [h(c); h(a+c)]$

B. $S \leq h(c)$

C. $S \leq [h(c); h(a+b)]$

D. $S \in [h(a); h(c)]$

Giải

Từ đồ thị đã cho ta suy ra $h'(x) = f'(x) - g'(x); h'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = g'(x) \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ x = c \end{cases}$

Lập bảng biến thiên ta có

x	$-\infty$	a	b	c	$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
		0	$+$	0	$-$
$h(x)$					

Lại có $S = -\left(h(b+x^2) - h(c)\right)^2 + h(b+x^2) \leq h(x^2+b) \leq h(c)$

Câu 30: Cho 3 số thực thỏa mãn $x \in [2;4]; y \in [0;4]; z \in [1;5]$. Khi đó giá trị lớn nhất của biểu thức $T = (\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z})^2 - 5(\log_3(x-1) + 2\log_5(y+1) + 4\log_5 z)$ bằng?

A. 10

B. 11

C. $8\sqrt{5} - 14$

D. 12

Giải

Theo Cauchy - Schwarz, ta có:

$$(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z})^2 = \left(1\sqrt{x} + 1\sqrt{y} + \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2z}\right)^2 \leq \left(1+1+\frac{1}{2}\right)(x+y+2z) = \frac{5}{2}(x+y+2z)$$

Dấu "=" xảy ra khi: $\sqrt{x} = \sqrt{y} = 2\sqrt{z} \Leftrightarrow x = y = 4z$ (1)

Suy ra $T \leq \frac{5}{2}(x+y+2z) - 5(\log_3(x-1) + 2\log_5(y+1) + 4\log_5 z)$

$$\Rightarrow T \leq \frac{5}{2}(x+y+2z - 2\log_3(x-1) - 4\log_5(y+1) - 8\log_5 z)$$

$$\Rightarrow T \leq \frac{5}{2}(x+y+2z - 2\log_3(x-1) - 4\log_5(y+1) - 8\log_5 z)$$

$$\Rightarrow T \leq \frac{5}{2}(x - 2\log_3(x-1)) + \frac{5}{2}(y - 4\log_5(y+1)) + 5(z - 4\log_5 z)$$

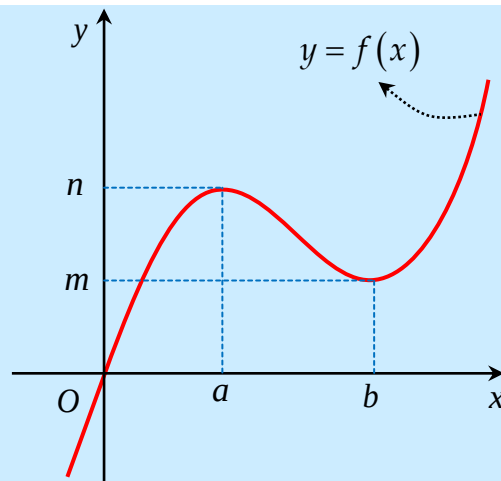
Áp dụng kết quả quan trọng $x - (a-1)\log_a x - 1 \leq 0, \forall x \in [1; a]$. Dấu "=" xảy ra khi $x = 1$

$$\text{hoặc } x = a \Rightarrow \begin{cases} x - \log_3(x-1) = ((x-1) - 2\log_3(x-1) - 1) + 2 \leq 2 \\ y - 4\log_5(y+1) = ((y+1) - 4\log_5(y+1) - 1) \leq 0 \Rightarrow T \leq 10 \\ z - 4\log_5 z = (z - 4\log_5 z - 1) + 1 \leq 1 \end{cases}$$

Dấu "=" xảy ra khi $x = y = 4z = 4$.

Câu 31: Cho $0 < \sqrt{a} - 1 < \sqrt{b} - 1 < a$ và hàm số $y = g(x) = \frac{f(x)}{f((x+1)^2)}$ có đạo hàm trên

$[0; +\infty)$. Biết đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ dưới. Khẳng định nào sau đây đúng với mọi $x \in [\sqrt{a} - 1; \sqrt{b} - 1]$



- A. $g(x) \geq \frac{f(\sqrt{b}-1)}{m}$ B. $g(x) \leq \frac{f(\sqrt{a}-1)}{n}$ C. $g(x) \leq \frac{f(\sqrt{b}-1)}{m}$ D. $-10 \leq g(x) \leq 0$

Giải

Ta có $x \in [\sqrt{a}-1; \sqrt{b}-1] \Rightarrow (x+1)^2 \in [a; b]$, dựa vào đồ thị ta có

$$m \leq f((x+1)^2) \leq n \Rightarrow \frac{1}{n} \leq \frac{1}{f((x+1)^2)} \leq \frac{1}{m}$$

Mặt khác $0 < \sqrt{a}-1 < \sqrt{b}-1 < a$ dựa vào đồ thị ta thấy $f(x)$ đồng biến trên $[\sqrt{a}-1; \sqrt{b}-1]$

nên ta có $f(\sqrt{a}-1) \leq f(x) \leq f(\sqrt{b}-1) \Rightarrow g(x) \leq \frac{f(\sqrt{b}-1)}{m}$

Câu 32: Cho các số thực dương a, b, c, m, n, p thỏa mãn điều kiện $2^{2017}\sqrt{m} + 2^{2017}\sqrt{n} + 3^{2017}\sqrt{p} \leq 7$

và $4a + 4b + 3c \geq 42$. Đặt $S = \frac{2(2a)^{2018}}{m} + \frac{2(2b)^{2018}}{n} + \frac{3c^{2018}}{p}$ thì khẳng định đúng là?

- A. $42 < S \leq 7.6^{2018}$ B. $S > 6^{2018}$ C. $7 \leq S \leq 7.6^{2018}$ D. $4 \leq S \leq 42$

Giải

Đặt $m = x^{2017}; n = y^{2017}; p = z^{2017}; 2x + 2y + 3z \leq 7; 2a + 2b + 3d \geq 21 (c = 2d)$

$$\text{Theo AM - GM ta có } \begin{cases} 2 \cdot \frac{(2a)^{2018}}{x^{2017}} + 2(6^{2018}x + 6^{2018}x + \dots + 6^{2018}x) \geq 2.2018.6^{2017}.2a \\ 2 \cdot \frac{(2a)^{2018}}{y^{2017}} + 2(6^{2018}y + 6^{2018}y + \dots + 6^{2018}y) \geq 2.2018.6^{2017}.2b \\ 3 \cdot \frac{(2a)^{2018}}{y^{2017}} + 3(6^{2018}y + 6^{2018}y + \dots + 6^{2018}y) \geq 3.2018.6^{2017}.2d \end{cases}$$

Mặt khác $-2017.6^{2018}(2x + 2y + 3z) \geq -2017.7.6^{2018}$

$$\Rightarrow S \geq 2.2018.6^{2017}(2a + 2b + 3d) - 2017.6^{2018}(2x + 2y + 3z) \geq 2.2018.6^{2017}.3.7 - 2017.7.6^{2018} = 7.6^{2018}$$

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} x = y = z = 1 \\ a = b = d = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = n = p = 1 \\ 2a = 2b = c = 6 \end{cases}$

Câu 33: Có bao nhiêu cặp số nguyên a, b để phương trình sau đúng với mọi x

$$a(\cos x - 1) + b^2 = \cos(ax + b^2) - 1 \quad (1)$$

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

Giải

Giả sử phương trình (1) đúng với mọi x nên cũng đúng với $x = 0$

$$\Rightarrow 1 + b^2 = \cos(b)^2 \Leftrightarrow b = 0$$

Khi đó phương trình (1) trở thành:

$$a(\cos x - 1) = \cos ax - 1 \quad (2) \quad (2) \text{ đúng với mọi } x \text{ khi } a = 0$$

Vậy ta chỉ cần xét khi $a \neq 0$. Do (2) đúng với mọi x nên đúng khi $x = 2\pi$ $x = 2$ khi ấy có:

$$\cos 2ax = 1 \Rightarrow 2a\pi = 2k\pi. \text{ Do } a \neq 0 \Rightarrow a = k \quad (3). \text{ Trong (2) thay } x = \frac{2\pi}{a} \text{ (do } a \neq 0) \text{ ta có}$$

$$a\left(\cos \frac{2\pi}{a} - 1\right) = 0 \Rightarrow \cos \frac{2\pi}{a} = 1 \Rightarrow \frac{2\pi}{a} = 2m\pi \Rightarrow a = \frac{1}{m} \quad (4)$$

Từ (3), (4) và k, m nguyên nên $a = \pm 1$.

Thử lại ta thấy chỉ có $a = 0$ và $b = 0$ hoặc $a = 1$ và $b = 0$ thỏa mãn

Vậy có 2 cặp số nguyên $(a; b)$ để pt (1) đúng với mọi x .

Câu 34: Cho hệ phương trình $\begin{cases} (p-x^2)(p+x-2) < 0 \\ x^2 \leq 1 \end{cases}$ vô nghiệm khi $p \in (-\infty; a] \cup [b; +\infty)$.

Tính giá trị của biểu thức $A = a^2 + b^2$

A. 10

B. 9

C. 13

D. 16

Giải

Ta có hệ phương trình đã cho vô nghiệm $\Leftrightarrow f(x) = (p-x^2)(p+x-2) \geq 0$ với mọi $|x| \leq 1$ (1)

$$\text{Giả sử (1) đúng, ta có } \begin{cases} f(-1) \geq 0 \\ f(0) \geq 0 \\ f(1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (p-1)(p-3) \geq 0 \\ p(p-2) \geq 0 \\ (p-1)^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p \leq 0 \\ p \geq 3 \end{cases}$$

Thử lại, ta có:

+) Nếu $p \leq 0$ khi đó $p - x^2 \leq 0$ với mọi x

$$\text{Do } |x| \leq 1 \Rightarrow p + x - 2 \leq -1 \Rightarrow (p - x^2)(p + x - 2) \geq 0 \text{ với mọi } |x| \leq 1.$$

+) Nếu $p \geq 3$

$$\text{Do } |x| \leq 1 \Rightarrow p - x^2 \geq 2 \text{ và } p + x - 2 \geq 0 \text{ (do } x \geq -1) \Rightarrow (p - x^2)(p + x - 2) \geq 0 \text{ với mọi } |x| \leq 1.$$

$$\text{Vậy } a = 0, b = 3 \Rightarrow A = 9$$

Câu 35: Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $u_1 = 2$; $u_n = 2u_{n-1} + 3n - 1$. Công thức số hạng tổng quát của dãy số đã cho là biểu thức có dạng $a.2^n + bn + c$, với a, b, c là các số nguyên, $n \geq 2$; $n \in \mathbb{N}$. Khi đó tổng $a + b + c$ có giá trị bằng

A. -4

B. 4

C. -3

D. 3

Giải

Ta có $u_n = 2u_{n-1} + 3n - 1 \Leftrightarrow u_n + 3n + 5 = 2[u_{n-1} + 3(n-1) + 5]$, với $n \geq 2$; $n \in \mathbb{N}$.

Đặt $v_n = u_n + 3n + 5$, ta có $v_n = 2v_{n-1}$ với $n \geq 2$; $n \in \mathbb{N}$.

Như vậy, (v_n) là cấp số nhân với công bội $q = 2$ và $v_1 = 10$, do đó $v_n = 10.2^{n-1} = 5.2^n$.

Do đó $u_n + 3n + 5 = 5.2^n$, hay $u_n = 5.2^n - 3n - 5$ với $n \geq 2$; $n \in \mathbb{N}$.

Suy ra $a = 5$, $b = -3$, $c = -5$. Nên $a + b + c = 5 + (-3) + (-5) = -3$.

Câu 36: Một ngày đẹp trời, trong lúc đi dạo công viên, cầm một khối cầu trong tay, một nhà khoa học yêu cái đẹp nảy ra ý tưởng muốn tạo ra một khối nón nội tiếp trong một khối cầu có bán kính R và đựng một loại dung dịch X do ông chế tạo ra vào trong đó, sao cho thể tích dung dịch X chứa được trong X là lớn nhất. Sau khi chế tạo xong, trong lúc mãi ngẫm tác phẩm của mình, nhà khoa học đã vô tình làm vỡ cả khối cầu thủy tinh, tuy vậy ông đã thu hồi lại được lượng dung dịch X quý giá của mình. Lần này, vì rút kinh nghiệm, cũng lượng dung dịch X đó, nhà khoa học muốn chế tạo một cái hộp bằng một loại kim loại chịu lực trong suốt để đựng dung dịch của mình. Ông có hai sự lựa chọn cho hộp kim loại của mình, có dạng hình hộp chữ nhật hoặc là có dạng khối trụ. Tuy nhiên, kinh phí còn lại của ông có hạn, còn giá thành kim loại đó lại rất đắt vì nó hiếm. Ông muốn chi phí sản xuất kim loại cấu thành hộp là bé nhất, nhưng vẫn phải chứa được lượng dung dịch X đã có của mình. Hãy giúp nhà khoa học tính toán xem diện tích toàn phần nhỏ nhất của hộp kim loại là bao nhiêu?

A. $3\pi R^2 \sqrt[3]{\frac{2^{11}}{3^8}}$

B. $\pi R^2 \sqrt[3]{\frac{2^{11}}{3^8}}$

C. $3\pi R^2 \sqrt[3]{\frac{2^6}{3^4}}$

D. $\pi R^2 \sqrt[3]{\frac{2^6}{3^4}}$

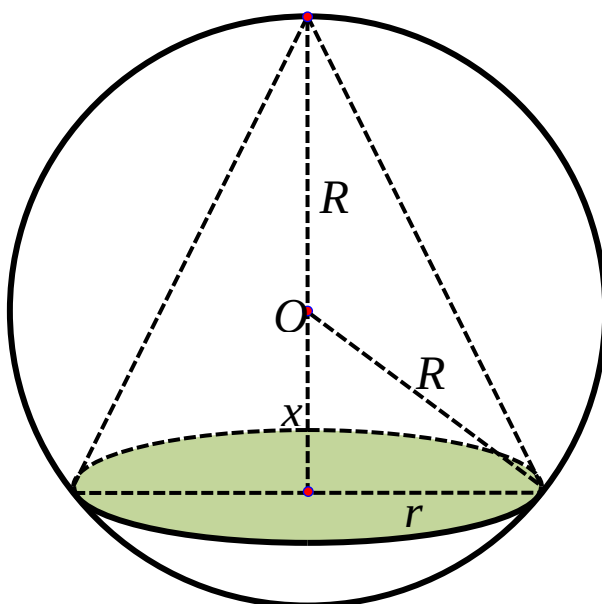
Giải

Ta tìm lượng dung dịch X lớn nhất mà nhà khoa học đã đựng được trong khối nón nội tiếp khối cầu bán kính R .

Rõ ràng trong hai khối nón có cùng bán kính thì đáy nội tiếp trong một khối cầu thì khối nón nào có chiều cao lớn hơn thì thể tích, nên ta chỉ xét khối nón có chiều cao lớn hơn trong hai khối nón đó.

Giả sử rằng khối nón có đáy là hình tròn bán kính r . Gọi x với $0 \leq x < R$ là khoảng cách từ tâm khối cầu đến đáy khối nón. Khi đó chiều cao lớn hơn của khối nón nội tiếp khối cầu với đáy là hình tròn bán kính r sẽ là $h = R + x$. Khi đó bán kính đáy nón là $r = \sqrt{R^2 - x^2}$, suy ra thể tích khối nón là

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi (R+x)(R^2 - x^2) = \frac{1}{3} \pi (R+x)(R+x)(R-x) = \frac{1}{6} \pi (R+x)(R+x)(2R-2x).$$



Theo bất đẳng thức AM - GM ta có

$$V = \frac{1}{6} \pi (R+x)(R+x)(2R-2x) \leq \frac{1}{6} \pi \frac{(R+x+R+x+2R-2x)^3}{27} = \frac{32}{81} \pi R^3.$$

Đây cũng chính là lượng dung dịch X mà nhà khoa học đã đựng trong khối nón lúc ban đầu.

Ta tìm diện tích toàn phần nhỏ nhất của hộp kim loại đựng lượng dung dịch X nói trên, với $V = \frac{32}{81} \pi R^3$.

- TH1: Hộp kim loại hình trụ. Khi đó

$$V = \pi R^2 h \Rightarrow h = \frac{V}{\pi R^2}, S_{tp} = 2\pi R^2 + 2\pi R h = 2\pi R^2 + \frac{2V}{R}$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho bộ ba số dương $2\pi R^2, \frac{V}{R}, \frac{V}{R}$, ta có

$$S_{tp} = 2\pi R^2 + \frac{V}{R} + \frac{V}{R} \geq 3\sqrt[3]{2\pi V^2}$$

- TH2: Hộp kim loại hình hộp chữ nhật, khi đó

$$V = abh \Rightarrow h = \frac{V}{ab}, S_{tp} = 2ab + 2(a+b)h = 2ab + 2a\frac{V}{ab} + 2b\frac{V}{ab} = 2\left(ab + \frac{V}{a} + \frac{V}{b}\right).$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho bộ ba số dương $ab, \frac{V}{a}, \frac{V}{b}$ ta có

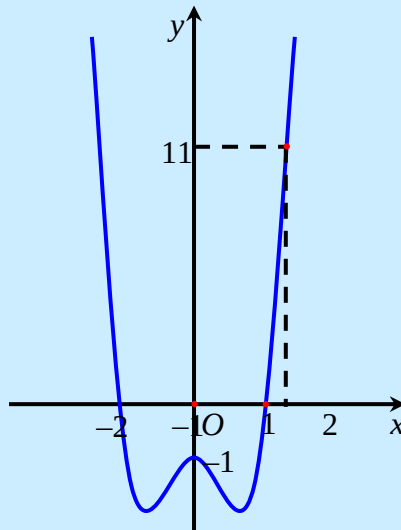
$$S_{tp} = 2\left(ab + \frac{V}{a} + \frac{V}{b}\right) \geq 2.3\sqrt[3]{V^2}$$

So sánh $3\sqrt[3]{2\pi V^2}$ và $6\sqrt[3]{V^2}$ ta có $3\sqrt[3]{2\pi V^2} < 6\sqrt[3]{V^2}$. Vậy diện tích toàn phần nhỏ nhất của hộp

kim loại là $3\sqrt[3]{2\pi V^2}$. Từ đây thay $V = \frac{32}{81} \pi R^3$ vào, ta được $S_{tp} = 3\pi R^2 \sqrt[3]{\frac{2048}{6561}} = 3\pi R^2 \sqrt[3]{\frac{2^{11}}{3^8}}$.

Vậy đáp án đúng là A.

Câu 37:



Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ đồng thời $f(x+1) - f(x) = 2x(2x+1)(x+1)$ (*) Biết rằng $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$; $g(x) = mx^2 + nx + p$ và $f(x) = g(x^2 - 1)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)$

A. $-\frac{1}{2}$

B. $-\frac{1}{4}$

C. -2

D. -4

Giải

Từ (*) ta thay $x = 0 \Rightarrow f(1) = f(0)$

Ta có $x = 0 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow c = -1 \Rightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ c=-1 \end{cases}$ và $x = 2, y = 11 \Rightarrow f(x) = x^4 - x^2 - 1$

Mặt khác $x^4 - x^2 - 1 = g(x^2 - 1) = m(x^2 - 1)^2 + n(x^2 - 1) + p = mx^4 - 2mx^2 + m + nx^2 - n + p$

$$\Rightarrow \begin{cases} m=1 \\ -2+n=-1 \\ -1=-n+p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=1 \\ n=1 \\ p=0 \end{cases} \Rightarrow g(x) = x^2 + x; g'(x) = 2x + 1; g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất $g(x) = -\frac{1}{4}$

Câu 38: Cho hàm số $y = -\frac{5}{3}x^3 + 3x^2 - \frac{1}{3}$ (C). Tìm những điểm trên đường thẳng (d): $y = ax + b$ đi qua gốc tọa độ và tạo với đường thẳng $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$ một góc 15° mà từ đó kẻ được đến (C) 2 tiếp tuyến.

A. $\left(\frac{-1}{5}; \frac{-1}{5}\right); (1; 1)$

B. $\left(\frac{1}{5}; \frac{1}{5}\right); (1; 1)$

C. $\left(\frac{-1}{5}; \frac{-1}{5}\right); (-1; 1)$

D. $\left(\frac{-1}{5}; \frac{1}{5}\right); (1; -1)$

Giải

Ta có $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$ tạo với Ox một góc $30^\circ \Rightarrow (d)$ tạo với Ox góc $45^\circ \Rightarrow a = 1 \Rightarrow y = x$ (qua O)

$M \in (d)$ và $M(x_0; x_0)$

Phương trình đường thẳng Δ qua $M: k(x - x_0) + x_0, \Delta$ tiếp xúc với (C) khi

$$\begin{cases} -\frac{5}{3}x^3 + 3x^2 - \frac{1}{3} = k(x - x_0) + x_0 \Rightarrow -\frac{5}{3}x^3 + 3x^2 - \frac{1}{3} = (-5x^2 + 6x)(x - x_0) + x_0 \\ -5x^2 + 6x = k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{10}{3}x^3 - (3 + 5x_0)x^2 + 6x_0x - x_0 - \frac{1}{3} = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(10x^2 - 15x_0x + 3x_0 + x + 1) = 0$$

Suy ra để kẻ được 2 tiếp tuyến thì $10x^2 - 15x_0x + 3x_0 + x + 1$ có 1 nghiệm duy nhất

$$\Rightarrow 10x^2 + (-15x_0 + 1)x + 3x_0 + 1 = 0$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} \Delta = 225x_0^2 + 1 - 30x - 120x_0 - 40 = 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{5}(N) \\ x = \frac{13}{15}(L) \end{cases} \Rightarrow M_1\left(\frac{-1}{5}; \frac{-1}{5}\right); N_2(1; 1)$$

Câu 39: Cho hàm số $f(x) = \frac{\sqrt{8x+a}-bx-c}{x(x-1)^2} + (c-3)\tan x$. Biết đồ thị hàm số có đúng 2

đường tiệm cận (chỉ tính tiệm cận đứng và tiệm cận ngang). Số giá trị nguyên tối đa có thể của tham số a thỏa mãn bài toán là?

A. 8

B. 2

C. 10

D. 9

Giải

Hàm $y = \tan x$ là một hàm có vô số tiệm cận đứng. vì vậy muốn có hàm số $f(x)$ có đúng hai tiệm cận thì ít nhất hệ số của hàm $\tan x$ phải bằng 0 $\Rightarrow c = 3$. Khi này hàm số trở thành:

$$f(x) = \frac{\sqrt{8x+a}-bx-c}{x(x-1)^2} + (c-3)\tan x = \frac{\sqrt{8x+a}-bx-c}{x(x-1)^2}$$

Hàm số trên có một TCN: $y = 0$ (khi $x \rightarrow \infty$). Yêu cầu bài toán tương đương hàm số có đúng một đường TCD nữa. Xảy ra các trường hợp sau:

Trường hợp 1: Tử số có nghiệm $x = 0 \Rightarrow \sqrt{a} - 3 = 0 \Leftrightarrow a = 9$

Trường hợp 2: Tử số có nghiệm kép $x = 1$. Suy ra

$$\begin{cases} \sqrt{8+a}-b-3=0 \\ \frac{8}{2\sqrt{8+a}}-b=0 \Rightarrow b=\frac{4}{\sqrt{8+a}} \end{cases} \Rightarrow \sqrt{8+a}-\frac{4}{\sqrt{8+a}}-3=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{8+a}=-1(VN) \\ \sqrt{8+a}=4 \Leftrightarrow a=8 \end{cases}$$

Trường hợp 3: Điều kiện xác định của căn thức chỉ chứa một nghiệm ở mẫu số. Cụ thể là:

$$8x+a \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{-a}{8}. \text{ Suy ra } \begin{cases} 0 < -\frac{a}{8} \\ 1 \geq -\frac{a}{8} \end{cases} \Leftrightarrow -8 \leq a < 0$$

Kết hợp cả 3 trường hợp thì các giá trị nguyên của a thỏa mãn bài toán là $\begin{cases} a = 9 \\ a = 8 \\ -8 \leq a \leq -1 \end{cases}$

Suy ra có tất cả 10 giá trị nguyên của tham số a thỏa mãn.

Câu 40: Cho tích phân $I = \int_{-7}^{11} (\sqrt{x+7} + \sqrt{11-x}) dx$, gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của I . Tính $S = M + m$?

A. $54\sqrt{2} + 108$

B. $36\sqrt{2} + 108$

C. $6\sqrt{3} + 54$

D. $6\sqrt{3} + 36$

Giải

Đặt $y = \sqrt{x+7} + \sqrt{11-x}$ với $x \in [-7; 11]$. Ta có $y' = \frac{1}{2\sqrt{x+7}} - \frac{1}{2\sqrt{11-x}} = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Nhận thấy y' không xác định tại $-7; 11$, vẽ bảng biến thiên ta có $\sqrt{18} \leq y \leq 6$

$$\Rightarrow \int_{-7}^{11} \sqrt{18} dx \leq \int_{-7}^{11} (\sqrt{x+7} + \sqrt{11-x}) dx \leq \int_{-7}^{11} 6 dx$$

$$\Leftrightarrow 54\sqrt{2} \leq \int_{-7}^{11} (\sqrt{x+7} + \sqrt{11-x}) dx \leq 108$$