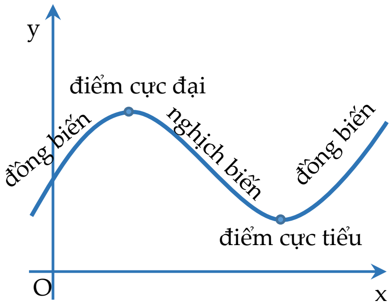
I.II Cực trị của hàm số và giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số.

A. Lý thuyết về cực trị của hàm số



Hình 1.7

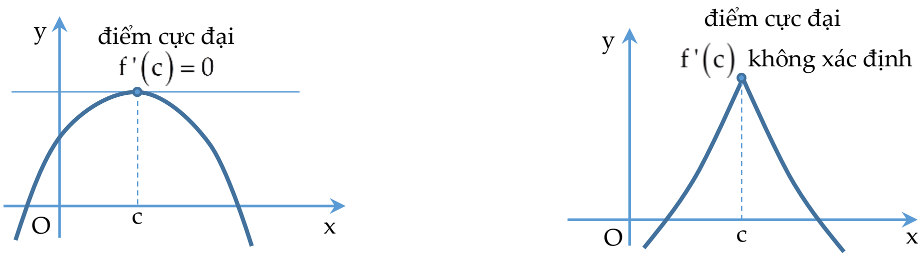
Ở phần I.I ta vừa học cách sử dụng đạo hàm để tìm khoảng đơn điệu của hàm số, khoảng đồng biến, khoảng nghịch biến của hàm số. Ở phần này ta sẽ xác định điểm nằm giữa khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số, và ngược lại. Những điểm này được gọi là **điểm cực trị** của đồ thị hàm số. Điểm cực trị bao gồm cả **điểm cực đại** và **điểm cực tiểu** của đồ thị hàm số. Đồ thị hàm số ở hình 1.7 có điểm cực đại là điểm phía bên trái và điểm cực tiểu ở phía bên phải (điểm được đánh dấu).

1. Định nghĩa

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên khoảng $(a;b)$ (có thể a là $-\infty$; b là $+\infty$) và điểm $x_o \in (a;b)$.

> *a, Nếu tồn tại số $h>0$ sao cho $f(x)<f(x_0)$ với mọi $x\in(x_0-h;x_0+h)$ và $x\neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt **cực đại** tại x_0.*
>
> *b, Nếu tồn tại số $h>0$ sao cho $f(x)>f(x_0)$ với mọi $x\in(x_0-h;x_0+h)$ và $x\neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt **cực tiểu** tại x_0.*

Với hàm liên tục thì hàm số sẽ đạt cực trị tại điểm làm cho $y'=0$ hoặc y' không xác định được thể hiện ở hình 1.8



Hình 1.8

Nếu hàm số đạt cực đại hoặc cực tiểu tại $x=c$ thì $x=c$ là điểm làm cho y' bằng 0 hoặc y' không xác định.

2. Chú ý

Nếu hàm số $f(x)$ đạt cực đại (cực tiểu) tại x_0 thì x_0 được gọi là **điểm cực đại (điểm cực tiểu)** của hàm số ; $f(x_0)$ được gọi là **giá trị cực đại (giá trị cực tiểu)** của hàm số, kí hiệu f_{CD} (f_{CT}), còn điểm $M(x_0;f(x_0))$ được gọi là **điểm cực đại (điểm cực tiểu)** của đồ thị hàm số.

Trong các bài trắc nghiệm thường có các câu hỏi đưa ra để đánh lừa thí sinh khi phải phân biệt giữa điểm cực trị của hàm số và điểm cực trị của điểm cực trị của đồ thị hàm số.

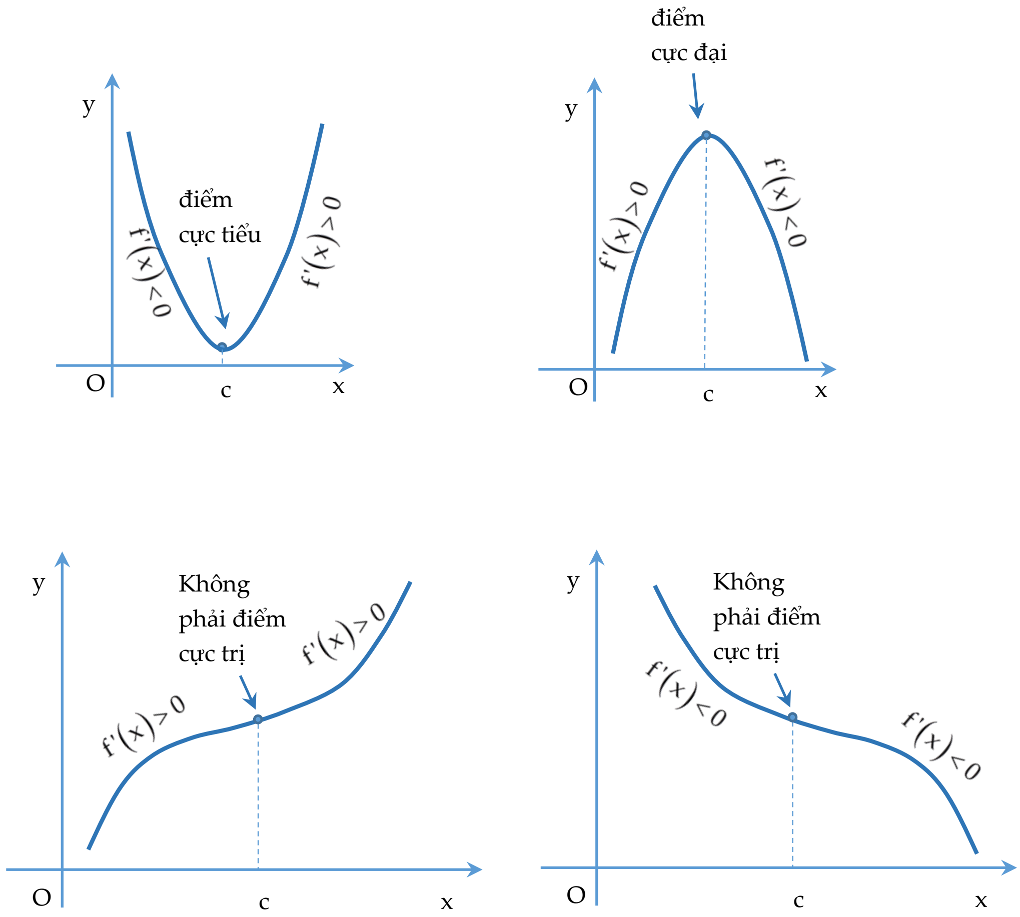
STUDY TIP: điểm cực trị của hàm số là $x=c$; còn điểm cực trị của đồ thị hàm số là điểm có tọa độ $M(c;f(c))$

3. Điều kiện đủ để hàm số có cực trị

> Khi $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm qua $x=c$ thì $x=c$ được gọi là điểm cực đại của hàm số.

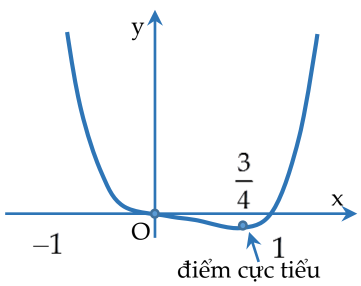
Khi $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương qua $x=c$ thì $x=c$ được gọi là điểm cực tiểu của hàm số.

Hình 1.9 mô tả điều kiện đủ để hàm số có cực trị:



Hình 1.9

> **Ví dụ 1:** Hàm số $y=x^4-x^3$ có điểm cực trị
>
> **A.** $x=0; x=\frac{3}{4}$ **B.** $x=0$ **C.** $x=\frac{3}{4}$ **D.** $x=1$



Hình 1.10

Lời giải: Ta có $y'=4x^3-3x^2=x^2(4x-3)$

$$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\frac{3}{4} \end{array}\right.$$

Ta thấy y' không đổi dấu qua $x=0$, do vậy $x=0$ không là điểm cực trị của hàm số. Và y' đổi dấu từ âm sang dương quan $x=\frac{3}{4}$ do vậy $x=\frac{3}{4}$ là điểm cực tiểu của hàm số.

Hình 1.10 thể hiện đồ thị hàm số, ta thấy rõ điểm $O(0;0)$ không là điểm cực trị của đồ thị hàm số).

Nếu $x=c$ là điểm cực trị của hàm $y=f(x)$ thì $f'(c)=0$ hoặc $f'(c)$ không xác định, nhưng nếu $f'(c)=0$ thì chưa chắc $x=c$ đã là điểm cực trị của hàm số.

4. Quy tắc để tìm cực trị

Quy tắc 1

1. Tìm tập xác định.
2. Tính $f'(x)$. Tìm các điểm tại đó $f'(x)$ bằng 0 hoặc không xác định.
3. Lập bảng biến thiên.
4. Từ bảng biến thiên suy ra cực trị.

Quy tắc 2

1. Tìm tập xác định.
2. Tính $f'(x)$. Giải phương trình $f'(x)=0$ và kí hiệu $x_i\ (i=1,2,3,...,n)$ là các nghiệm của nó.
3. Tính $f''(x)$ và $f''(x_i)$.
4. Dựa vào dấu của $f''(x_i)$ suy ra tính chất cực trị của điểm x_i.

Ví dụ 2: Cho hàm số $y=|x|$. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A. Hàm số có một điểm cực đại.

B. Hàm số đã cho không có cực trị.

C. Hàm số đã cho có đạo hàm không xác định tại $x=0$ nên không đạt cực trị tại $x=0$.

D. Hàm số đã cho có đạo hàm không xác định tại $x=0$ nhưng đạt cực trị tại $x=0$.

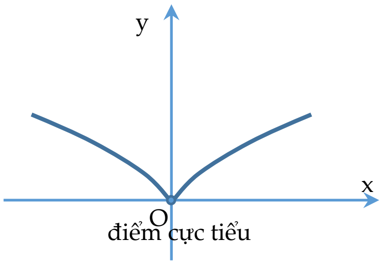
Đáp án D

<u>*Lời giải:*</u> Ta có $y'=\frac{x}{\sqrt{x^2}}$

y' không xác định tại $x=0$, đạo hàm của hàm số đổi dấu khi qua $x=0$. Nên hàm số đạt cực trị tại $x=0$.

Phần này đã được giới thiệu ở sau phần định nghĩa: Với hàm liên tục thì hàm số sẽ đạt cực trị tại điểm làm cho $y'=0$ hoặc y' không xác định.

Hình 1.11 biểu thị đồ thị hàm số $y=|x|$ đạt có điểm cực tiểu là $O(0;0)$.

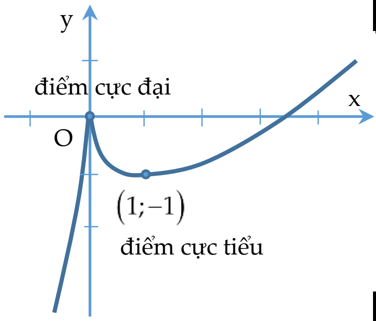


Hình 1.11

Ví dụ 3: Tìm tất cả các điểm cực trị của hàm số $y=2x-3\sqrt[3]{x^2}$.

<u>*Lời giải:*</u> Ta có $y'=\left(2x-3\sqrt[3]{x^2}\right)'=\left(2x-3x^{\frac{2}{3}}\right)'=2-\frac{2}{\sqrt[3]{x}}=\frac{2\left(\sqrt[3]{x}-1\right)}{\sqrt[3]{x}}$

y' không xác định tại $x=0$; $y'=0\Leftrightarrow x=1$. Và đạo hàm đổi dấu khi qua $x=0; x=1$. Do vậy hàm số có hai điểm cực trị là $x=0; x=1$.



Hình 1.12

Ví dụ 4: Cho hàm số $y=x^3-mx^2-2x+1$ với m là tham số. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Với mọi tham số m, hàm số đã cho luôn chỉ có duy nhất một cực đại.

B. Với mọi tham số m, hàm số đã cho luôn chỉ có duy nhất một cực tiểu.

C. Với mọi tham số m, hàm số đã cho luôn có một điểm cực đại và một điểm cực tiểu.

D. Với mọi tham số m, hàm số đã cho không có cực trị.

<u>*Lời giải*</u>

Xét hàm số $y = x^3 - mx^2 - 2x + 1$ có $y' = 3x^2 - 2mx - 2$

Xét phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 2mx - 2 = 0$ có $\Delta' = (-m)^2 - (-2).3 = m^2 + 6 > 0$.

Do vậy phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt $x_1 < x_2$. Mặt khác ta có mẹo xét dấu tam thức bậc hai " trong khác ngoài cùng", do vậy đạo hàm của hàm số đã cho đổi dấu như sau:

x		x_1		x_2	
y'	$+$		$-$		$+$

Vậy hàm số đã cho luôn có một điểm cực đại và một điểm cực tiểu với mọi tham số m.

B. Các dạng toán liên quan đến cực trị

Dạng 1: Xác định điểm cực trị của hàm số, điểm cực trị của đồ thị hàm số, tìm giá trị cực trị của hàm số.

Đây là dạng toán cơ bản nhất về cực trị, tuy nhiên xuất hiện rất nhiều trong các đề thi thử. Ở dạng toán này ta chỉ áp dụng các tính chất đã được nêu ở phần A. Tuy nhiên ta đi xét các ví dụ để rút ra các kết quả quan trọng.

Ví dụ 1 : Hàm số nào sau đây không có cực trị ?

A. $y = x^3 - 3x + 1$.

B. $y = \dfrac{2 - x}{x + 3}$.

C. $y = x^4 - 4x^3 + 3x + 1$.

D. $y = x^{2n} + 2017x \ (n \in \mathbb{N}^*)$.

(Trích đề thi thử THPT chuyên Lê Hồng Phong – Nam Định)

Đáp án B

STUDY TIP: Hàm phân thức bậc nhất trên bậc nhất không có cực trị.

Lời giải

Với A: Ta thấy đây là hàm bậc ba có $y' = 3x^2 - 3$, phương trình $y' = 0$ luôn có hai nghiệm phân biệt nên hàm số có hai điểm cực trị (loại).

Với B: Đây là hàm phân thức bậc nhất trên bậc nhất nên không có cực trị. Do đó ta chọn B.

Ví dụ 2: Hàm số nào sau đây có ba điểm cực trị?

A. $y = x^4 + 2x^2 + 10$.

B. $y = -x^4 + 2x^2 + 3$.

C. $y = \dfrac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 5x + 2$.

D. $y = 2x^4 - 4$.

(Trích đề thi thử THPT Công Nghiệp – Hòa Bình)

Đáp án B

Lời giải

Ta có thể loại luôn C bởi hàm số bậc ba chỉ có nhiều nhất là hai cực trị.

Tiếp theo ta đến với các hàm bậc bốn. Ta có hàm bậc bốn trùng phương có hai trường hợp, hoặc là có một điểm cực trị, hoặc là có ba điểm cực trị.

Đối với hàm bậc bốn trùng phương dạng $y = ax^4 + bx^2 + c\ (a \neq 0)$.

Ta có $y' = 4ax^3 + 2bx = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 2ax^2 + b = 0 \Leftrightarrow x^2 = -\dfrac{b}{2a} \end{array}\right.$

Số điểm cực trị phụ thuộc vào nghiệm của phương trình $2ax^2 + b = 0$.

a. Nếu $\dfrac{-b}{2a} \leq 0$ tức là *a, b* cùng dấu hoặc $b = 0$ thì phương trình vô nghiệm hoặc có nghiệm $x = 0$. Khi đó hàm số chỉ có một điểm cực trị là $x = 0$.

b.Nếu $\dfrac{-b}{2a} > 0$ tức là *a, b* trái dấu thì phương trình có hai nghiệm phân biệt là $x = \pm\sqrt{-\dfrac{b}{2a}}$. Nghĩa là hàm số có ba điểm cực trị là $x = 0; x = \pm\sqrt{-\dfrac{b}{2a}}$.

STUDY TIP:
Đối với hàm bậc bốn trùng phương có dạng $y = ax^4 + bx^2 + c, (a \neq 0)$ thì nếu:
$ab > 0$ thì hàm số có một điểm cực trị là $x = 0$.
$ab < 0$ thì hàm số có ba điểm cực trị là $x = 0; x = \pm\sqrt{-\dfrac{b}{2a}}$.

Đến đây ta có thể suy ra, nếu hệ số của *a, b* khác dấu thì hàm số bậc bốn trùng phương có ba cực trị, do vậy ta chọn luôn được B.

Tiếp tục là một bài toán áp dụng kết quả vừa thu được.

Ví dụ 3: Cho hàm số $y = -x^4 + 2x^2 + 1$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số có một cực đại và hai cực tiểu.
B. Hàm số có hai cực đại và một cực tiểu.
C. Hàm số có một cực đại và không có cực tiểu.
D. Hàm số có một cực đại và một cực tiểu.

(Trích đề thi thử THPT Phan Đình Phùng – Hà Nội)

Đáp án B.

Lời giải

Áp dụng kết quả vừa thu được ta có kết luận hàm số luôn có ba điểm cực trị do hai hệ số *a, b* trái dấu.

Mặt khác hệ số $a = -1 < 0$ nên đồ thị hàm số có dạng chữ **M** (mẹo nhớ), do vậy hàm số có hai điểm cực đại và một cực tiểu.

Đến đây ta tiếp tục thu được kết luận ở phần STUDY TIP.

STUDY TIP:
Đối với hàm bậc bốn trùng phương có dạng $y = ax^4 + bx^2 + c, (a \neq 0)$ có $ab < 0$, khi đó nếu:
a. $a < 0$ thì $x = 0$ là điểm cực tiểu; $x = \pm\sqrt{-\dfrac{b}{2a}}$ là hai điểm cực đại của hàm số.
b. $a > 0$ thì ngược lại $x = 0$ là điểm cực đại; $x = \sqrt{-\dfrac{b}{2a}}$ là hai điểm cực tiểu của hàm số.

Ví dụ 4: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ và có bảng biến thiên phía dưới:

Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng ?

A. Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 0$ và đạt cực tiểu tại điểm $x = 4$.
B. Hàm số có đúng một cực trị.
C. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 1.
D. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 1 và giá trị nhỏ nhất bằng -15.

(Trích đề thi thử THPT chuyên Lê Hồng Phong – Nam Định)

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-15	↘	$-\infty$

Đáp án C

Lời giải

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy có hai giá trị của x mà qua đó y' đổi dấu, đó là $x = 0$ và $x = 4$, do vậy đây là hai điểm cực trị của hàm số.

Ta thấy y' đổi dấu từ âm sang dương khi qua $x=0$, do vậy $x=0$ là điểm cực tiểu của hàm số, ngược lại $x=4$ lại là điểm cực đại của hàm số.

Từ đây ta loại được A, B.

Với D: D sai do đây là các giá trị cực trị, không giải giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số.

Ta chọn C bởi tại $x=0$ thì hàm số có giá trị cực tiểu là $y=1$.

Tiếp tục là một bài toán nhìn bảng biến thiên để xác đinh tính đúng sai của mệnh đề:

Ví dụ 5: Hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Hàm số đã cho có hai điểm cực trị.

B. Hàm số đã cho không có giá trị cực đại.

C. Hàm số đã cho có đúng một điểm cực trị.

D. Hàm số đã cho không có giá trị cực tiểu.

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

STUDY TIP:
Ở quy tắc 1 ta có hàm số đạt cực trị tại điểm khiến cho đạo hàm bằng 0 hoặc không xác định.

Đáp án A

Lời giải

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy có hai giá trị của x mà khi qua đó y' đổi dấu. Do vậy hàm số đã cho có hai điểm cực trị đó là $x=1; x=2$.

Chú ý: Nhiều độc giả nghĩ rằng tại $x=2$ không tồn tại y' thì $x=2$ không phải là điểm cực trị của hàm số, đây là một sai lầm rất lớn. Bởi hàm số vẫn đạt cực trị tại điểm khiến cho đạo hàm không xác định.

Ví dụ: Hàm số $y=|x|$ có đạo hàm không tồn tại khi $x=0$ nhưng đạt cực tiểu tại $x=0$.

Ví dụ 6. Hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-1)^2(x-3)$. Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. Hàm số có một điểm cực đại

B. Hàm số có hai điểm cực trị

C. Hàm số có đúng 1 điểm cực trị

D. Hàm số không có điểm cực trị

(Trích đề thi thử THPT chuyên ĐHSP HN – lần I)

Đáp án C.

Lời giải

Ta thấy $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3 \end{array}\right.$

STUDY TIP:
Trong đa thức, dấu của đa thức chỉ đổi khi qua nghiệm đơn và nghiệm bội lẻ, còn nghiệm bội chẵn không khiến đa thức đổi dấu.

Đến đây có nhiều độc giả kết luận luôn hàm số có hai điểm cực trị, tuy nhiên đó là kết luận sai lầm, bởi khi qua $x=1$ thì $f'(x)$ không đổi dấu, bởi $(x-1)^2 \ge 0$, $\forall x$. Do vậy hàm số chỉ có đúng một điểm cực trị là $x=3$.

Dạng 2: Tìm điều kiện để hàm số có cực trị.

Chú ý:

> Hàm số $y=f(x)$ xác định trên D có cực trị $\Leftrightarrow \exists x_0 \in D$ thỏa mãn hai điều kiện sau:
> i. Đạo hàm của hàm số tại x_0 phải bằng 0 hoặc hàm số không có đạo hàm tại x_0.
> ii. $f'(x)$ phải đổi dấu qua x_0 hoặc $f''(x_0) \ne 0$.

1. Đối với hàm số bậc 3: $y=ax^3+bx^2+cx+d \ (a\ne 0)$.

Ta có $y'=3ax^2+2bx+c$.

Để hàm số bậc ba có cực trị thì phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt.

$\boxed{\Leftrightarrow \Delta'>0 \Leftrightarrow b^2-3ac>0}$

Ngược lại, để hàm số không có cực trị thì phương trình $y'=0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm duy nhất $\boxed{\Leftrightarrow b^2-3ac\le 0}$.

STUDY TIP:
Qua đây ta rút ra kết quả, đồ thị hàm số bậc ba hoặc là có hai điểm cực trị, hoặc là không có điểm cực trị nào.

2. Đối với hàm bậc bốn trùng phương dạng $y=ax^4+bx^2+c \ (a\ne 0)$.

Ta có $y'=4ax^3+2bx=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ 2ax^2+b=0 \end{array}\right.$

Đến đây ta có nhận xét hàm số bậc bốn trùng phương luôn có điểm cực trị.

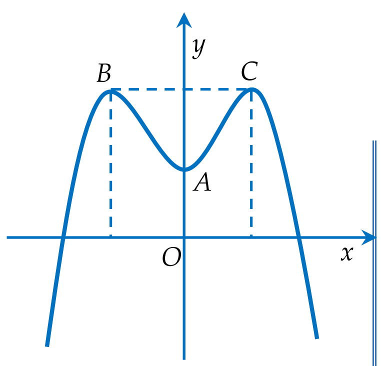
Số điểm cực trị phụ thuộc vào nghiệm của phương trình $2ax^2+b=0$.

a. Nếu $\dfrac{-b}{2a}\le 0$ tức là *a, b* cùng dấu hoặc $b=0$ thì phương trình vô nghiệm hoặc có nghiệm $x=0$. Khi đó hàm số chỉ có một điểm cực trị là $x=0$.

b.Nếu $\dfrac{-b}{2a}>0$ tức là *a, b* trái dấu thì phương trình có hai nghiệm phân biệt là $x=\pm\sqrt{-\dfrac{b}{2a}}$. Nghĩa là hàm số có ba điểm cực trị là $x=0; x=\pm\sqrt{-\dfrac{b}{2a}}$.

Dạng 3: Tìm điều kiện để hàm số đã cho có điểm cực trị thỏa mãn điều kiện cho trước.

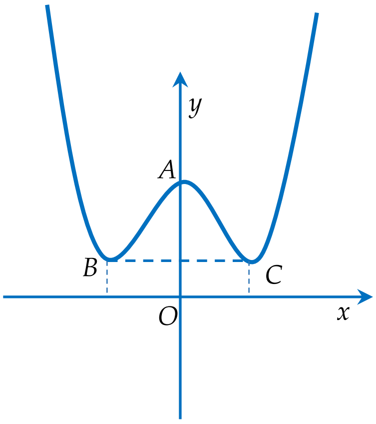
3.1 Xét hàm số bậc bốn trùng phương có dạng $y=ax^4+bx^2+c,(a\ne 0)$.



Ta vừa chứng minh ở dạng 2, nếu $ab<0$ thì hàm số có ba điểm cực trị là $x=0; x=\pm\sqrt{-\dfrac{b}{2a}}$.

Khi đó đồ thị hàm số đã cho sẽ có ba điểm cực trị là:

$A(0;c); B\left(-\sqrt{-\dfrac{b}{2a}};-\dfrac{\Delta}{4a}\right); C\left(\sqrt{-\dfrac{b}{2a}};-\dfrac{\Delta}{4a}\right)$ với $\Delta=b^2-4ac$ (Hình minh họa)



(**Chứng minh**: ta có $f\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}}\right)=a.\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}}\right)^4+b.\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}}\right)^2+c=\frac{ab^2}{4a^2}-\frac{b^2}{2a}+c$

$=\frac{ab^2-2ab^2+4a^2c}{4a^2}=\frac{ab^2-2ab^2+4a^2c}{4a^2}=\frac{-ab^2+4ac}{4a^2}=\frac{-b^2+4ac}{4a}$ (đpcm))

$$\boxed{\Rightarrow AB=AC=\sqrt{\frac{b^4}{16a^2}-\frac{b}{2a}};BC=2\sqrt{-\frac{b}{2a}}}$$

STUDY TIP:
Qua đây ta rút ra kết quả, để đồ thị hàm số $y=ax^4+bx^2+c$, $(a\neq 0)$ có ba điểm cực trị tạo thành tam giác vuông cân điều kiện là $\frac{b^3}{a}=-8$. Ta loại được điều kiện a, b trái dấu do từ công thức cuối cùng thu được thì ta luôn có a, b trái dấu.

Bài toán 1: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=ax^4+bx^2+c$, $(a\neq 0)$ có ba điểm cực trị tạo thành tam giác vuông.

Lời giải tổng quát

Với $ab<0$ thì hàm số có ba điểm cực trị.

Do điểm $A(0;c)$ luôn nằm trên Oy và cách đều hai điểm B, C. Nên tam giác ABC phải vuông cân tại A. Điều này tương đương với $AB\perp AC$ (do $AB=AC$ có sẵn rồi).

Mặt khác ta có $\overrightarrow{AB}=\left(-\sqrt{-\frac{b}{2a}};-\frac{b^2}{4a}\right);\overrightarrow{AC}=\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}};-\frac{b^2}{4a}\right)$

Do $AB\perp AC$ nên $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0\Leftrightarrow\frac{b}{2a}+\frac{b^4}{16a^2}=0\Leftrightarrow\boxed{\frac{b^3}{a}=-8}$

Ví dụ 1: Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^4-8m^2x^2+3$ có 3 điểm cực trị tạo thành ba đỉnh của một tam giác vuông cân.

A. $\{0\}$ **B.** $\left\{\frac{1}{8}\right\}$ **C.** $\left\{-\frac{1}{8}\right\}$ **D.** $\left\{-\frac{1}{8};\frac{1}{8}\right\}$

Đáp án D.

Cách 1: Lời giải thông thường	**Cách 2:** Áp dụng công thức.
TXĐ: $D=\mathbb{R}$. Ta có: $y'=4x\left(x^2-4m^2\right)$. Hàm số có ba điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình $y'=0$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m\neq 0$. Lúc đó, ba điểm cực trị là: $A\left(2m;-16m^2+3\right)$, $B(0;3)$, $C\left(-2m;-16m^2+3\right)$. Nên $BA=BC$. Do đó, tam giác ABC cân tại B. Khi đó, tam giác ABC vuông cân khi và chỉ khi: $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=0\Leftrightarrow 4m^2-256m^4=0\Leftrightarrow 1-64m^2=0\ \ (m\neq 0)$ $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=\frac{1}{8}\\m=-\frac{1}{8}\end{array}\right.$.	Để các điểm cực trị của đồ thị hàm số là ba đỉnh của một tam giác vuông cân thì $\frac{b^3}{a}=-8$ $\Leftrightarrow\frac{\left(-8m^2\right)^3}{1}=-8$ $\Leftrightarrow m=\pm\frac{1}{8}$

Nhận xét: Rõ ràng việc nhớ công thức và làm nhanh hơn rất nhiều so với việc suy ra từng trường hợp một.

STUDY TIP:
Độc giả nên làm các bài tập rèn luyện này mà không nhìn lại công thức để có thể ghi nhớ công thức lâu hơn.

Bài tập rèn luyện lại công thức:

1. Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m^2 - 2$. Tìm m để hàm số có ba điểm cực trị và các điểm cực trị của đồ thị hàm số là ba đỉnh của một tam giác vuông?

A. $m = 1$ **B.** $m = -1$ **C.** $m = 2$ **D.** $m = -2$

(Trích đề thi thử THPT Trần Hưng Đạo – Nam Định)

2. Cho hàm số $y = f(x) = x^4 + 2(m-2)x^2 + m^2 - 5m + 5$ (C_m). Giá trị nào của m để đồ thị của hàm số đã cho có các điểm cực đại, cực tiểu tạo thành một tam giác vuông cân thuộc khoảng nào sau đây?

A. $\left(\frac{4}{7};\frac{3}{2}\right)$. **B.** $\left(\frac{3}{2};\frac{21}{10}\right)$. **C.** $\left(0;\frac{1}{2}\right)$. **D.** $(-1;0)$.

3. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = -x^4 + (m-2015)x^2 + 2017$ có 3 điểm cực trị tạo thành tam giác vuông cân.

A. $m = 2017$ **B.** $m = 2014$ **C.** $m = 2016$ **D.** $m = 2015$

4. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 + 2(m+2016)x^2 - 2017m + 2016$ có ba điểm cực trị tạo thành tam giác vuông cân.

A. $m = -2017$ **B.** $m = 2017$ **C.** $m = -2018$ **D.** $m = 2015$

5. Tìm m để đồ thị hàm số $f(x) = x^4 - 2(m+1)x^2 + m^2$ có các điểm cực đại, cực tiểu tạo thành một tam giác vuông.

A. $m = 2$. **B.** $m = -1$. **C.** $m = 0$. **D.** $m = 1$.

Bài toán 2: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số *m* để đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$, $(a \neq 0)$ có ba điểm cực trị tạo thành tam giác đều.

STUDY TIP:
Qua đây ta rút ra kết quả, để đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$, $(a \neq 0)$ có ba điểm cực trị tạo thành tam giác đều thì $\frac{b^3}{a} = -24$.

Lời giải tổng quát

Với $ab < 0$ thì hàm số có ba điểm cực trị.

Do $AB = AC$, nên ta chỉ cần tìm điều kiện để $AB = BC$.

Mặt khác ta có

$$\Rightarrow AB = AC = \sqrt{\frac{b^4}{16a^2} - \frac{b}{2a}}; BC = 2\sqrt{-\frac{b}{2a}}$$

Do vậy $AB = BC \Leftrightarrow -\frac{b}{2a} + \frac{b^4}{16a^2} = -\frac{2b}{a} \Leftrightarrow \boxed{\frac{b^3}{a} = -24}$

Ví dụ 2: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m - 1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác đều. Ta có kết quả:

A. $m = 3$ **B.** $m = 0$ **C.** $m > 0$ **D.** $m = \sqrt[3]{3}$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Lam Sơn Thanh Hóa)

STUDY TIP:
Qua đây ta rút ra kết quả, để đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$, $(a \neq 0)$ có ba điểm cực trị tạo thành tam giác đều thì $\frac{b^3}{a} = -24$.
Mà tam giác vuông thì $\frac{b^3}{a} = -8$.
"Vuông -8, đều -24"

Đáp án D.

Lời giải

Áp dụng công thức vừa chứng minh ở trên ta có

$\frac{b^3}{a} = -24 \Leftrightarrow \frac{(-2m)^3}{1} = -24 \Leftrightarrow m = \sqrt[3]{3}$.

Bài tập rèn luyện lại công thức:

1. Cho hàm số $y = x^4 + 2(m-2)x^2 + m^2 - 5m + 5 (C_m)$. Với những giá trị nào của m thì đồ thị (C_m) có điểm cực đại và điểm cực tiểu, đồng thời các điểm cực đại và điểm cực tiểu lập thành một tam giác đều?

A. $m = 2 - \sqrt[3]{3}$ **B.** $m = 2 + \sqrt[3]{3}$ **C.** $m = 5 - 2\sqrt[3]{3}$ **D.** $m = 5 + 2\sqrt[3]{3}$

2. Cho hàm số $y = \frac{9}{8}x^4 + 3(m-2017)x^2 - 2016$ có đồ thị (C_m). Tìm tất cả các giá trị của m sao cho đồ thị (C_m) có ba điểm cực trị tạo thành tam giác đều?

A. $m = 2015$ **B.** $m = 2016$ **C.** $m = 2017$ **D.** $m = -2017$

3. Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2$. Tìm tất cả các giá trị của m sao cho đồ thị hàm số có ba điểm cực trị tạo thành tam giác đều?

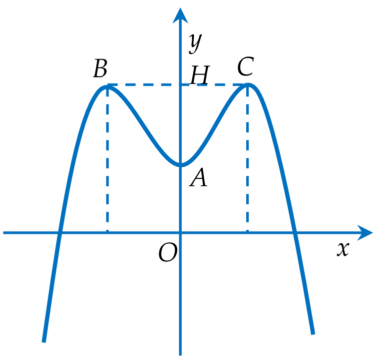
A. $m = \sqrt[3]{3}$ **B.** $m = -\sqrt[3]{3}$ **C.** $m = \sqrt{3}$ **D.** $m = -\sqrt{3}$

4. Cho hàm số $y = -mx^4 + 2mx^2 - m$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho đồ thị hàm số có ba điểm cực trị tạo thành tam giác đều.

A. $m = \sqrt{3}; m = -\sqrt{3}; m = 0$ **B.** $m = -\sqrt{3}; m = \sqrt{3}$

C. $m = 0$ **D.** $m = \sqrt{3}$

Bài toán 3: Tìm tất cả các giá trị của tham số *m* để đồ thị hàm số các giá trị thực của tham số *m* để đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$, $(a \neq 0)$ có ba điểm cực trị tạo thành tam giác có diện tích bằng S_0.



Lời giải tổng quát

Gọi H là trung điểm của BC thì lúc này H nằm trên đường thẳng chứa đoạn thẳng BC (hình vẽ).

Lúc này $H\left(0; -\frac{\Delta}{4a}\right) \Rightarrow \overrightarrow{AH} = \left(0; -\frac{b^2}{4a}\right)$. Diện tích tam giác ABC được tính bằng công thức: $S_{ABC} = \frac{1}{2}.AH.BC \Rightarrow S_o^2 = \frac{1}{4}.\left(-\frac{b^2}{4a}\right)^2.\left(2.\sqrt{-\frac{b}{2a}}\right)^2$

$\Leftrightarrow S_0^2 = \frac{1}{4}.\frac{b^4}{16a^2}.\frac{-2b}{a} \Leftrightarrow \boxed{S_0^2 = \frac{-b^5}{32a^3}}$

STUDY TIP:
Qua đây ta rút ra kết quả, để đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$, $(a \neq 0)$ có ba điểm cực trị tạo thành tam giác có diện tích là S_0 thì có điều kiện là $S_0^2 = -\frac{b^5}{32a^3}$

Ví dụ 3: Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2m + m^4$. Với giá trị nào của m thì đồ thị (C_m) có 3 điểm cực trị, đồng thời 3 điểm cực trị đó tạo thành một tam giác có diện tích bằng 4

A. $m = \sqrt[5]{16}$ **B.** $m = 16$ **C.** $m = \sqrt[3]{16}$ **D.** $m = -\sqrt[3]{16}$

(Trích đề thi thử Sở GD&ĐT Hưng Yên, đề thi thử THPT chuyên Lam Sơn)

Đáp án A.

Lời giải

Áp dụng công thức ở trên ta có, hàm số có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích bằng 4 $\Leftrightarrow 32.a^3S_0{}^2+b^5=0 \Leftrightarrow 32.1^3.4^2+(-2m)^5=0 \Leftrightarrow m=\sqrt[5]{16}$.

Bài tập rèn luyện lại công thức:

1. Cho hàm số $y=x^4-2m^2x^2+1$. Với giá trị nào của m thì đồ thị hàm số đã cho có 3 điểm cực trị, đồng thời 3 điểm cực trị đó tạo thành một tam giác có diện tích bằng 32.

A. $m=2;m=-2$ **B.** $m=0;m=2$

C. $m=0;m=-2$ **D.** $m=2;m=-2;m=0$

2. Cho hàm số $y=f(x)=-x^4+2(m-2)x^2+m^2-5m+5$. Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số đã cho có 3 điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích bằng 1.

A. $m=3$ **B.** $m=\pm 3$ **C.** $m=2$ **D.** $m=\pm 2$

3. Cho hàm số $y=3x^4-2mx^2+2m+m^4$. Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số đã cho có ba điểm cực trị tạo thành tam giác có diện tích bằng 3.

A. $m=3$ **B.** $m=-3$ **C.** $m=4$ **D.** $m=-4$

4. Cho hàm số $y=x^4+2mx^2-m-1$ (1), với m là tham số thực.Xác định m để hàm số (1) có ba điểm cực trị, đồng thời các điểm cực trị của đồ thị tạo thành một tam giác có diện tích bằng $4\sqrt{2}$.

A. $m=2$ **B.** $m=-2$ **C.** $m=4$ **D.** $m=-4$

Bài toán 4: Tìm tất cả các giá trị của tham số *m* để đồ thị hàm số các giá trị thực của tham số *m* để đồ thị hàm số $y=ax^4+bx^2+c$, $(a\neq 0)$ có ba điểm cực trị tạo thành tam giác có diện tích lớn nhất.

Lời giải tổng quát

Ở bài toán 3 ta có $S_0{}^2=-\dfrac{b^5}{32a^3}$.

Do vậy ta chỉ đi tìm $\boxed{Max\left(\dfrac{-b}{32a^3}\right)}$

Bài toán 5: Tìm tất cả các giá trị của tham số *m* để đồ thị hàm số các giá trị thực của tham số *m* để đồ thị hàm số $y=ax^4+bx^2+c$, $(a\neq 0)$ có ba điểm cực trị tạo thành tam giác có góc ở đỉnh cân bằng α.

Lời giải tổng quát

Cách 1:

Ta có $\cos\alpha=\dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{AC}|}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}-AB^2.\cos\alpha=0 \Leftrightarrow \dfrac{b}{2a}+\dfrac{b^4}{16a^2}-\left(-\dfrac{b}{2a}+\dfrac{b^4}{16a^2}\right).\cos\alpha=0$

$\Leftrightarrow 8a(1+\cos\alpha)+b^3(1-\cos\alpha)=0 \Rightarrow \boxed{\cos\alpha=\dfrac{b^3+8a}{b^3-8a}}$

Cách 2:

Gọi *H* là trung điểm của *BC*, tam giác *AHC* vuông tại *H* có:

$\tan\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{HC}{AH}=\dfrac{BC}{2AH}\Rightarrow BC^2-4.AH^2.\tan^2\dfrac{\alpha}{2}=0\Leftrightarrow \boxed{8a+b^3.\tan^2\dfrac{\alpha}{2}=0}$

STUDY TIP:
Qua đây ta rút ra kết quả, để đồ thị hàm số $y=ax^4+bx^2+c$, $(a\neq 0)$ có ba điểm cực trị tạo thành tam giác có góc ở đỉnh là α thì có điều kiện là $\cos\alpha=\dfrac{b^3+8a}{b^3-8a}$

Hoặc $8a+b^3.\tan^2\dfrac{\alpha}{2}=0$.

Bài toán 6: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$, $(a \neq 0)$ có ba điểm cực trị tạo thành tam giác có ba góc nhọn.

Lời giải tổng quát

Do tam giác ABC là tam giác cân nên hai góc ở đáy bằng nhau. Một tam giác không thể có hai góc tù, do vậy hai góc ở đáy của tam giác ABC luôn là góc nhọn. Vì thế cho nên để tam giác ABC là tam giác có ba góc nhọn thì góc ở đỉnh phải là góc nhọn. Tức là tìm điều kiện để $BAC = \alpha$ là góc nhọn.

Ở bài toán trên ta vừa tìm được $\cos BAC = \cos\alpha = \dfrac{b^3 + 8a}{b^3 - 8a}$.

Để góc BAC nhọn thì $\boxed{\dfrac{b^3 + 8a}{b^3 - 8a} > 0}$

Cách khác để rút gọn công thức:

Do $\cos\alpha = \dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|}$ nên để α là góc nhọn thì $\dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|} > 0$.

Mà $\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AC}\right| > 0$ do đó $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{b}{2a} + \dfrac{b^4}{16a^2} > 0 \Leftrightarrow \boxed{b.\left(b^3 + 8a\right) > 0}$

STUDY TIP:
Qua đây ta rút ra kết quả, để đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$, $(a \neq 0)$ có ba điểm cực trị tạo thành tam giác có ba góc nhọn thì $b.\left(b^3 + 8a\right) > 0$.

Bài toán 7: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$, $(a \neq 0)$ có ba điểm cực trị tạo thành tam giác có bán kính đường tròn nội tiếp là r.

Lời giải tổng quát

Ta có $S_0 = p.r$ (công thức tính diện tích tam giác theo bán kính đường tròn nội tiếp).

$$\Rightarrow r = \frac{2S_0}{AB + AC + BC} = \frac{2.\sqrt{-\dfrac{b^5}{32a^3}}}{2\sqrt{-\dfrac{b}{2a} + \dfrac{b^4}{16a^2}} + 2\sqrt{-\dfrac{b}{2a}}} \quad \boxed{\Leftrightarrow r = \frac{b^2}{4|a|.\left(1 + \sqrt{1 - \dfrac{b^3}{8a}}\right)}}$$

Bài toán 8: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$, $(a \neq 0)$ có ba điểm cực trị tạo thành tam giác có bán kính đường tròn ngoại tiếp là R.

Lời giải tổng quát

Trước tiên ta có các công thức sau: $S_{ABC} = \dfrac{AB.BC.CA}{4R}$

Gọi H là trung điểm của BC, khi đó AH là đường cao của tam giác ABC, nên

$$\frac{1}{2}AH.BC = \frac{AB.BC.CA}{4R} \Leftrightarrow 2.R^2.AH^2 = AB^4$$

$$2.R^2.\frac{b^4}{16a^2} = \left(-\frac{b}{2a} + \frac{b^4}{16a^2}\right)^2 \Leftrightarrow \boxed{R = \frac{b^3 - 8a}{8.|a|.b}}$$

Bài toán 9: Tìm tất cả các giá trị của tham số *m* để đồ thị hàm số các giá trị thực của tham số *m* để đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$, $(a \neq 0)$ có ba điểm cực trị tạo thành tam giác có

a. Có độ dài $BC = m_0$

b. Có $AB = AC = n_0$

Lời giải tổng quát

Ở ngay đầu **Dạng 3** ta đã có các công thức

$A(0;c); B\left(-\sqrt{-\frac{b}{2a}}; -\frac{\Delta}{4a}\right); C\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$ với $\Delta = b^2 - 4ac$

$$\boxed{\Rightarrow AB = AC = \sqrt{\frac{b^4}{16a^2} - \frac{b}{2a}}; BC = 2\sqrt{-\frac{b}{2a}}}$$

Do vậy ở đây với các ý a, b ta chỉ cần sử dụng hai công thức này. Đây là hai công thức quan trọng, việc nhớ công thức để áp dụng là điều cần thiết!

Bài toán 10: Tìm tất cả các giá trị của tham số *m* để đồ thị hàm số các giá trị thực của tham số *m* để đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$, $(a \neq 0)$ có ba điểm cực trị tạo thành tam giác

a. nhận gốc tọa độ *O* là trọng tâm.

b. nhận gốc tọa độ *O* làm trực tâm.

c. nhận gốc tọa độ *O* làm tâm đường tròn ngoại tiếp.

Lời giải tổng quát

a. Nhận gốc tọa độ *O* làm trọng tâm.

a. Ở công thức vừa nhắc lại ở bài toán 9, ta có tọa độ các điểm *A, B, C* thì chỉ cần áp dụng công thức $x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}; y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$ (với *G* là trọng tâm tam giác *ABC*).

Lúc này ta có $\begin{cases} 0 + \left(-\sqrt{-\frac{b}{2a}}\right) + \sqrt{-\frac{b}{2a}} = 3.0 \\ c + \left(-\frac{b^2}{4a}\right) + c + \left(-\frac{b^2}{4a}\right) + c = 3.0 \end{cases} \Rightarrow -\frac{b^2}{2a} + 3c = 0$

$\Leftrightarrow \boxed{b^2 - 6ac = 0}$

STUDY TIP:
Với những dạng toán này, ta lưu ý ta luôn có tam giác ABC cân tại A, nên ta chỉ cần tìm một điều kiện là có đáp án của bài toán.

b. Nhận gốc tọa độ O làm trực tâm.

Do tam giác *ABC* cân tại *A*, mà *A* nằm trên trục *Oy* nên *AO* luôn vuông góc với *BC*. Do vậy để *O* là trực tâm của tam giác *ABC* thì ta chỉ cần tìm điều kiện để $OB \perp AC$ hoặc $OC \perp AB$.

$OB \perp AC \Leftrightarrow \overrightarrow{OB}.\overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow \frac{b}{2a} + \frac{b^4}{16a^2} - \frac{b^2c}{4a} = 0 \Leftrightarrow b^4 + 8ab - 4b^2c = 0$

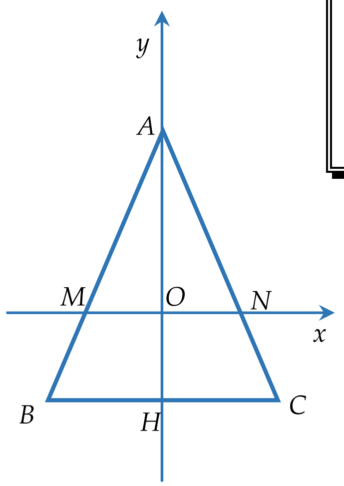
$\Leftrightarrow \boxed{b^3 + 8a - 4ac = 0}$

c. Nhận O làm tâm đường tròn ngoại tiếp.

Để tam giác *ABC* nhận tâm *O* làm tâm đường tròn ngoại tiếp thì $OA = OB = OC$. Mà ta luôn có $OB = OC$, do vậy ta chỉ cần tìm điềuk iện cho

$OA = OB \Leftrightarrow c^2 = -\frac{b}{2a} + \frac{b^4}{16a^2} - \frac{2b^2c}{4a} + c^2 \Leftrightarrow b^4 - 8ab^2c - 8ab = 0$

$\Leftrightarrow \boxed{b^3 - 8a - 8abc = 0}$



Bài toán 11: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$, $(a \neq 0)$ có ba điểm cực trị tạo thành tam giác sao cho trục hoành chia tam giác ABC thành hai phần có diện tích bằng nhau.

Lời giải tổng quát

Gọi M, N là giao điểm của AB, AC với trục hoành, kí hiệu như hình vẽ

Ta có $\Delta ANM \sim \Delta ACB \Rightarrow \dfrac{S_{AMN}}{S_{ABC}} = \left(\dfrac{OA}{AH}\right)^2 = \dfrac{1}{2}$ (Do trục hoành chia tam giác ABC thành hai phần có diện tích bằng nhau).

$\Rightarrow AH = \sqrt{2}OA \Leftrightarrow \boxed{b^2 = 4\sqrt{2}|ac|}$

3.2 Xét hàm số bậc ba có dạng $y = ax^3 + bx^2 + cx + d, (a \neq 0)$.

Có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$, hàm số có hai điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' = b^2 - 3ac > 0$.

Bài toán 1: Viết phương trình đi qua hai điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d, (a \neq 0)$.

Lời giải tổng quát

Giả sử hàm bậc ba $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, (a \neq 0)$ có hai điểm cực trị là $x_1; x_2$. Khi đó thực hiện phép chia $f(x)$ cho $f'(x)$ ta được $f(x) = Q(x).f'(x) + Ax + B$.

Khi đó ta có $\begin{cases} f(x_1) = Ax_1 + B \\ f(x_2) = Ax_2 + B \end{cases}$ (Do $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$).

Vậy phương trình đi qua hai điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số $y = f(x)$ có dạng $y = Ax + B$.

STUDY TIP:
Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số bậc ba biểu diễn theo y′; y″; y là
$\Rightarrow g(x) = y - \dfrac{y'.y''}{18a}$

Đến đây ta quay trở về với bài toán toán 1, vậy nhiệm vụ của chúng ta là đi tìm số dư đó một cách tổng quát.

Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$; $y'' = 6ax + 2b$.

Xét phép chia y cho y' thì ta được:

$y = y'.\left(\dfrac{1}{3}x + \dfrac{b}{9a}\right) + g(x)$ $(*)$, ở đây $g(x)$ là phương trình đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số bậc ba.

Tiếp tục ta có $(*) \Leftrightarrow y = y'.\dfrac{3ax + b}{9a} + g(x) \Leftrightarrow y = y'.\dfrac{6ax + 2b}{18a} + g(x)$

$\Leftrightarrow y = y'.\dfrac{y''}{18a} + g(x)$ $\boxed{\Rightarrow g(x) = y - \dfrac{y'.y''}{18a}}$

Sau đây tôi xin giới thiệu một cách bấm máy tính để tìm nhanh phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số bậc ba như sau:
Trước tiên ta xét ví dụ đơn giản:

Ví dụ 1: Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 + 2x^2 - 3x + 1$ là:

A. $26x + 9y - 15 = 0$ **B.** $-25x + 9y - 15 = 0$

C. $26x - 9y + 15 = 0$ **D.** $25x - 9y + 15 = 0$

Đáp án A.

Lời giải

Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số xác định bởi: $g(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 1 - (3x^2 + 4x - 3).\frac{6x+4}{18}$

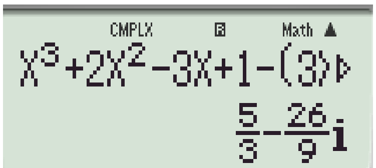
Sử dụng máy tính

Sử dụng tính toán với số phức để giải quyết bài toán.

Chuyển máy tính sang chế độ tính toán với số phức bằng cách nhập: $\boxed{\text{MODE}} \rightarrow \boxed{\text{2:CMPLX}}$

Nhập vào máy tính biểu thức $g(x)$ như sau:

$$X^3 + 2X^2 - 3X + 1 - (3X^2 + 4X - 3).\frac{6X+4}{18}$$



Ấn $\boxed{\text{CALC}}$, gán X bằng i (ở máy tính i là nút $\boxed{\text{ENG}}$) khi đó máy hiện: $\frac{5}{3} - \frac{26}{9}i$.

Vậy phương trình đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho là $y = \frac{5}{3} - \frac{26}{9}x \Leftrightarrow 26x + 9y - 15 = 0$.

Tiếp theo ta có một bài tham số.

Ví dụ 2: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 3(1-m)x + 1 + 3m$, tìm m sao cho đồ thị hàm số có điểm cực đại, cực tiểu, đồng thời tìm đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho.

A. $m \ge 0$; $\Delta: 2mx + y - 2m - 2 = 0$ **B.** $m > 0$; $\Delta: 2mx + y - 2m - 2 = 0$

C. $m < 0$; $\Delta: y = 202 - 200x$ **D.** $m \ge 0$; $\Delta: y = 202 - 200x$

Đáp án B

Lời giải

Ta có $y' = 3x^2 - 6x + 3(1-m)$, $y'' = 6x - 6$.

Để đồ thị hàm số có điểm cực đại, cực tiểu thì $\Delta' = 3^2 - 9.(1-m) > 0 \Leftrightarrow m > 0$.

Với $m > 0$ thì ta thực hiện:

STUDY TIP:
Với những dạng toán này, ta lưu ý rằng trước tiên, ta cần tìm điều kiện để hàm số có hai cực trị.

Chuyển máy tính sang chế độ $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{\text{2:CMPLX}}$

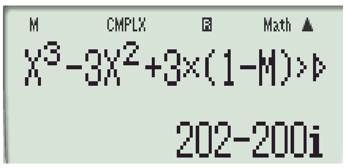
Nhập vào máy tính biểu thức $y - y'\frac{y''}{18a}$ ta có

$$X^3 - 3X^2 + 3(1-M)X + 1 + 3M - (3X^2 - 6X + 3(1-M))\frac{6X-6}{18}$$

Ấn $\boxed{\text{CALC}}$

Máy hiện X? nhập i =

Máy hiện M? nhập 100 =



Khi đó máy hiện kết quả là $202 - 200i$

Ta thấy $202 - 200i = 2.100 + 2 - 2.100.i \Rightarrow y = 2m + 2 - 2mx$

Vậy phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho có dạng $2mx + y - 2m - 2 = 0$.

Ta rút ra kết luận về cách làm dạng toán viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm bậc ba này như sau:

Bước 1: Xác định $y';y''$.

Bước 2: Chuyển máy tính sang chế độ tính toán với số phức:

MODE $\rightarrow$ 2:CMPLX

Nhập biểu thức $y-y'.\dfrac{y''}{18a}$.

Chú ý:

Nếu bài toán không chứa tham số thì ta chỉ sử dụng biến X trong máy, tuy nhiên nếu bài toán có thêm tham số, ta có thể sử dụng các biến bất kì trong máy để biểu thị cho tham số đã cho, ở trong sách này ta quy ước biến M để dễ định hình.

Bước 3: Gán giá trị.

Ấn CALC, gán X với i, gán M với 100

Lúc này máy hiện kết quả, từ đó tách hệ số và i để đưa ra kết quả cuối cùng, giống như trong hai ví dụ trên.

STUDY TIP:
Với bước cuối cùng, ta cần có kĩ năng khai triển đa thức sử dụng máy tính cầm tay, do khuôn khổ của sách nên tôi không thể giới thiệu vào sách, do vậy mong quý độc giả đọc thêm về phần này.

Bài toán 2: Viết phương trình đi qua hai điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d,\left(a\neq 0\right)$.

3.3 Xét hàm phân thức.

Trước tiên ta xét bài toán liên quan đến cực trị hàm phân thức nói chung. Ta có một kết quả khá quan trọng như sau:

Xét hàm số dạng $f\left(x\right)=\dfrac{u\left(x\right)}{v\left(x\right)}$ xác định trên D

thì ta có $f'\left(x\right)=\dfrac{u'\left(x\right).v\left(x\right)-u\left(x\right).v'\left(x\right)}{v^2\left(x\right)}$.

Điểm cực trị của hàm số này là nghiệm của phương trình

$$f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\dfrac{u'\left(x\right).v\left(x\right)-u\left(x\right).v'\left(x\right)}{v^2\left(x\right)}=0$$

$$\Leftrightarrow u'\left(x\right).v\left(x\right)-u\left(x\right).v'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\boxed{\dfrac{u\left(x\right)}{v\left(x\right)}=\dfrac{u'\left(x\right)}{v'\left(x\right)}}$$

STUDY TIP:
Lưu ý công thức $\dfrac{u(x)}{v(x)}=\dfrac{u'(x)}{v'(x)}$ để giải quyết các bài toán một cách nhanh gọn hơn.

Nhận xét: *Biểu thức trên được thỏa mãn bởi các giá trị là cực trị của hàm số đã cho. Do đó, thay vì tính trực tiếp tung độ của các điểm cực trị, ta chỉ cần thay vào biểu thức đơn giản hơn sau khi đã lấy đạo hàm cả tử lẫn mẫu. Vận dụng tính chất này, ta giải quyết được nhiều bài toán liên quan đến điểm cực trị của hàm phân thức.*

Ví dụ: Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{a'x+b'},a\neq 0,a'\neq 0$.

Theo công thức vừa nêu ở trên thì ta lần lượt tìm biểu thức đạo hàm của tử số và mẫu số.

Suy ra $\boxed{y=\dfrac{2ax+b}{a'}}$ là phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị (nếu có) của đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{a'x+b'},a\neq 0,a'\neq 0$.

Bài tập rèn luyện kỹ năng

I. Các dạng tính toán thông thường liên quan đến cực trị

Câu 1: Số điểm cực đại của đồ thị hàm số $y=x^4+100$ là:

A. 0 **B.** 1 **C.** 3 **D.** 2

(Trích đề thi thử THPT chuyên Trần Phú- Hải Phòng)

Câu 2: Hàm số $y=x^4+2x^2+2017$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 1 **B.** 2 **C.** 0 **D.** 3

(Trích đề thi thử THPT Triệu Sơn 2)

Câu 3: Cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3+4x^2-8x+5$ có hai điểm cực trị là x_1,x_2. Hỏi tổng x_1+x_2 là bao nhiêu?

A. $x_1+x_2=8$ **B.** $x_1+x_2=-8$

C. $x_1+x_2=5$ **D.** $x_1+x_2=-5$

(Trích đề thi thử THPT Triệu Sơn 2)

Câu 4: Hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-1)^2(x-3)$. Phát biển nào sau đây là đúng?

A. Hàm số có một điểm cực đại

B. Hàm số có hai điểm cực trị

C. Hàm số có đúng 1 điểm cực trị

D. Hàm số không có điểm cực trị

(Trích đề thi thử THPT chuyên ĐHSP HN)

Câu 5: Đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+1$ có điểm cực đại là:

A. $I(2;-3)$ **B.** $I(0;1)$

C. $I(0;2)$ **D.** Đáp án khác

(Trích đề thi thử THPT Kim Thành – Hải Dương)

Câu 6: Hàm số $y=x^4+2x^2+2017$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 1 **B.** 2 **C.** 0 **D.** 3

(Trích đề thi thử THPT Triệu Sơn 2)

Câu 7: Cho hàm số $y=x^3-3x^2+3x+1$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x=1$

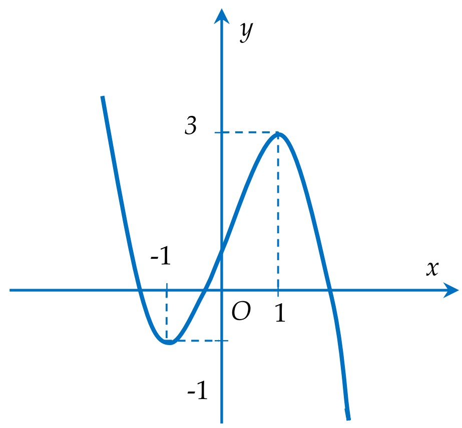
B. Hàm số đồng biến trên $(1;+\infty)$ và nghịch biến trên $(-\infty;1)$

C. Hàm số đạt cực đại tại điểm $x=1$

D. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$

(Trích đề thi thử THPT Kim Thành – Hải Dương)

Câu 8: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên, các khẳng định sau khẳng đinh nào là đúng?



A. Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất bằng -1 và đạt giá trị lớn nhất bằng 3

B. Đồ thị hàm số có điểm cực tiểu $A(-1;-1)$ và điểm cực đại $B(1;3)$

C. Hàm số có giá trị cực đại bằng 1

D. Hàm số đạt cực tiểu tại $A(-1;-1)$ và cực đại tại $B(1;3)$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Lam Sơn Thanh Hóa)

Câu 9: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		+	||	+		-	||	+	
y	3 ↗		$+\infty$ || $-\infty$	↗	2	↘	$-\infty$ || $-\infty$	↗	-3

Hỏi khẳng định nào dưới đây là khẳng định **sai**?

A. Hàm số không có đạo hàm tại $x=0$ nhưng vẫn đạt cực trị tại $x=0$

B. Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x=1$

C. Đồ thị hàm số có hai tiệm cận đứng là các đường thẳng $x=-1$ và $x=1$

D. Đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $y=-3$ và $y=3$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Hạ Long lần I)

Câu 10: Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Hàm số $y=2x-\frac{1}{x+1}$ có hai điểm cực trị.

B. Hàm số $y=3x^3+2016x+2017$ có hai điểm cực trị.

C. Hàm số $y=\frac{2x+1}{x-1}$ có một điểm cực trị.

D. Hàm số $y=-x^4-3x^2+2$ có một điểm cực trị.

(Trích đề thi thử THPT Kim Liên)

Câu 11: Số điểm cực trị của hàm số $y=|x|^3-4x^2+3$ bằng:

A. 2. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 4.

(Trích đề thi thử THPT Kim Liên)

Câu 12: Hàm số $y=x^4+x^2+1$ đạt cực tiểu tại:

A. $x=-1$. **B.** $x=0$.
C. $x=-2$. **D.** $x=1$.

(Trích đề thi thử THPT Kim Liên)

Câu 13: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	||	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	-3	↗	0	↘	-3	↗	$+\infty$

Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng ?

A. Hàm số có đúng hai cực trị
B. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng -1 hoặc 1
C. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 0 và giá trị nhỏ nhất bằng -3
D. Hàm số đạt cực đại tại $x=0$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Vị Thanh – Hậu Giang)

Câu 14: Hàm số $y=x^3-3x^2-1$ đạt cực trị đại tại các điểm nào sau đây?

A. $x=\pm 2$ **B.** $x=\pm 1$
C. $x=0; x=2$ **D.** $x=0; x=1$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Nguyễn Trãi – Hải Dương)

Câu 15: Hệ thức liên hệ giữa giá trị cực đại $y_{CĐ}$ và giá trị cực tiểu y_{CT} của hàm số $y=x^3-2x$ là:

A. $y_{CT}+y_{CĐ}=0$ **B.** $2y_{CT}=3y_{CĐ}$
C. $y_{CT}=2y_{CĐ}$ **D.** $y_{CT}=y_{CĐ}$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Vĩnh Phúc lần 3)

Câu 16: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	0	+	
y	$+\infty$	↘	1	↗	2	↘	1	↗	$+\infty$

Khẳng định nào sau đây là sai?

A. $M(0;\ 2)$ được gọi là điểm cực đại của hàm số
B. $f(-1)$ được gọi là giá trị cực tiểu của hàm số
C. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-1;\ 0)$ và $(1;+\infty)$
D. $x_0=1$ được gọi là điểm cực tiểu của hàm số

(Trích đề thi thử THPT chuyên Vĩnh Phúc lần 3)

Câu 17: Cho hàm số $y=x^3-6x^2+9x-2\,(C)$. Đường thẳng đi qua điểm $A(-1;\ 1)$ và vuông góc với đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của (C) là:

A. $y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}$ **B.** $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}$
C. $y=x+3$ **D.** $x-2y-3=0$

Câu 18: Tính khoảng cách giữa các điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y=2x^4-\sqrt{3}x^2+1$.

A. $2\sqrt[4]{3}$ **B.** $\sqrt{3}$ **C.** $2\sqrt{3}$ **D.** $\sqrt[4]{3}$

(Trích đề thi thử THPT chuyên ĐHSP lần 2)

Câu 19: Tìm tất cả các điểm cực đại của hàm số $y=-x^4+2x^2+1$.

A. $x=\pm 1$ **B.** $x=-1$ **C.** $x=1$ **D.** $x=0$

(Trích đề thi thử THPT chuyên ĐHSP lần 2)

Câu 20: Hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
y'		+	0	$-$	||	+	
y	$-\infty$	↗	3	↘	0	↗	$+\infty$

A. Hàm số đã cho có hai điểm cực trị.
B. Hàm số đã cho không có giá trị cực đại.
C. Hàm số đã cho có đúng một điểm cực trị.
D. Hàm số đã cho không có giá trị cực tiểu.

(Trích đề thi thử THPT chuyên ĐH Vinh lần 1)

Câu 21: Cho hàm số $y=x^4-\dfrac{2}{3}x^3-x^2$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Hàm số có giá trị cực tiểu là 0.
B. Hàm số có hai giá trị cực tiểu là $-\dfrac{2}{3}$ và $-\dfrac{5}{48}$.
C. Hàm số chỉ có một giá trị cực tiểu.
D. Hàm số có giá trị cực tiểu là $-\dfrac{2}{3}$ và giá trị cực đại là $-\dfrac{5}{48}$.

(Trích đề thi thử THPT chuyên ĐH Vinh lần 1)

Câu 22: Cho hàm số $y=(x-1)(x+2)^2$. Trung điểm của đoạn thẳng nối hai điểm cực trị của đồ thị hàm số nằm trên đường thẳng nào dưới đây?

A. $2x+y+4=0$. **B.** $2x+y-4=0$.
C. $2x-y-4=0$. **D.** $2x-y+4=0$.

(Trích đề thi thử THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu)

Câu 23: Cho hàm số f có đạo hàm là $f'(x)=x(x-1)^2(x+2)^3$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số f là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

(Trích đề thi thử "Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ lần 7 & THPT chuyên KHTN lần 3")

Câu 24: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$		0		-4		$+\infty$

Khẳng định nào sau đây là khẳng định **SAI** ?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

B. Hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$.

C. Hàm số đạt cực tiểu tại $x=-2$.

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2;0)$.

(Trích đề thi thử THPT chuyên Lê Quý Đôn)

Câu 25: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-1)^2(x+2)$ xác định trên $\mathbb{R}$. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

A. Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2;+\infty)$.

B. Hàm số $y=f(x)$ đạt cực đại tại $x=-2$.

C. Hàm số $y=f(x)$ đạt cực tiểu tại $x=1$.

D. Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-2;1)$.

(Trích đề thi thử THPT chuyên Lê Quý Đôn)

Câu 26: Kết luận nào sau đây về cực trị của hàm số $y=x5^{-x}$ là đúng?

A. Hàm số có điểm cực đại là $x=\dfrac{1}{\ln 5}$.

B. Hàm số không có cực trị.

C. Hàm số có điểm cực tiểu là $x=\dfrac{1}{\ln 5}$.

D. Hàm số có điểm cực đại là $x=\ln 5$.

(Trích đề thi thử THPT Yên Lạc – Vĩnh Phúc)

II. Tìm điều kiện để hàm số có cực trị thỏa mãn điều kiện cho trước.

Câu 27: Với giá trị nào của m thì hàm số $y=x^3-m^2x^2-(4m-3)x-1$ đạt cực đại tại $x=1$?

A. $m=1$ và $m=-3$ **B.** $m=1$
C. $m=-3$ **D.** $m=-1$

(Trích đề thi thử Sở GD&ĐT Hà Tĩnh)

Câu 28: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=x^3-3mx^2+3m+1$ có 2 điểm cực trị.

A. $m>0$ **B.** $m<0$
C. $m\ge 0$ **D.** $m\ne 0$

(Trích đề thi thử Sở GD&ĐT Nam Định)

Câu 29: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=x^3-3x^2+mx-1$ có hai điểm cực trị x_1,x_2 thỏa mãn $x_1^2+x_2^2=3$.

A. -3 **B.** 3

C. $-\dfrac{3}{2}$ **D.** $\dfrac{3}{2}$

(Trích đề thi thử Sở GD&ĐT Nam Định)

Câu 30: Tìm m để hàm số: $y=\dfrac{1}{3}x^3-mx^2+(m^2+m-1)x+1$ đạt cực trị tại 2 điểm x_1,x_2 thỏa mãn $|x_1+x_2|=4$.

A. $m=\pm 2$ **B.** $m=-2$
C. Không tồn tại m **D.** $m=2$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Vĩnh Phúc lần 3)

Câu 31: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=x^3+(m-1)x^2-3mx+1$ đạt cực trị tại điểm $x_0=1$.

A. $m=-1$ **B.** $m=1$
C. $m=2$ **D.** $m=-2$

Câu 32: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=x^4+2mx^2+m^2+m$ có đúng một điểm cực trị.

A. $m\ge 0$ **B.** $m>0$
C. $m\le 0$ **D.** $m<0$

Câu 33: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số a sao cho hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{2}x^2+ax+1$ đạt cực trị tại x_1,x_2 thỏa mãn: $(x_1^2+x_2+2a)(x_2^2+x_1+2a)=9$.

A. $a=2$ **B.** $a=-4$ **C.** $a=-3$ **D.** $a=-1$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Thái Bình lần 3)

Câu 34: Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số $y=4x^3+mx^2-12x$ đạt cực tiểu tại điểm $x=-2$.

A. $m=-9$ **B.** $m=2$
C. Không tồn tại m **D.** $m=9$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Thái Bình lần 3)

Câu 35: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=mx^4+(m^2-2)x^2+2$ có hai cực tiểu và một cực đại.

A. $m<-\sqrt{2}$ hoặc $0<m<\sqrt{2}$.

B. $-\sqrt{2}<m<0$.

C. $m>\sqrt{2}$.

D. $0<m<\sqrt{2}$.

(Trích đề thi thử THPT Phan Đình Phùng – Hà Nội)

Câu 36: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y=x^4-2mx^2+2m$ có ba điểm cực trị tạo thành tam giác có diện tích bằng 1.

A. $m=\frac{1}{\sqrt[5]{4}}$ **B.** $m=3$

C. $m=-1$ **D.** $m=1$

(Trích đề thi thử Sở GD&ĐT Nam Định)

Câu 37: Cho hàm số $y=x^3-3mx+1(1)$. Cho $A(2;3)$, tìm m để đồ thị hàm số (1) có hai điểm cực trị B và C sao cho tam giác ABC cân tại A.

A. $m=\frac{-1}{2}$ **B.** $m=\frac{-3}{2}$ **C.** $m=\frac{1}{2}$ **D.** $m=\frac{3}{2}$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Nguyễn Trãi – Hải Dương)

Câu 38. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y=x^4-2mx^2+2m+m^4$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác đều.

A. $m=\sqrt[3]{3}$ **B.** $m=1-\sqrt[3]{3}$

C. $m=1+\sqrt[3]{3}$ **D.** $m=-\sqrt[3]{3}$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Vị Thanh – Hậu Giang)

Câu 39: Tìm m để đồ thị hàm số $y=x^4+2(m-1)x^2+2m-5$ có ba điểm cực trị lập thành tam giác đều?

A. $m=1$. **B.** $m=1-\sqrt[3]{3}$.

C. $m=1+\sqrt[3]{3}$. **D.** $m=1-\sqrt{3}$.

(Trích đề thi thử THPT Công Nghiệp – Hòa Bình)

Câu 40: Cho hàm số $y=x^4-2mx^2+m^2-2$. Tìm m để hàm số có 3 điểm cực trị và các điểm cực trị của đồ thị hàm số là ba đỉnh của một tam giác vuông cân?

A. $m=1$. **B.** $m=-1$. **C.** $m=2$. **D.** $m=-2$.

(Trích đề thi thử THPT Trần Hưng Đạo – Ninh Bình)

Câu 41: Cho hàm số $y=x^4-mx^2+2m-1$ có đồ thị (C_m). Tìm tất cả các giá trị của m để (C_m) có 3 điểm cực trị cùng với gốc tọa độ tạo thành bốn đỉnh của một hình thoi.

A. $m=1+\sqrt{2}$ hoặc $m=-1+\sqrt{2}$

B. Không có giá trị m

C. $m=4+\sqrt{2}$ hoặc $m=4-\sqrt{2}$

D. $m=2+\sqrt{2}$ hoặc $m=2-\sqrt{2}$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Phan Bội Châu)

Câu 42: Cho hàm số $y=x^4-2mx^2+2m+m^4$. Với giá trị nào của m thì đồ thị (C_m) có 3 điểm cực trị, đồng thời 3 điểm cực trị đó tạo thành một tam giác có diện tích bằng 2.

A. $m=\sqrt[5]{4}$ **B.** $m=16$

C. $m=\sqrt[5]{16}$ **D.** $m=-\sqrt[3]{16}$

(Trích đề thi thử THPT Trần Hưng Đạo – Ninh Bình)

Câu 43: Đường thẳng đi qua điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số $y=x^3-3mx+2$ cắt đường tròn tâm $I(1;1)$, bán kính bằng 1 tại 2 điểm phân biệt A,B sao cho diện tích tam giác IAB đạt giá trị lớn nhất khi m có giá trị là:

A. $m=\frac{2\pm\sqrt{3}}{2}$ **B.** $m=\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$

C. $m=\frac{2\pm\sqrt{5}}{2}$ **D.** $m=\frac{2\pm\sqrt{3}}{3}$

(Trích đề thi thử THPT Trần Hưng Đạo – Ninh Bình)

Câu 44: Cho hàm số

$$y=-2x^3+(2m-1)x^2-(m^2-1)x+2.$$

Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số đã cho có hai điểm cực trị.

A. 4 . **B.** 5 . **C.** 3 . **D.** 6

(Trích đề thi thử THPT Phan Đình Phùng)

Câu 45: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=x^3+x^2-(2m+1)x+4$ có đúng hai cực trị.

A. $m<\frac{4}{3}$. **B.** $m>-\frac{2}{3}$. **C.** $m<-\frac{2}{3}$. **D.** $m>-\frac{4}{3}$.

(Trích đề thi thử THPT Phan Đình Phùng)

Câu 46: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}(m+5)x^2+mx$ có cực đại, cực tiểu và $|x_{CD}-x_{CT}|=5$.

A. $m=0$ **B.** $m=-6$

C. $m\in\{6;0\}$ **D.** $m\in\{0;-6\}$

(Trích đề thi thử THPT chuyên ĐHSP lần 2)

Câu 47: Biết đồ thị hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có 2 điểm cực trị là $(-1;18)$ và $(3;-16)$. Tính $a+b+c+d$.

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

(Trích đề thi thử THPT chuyên KHTN lần 3)

Câu 48: Với giá trị nào của của tham số thực m thì $x=1$ là điểm cực tiểu của hàm số $y=\frac{1}{3}x^3+mx^2+(m^2+m+1)x$?

A. $m\in\{-2;-1\}$. **B.** $m=-2$.

C. $m=-1$. **D.** không có m.

(Trích đề thi thử THPT chuyên KHTN lần 3)

Câu 49: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số: $y=-(m^2+5m)x^3+6mx^2+6x-6$ đạt cực tiểu tại $x=1$

A. Không có giá trị thực nào của m thỏa mãn yêu cầu đề bài.

B. $m=1$

C. $m\in\{-2;1\}$

D. $m=-2$

(Trích đề thi thử THPT Trần Hưng Đạo – Ninh Bình)

Câu 50: Cho hàm số $f(x)=x^2+\ln(x-m)$. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hàm số đã cho có đúng hai điểm cực trị.

A. $|m|>\sqrt{2}$. **B.** $m>\frac{9}{4}$.

C. $m < -\sqrt{2}$. D. $m > \sqrt{2}$.

(Trích đề thi thử THPT chuyên Lê Quý Đôn)

Câu 51: Cho hàm số $f(x) = 3mx^4 + 8mx^3 - 12(m+1)x^2$. Tập hợp tất cả giá trị thực của tham số m để hàm số đã cho có cực tiểu là

A. $(-\infty;-1)\cup(-1;-\frac{2}{3})\cup(0;+\infty)$. B. $(-\infty;-\frac{2}{3})\cup(0;+\infty)$.

C. $(-\infty;-1)\cup(-1;-\frac{2}{3}]\cup(0;+\infty)$. D. $(-\frac{2}{3};0)$.

(Trích đề thi thử THPT chuyên Lê Quý Đôn)

Câu 52: Cho đồ thị hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + c$ có hai điểm cực trị là $A(0;1)$ và $B(-1;2)$. Tính giá trị của $a+b+c$.

A. 0. B. 2. C. 4. D. 6.

(Trích đề thi thử THPT chuyên Lê Quý Đôn)

Câu 53: Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = (1-m)x^3 - 3x^2 + 3x - 5$ có cực trị?

A. $m < 1$ B. $m > -1$

C. $0 < m \neq 1$ D. $m > 0$

(Trích đề thi thử THPT Yên Lạc – Vĩnh Phúc)

Câu 54: Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 + (2m-1)x - 1$. Tìm mệnh đề sai.

A. $\forall m < 1$ thì hàm số có hai điểm cực trị

B. Hàm số luôn có cực đại và cực tiểu

C. $\forall m \neq 1$ thì hàm số có cực đại và cực tiểu

D. $\forall m > 1$ thì hàm số có cực trị

(Trích đề thi thử THPT chuyên Phan Bội Châu)

Câu 55: Tìm m để hàm số $y = mx^4 + (m^2-9)x^2 + 1$ có hai điểm cực đại và một điểm cực tiểu.

A. $-3 < m < 0$ B. $0 < m < 3$

C. $m < -3$ D. $3 < m$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Phan Bội Châu)

Câu 56: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $9^x - 2m.3^x + 2m = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1;x_2$ sao cho $x_1 + x_2 = 3$ là

A. $m = -\frac{3}{2}$ B. $m = \frac{27}{2}$

C. $m = 3\sqrt{3}$ D. $m = \frac{9}{2}$.

(Trích đề thi thử THPT Ngô Gia Tự - Vĩnh Phúc)

Câu 57: Biết $A(-1;0), B(3;-4)$ là các điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d\,(a \neq 0)$. Tính giá trị của hàm số tại $x = 1$.

A. $y(1) = 2$ B. $y(1) = -2$

C. $y(1) = 1$ D. $y(1) = 3$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Sơn La lần 1)

Câu 58: Cho hàm số $y = \frac{mx^2 - 2x + m - 1}{2x+1}$. Đường thẳng nối hai điểm cực trị của đồ thị hàm số này vuông góc với đường phân giác của góc phần tư thứ nhất khi m bằng

A. 0. B. 1. C. −1. D. $\frac{1}{2}$.

(Trích đề thi thử tạp chí Toán học & Tuổi trẻ lần 7)

Câu 59: Đường thẳng nối điểm cực đại với điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = x^3 - x + m$ đi qua điểm $M(3;-1)$ khi m bằng

A. 1. B. −1.

C. 0. D. một giá trị khác.

(Trích đề thi thử tạp chí Toán học & Tuổi trẻ lần 7)

Câu 60: Cho hàm số $f(x) = x + m + \frac{n}{x+1}$ (với m, n là các tham số thực). Tìm m, n để hàm số đạt cực đại tại $x = -2$ và $f(-2) = -2$.

A. Không tồn tại giá trị của m, n.

B. $m = -1;\ n = 1$.

C. $m = n = 1$.

D. $m = n = -2$.

(Trích đề thi thử THPT chuyên Hưng Yên lần 2

Câu 61: Giả sử đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m+6)x + 1$ có hai cực trị. Khi đó đường thẳng qua hai điểm cực trị có phương trình là:

A. $y = 2x + m^2 + 6m + 1$

B. $y = 2(-m^2 + m + 6)x + m^2 + 6m + 1$

C. $y = -2x + m^2 + 6m + 1$

D. Tất cả đều sai

(Trích đề thi thử THPT Phạm Văn Đồng)

Câu 62: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để ba điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^4 + (6m-4)x^2 + 1 - m$ là ba đỉnh của một tam giác vuông:

A. $m = \frac{2}{3}$ B. $m = \frac{1}{3}$ C. $m = -1$ D. $m = \sqrt[3]{3}$

(Trích đề thi thử THPT Nguyễn Đình Chiểu)

Câu 63: Với giá trị nào của m thì đồ thị hàm số $y = x^4 - 2m^2x^2 + 1$ có ba cực trị tạo thành tam giác vuông cân

A. $m = 0$ B. $m = 1$ C. $m = \pm 1$ D. $m = \pm 2$

(Trích đề thi thử THPT Phạm Văn Đồng – Phú Yên)

Câu 64: Tìm m để $(C_m): y = x^4 - 2mx^2 + 2$ có 3 điểm cực trị là 3 đỉnh của một tam giác vuông cân:

A. $m = -4$ B. $m = -1$ C. $m = 1$ D. $m = 3$

(Trích đề thi thử THPT Quảng Xương I)

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

I. Các dạng tính toán thông thường liên quan đến cực trị

Câu 1: Đáp án A.

Lời giải: Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

$y'=4x^3$

$y'=0\Leftrightarrow x=0$

Tuy nhiên do hệ số của x^4 trong hàm số $y=x^4+100$ là $1>0$, do đó hàm số có duy nhất một điểm cực tiểu. Suy ra hàm số không có điểm cực đại.

Phân tích sai lầm: Nhiều độc giả chọn luôn B, có một điểm, do không xét kĩ xem $x=0$ là điểm cực đại hay điểm cực tiểu của hàm số.

Câu 2: Đáp án A.

Cách 1:

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

$y'=4x^3+4x$

$y'=0\Leftrightarrow 4x\left(x^2+1\right)=0\Leftrightarrow x=0$

Vậy hàm số có 1 điểm cực trị.

Cách 2:

Xem lại **STUDY TIP** đối với hàm bậc bốn trùng phương có dạng $y=ax^4+bx^2+c\left(a\neq 0\right)$.

Nếu $ab>0$ thì hàm số có 1 điểm cực trị là $x=0$.

Nhận thấy $1>0$ và $2>0$.

Vậy hàm số có 1 điểm cực trị.

Câu 3: Đáp án B.

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

$y'=x^2+8x-8$

Vì hàm số có hai điểm cực trị là $x_1,\, x_2\Rightarrow x_1,\, x_2$ là nghiệm của phương trình: $x^2+8x-8=0$.

Theo định lí Vi – ét ta có: $x_1+x_2=-8$

Câu 4: Đáp án B.

Ta thấy $f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=3\end{array}\right.$

Đến đây có nhiều độc giả kết luận luôn hàm số có hai điểm cực trị, tuy nhiên đó là kết luận sai lầm, bởi khi qua $x=1$ thì $f'\left(x\right)$ không đổi dấu, bởi $\left(x-1\right)^2\geq 0,\forall x.$

Do vậy hàm số chỉ có đúng một điểm cực trị là $x=3$.

Câu 5: Đáp án B.

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

$y'=3x^2-6x$

$y'=0\Leftrightarrow 3x\left(x-2\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy điểm cực đại của đồ thị hàm số là $I\left(0;1\right)$.

Tư duy nhanh: Nhận thấy hàm số đã cho có hệ số $a=3>0$ và có hai điểm cực trị nên đồ thị hàm số có dạng **N** (mẹo). Lúc này ta suy ra được luôn $x=0$ là điểm cực đại của hàm số, suy ra điểm cực đại của đồ thị hàm số là $I\left(0;1\right)$.

Câu 6: Đáp án A.

Nhận thấy đây là hàm bậc bốn trùng phương có hệ số *a, b* cùng dấu nên có duy nhất một điểm cực trị.

Câu 7: Đáp án D.

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

$y'=3x^2-6x+3$

$y'=0\Leftrightarrow 3\left(x-1\right)^2=0\Leftrightarrow x=1$

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Tuy rằng $y'=0$ tại $x=1$ nhưng $x=1$ không là cực trị của hàm số do $y'\geq 0\ \forall x\in D$.

Vậy hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Tư duy nhanh: Nhận thấy $y'=3\left(x-1\right)^2\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Nên hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 8: Đáp án B.

Chú ý: Phân biệt giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) và cực đại (cực tiểu) ở phần lý thuyết về GTLN –GTNN được tôi trình bày trong chuyên đề sau.

Phương án A. Sai: -1 là giá trị cực tiểu.

3 là giá trị cực đại.

Phương án B. Đúng.

Phương án C. Sai: Giá trị cực đại là 3.

Phương án D. Sai: Nếu nói hàm số đạt cực tiểu thì phải nói tại $x=-1$ còn $A\left(-1;-1\right)$ là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số (tương tự với $B\left(1;3\right)$).

Câu 9: Đáp án B.

Ta có: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-1;1\right\}$.

Phương án A. Đúng. Do qua $x=0$ thì y' đổi dấu từ dương sang âm nên hàm số vẫn đạt cực trị tại $x=0$.

Phương án B. Nhận thấy hàm số không đạt cực tiểu tại $x=1$ do tại $x=1$ thì hàm số không xác đinh.

Phương án C. Đúng: Do

$\lim\limits_{x\to -1} y=+\infty \Rightarrow x=-1$ là tiệm cận đứng của đồ thị.

$\lim\limits_{x\to 1} y=-\infty \Rightarrow x=1$ là tiệm cận đứng của đồ thị.

Phương án D. Đúng: Do

$\lim\limits_{x\to +\infty} y=-3 \Rightarrow y=-3$ là tiệm cận ngang của đồ thị.

$\lim\limits_{x\to -\infty} y=3 \Rightarrow y=3$ là tiệm cận ngang của đồ thị.

Câu 10: Đáp án D.

Phương án A. Sai: Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

$y'=2+\dfrac{1}{(x+1)^2}>0$ nên hàm số không có cực trị.

Phương án B. Sai: Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

$y'=9x^2+2016>0$ nên hàm số không có cực trị.

Phương án C. Sai: Hàm phân thức bậc nhất trên bậc nhất luôn không có cực trị.

Phương án D. Đúng: Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

$y'=-4x^3-6x$

$y'=0 \Leftrightarrow -2x(2x^2+3)=0 \Leftrightarrow x=0$

Vậy hàm số có một điểm cực trị.

(Hoặc dùng **STUDY TIP** cho hàm bậc bốn trùng phương ta thấy $-1<0;\ 3<0 \Rightarrow (-1).(-3)>0 \Rightarrow$ Hàm số có một điểm cực trị là $x=0$)

Câu 11: Đáp án C.

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

Đặt $|x|=t\ \ (t\ge 0)$

Khi đó $y=t^3-4t^2+3$

$y'=3t^2-8t$

$y'=0 \Leftrightarrow t(3t-8)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0\ (t/m) \Rightarrow x=0 \\ t=\dfrac{8}{3}\ (t/m) \Rightarrow x=\pm\dfrac{8}{3} \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\frac{8}{3}$		0		$\frac{8}{3}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	$-\frac{175}{27}$	↗	3	↘	$-\frac{175}{27}$	↗	$+\infty$

Do vậy hàm số có 3 điểm cực trị.

Câu 12: Đáp án B.

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

$y'=4x^3+2x$

$y'=0 \Leftrightarrow 2x(x^2+1)=0 \Leftrightarrow x=0$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

Vậy hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$.

Tư duy nhanh: Không dùng bảng biến thiên, ta có $a=1>0$ nên hàm số có duy nhất một điểm cực tiểu $x=0$. (Do đồ thị hàm số có dạng parabol có đỉnh hướng xuống dưới).

Câu 13: Đáp án D.

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

Dựa vào bảng biến thiên ta có:

Đáp án A. Sai: Do hàm số có 3 cực trị.

Đáp án B. Sai: Hàm số đạt cực tiểu tại $x_1=-1$ và $x_2=2$ còn hàm số có giá trị cực tiểu tương ứng là -3.

Đáp án C. Sai: Chú ý phân biệt giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) và cực đại (cực tiểu).

Đáp án D. Đúng.

Câu 14: Đáp án

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

$y'=3x^2-6x$

$$y'=0 \Leftrightarrow 3x(x-2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	-1	↘	-5	↗	$+\infty$

Vậy hàm số đạt cực trị tại $x=0; x=2$.

Tư duy nhanh: Kết luận luôn hàm số đạt cực trị tại $x=0; x=2$ do hàm bậc ba hoặc là không có cực trị, hoặc là có hai cực trị. (**STUDY TIP** đã nói).

Continue…(*Mời các em và quý thầy cô đọc trọn vẹn "Công phá Toán" để cảm nhận đầy đủ tâm huyết của Ngọc Huyền LB trong suốt 5 tháng làm việc)*

Đặt trước tại: **http://cpt.gr8.com/**

Lovebook xin chân thành cảm ơn!