

Câu 1. (5,0 điểm)

1. Tìm tất cả các điểm cực đại và điểm cực tiểu của hàm số $y = \cos x - \sin x$.
2. Tìm m để phương trình $|2x^4 - 4x^2 + 1| - 2m = 0$ có đúng 5 nghiệm phân biệt.

Câu 2. (5,0 điểm)

1. Chứng minh rằng $C_{2020}^1 + 2C_{2020}^2 + \dots + 1010C_{2020}^{1010} = 1010.2^{2019}$.
2. Tìm tất cả các cặp số thực $(x; y)$ thỏa mãn $|xy| \leq 4$ và

$$(x - y)^2 + 20 = (x + y)(xy - 8).$$

Câu 3. (6,0 điểm)

1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , tam giác SAB vuông cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính thể tích của khối chóp $S.ABC$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và AC theo a .

2. Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (I) . Gọi M, D, E lần lượt là trung điểm của BC, IB, IC ; F, G lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABD và ACE . Chứng minh rằng AM vuông góc FG .

Câu 4. (2,0 điểm)

Cho dãy số (x_n) được xác định bởi $x_1 = \sqrt{2}$ và $x_{n+1} = \sqrt{2 - x_n}$, $\forall n \geq 1$. Chứng minh dãy số (x_n) có giới hạn và tìm giới hạn đó.

Câu 5. (2,0 điểm)

Xét các số thực dương a, b, c có tổng bằng 3. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{2b+c}{a} + \frac{2c+a}{b} + \frac{2a+b}{c} + \frac{18abc}{ab+bc+ca}.$$

===== HẾT =====

Thí sinh không được sử dụng máy tính cầm tay.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1.1. Tìm tất cả các điểm cực đại và điểm cực tiểu của hàm số $y = \cos x - \sin x$.

$$y' = -\sin x - \cos x; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases}$$

$$y'' = \sin x - \cos x; y''\left(-\frac{\pi}{4} + k2\pi\right) = -\sqrt{2} < 0; y''\left(\frac{3\pi}{4} + k2\pi\right) = \sqrt{2} > 0$$

Vậy các điểm cực đại của hàm số là: $x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi$; Các điểm cực tiểu của hàm số là:

$$x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi$$

Câu 1.2. Tìm m để phương trình $|2x^4 - 4x^2 + 1| - 2m = 0$ có đúng 5 nghiệm phân biệt.

$$|2x^4 - 4x^2 + 1| - 2m = 0 \Leftrightarrow |2x^4 - 4x^2 + 1| = 2m.$$

Cách 1: Xét hàm số $f(x) = 2x^4 - 4x^2 + 1$ có BBT của hàm số $f(x)$ và $|f(x)|$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$	-1	1	-1	$+\infty$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		0	0	0	
$ f(x) $	$+\infty$	0	1	1	0

Số nghiệm của phương trình bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $|f(x)|$ và đường thẳng $y = m$. Vậy phương trình đã cho có đúng 5 nghiệm phân biệt khi $2m = 1$ hay

$$m = \frac{1}{2}.$$

Cách 2: (HS 10,11). $|2x^4 - 4x^2 + 1| = 2m$ (1). Đặt

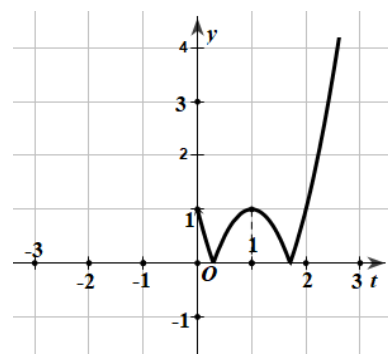
$$t = x^2, (t \geq 0)$$

$$\text{PTTT: } |2t^2 - 4t + 1| = 2m \quad (2).$$

Xét hàm số $f(t) = 2t^2 - 4t + 1$ trên $[0; +\infty)$. $|f(t)|$ có đồ thị

Biện luận các trường hợp số nghiệm của (2) và (1).

$$\text{Từ đó kết luận } m = \frac{1}{2}.$$



Cách 3: Nhận thấy nếu x_0 là nghiệm của (1) thì $-x_0$ cũng là nghiệm của pt (1). Do đó nếu các nghiệm $x_i \neq 0$ thì số nghiệm của phương trình (1) là số chẵn. Vậy để pt có 5 nghiệm là pt (1) có nghiệm $x_0 = 0$, thế vào tìm được $m = \frac{1}{2}$. Giải phương

trình khi $m = \frac{1}{2}$ và kết luận.

Câu 2.1. Chứng minh rằng $C_{2020}^1 + 2C_{2020}^2 + \dots + 1010C_{2020}^{1010} = 1010.2^{2019}$.

Cách 1: Ta có: $k.C_n^k = k \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} = n \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = nC_{n-1}^{k-1}$

$$C_{2020}^1 = 2020C_{2019}^0$$

$$2C_{2020}^2 = 2020C_{2019}^1 \dots$$

$$1010C_{2020}^{1010} = 2020C_{2019}^{1009}.$$

$$VT = 2020(C_{2019}^0 + C_{2019}^1 + \dots + C_{2019}^{1009})$$

Xét $C_{2019}^0 + C_{2019}^1 + \dots + C_{2019}^{1009} + C_{2019}^{1010} + \dots + C_{2019}^{2019} = 2^{2019}$. Mà $C_n^k = C_n^{n-k}$ nên

$$2(C_{2019}^0 + C_{2019}^1 + \dots + C_{2019}^{1009}) = 2^{2019}.$$

$$\text{Vậy } VT = 2020(C_{2019}^0 + C_{2019}^1 + \dots + C_{2019}^{1009}) = 1010.2^{2019}.$$

Cách 2:

$$\text{Xét } (1+x)^{2020} = C_{2020}^0 + xC_{2020}^1 + x^2C_{2020}^2 + \dots + x^{2020}C_{2020}^{2020}$$

Suy ra được:

$$2020(1+x)^{2019} = C_{2020}^1 + 2xC_{2020}^2 + \dots + 2020x^{2019}C_{2020}^{2020}$$

$$C_{2020}^1 + 2C_{2020}^2 + \dots + 1010C_{2020}^{1010} + 1011C_{2020}^{1011} + \dots + 2020C_{2020}^{2020} = 2020.2^{2019}$$

$$\text{Ta có: } k.C_n^k = k \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = (n-k+1) \frac{n!}{(n-k+1)!(k-1)!} = (n-k+1)C_n^{n-k+1}$$

Do đó:

$$C_{2020}^1 = 2020C_{2020}^{2020}$$

$$2C_{2020}^2 = 2019C_{2020}^{2019}$$

...

$$1010C_{2020}^{1010} = 1011C_{2020}^{1011}$$

$$\text{Vậy: } C_{2020}^1 + 2C_{2020}^2 + \dots + 1010C_{2020}^{1010} = 1010.2^{2019}$$

Câu 2.2. Tìm tất cả các cặp số thực $(x; y)$ thỏa mãn $|xy| \leq 4$ và

$$(x-y)^2 + 20 = (x+y)(xy-8).$$

Đặt $S = x+y; P = xy$ ($S^2 \geq 4P$). Từ giả thiết ta có: $S^2 - 4P - S(P-8) + 20 = 0$

$S^2 - S(P-8) - 4P + 20 = 0$. Xét pt theo S. $\Delta = (P-8)^2 - 4(-4P+20) = P^2 - 16$. Điều

kiện phương trình có nghiệm $|P| \geq 4$. Kết hợp điều kiện của giả thiết ta có

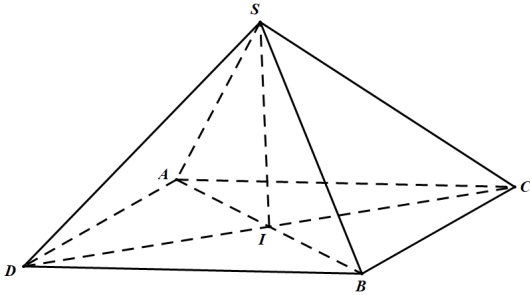
$$P = 4, P = -4.$$

$P = 4 \Rightarrow S = -2$ (loại); $P = -4 \Rightarrow S = -6$, x, y là 2 nghiệm của pt

$$X^2 + 6X - 4 = 0$$

Vậy các cặp $(x; y)$: $(-3 - \sqrt{13}; -3 + \sqrt{13}), (-3 + \sqrt{13}; -3 - \sqrt{13})$.

Câu 3.1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , tam giác SAB vuông cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính thể tích của khối chóp $S.ABC$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và AC theo a .



*Thể tích: $V = \frac{a^3 \sqrt{3}}{24}$.

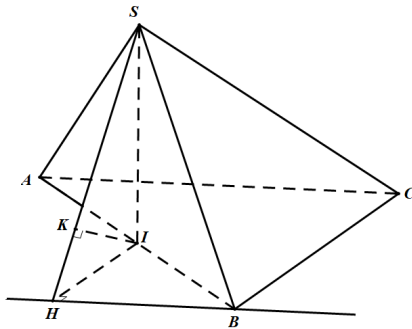
*Khoảng cách giữa SB và AC :

Cách 1: Dựng D đối xứng với C qua I

$$d(SB, AC) = d(AC, (SBD)) = 2d(I, (SBD)) = 2HK$$

$ACBD$ là hình thoi, nên IB, ID, IS đôi một vuông góc.

$$\frac{1}{d^2} = \frac{1}{SI^2} + \frac{1}{SB^2} + \frac{1}{SD^2} = \frac{28}{3a^2} \Rightarrow d = \frac{a\sqrt{21}}{7}.$$



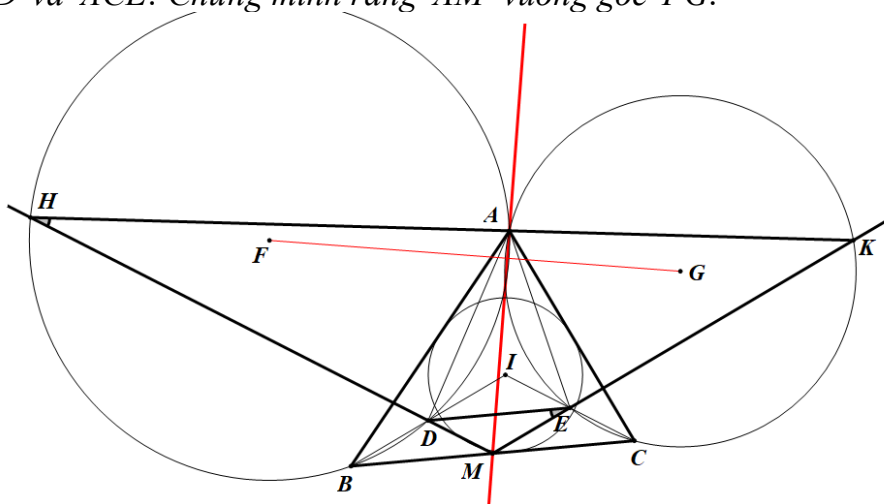
Cách 2: *Kẻ đt BD song song với AC .

$$d(SB, AC) = d(AC, (SBD)) = 2d(I, (SBD)) = 2HK$$

$$HI = \frac{a\sqrt{3}}{4}; SI = \frac{a}{2}$$

$$\frac{1}{IK^2} = \frac{1}{IH^2} + \frac{1}{SI^2} \Rightarrow IK^2 = \frac{IH^2 \cdot SI^2}{IH^2 + SI^2} = \frac{3a^2}{28} \Rightarrow d = \frac{a\sqrt{21}}{7}$$

Câu 3.2. Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (I) . Gọi M, D, E lần lượt là trung điểm của BC, AB, AC ; F, G lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABD và ACE . Chứng minh rằng AM vuông góc FG .



Gọi H là giao điểm thứ 2 của MD và đường tròn qua A, B, D .

Gọi K là giao điểm thứ 2 của ME và đường tròn qua A, C, E .

Ta có:

$$\widehat{AHM} = \frac{1}{2}\widehat{B} \text{ và } \widehat{AKM} = \frac{1}{2}\widehat{C} = \widehat{EDM} \text{ nên } A, H, K \text{ thẳng hàng.}$$

Tam giác MDE và MKH đồng dạng (Vì $\widehat{MED} = \widehat{MHK}$). Suy ra $ME.MK = MD.MH$, hay M nằm trên trục đẳng phương của hai đường tròn tâm F, G .

Suy ra $AM \perp FG$. (Trục đẳng phương vuông góc với đường nối tâm)

Câu 4. (2,0 điểm)

Cho dãy số (x_n) được xác định bởi $x_1 = \sqrt{2}$ và $x_{n+1} = \sqrt{2 - x_n}, \forall n \geq 1$. Chứng minh dãy số (x_n) có giới hạn và tìm giới hạn đó.

$$\text{HD: } 0 \leq x_n \leq \sqrt{2}, \forall n \geq 1.$$

$$\text{Ta có: } x_{n+1} > x_n \Leftrightarrow x_{n+2} < x_{n+1}.$$

$x_1 = \sqrt{2}, x_2 = \sqrt{2 - \sqrt{2}}, x_3 = \sqrt{2 - \sqrt{2 - \sqrt{2}}}$, như vậy $x_3 < x_1$ nên từ (*) ta suy ra (x_{2n+1}) là dãy giảm. Cùng với tính bị chặn nên tồn tại $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{2n+1} = a$.

$$\text{Từ } x_3 < x_1 \Rightarrow x_4 > x_2. \text{ Tương tự tồn tại } \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{2n} = b.$$

Từ hệ thức truy hồi ở giả thiết, chuyển qua giới hạn ta được:

$$\begin{cases} a = \sqrt{2 - b} \\ b = \sqrt{2 - a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$$

$$\text{Do } \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{2n} = 1 \text{ nên } \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 1.$$

$$\text{Cách 2: } x_{n+1} - 1 = \sqrt{2 - x_n} - 1 = \frac{1 - x_n}{\sqrt{2 - x_n} + 1}$$

$$|x_{n+1} - 1| = |1 - x_n| \frac{1}{\sqrt{2 - x_n} + 1}.$$

$$\text{Do } 0 \leq x_n \leq \sqrt{2}, \forall n \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2 - x_n} + 1} \leq \frac{1}{\sqrt{2 - \sqrt{2}} + 1} = q \in (0; 1)$$

$$\Rightarrow |x_{n+1} - 1| \leq |x_n - 1|.q \leq |x_{n-1} - 1|.q^2 \leq \dots \leq |x_1 - 1|.q^n$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |x_{n+1} - 1| = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n+1} = 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 1$$

$$\text{Cách 3: } 0 \leq x_n \leq \sqrt{2}, \forall n \geq 1.$$

$$\text{Đặt } x_n = 2 \cos \alpha_n, \alpha_n \in [0; \pi]. \text{ Ta có } \alpha_1 = \frac{\pi}{4}; x_1 = 2 \cos \frac{\pi}{4}$$

$$x_{n+1} = \sqrt{2 - x_n} \Rightarrow 2 \cos \alpha_{n+1} = \sqrt{2(1 - \cos \alpha_n)} = 2 \sin \frac{\alpha_n}{2} = 2 \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha_n}{2} \right)$$

$$\Rightarrow \alpha_{n+1} = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha_n}{2} \Rightarrow \alpha_{n+1} - \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2} \left(\alpha_n - \frac{\pi}{3} \right)$$

$$\Rightarrow \alpha_{n+1} = \left(-\frac{1}{2} \right)^n \left(\alpha_1 - \frac{\pi}{3} \right) = \left(-\frac{1}{2} \right)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow x_n = 2 \cos \left(\frac{\pi}{3} + \left(-\frac{1}{2} \right)^n \frac{\pi}{6} \right) \Rightarrow \lim x_n = 1.$$

Câu 5. (2,0 điểm)

Xét các số thực dương a, b, c có tổng bằng 3. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{2b+c}{a} + \frac{2c+a}{b} + \frac{2a+b}{c} + \frac{18abc}{ab+bc+ca}.$$

$$\text{HD: } P = \frac{2b+c}{a} + 1 + \frac{2c+a}{b} + 1 + \frac{2a+b}{c} + 1 + \frac{18abc}{ab+bc+ca} - 3.$$

$$= \frac{b+3}{a} + \frac{c+3}{b} + \frac{a+3}{c} + \frac{18abc}{ab+bc+ca} - 3$$

$$= \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} + 3 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) + \frac{18}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} - 3 \geq 3 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) + \frac{18}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}$$

$$\geq 3 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) + \frac{18}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}. (1)$$

$$\text{Ta có: } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c} = 3 \quad (2)$$

$$\text{Đặt } t = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3. \text{ Xét hàm } f(t) = 3t + \frac{18}{t} \text{ trên } [3; +\infty)$$

$$\text{Ta có: } f(t) \geq 15 = f(3). \quad (3)$$

Vậy $\min P = 15$ đạt được khi các đẳng thức (1), (2), (3) xảy ra.

$$\begin{cases} \frac{b}{a} = \frac{c}{b} = \frac{a}{c} \\ \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 3, \text{ hay } a = b = c = 1. \\ a = b = c \end{cases}$$

$$\text{Cách 2: } \dots \geq 3 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) + \frac{18}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) + 2 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) + \frac{18}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}$$

$$\geq 3 + 2\sqrt{2 \cdot 18} = 15.$$

....

===== HẾT =====