

A – Trắc nghiệm (7 điểm): Chọn đáp án đúng (*Học sinh ghi đáp án đúng vào giấy làm bài*)

Câu 1. Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = \frac{1}{2}n + 1, n \geq 1$. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

A. Dãy số này không phải là cấp số cộng

B. $u_{n+1} = \frac{1}{2}n$

C. Tổng của 5 số hạng đầu tiên là $S_5 = 12$

D. $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}$

Câu 2. Trong các dãy số (u_n) được cho bởi công thức tổng quát sau, dãy số nào là dãy số tăng?

A. $u_n = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{n}$

B. $u_n = (-1)^{2n} (3^n + 1)$

C. $u_n = \frac{1}{n + \sqrt{n+1}}$

D. $u_n = \frac{2n+3}{3n+2}$

Câu 3. Cho cấp số cộng $(u_n), n \geq 1$ thỏa mãn: $\begin{cases} u_2 + u_4 = 10 \\ u_3 + u_5 = 14 \end{cases}$. Tìm công sai của cấp số cộng.

A. 1

B. 2

C. 4

D. -2

Câu 4. Một tam giác vuông có chu vi bằng 3, độ dài các cạnh lập thành một cấp số cộng. Độ dài ba cạnh đó là:

A. $\frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2}$

B. $\frac{1}{3}; 1; \frac{5}{3}$

C. $\frac{1}{4}; 1; \frac{7}{4}$

D. $\frac{3}{4}; 1; \frac{5}{4}$

Câu 5. Cho cấp số nhân có 15 số hạng: $u_1; u_2; \dots; u_{15}$. Đẳng thức nào sau đây là **sai**?

A. $u_1 \cdot u_n = u_2 \cdot u_{n-1}$

B. $u_1 \cdot u_n = u_5 \cdot u_{n-4}$

C. $u_1 \cdot u_n = u_5 \cdot u_{n-5}$

D. $u_1 \cdot u_n = u_k \cdot u_{n-k+1}$

Câu 6. Cho 3 số $x; y; z$ theo thứ tự đó lập thành cấp số nhân với công bội khác 1. Biết cũng theo thứ tự đó chúng lần lượt là số hạng thứ nhất, thứ tư và thứ tám của một cấp số cộng với công sai là $d \neq 0$.

Tính $\frac{x}{d}$.

A. 9

B. 3

C. $\frac{4}{3}$

D. $\frac{4}{9}$

Câu 7. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^3 - 3x^2 + mx + 2 - m = 0$ có 3 nghiệm phân biệt lập thành cấp số cộng.

A. $m > 3$

B. $m = 0$

C. $m < 3$

D. m tùy ý

Câu 8. Trong sân vận động có tất cả 30 dãy ghế. Biết dãy đầu tiên có 12 ghế, các dãy liên sau có số ghế nhiều hơn dãy trước là 5 ghế. Hỏi sân vận động đó có tất cả bao nhiêu ghế?

A. 2535

B. 1920

C. 2610

D. 4200

Câu 9. Cho tam giác ABC cân tại A . Biết rằng độ dài cạnh BC , trung tuyến AM và độ dài cạnh AB theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân có công bội q . Tìm công bội q của cấp số nhân đó.

A. $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$

B. $\frac{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}{2}$

C. $\frac{-1+\sqrt{2}}{2}$

D. $\frac{\sqrt{-2+2\sqrt{2}}}{2}$

Câu 10. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi G, G' lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC và $A'B'C'$. Thiết diện tạo bởi mặt phẳng (AGG') với hình lăng trụ đã cho là:

A. Hình thang

B. Tam giác vuông

C. Hình bình hành

D. Tam giác cân

Câu 11. Tìm mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau:

A. Một hình bình hành có thể là hình chiếu song song của một hình thang nào đó.

B. Một hình bình hành có thể xem là hình chiếu song song của một hình vuông nào đó.

C. Một tam giác có thể là hình chiếu song song của tam giác đều nào đó.

D. Một đoạn thẳng có thể là hình chiếu song song của tam giác nào đó.

Câu 12. Cho hình hộp $ABCD.EFGH$. Các vector có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của hình hộp và bằng vector $\overrightarrow{AB}$ là:

- A. $\overrightarrow{DC}; \overrightarrow{GH}; \overrightarrow{EF}$ B. $\overrightarrow{DC}; \overrightarrow{HG}; \overrightarrow{EF}$ C. $\overrightarrow{DC}; \overrightarrow{HG}; \overrightarrow{FE}$ D. $\overrightarrow{CD}; \overrightarrow{HG}; \overrightarrow{EF}$

Câu 13. Cho ba vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ khác $\vec{0}$. Trong các khẳng định sau đây, khẳng định nào **sai**?

- A. Nếu giá của ba vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ cùng song song với một mặt phẳng thì ba vector đó đồng phẳng.
 B. Nếu ba vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ có một vector là $\vec{0}$ thì ba vector đồng phẳng.
 C. Nếu trong ba vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ có hai vector cùng phương thì ba vector đó đồng phẳng.
 D. Nếu giá của ba vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ cắt nhau từng đôi một thì 3 vector đồng phẳng.

Câu 14. Cho hình tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD , I là trung điểm của đoạn MN . Mệnh đề nào trong các mệnh đề sau là **sai**?

- A. $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB})$ B. $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$ C. $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$ D. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$

Câu 15. Cho tứ diện đều $SABC$. Gọi M là trung điểm của AB , N là một điểm di động trên đoạn AM . Gọi (P) là mặt phẳng đi qua N và song song với (SMC) . Tính chu vi của thiết diện tạo bởi mặt phẳng (P) và tứ diện $SABC$ biết $AN = x$.

- A. $3x(1 + \sqrt{3})$ B. $2x(1 + \sqrt{3})$ C. $x(1 + \sqrt{3})$ D. Kết quả khác

Câu 16. Cho tứ diện $ABCD$ và các điểm M, N được xác định bởi $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{DB} + x\overrightarrow{DC}$. Tìm x để các đường thẳng AD, BC, MN cùng song song với một mặt phẳng.

- A. $x = -1$ B. $x = -2$ C. $x = 1$ D. $x = 2$

B – Tự luận (3 điểm):

Bài 1. Cho dãy số $(u_n), n \geq 1$:
$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{(n+2)u_n}{2(n+1)}, \forall n \geq 1 \end{cases}$$
 và $(v_n), n \geq 1$ với $v_n = \frac{u_n}{n+1}, \forall n \geq 1$.

- a) Chứng minh rằng dãy số (v_n) là một cấp số nhân.
 b) Tìm số hạng tổng quát u_n . Xét tính tăng, giảm và bị chặn của dãy số (u_n) .

Tùy thuộc vào chương trình học trên lớp, học sinh chọn một trong hai đề bài sau:

Bài 2. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AA'} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$. Gọi M, N là các điểm thỏa mãn $\overrightarrow{MA} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{MD}$, $\overrightarrow{NA'} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{NC}$.

- a) Biểu diễn các vector $\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BN}$ theo các vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.
 b) Chứng minh các vector $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{AD'}$ đồng phẳng. Nhận xét vị trí tương đối của đường thẳng MN và mặt phẳng $(AB'D')$.
 c) Giả sử hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ đã cho ở trên có tất cả các mặt đều là hình thoi cạnh a . Biết $\angle BAA' = \angle BAD = \angle DAA' = 60^\circ$. Tính góc giữa 2 đường thẳng MN và AC' .

Bài 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O và $SA \perp (ABCD)$.

1. Chứng minh: $BC \perp (SAB); CD \perp (SDA)$.
 2. Gọi (P) là mặt phẳng qua điểm A và vuông góc với SC cắt các cạnh SB, SC, SD lần lượt tại các điểm H, I, K .

- a) Chứng minh AK vuông góc với mặt phẳng (SCD) .
 b) Chứng minh: $SH.SB = SK.SD$.
 c) Chứng minh: Mặt phẳng (SAC) là mặt phẳng trung trực của HK .

————— HẾT —————

Bài1. Cho hàm số: $y = -x^4 + 4x^2$

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.

2) Tìm điều kiện của tham số m để phương trình sau đây có 4 nghiệm phân biệt:

$$x^4 - 4x^2 + \log m = 0$$

3) Tìm tọa độ của điểm A thuộc (C) biết tiếp tuyến tại A song song với $d: y = 16x + 2020$

Bài2.

1) Tìm m để phương trình sau có nghiệm

$$m\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x-1}} + \sqrt[4]{x(x-1)} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x-1}}$$

2) Trong các số phức z thỏa mãn: $|z - 2 + i| = |z - 3 + 2i|$. Tìm số phức có modul nhỏ nhất.

Bài3.

1) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, với $AB = a, BC = 2a$. Các mặt phẳng (SAB) và (SAD) vuông góc với mặt phẳng đáy, đường thẳng SC hợp với đáy một góc 60° . Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

2) Cho một hình trụ có độ dài trục $OO' = 2\sqrt{7}$. Tứ giác $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 8, có các đỉnh nằm trên hai đường tròn đáy sao cho tâm của hình vuông là trung điểm của đoạn OO' . Tính thể tích của hình trụ đó.

Bài4. Giải các phương trình sau:

1) $2\cos^2 x + 4\cos x + 2\sin x + 2 = 0$

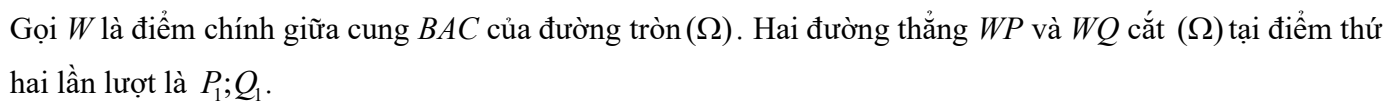
2) $1 - \tan^2 x = 2 \tan x \tan 2x$

3) $\sqrt{2}(\sin x + \cos x) = \tan x + \cot x$.

4) $\sin^3 x - \sqrt{3}\cos^3 x = \sin x \cos^2 x - \sqrt{3} \sin^2 x \cos x$

Bài5*. Cho n là số nguyên dương. Chứng minh rằng tất cả các số có dạng $x^n + y^n$, (x, y là các số nguyên dương tùy ý) có số các số dư không vượt quá $\frac{n(n+1)}{2}$ khi chia số đó cho n^2

Bài6*. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (Ω). Gọi P và Q là hai điểm nằm trong tam giác ABC sao cho $\angle ABP = \angle CBQ$ và $\angle ACP = \angle BCQ$. Từ P và Q kẻ các đường thẳng vuông góc với tia phân giác của góc BAC , hai đường thẳng này cắt các cạnh AB, AC tại các điểm $B_p; B_q; C_p; C_q$ (Xem hình vẽ).



Bài 7*. Cho dãy các số tự nhiên (a_n) thỏa mãn : $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + a_{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \end{cases}, \forall n \geq 1$

----- HẾT -----

Bài 1: (2 điểm) Cho dãy số (u_n) được xác định như sau:

$$u_1 = 1,$$

$$u_2 = 2 + 4,$$

$$u_3 = 3 + 5 + 7,$$

$$u_4 = 6 + 8 + 10 + 12$$

$$u_5 = 9 + 11 + 13 + 15 + 17, \dots$$

Xác định số hạng tổng quát của u_n ?

Bài 2: (2 điểm) Cho cấp số cộng (u_n) . Chứng minh rằng với m, n, p đôi một khác nhau ta có:

$$m(u_n - u_p) + n(u_p - u_m) + p(u_m - u_n) = 0$$

Bài 3: (2 điểm) Tìm cấp số nhân gồm ba số a, b, c biết:

$$\begin{cases} \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 14 \\ ab + bc + ca = -\frac{7}{108} \end{cases}$$

Bài 4: (2 điểm) Cho dãy số (u_n) :

$$\begin{cases} u_1 = 8 \\ u_{n+1} = 4u_n - 9, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Chứng minh rằng: $u_n = 5 \cdot 4^{n-1} + 3, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Học sinh chọn 1 trong 2 bài sau:

Bài 5: (2 điểm) Cho hình lăng trụ tam giác $ABCA'B'C'$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC .

a) Xác định giao điểm I của $A'G$ với mặt phẳng $(AB'C')$? Tính $IA':IG$?

b) Gọi (P) là mặt phẳng qua G và song song với mặt phẳng $(AB'C')$. Xác định thiết diện của hình lăng trụ bị cắt bởi mặt phẳng (P) ?

c) Biết tam giác $AB'C'$ là tam giác đều cạnh a , tính diện tích thiết diện ở trên?

d) Gọi (d) và (d') lần lượt là giao tuyến của $mp(P)$ với $mp(ABB'A')$ và $mp(ACC'A')$. Chứng minh rằng d, d', AA' đồng qui.

Bài 6: (2 điểm)

a) Trong không gian cho tam giác ABC . Chứng minh rằng nếu điểm M thuộc $mp(ABC)$ thì tồn tại 3 số x, y, z mà $x + y + z = 1$ sao cho $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}$ với mọi điểm O .

b) Cho hình chóp $S.ABCD$. Lấy các điểm A', B', C' lần lượt thuộc các tia SA, SB, SC sao cho $SA = aSA', SB = bSB', SC = cSC'$, trong đó a, b, c là các số thay đổi. Chứng minh rằng mặt phẳng $(A'B'C')$ đi qua trọng tâm của tam giác ABC khi và chỉ khi $a + b + c = 3$.

-----Hết-----

Bài 1. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x^3) - f(y^3) = (x^2 + xy + y^2) \cdot (f(x) - f(y)) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Bài 2. Cho số thực a và dãy số thực (x_n) xác định bởi:

$$x_1 = a, \quad x_{n+1} = \ln(3 + \cos x_n + \sin x_n) - 2020, \quad \forall n \geq 1$$

Chứng minh rằng dãy số (x_n) có giới hạn hữu hạn khi n tiến đến dương vô cùng.

Bài 3. Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương n chẵn thì $n^2 - 1$ chia hết $2^{n!} - 1$

Bài 4. Cho tam giác ABC không vuông với hai đường cao BE, CF . Xét điểm M trên đường tròn ngoại tiếp của tam giác. Gọi P là giao điểm của MB và CF , Q là giao điểm của MC và BE . Chứng minh rằng EF đi qua trung điểm PQ .

Bài 5. Tìm tất cả các số thực x thỏa mãn phương trình

$$1 + 6^x + 27^{x-1} = 8^x$$

Bài 6. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ đỉnh S , cạnh đáy của hình chóp có độ dài bằng 2, chiều cao bằng h . Gọi $C_1(O; r)$ là hình cầu tâm O bán kính r nội tiếp hình chóp; gọi $C_2(K; R)$ là hình cầu tâm K bán kính R tiếp xúc với 8 cạnh của hình chóp. Biết rằng khoảng cách từ O đến mặt phẳng $(ABCD)$ bằng khoảng cách từ K đến mặt phẳng $(ABCD)$.

1. Chứng minh rằng

$$r = \frac{\sqrt{1 + h^2} - 1}{h}$$

2. Tính giá trị của h , từ đó suy ra thể tích của hình chóp

Bài 7. Cho số nguyên $n \geq 2$. Chứng minh rằng trong mọi họ gồm ít nhất $2^{n-1} + 1$ tập con không rỗng phân biệt của tập $\{1, 2, \dots, n\}$ đều tìm được ba tập mà một trong chúng là hợp của hai tập còn lại.

HẾT

CHƯƠNG IV: GIỚI HẠN

§1: GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

A – KIẾN THỨC CƠ BẢN

I. GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA DÃY SỐ:

1. Định nghĩa

Định nghĩa 1. Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn là 0 khi n dần tới dương vô cực, nếu $|u_n|$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tùy ý, kể từ một số hạn nào đó trở đi.

Kí hiệu: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ hay $u_n \rightarrow 0$ khi $n \rightarrow +\infty$.

Ví dụ 1. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{n^4} = 0$.

Định nghĩa 2: Ta nói dãy số (v_n) có giới hạn là số a (hay v_n dần tới a) khi $n \rightarrow +\infty$, nếu $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - a) = 0$.

Kí hiệu: $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = a$ hay $v_n \rightarrow a$ khi $n \rightarrow +\infty$

Ví dụ 2. Cho dãy số (v_n) với $v_n = \frac{2n+1}{n}$. Chứng minh rằng $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 2$

Giải: $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - 2) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2n+1}{n} - 2 \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$

Vậy $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n+1}{n} = 2$

2. Một vài giới hạn đặc biệt:

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^k} = 0$ với k nguyên dương

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$; nếu $|q| < 1$

c) Nếu $u_n = c$ (c là hằng số) thì $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} c = c$

Chú ý: Từ nay về sau, thay cho $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$, ta viết tắt là: $\lim u_n = a$

II. ĐỊNH LÝ VỀ GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA DÃY SỐ:

Định lý 1.

a) Nếu $\lim u_n = a$ và $\lim v_n = b$ thì:

- $\lim(u_n + v_n) = a + b$
- $\lim(u_n - v_n) = a - b$
- $\lim(u_n \cdot v_n) = a \cdot b$
- $\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{a}{b}$ nếu $b \neq 0$

b) Nếu $u_n \geq 0$ với mọi n và $\lim u_n = a$ thì $a \geq 0$ và $\lim \sqrt{u_n} = \sqrt{a}$

Ví dụ 3. Tìm a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n^2 - n}{1 + n^2}$ b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1 + 4n^2}}{1 - 2n}$

Giải:

a) Chia tử số và mẫu số cho n^2 , ta được: $\frac{3n^2 - n}{1 + n^2} = \frac{3 - \frac{1}{n}}{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} + 1}$

Vì $\lim \left(3 - \frac{1}{n} \right) = \lim 3 - \lim \frac{1}{n} = 3 - 0 = 3$; $\lim \left(\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} + 1 \right) = \lim \frac{1}{n} \cdot \lim \frac{1}{n} + \lim 1 = 0 \cdot 0 + 1 = 1$

$$\text{nên } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - n}{1 + n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{1}{n}}{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} + 1} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 - \frac{1}{n}\right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} + 1\right)} = \frac{3}{1} = 3$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 + 4n^2}}{1 - 2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 \left(\frac{1}{n^2} + 4\right)}}{1 - 2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot \sqrt{\frac{1}{n^2} + 4}}{n \left(\frac{1}{n} - 2\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{n^2} + 4}}{\frac{1}{n} - 2} = \frac{2}{-2} = -1$$

Định lý 2. (Định lý kẹp) Xét ba dãy số (u_n) , (v_n) , (w_n) . Giả sử với mọi n ta có $u_n \leq v_n \leq w_n$. Khi đó nếu $\lim u_n = \lim w_n = L$ thì $\lim v_n = L$.

Hệ quả. Xét hai dãy số (u_n) , (v_n) . Nếu $|u_n| \leq v_n$ với mọi n và $\lim v_n = 0$ thì $\lim u_n = 0$

Ví dụ 4. CMR: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{\sqrt{n}} = 0$

Giải: Ta có $\left| \frac{\sin n}{\sqrt{n}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$, $\forall n$ và $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$. Từ đó suy ra điều cần chứng minh.

III. TỔNG CỦA CẤP SỐ NHÂN LÙI VÔ HẠN:

Cấp số nhân vô hạn $u_1, u_1 q, \dots, u_1 q^n$ có công bội q , với $|q| < 1$ được gọi là **cấp số nhân lùi vô hạn**.

Tổng cấp số nhân lùi vô hạn (u_n) là:

$$S = \frac{u_1}{1 - q}, \quad (|q| < 1)$$

Ví dụ 5. Tính tổng của cấp số nhân lùi vô hạn (u_n) biết $u_n = \frac{1}{3^n}$, $\forall n \geq 1$.

Giải: $u_1 = \frac{1}{3}$, $q = \frac{1}{3} \Rightarrow S = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$.

IV. GIỚI HẠN VÔ CỰC:

1. Định nghĩa.

- Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn $+\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$, nếu u_n có thể lớn hơn một số dương bất kì, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

Kí hiệu: $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$ hay $u_n \rightarrow +\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$

- Dãy số (u_n) được gọi là có giới hạn $-\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$ nếu $\lim (-u_n) = +\infty$

Kí hiệu: $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = -\infty$ hay $u_n \rightarrow -\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$

Nhận xét: $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (-u_n) = -\infty$

2. Một vài giới hạn đặc biệt:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^k = +\infty$ với k nguyên dương;

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} q^k = +\infty$ nếu $q > 1$

3. Định lý 3

a) Nếu $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a$ và $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \pm\infty$ thì $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$

b) Nếu $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \pm\infty$ và $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = a \neq 0$ thì $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n v_n)$ được cho trong bảng sau:

$\lim u_n$	Dấu của a	$\lim(u_n v_n)$
$+\infty$	$+$	$+\infty$
$+\infty$	$-$	$-\infty$

$-\infty$	$+$	$-\infty$
$-\infty$	$-$	$+\infty$

c) Nếu $\lim u_n = a \neq 0$, $\lim v_n = 0$ và $v_n > 0$ hoặc $v_n < 0$ với mọi n kể từ số hạng nào đó trở đi thì $\lim \frac{u_n}{v_n}$ được cho trong bảng sau:

Dấu của a	Dấu của v_n	$\lim \frac{u_n}{v_n}$
$+$	$+$	$+\infty$
$+$	$-$	$-\infty$
$-$	$+$	$-\infty$
$-$	$-$	$+\infty$

Ví dụ 6. Tìm các giới hạn sau: a) $\lim(3n^2 - 101n - 51)$ b) $\lim \frac{2n^3 - n + 1}{1 - n^2}$

Giải:

$$\text{a) } \lim(3n^2 - 101n - 51) = n^2 \left(3 - \frac{101}{n} - \frac{51}{n^2} \right)$$

$$\text{Vì } \lim n^2 = +\infty \text{ và } \lim \left(3 - \frac{101}{n} - \frac{51}{n^2} \right) = 3 > 0 \text{ nên } \lim(3n^2 - 101n - 51) = +\infty$$

$$\text{b) } \lim \frac{2n^3 - n + 1}{1 - n^2} = \lim \frac{2 - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n^3} - \frac{1}{n}}$$

$$\text{Vì } \lim \left(2 - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} \right) = 2 > 0, \lim \left(\frac{1}{n^3} - \frac{1}{n} \right) = 0 \text{ và } \frac{1}{n^3} - \frac{1}{n} < 0 \text{ với mọi } n \text{ nên } \lim \frac{2n^3 - n + 1}{1 - n^2} = -\infty$$

B – BÀI TẬP TỰ LUẬN

Dạng 1: Tìm $\lim u_n$ với $u_n = \frac{P(n)}{Q(n)}$ (Tham khảo **Ví dụ 3, 6b**)

Ví dụ 7. Tính các giới hạn.

$$\text{a) } \lim \frac{2n+1}{n^3+4n^2+3} \quad \text{b) } \lim \frac{\sqrt{n^2+n-3n}}{1-2n} \quad \text{c) } \lim \frac{3n^3-5n+1}{n^2+4} \quad \text{d) } \lim \frac{2^n+5^{n+1}}{1+5^n}$$

$$\text{HD: a) } \lim \frac{2n+1}{n^3+4n^2+3} = \lim \frac{\frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^3}}{1 + \frac{4}{n} + \frac{3}{n^3}} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\text{b) } \lim \frac{\sqrt{n^2+n-3n}}{1-2n} = \lim \frac{n\sqrt{1+\frac{1}{n}-3}}{1-2n} = \lim \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}-3}}{\frac{1}{n}-2} = \frac{1-3}{-2} = 1$$

$$\text{c) } \lim \frac{3n^3-5n+1}{n^2+4} = \lim \frac{3 - \frac{5}{n^2} + \frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n} + \frac{4}{n^3}} = +\infty$$

$$d) \lim \frac{2^n + 5^{n+1}}{1 + 5^n} = \lim \frac{2^n + 5 \cdot 5^n}{1 + 5^n} = \lim \frac{\frac{2^n}{5^n} + 5 \cdot \frac{5^n}{5^n}}{\frac{1}{5^n} + \frac{5^n}{5^n}} = \frac{0 + 5}{1} = 5$$

Dạng 2: Nếu biểu thức chứa n dưới dấu căn thì nhân cả tử và mẫu với biểu thức liên hợp.

Dùng các hằng đẳng thức :

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = a - b, \quad (\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}) = a - b$$

Ví dụ 8. Tính giới hạn: $\lim (\sqrt{n^2 - 3n} - n)$

$$HD: \lim (\sqrt{n^2 - 3n} - n) = \lim \frac{(\sqrt{n^2 - 3n} - n)(\sqrt{n^2 - 3n} + n)}{\sqrt{n^2 - 3n} + n} = \lim \frac{-3n}{\sqrt{n^2 - 3n} + n} = \frac{-3}{1+1} = \frac{-3}{2}$$

Dạng 3: Sử dụng Định lý kẹp (Tham khảo Ví dụ 4)

Ví dụ 9. Tính các giới hạn: $\lim \frac{2 \cos n^2}{n^2 + 1}$

$$HD: \text{Vì } 0 \leq \frac{2 \cos n^2}{n^2 + 1} \leq \frac{2}{n^2 + 1} \text{ mà } \lim \frac{2}{n^2 + 1} = 0 \text{ nên } \lim \frac{2 \cos n^2}{n^2 + 1} = 0$$

Dạng 4: Sử dụng định lý quan trọng về giới hạn vô cực (Tham khảo Ví dụ 6)

Ví dụ 10. Tính các giới hạn

$$a) \lim (n^2 - 4n + 1) = \lim n^2 \left(1 - \frac{4}{n} + \frac{1}{n^2} \right) = +\infty$$

$$b) \lim (-n^2 + n\sqrt{n} + 1) = \lim n^2 \left(-1 + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n^2} \right) = -\infty$$

Dạng 5: Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn (Tham khảo Ví dụ 5)

Ví dụ 11.

$$a) \text{ Tính } S = 2 - \sqrt{2} + 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots$$

$$HD: \text{Dãy } 2; -\sqrt{2}; 1; -\frac{1}{\sqrt{2}}; \dots \text{ là 1 CSN với công sai } |q| = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1 \text{ nên } S = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2} + 1}.$$

b) Biểu diễn số thập phân vô hạn tuần hoàn 0,777... dưới dạng phân số.

$$HD: \text{Ta có } 0,777\dots = \frac{7}{10} + \frac{7}{10^2} + \frac{7}{10^3} + \dots = \frac{\frac{7}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{7}{9}.$$

Bài 1. Tính các giới hạn sau

$$a) \lim \frac{8n+3}{2n-7}$$

$$b) \lim \frac{2n^2 - n + 3}{3n^2 + 2n + 1}$$

$$c) \lim \frac{2n+1}{n^3 + 4n^2 + 3}$$

$$d) \lim \frac{n^3 + n^2 - 2}{n+1}$$

$$e) \lim \frac{n^4}{(n+1)(2+n)(n^2+1)}$$

Bài 2. Tính các giới hạn sau

$$a) \lim \frac{1+3^n}{4+3^n}$$

$$b) \lim \frac{4 \cdot 3^n + 7^{n+1}}{2 \cdot 5^n + 7^n}$$

$$c) \lim \frac{1 - 2 \cdot 3^n + 6^n}{2^n(3^{n+1} - 5)}$$

Bài 3. Tính các giới hạn sau

a) $\lim \frac{\sqrt{4n^2+1}+2n-1}{\sqrt{n^2+4n+1}+n}$

b) $\lim \frac{n^2+\sqrt[3]{1-n^6}}{\sqrt{n^4+1}+n^2}$

c) $\lim \frac{(2n\sqrt{n}+1)(\sqrt{n}+3)}{(n+1)(n+2)}$

Bài 4. Tính các giới hạn

a) $\lim(-n^2+2n-3)$

b) $\lim(n^3-9n^2+1)$

c) $\lim(4^n-8 \cdot 2^{n+3})$

Bài 5. Tính các giới hạn

a) $\lim(\sqrt{n^2+1}-n)$

b) $\lim(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

c) $\lim n(\sqrt{n^2+1}-n)$

d) $\lim(\sqrt[3]{3n^2+n^3}-n)$

e) $\lim \sqrt{n-1}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})$

Bài 6. Tính các giới hạn

a) $\lim \frac{2\cos n^2}{n^3+1}$

b) $\lim \frac{(-1)^n \sin(3n+n^2)}{3n-1}$

c) $\lim \frac{2-2\cos n}{3n^2+1}$

Bài 7. Tính các giới hạn

a) $\lim \left(\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \right)$

b) $\lim \left(\frac{1}{2\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}} \right)$

c) $\lim \left(1 - \frac{1}{1^2} \right) \cdot \left(1 - \frac{1}{2^2} \right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3^2} \right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)$

d) $\lim \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right)$

Bài 8. a) Tính tổng sau: $S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \dots + (-1)^n \cdot \frac{1}{2^n} + \dots$ b) Biểu diễn số thập phân vô hạn tuần hoàn $34,121212\dots$ dưới dạng phân số.**C – BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM****Bài 1.** Dãy số nào sau đây có giới hạn bằng 3?

A. $\frac{3n^2+2n}{1-n^2}$

B. $\frac{(6n-1)^2}{2n^2+n+1}$

C. $\frac{6-3n^2}{1-n}$

D. $\frac{(\sqrt{6n}+1)^2}{2n^2+1}$

Bài 2. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{4n^2+n+2}{an^2+5}$. Để dãy số đã cho có giới hạn bằng 2, giá trị của a là:

A. $a = -4$

B. $a = 4$

C. $a = 3$

D. $a = 2$

Bài 3. Biết rằng $\lim \left(\frac{\sqrt{5}^n - 2^{n+1} + 1}{5 \cdot 2^n + \sqrt{5}^{n+1} - 3} + \frac{2n^2+3}{n^2-1} \right) = \frac{a\sqrt{5}}{b} + c$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}$; $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản.Tính giá trị của biểu thức $S = a^2 + b^2 + c^2$.

A. $S = 26$

B. $S = 30$

C. $S = 21$

D. $S = 31$

Bài 4. Cho dãy số u_n với $u_n = \sqrt{n^2+an+5} - \sqrt{n^2+1}$, trong đó a là tham số thực. Tìm a để $\lim u_n = -1$.

A. 3

B. 2

C. -2

D. -3

Bài 5. Một quả bóng rổ được thả từ độ cao 100m. Mỗi lần quả bóng chạm mặt đất, nó sẽ nảy lên đến vị trí 80% độ cao trước đó. Tính tổng độ cao mà quả bóng di chuyển cho đến khi ngừng chuyển động.

A. 900m

B. 800m

C. 600m

D. 500m

CHƯƠNG III. VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN. QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

§2. HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

A – KIẾN THỨC CƠ BẢN

I. Tích vô hướng của hai vectơ trong không gian

1. Góc giữa hai vectơ trong không gian

Định nghĩa: Cho $\vec{u}, \vec{v} \neq \vec{0}$. Lấy một điểm A bất kì, gọi B, C sao cho: $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$.

Khi đó ta gọi góc $\widehat{BAC}$ là góc giữa hai vectơ $\vec{u}, \vec{v}$.

Ký hiệu: $(\vec{u}, \vec{v}) = \widehat{BAC}$.

Chú ý: $0^\circ \leq (\vec{u}, \vec{v}) \leq 180^\circ$.

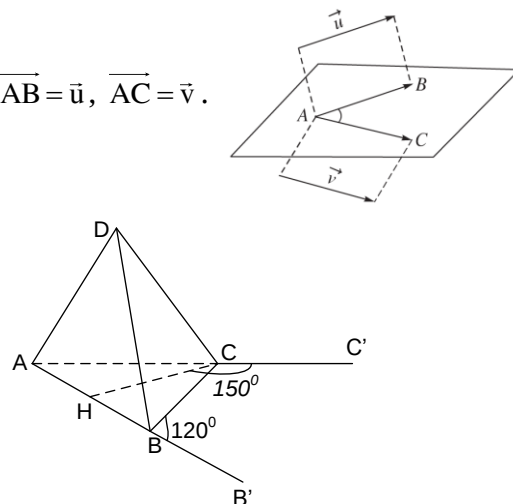
Ví dụ 1. Cho tứ diện đều ABCD có H là trung điểm của AB.

Hãy tính góc giữa các cặp vectơ:

- a) $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$ b) $\overrightarrow{CH}$ và $\overrightarrow{AC}$

Giải. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = \widehat{B'BC} = 180^\circ - \widehat{ABC} = 120^\circ$;

$(\overrightarrow{CH}, \overrightarrow{AC}) = \widehat{HCC'} = 180^\circ - \widehat{ACH} = 150^\circ$.



2. Tích vô hướng của hai vectơ trong không gian

Định nghĩa: Cho $\vec{u}, \vec{v} \neq \vec{0}$. Tích vô hướng của $\vec{u}, \vec{v} \neq \vec{0}$ là một số, kí hiệu là $\vec{u} \cdot \vec{v}$, được xác định bởi công thức:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

Qui ước: $\vec{u} = \vec{0}$ hoặc $\vec{v} = \vec{0}$ thì: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Nhận xét:

• $|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$

• $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$

• Cho $\vec{u}, \vec{v} \neq \vec{0}$: $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

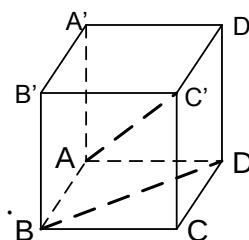
Ví dụ 2. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'.

- a) Hãy phân tích $\overrightarrow{AC'}$ và $\overrightarrow{BD}$ theo $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA'}$. b) Tính $\cos(\overrightarrow{AC'}, \overrightarrow{BD})$?

Giải.

a) $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$; $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$.

b) $\overrightarrow{AC'} \cdot \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}) \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = -\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} + 0 = 0 \Rightarrow \cos(\overrightarrow{AC'}, \overrightarrow{BD}) = 0$.



II. Vectơ chỉ phương của đường thẳng

1. Định nghĩa: Vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$ được gọi là vectơ chỉ phương (VTCP) của đường thẳng d nếu giá của $\vec{a}$ song song hoặc trùng với d.

2. Nhận xét

a) Nếu $\vec{a}$ là VTCP của d thì $k\vec{a}$ ($k \neq 0$) cũng là VTCP của d.

b) Một đường thẳng d trong không gian được hoàn toàn xác định nếu biết một điểm $A \in d$ và một VTCP $\vec{a}$ của nó.

c) Hai đường thẳng song song với nhau khi và chỉ khi chúng là hai đường thẳng phân biệt và có VTCP cùng phương.

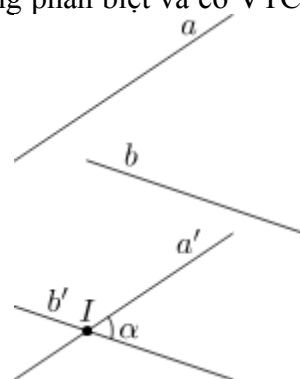
III. Góc giữa hai đường thẳng

1. Định nghĩa: Góc giữa hai đường thẳng a, b trong không gian là góc giữa hai đường thẳng a', b' cùng đi qua một điểm và lần lượt song song với a, b.

2. Nhận xét

a) Để xác định góc giữa a và b ta có thể lấy I thuộc một trong hai đường thẳng a, b rồi vẽ một đường thẳng qua I và song song với đường thẳng kia.

b) Nếu a có VTCP $\vec{u}$, b có VTCP $\vec{v}$ và $(\vec{u}, \vec{v}) = \alpha$ thì góc giữa hai đường



$$\text{thẳng } a \text{ và } b = \begin{cases} \alpha & \text{nếu } 0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ \\ 180^\circ - \alpha & \text{nếu } 90^\circ < \alpha \leq 180^\circ \end{cases}.$$

c) Nếu $a \equiv b$ thì góc giữa hai đường thẳng này là 0° .

Ví dụ 3. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a .

Tính góc giữa các cặp đường thẳng:

- a) AC và $B'C'$ b) AC' và BD c) $A'C'$ và $B'C$

Giải.

a) Ta có $B'C' \parallel BC \Rightarrow$ góc giữa AC và $B'C'$ là góc giữa AC và BC bằng 45° .

b) Theo Ví dụ 2, ta có góc giữa $\overrightarrow{AC'}$ và $\overrightarrow{BD}$ là 90° nên góc giữa AC' và BD là 90° .

$$c) \cos(\overrightarrow{A'C'}, \overrightarrow{B'C}) = \frac{\overrightarrow{A'C'} \cdot \overrightarrow{B'C}}{|\overrightarrow{A'C'}| |\overrightarrow{B'C}|} = \frac{\overrightarrow{A'C'} \cdot \overrightarrow{B'C}}{a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{2}}$$

$$\text{Mặt khác. } \overrightarrow{A'C'} \cdot \overrightarrow{B'C} = \overrightarrow{A'C'} \cdot (\overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{C'C}) = \overrightarrow{A'C'} \cdot \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{A'C'} \cdot \overrightarrow{C'C} = a\sqrt{2} \cdot a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 0 = a^2$$

$$\text{Do đó: } \cos(\overrightarrow{A'C'}, \overrightarrow{B'C}) = \frac{1}{2} \text{ nên } (\overrightarrow{A'C'}, \overrightarrow{B'C}) = 60^\circ. \text{ Vậy góc giữa } A'C' \text{ và } B'C \text{ là } 60^\circ.$$

V. Hai đường thẳng vuông góc

1. Định nghĩa: Hai đường thẳng được gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng 90° .

2. Nhận xét

a) Nếu $\vec{u}, \vec{v}$ lần lượt là vtcp của a và b thì: $a \perp b \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

b) $a \parallel b, c \perp a \Rightarrow c \perp b$.

c) $a \perp b \Rightarrow a, b$ cắt nhau hoặc chéo nhau.

Ví dụ 4. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB \perp AC, AB \perp BD$. Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của AB, CD .

CMR: $AB \perp PQ$.

Giải.

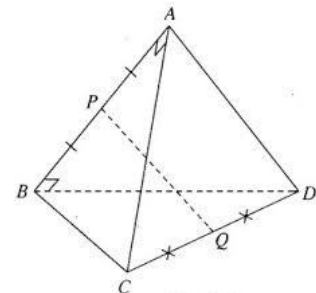
$$\text{Ta có } \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CQ}$$

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DQ}$$

$$\Rightarrow 2\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$$

$$\text{Vậy } 2\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}) \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

Vậy $AB \perp PQ$.



B – BÀI TẬP TỰ LUẬN

Dạng 1: Ứng dụng của tích vô hướng.

Phương pháp giải:

1. Muốn tính độ dài đoạn thẳng AB hoặc tính khoảng cách giữa hai điểm A và B ta dựa vào công thức:

$$AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{\overrightarrow{AB}^2}.$$

2. Tính góc giữa 2 vector ta dựa vào công thức $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$.

(Tham khảo **Ví dụ 2**)

Dạng 2: Chứng minh hai đường thẳng vuông góc với nhau.

Phương pháp giải:

1. Khai thác các tính chất về quan hệ vuông góc đã biết trong hình học phẳng.

2. Sử dụng trực tiếp định nghĩa góc của hai đường thẳng trong không gian.

3. Chứng minh hai đường thẳng AB và CD vuông góc với nhau, ta cần chứng minh $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$.

(Tham khảo **Ví dụ 3a, 4**)

Dạng 3: Dùng tích vô hướng để tính góc của hai đường thẳng trong không gian.

Phương pháp giải:

1. Muốn tính góc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, ta có thể dựa vào công thức: $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|}$ từ đó suy ra góc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

2. Nếu đường thẳng a có VTCP $\vec{u}$, đường thẳng b có VTCP $\vec{v}$ và $(\vec{u}, \vec{v}) = \alpha$ thì góc giữa hai đường thẳng a và b là $\begin{cases} \alpha & \text{nếu } 0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ \\ 180^\circ - \alpha & \text{nếu } 90^\circ < \alpha \leq 180^\circ \end{cases}$.

(Tham khảo Ví dụ 3b,c)

Bài 1. Cho tứ diện ABCD có hai mặt ABC và ABD là các tam giác đều .

1. Chứng minh rằng: $AB \perp CD$.

2. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm cách cạnh AC, BC, BD, DA. Chứng minh rằng tứ giác MNPQ là hình chữ nhật.

Bài 2. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D' có các cạnh bằng a, $\widehat{BAD} = 60^\circ$, $\widehat{BAA'} = \widehat{DAA'} = 120^\circ$. Gọi O là tâm hình vuông ABCD.

1. Gọi S là một điểm sao cho $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'} + \overrightarrow{OD'}$. Tính khoảng cách giữa hai điểm S và O theo a.

2. Chứng minh rằng: $AC \perp B'D'$.

3. Tính độ dài đoạn thẳng AC'.

4. Tính góc giữa các cặp đường thẳng AC' và AB, AB và A'D, AC' và B'D.

5. Tính diện tích các hình A'B'C'D và ACC'A'.

C – BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Bài 1. Mệnh đề nào sau đây là **đúng**?

A. Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau

B. Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì vuông góc với nhau

C. Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì vuông góc với đường thẳng kia

D. Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng vuông góc với nhau thì song song với đường thẳng còn lại

Bài 2. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D' có tất cả các cạnh đều bằng nhau. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào có thể **sai**?

A. $A'C' \perp BD$

B. $BB' \perp BD$

C. $A'B \perp DC'$

D. $BC' \perp A'D$

Bài 3. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Giả sử các tam giác AB'C và A'DC' có 3 góc nhọn. Góc giữa hai đường thẳng AC và A'D là góc nào sau đây?

A. $\widehat{AB'C}$

B. $\widehat{BB'D}$

C. $\widehat{BDB'}$

D. $\widehat{DA'C'}$

Bài 4. Cho tứ diện ABCD có $AB = AC = AD$ và $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 60^\circ$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD. Hãy xác định góc giữa cặp vector $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{IJ}$.

A. 120°

B. 90°

C. 60°

D. 450°

Bài 5. Cho hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ tạo với nhau một góc 120° . Biết $|\vec{a}| = 3$ cm và $|\vec{b}| = 5$ cm. Tính $|\vec{a} + \vec{b}|$.

A. $\sqrt{19}$

B. 7

C. 19

D. Đáp án khác