

ĐỀ CHÍNH THỨC

Môn thi: TOÁN

Thời gian làm bài: 150 phút

Bài I (4,0 điểm) Cho phương trình $\sin x \cos 2x - \cos x + \sin x = 0$.

- 1) Giải phương trình đã cho.
- 2) Tính tổng các nghiệm của phương trình trong khoảng $(0; 20\pi)$.

Bài II (4,0 điểm)

- 1) Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n} \right)$.

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x+7} - \sqrt{3x+1}}{x^2 - 1}$.

2) Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{ax^2 + bx} - 2}{x - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ 4 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$.

Tìm tất cả các cặp số (a, b) để hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 1$.

Bài III (2,0 điểm) Giải bất phương trình $\log_{\sqrt{2}} \sqrt{x+1} - \log_{\frac{1}{2}} (3-x) - \log_8 (x+3)^2 < 0$.

Bài IV (7,0 điểm) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O , cạnh a . Đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, $SA = a\sqrt{2}$.

- 1) Tính góc giữa hai đường thẳng AD và SC .
- 2) Mặt phẳng đi qua A và vuông góc với SC cắt các cạnh SB, SC, SD lần lượt tại các điểm E, F, I . Chứng minh đường thẳng IE song song với đường thẳng BD .
- 3) Gọi H là giao điểm của hai đường thẳng AF và IE . Tính tỉ số $\frac{AH}{AF}$.
- 4) Gọi M là một điểm thay đổi trên cạnh CD , (M khác C và D). Mặt phẳng qua M và vuông góc với CD cắt các cạnh SC, SB lần lượt tại N và P . Tìm giá trị lớn nhất của diện tích tam giác MNP .

Bài V (3,0 điểm) Cho dãy số (u_n) được xác định như sau: $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 3u_n + 2^n, \forall n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$

- 1) Đặt $v_n = u_n + 2^n, \forall n = 1, 2, 3, \dots$ Chứng minh (v_n) là một cấp số nhân.
- 2) Tìm $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{3^n}$.

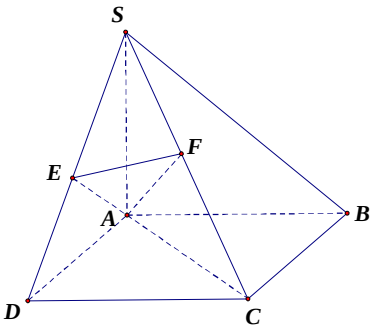
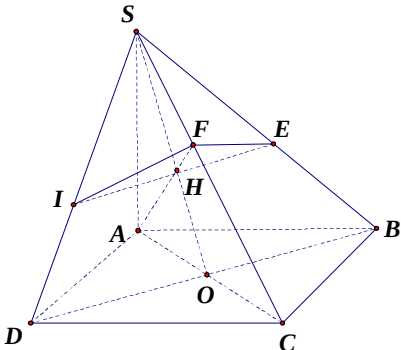
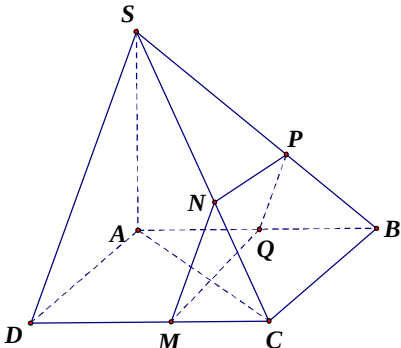
----- **Hết** -----

Họ và tên thí sinh:.....Số báo danh:.....

Chữ kí CBCT 1: Chữ kí CBCT 2:

HƯỚNG DẪN CHẤM

Bài	Nội dung	Điểm
Bài I (4,0 đ)	1) Giải phương trình $\sin x \cos 2x - \cos x + \sin x = 0$.	2,0
	Ta có: $\sin x \cos 2x - \cos x + \sin x = 0$ $\Leftrightarrow \sin x (2 \cos^2 x - 1) - \cos x + \sin x = 0$ $\Leftrightarrow 2 \sin x \cos^2 x - \cos x = 0$	0,5
	$\Leftrightarrow \cos x (2 \sin x \cos x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin 2x = 1 \end{cases}$	1,0
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$	0,5
	2) Tính tổng các nghiệm của phương trình trong khoảng $(0; 2\pi)$.	2,0
	Xét họ nghiệm $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$ có $x \in (0; 2\pi) \Rightarrow 0 \leq k \leq 19$	0,5
	Tương tự họ nghiệm $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$ có $x \in (0; 2\pi) \Rightarrow 0 \leq k \leq 19$	0,5
	Do đó tổng các nghiệm của phương trình trong khoảng $(0; 2\pi)$ là: $S = \sum_{k=0}^{19} \left(\frac{\pi}{2} + k\pi \right) + \sum_{k=0}^{19} \left(\frac{\pi}{4} + k\pi \right)$	0,5
Bài II (4,0 đ)	1) Tính các giới hạn sau: a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n} \right)$ b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x+7} - \sqrt{3x+1}}{x^2 - 1}$	2,0
	a) Ta có $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n} = \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{3^{n+1}} \right)$	0,5
	Do đó $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{3^{n+1}} \right) = \frac{3}{2}$	0,5
	b) Ta có $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x+7} - \sqrt{3x+1}}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x+7} - 2 + 2 - \sqrt{3x+1}}{x^2 - 1}$	0,25

		Chứng minh $BD \perp SC \Rightarrow BD \parallel (AEI)$	0,5
		Do $\begin{cases} BD \parallel (AEI) \\ (AEI) \cap (SBD) = EI \end{cases} \Rightarrow BD \parallel EI.$	0,5
	3) Gọi H là giao điểm của hai đường thẳng AF và IE ...		2,0
		Chứng minh ba điểm S, H, O thẳng hàng.	0,5
		Do $SA = AC = a\sqrt{2} \Rightarrow \Delta SAC$ vuông cân tại $A \Rightarrow F$ là trung điểm SC .	0,5
		Xét ΔSAC có $SO \cap AF = \{H\} \Rightarrow H$ là trọng tâm $\Delta SAC \Rightarrow \frac{AH}{AF} = \frac{2}{3}$.	1,0
	4) Gọi M là một điểm thay đổi trên cạnh CD , (M khác C và D)...		2,0
		Gọi Q là giao điểm của (α) và AB . Chứng minh $MNPQ$ là hình thang vuông tại P và Q . $\Rightarrow S_{\Delta MNP} = \frac{1}{2} NP \cdot PQ$.	1,0
	Đặt $\frac{SP}{SB} = x (0 < x < 1)$ ta có: $\frac{NP}{BC} = \frac{SP}{SB} \Rightarrow NP = x \cdot a$ $\frac{PQ}{SA} = \frac{BP}{BS} \Rightarrow PQ = a\sqrt{2}(1-x)$		0,5
	Suy ra $S_{\Delta MNP} = \frac{a^2\sqrt{2}}{2} x \cdot (1-x) \leq \frac{a^2\sqrt{2}}{2} \left(\frac{x+1-x}{2}\right)^2 = \frac{a^2\sqrt{2}}{8}$ Vậy $\text{Max } S_{\Delta MNP} = \frac{a^2\sqrt{2}}{8}$ khi M là trung điểm CD .		0,5
	Bài V 1) Chứng minh (v_n) là một cấp số nhân.		1,0

(3,0 đ)	Ta có: $u_{n+1} = 3u_n + 2^n \Rightarrow u_{n+1} + 2^{n+1} = 3(u_n + 2^n)$	0,5
	$\Rightarrow \begin{cases} v_1 = 3 \\ v_{n+1} = 3v_n, \forall n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$ Suy ra (v_n) là một cấp số nhân.	0,5
	2) Tìm $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{3^n}$.	2,0
	Ta có $v_n = 3^n, \forall n = 1, 2, 3, \dots \Rightarrow u_n = 3^n - 2^n, \forall n = 1, 2, 3, \dots$	0,5
	Do đó $u_1 + u_2 + \dots + u_n = (3^1 - 2^1) + (3^2 - 2^2) + \dots + (3^n - 2^n)$	0,5
	$= (1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^n) - (1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n)$ $= \frac{3^{n+1} - 1}{2} - (2^{n+1} - 1) = \frac{3^{n+1} - 2^{n+2} + 1}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$	0,5
	Suy ra $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{3^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^{n+1} - 2^{n+2} + 1}{2 \cdot 3^n} = \frac{3}{2}$.	0,5

Lưu ý: Học sinh làm theo cách khác đúng vẫn cho điểm tối đa.