

TÍCH PHÂN CỦA HÀM ẨN

BÀI TẬP

DẠNG 1: ỨNG DỤNG ĐỊNH NGHĨA, TÍNH CHẤT NGUYÊN HÀM

- Câu 1:** Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{1}{x-1}$, $f(0) = 2017$, $f(2) = 2018$.
Tính $S = f(3) - f(-1)$.
A. $S = 1$. **B.** $S = \ln 2$. **C.** $S = \ln 4035$. **D.** $S = 4$.
- Câu 2:** Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{2}{2x-1}$ và $f(0) = 1$. Giá trị của biểu thức $f(-1) + f(3)$ bằng
A. $4 + \ln 15$. **B.** $3 + \ln 15$. **C.** $2 + \ln 15$. **D.** $\ln 15$.
- Câu 3:** Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{2}{2x-1}$, $f(0) = 1$ và $f(1) = 2$. Giá trị của biểu thức $f(-1) + f(3)$ bằng
A. $4 + \ln 5$. **B.** $2 + \ln 15$. **C.** $3 + \ln 15$. **D.** $\ln 15$.
- Câu 4:** Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x) = 2x + 1$ và $f(1) = 5$. Phương trình $f(x) = 5$ có hai nghiệm x_1, x_2 . Tính tổng $S = \log_2 |x_1| + \log_2 |x_2|$.
A. $S = 1$. **B.** $S = 2$. **C.** $S = 0$. **D.** $S = 4$.
- Câu 5:** Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{3}{3x-1}$, $f(0) = 1$ và $f\left(\frac{2}{3}\right) = 2$.
Giá trị của biểu thức $f(-1) + f(3)$ bằng
A. $3 + 5 \ln 2$. **B.** $-2 + 5 \ln 2$. **C.** $4 + 5 \ln 2$. **D.** $2 + 5 \ln 2$.
- Câu 6:** Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$ và thỏa mãn $f'(x) = \frac{4}{x^2 - 4}$; $f(-3) = 0$; $f(0) = 1$ và $f(3) = 2$. Tính giá trị biểu thức $P = f(-4) + f(-1) + f(4)$.
A. $P = 3 + \ln \frac{3}{25}$. **B.** $P = 3 + \ln 3$. **C.** $P = 2 + \ln \frac{5}{3}$. **D.** $P = 2 - \ln \frac{5}{3}$.
- Câu 7:** Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-2; 1\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{1}{x^2 + x - 2}$; $f(-3) - f(3) = 0$ và $f(0) = \frac{1}{3}$. Giá trị của biểu thức $f(-4) + f(-1) - f(4)$ bằng
A. $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \ln 2$. **B.** $1 + \ln 80$. **C.** $1 + \ln 2 + \frac{1}{3} \ln \frac{4}{5}$. **D.** $1 + \frac{1}{3} \ln \frac{8}{5}$.
- Câu 8:** Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ và thỏa mãn $f'(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$; $f(-3) + f(3) = 0$ và $f\left(-\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) = 2$. Tính giá trị của biểu thức $P = f(0) + f(4)$.
A. $P = 2 + \ln \frac{3}{5}$. **B.** $P = 1 + \ln \frac{3}{5}$. **C.** $P = 1 + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{5}$. **D.** $P = \frac{1}{2} \ln \frac{3}{5}$.
- Câu 9:** Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$. Biết $f(-3) + f(3) = 0$ và $f\left(-\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) = 2$. Giá trị $T = f(-2) + f(0) + f(4)$ bằng:

A. $T = 2 + \frac{1}{2} \ln \frac{5}{9}$. **B.** $T = 1 + \frac{1}{2} \ln \frac{9}{5}$. **C.** $T = 3 + \frac{1}{2} \ln \frac{9}{5}$. **D.** $T = \frac{1}{2} \ln \frac{9}{5}$.

Câu 10: Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương, có đạo hàm liên tục trên $(0; +\infty)$ thỏa mãn $f(2) = \frac{1}{15}$ và $f'(x) + (2x+4)f^2(x) = 0$. Tính $f(1) + f(2) + f(3)$.

A. $\frac{7}{15}$. **B.** $\frac{11}{15}$. **C.** $\frac{11}{30}$. **D.** $\frac{7}{30}$.

Câu 11: Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f^6(x) \cdot f'(x) = 12x + 13$ và $f(0) = 2$. Khi đó phương trình $f(x) = 3$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 2. **B.** 3. **C.** 7. **D.** 1.

Câu 12: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x) = \sqrt{e^x + e^{-x} - 2}$, $f(0) = 5$ và $f\left(\ln \frac{1}{4}\right) = 0$. Giá trị của biểu thức $S = f(-\ln 16) + f(\ln 4)$ bằng

A. $S = \frac{31}{2}$. **B.** $S = \frac{9}{2}$. **C.** $S = \frac{5}{2}$. **D.** $f(0) \cdot f(2) = 1$.

Câu 13: Cho hàm số $f(x)$ liên tục, không âm trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, thỏa mãn $f(0) = \sqrt{3}$ và $f(x) \cdot f'(x) = \cos x \cdot \sqrt{1 + f^2(x)}$, $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Tìm giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của hàm số $f(x)$ trên đoạn $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right]$.

A. $m = \frac{\sqrt{21}}{2}$, $M = 2\sqrt{2}$. **B.** $m = \frac{5}{2}$, $M = 3$.
C. $m = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $M = \sqrt{3}$. **D.** $m = \sqrt{3}$, $M = 2\sqrt{2}$.

Câu 14: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Biết $f(0) = 1$ và $\frac{f'(x)}{f(x)} = 2 - 2x$. Tìm các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x) = m$ có hai nghiệm thực phân biệt.

A. $m > e$. **B.** $0 < m \leq 1$. **C.** $0 < m < e$. **D.** $1 < m < e$.

Câu 15: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(x) \neq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. $f'(x) = (2x+1)f^2(x)$ và $f(1) = -0,5$. Biết rằng tổng $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(2017) = \frac{a}{b}$; ($a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}$) với $\frac{a}{b}$ tối giản. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a + b = -1$. **B.** $a \in (-2017; 2017)$. **C.** $\frac{a}{b} < -1$. **D.** $b - a = 4035$.

Câu 16: Cho hàm số $f(x) \neq 0$ thỏa mãn điều kiện $f'(x) = (2x+3) \cdot f^2(x)$ và $f(0) = \frac{-1}{2}$. Biết tổng $f(1) + f(2) + \dots + f(2017) + f(2018) = \frac{a}{b}$ với $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}^*$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\frac{a}{b} < -1$. **B.** $\frac{a}{b} > 1$.
C. $a + b = 1010$. **D.** $b - a = 3029$.

Câu 17: Cho hàm số $y = f(x)$, $\forall x \geq 0$, thỏa mãn $\begin{cases} f''(x) \cdot f(x) - 2[f'(x)]^2 + xf^3(x) = 0 \\ f'(0) = 0; f(0) = 1 \end{cases}$. Tính

$f(1)$.

- A. $\frac{2}{3}$. B. $\frac{3}{2}$. C. $\frac{6}{7}$. D. $\frac{7}{6}$.

Câu 18: Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục, dương trên $\mathbb{R}$; thỏa mãn $f(0) = 1$ và $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{x}{x^2 + 1}$. Khi đó

hiệu $T = f(2\sqrt{2}) - 2f(1)$ thuộc khoảng

- A. $(2; 3)$. B. $(7; 9)$. C. $(0; 1)$. D. $(9; 12)$.

Câu 19: Khi đó $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{f(\tan t)}{\cos^2 t} dt = \int_0^1 f(x) dx$. Vậy $\int_0^1 f(x) dx = 6$. Cho hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên

$(0; +\infty)$; $y = f(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $(0; +\infty)$ và thỏa mãn $f(3) = \frac{2}{3}$ và

$[f'(x)]^2 = (x+1) \cdot f(x)$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

- A. $2613 < f^2(8) < 2614$. B. $2614 < f^2(8) < 2615$.
C. $2618 < f^2(8) < 2619$. D. $2616 < f^2(8) < 2617$.

Câu 20: Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $(0; +\infty)$ và thỏa mãn $f(1) = 1$, $f(x) = f'(x)\sqrt{3x+1}$, với mọi $x > 0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $4 < f(5) < 5$. B. $2 < f(5) < 3$.
C. $3 < f(5) < 4$. D. $1 < f(5) < 2$.

Câu 21: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $[f'(x)]^2 + f(x) \cdot f''(x) = 15x^4 + 12x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = f'(0) = 1$. Giá trị của $f^2(1)$ bằng

- A. $\frac{9}{2}$. B. $\frac{5}{2}$. C. 10. D. 8.

Câu 22: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int \frac{f(\sqrt{x+1})}{\sqrt{x+1}} dx = \frac{2(\sqrt{x+1}+3)}{x+5} + C$. Nguyên

hàm của hàm số $f(2x)$ trên tập $\mathbb{R}^+$ là:

- A. $\frac{x+3}{2(x^2+4)} + C$. B. $\frac{x+3}{x^2+4} + C$. C. $\frac{2x+3}{4(x^2+1)} + C$. D. $\frac{2x+3}{8(x^2+1)} + C$.

DẠNG 2: ÁP DỤNG ĐỊNH NGHĨA, TÍNH CHẤT, GIẢI HỆ TÍCH PHÂN

Câu 23: Cho $\int_2^5 f(x) dx = 10$. Kết quả $\int_5^2 [2 - 4f(x)] dx$ bằng:

- A. 34. B. 36. C. 40. D. 32.

Câu 24: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$, biết $\int_0^9 f(x) dx = 9$ và

$F(0) = 3$. Tính $F(9)$.

- A. $F(9) = -6$. B. $F(9) = 6$. C. $F(9) = 12$. D. $F(9) = -12$.

- Câu 25:** Cho $I = \int_0^2 f(x) dx = 3$ và $J = \int_0^2 [4f(x) - 3] dx$. Khi đó, bằng:
A. 2. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 4.
- Câu 26:** Cho $\int_2^4 f(x) dx = 10$ và $\int_2^4 g(x) dx = 5$. Tính $I = \int_2^4 [3f(x) - 5g(x)] dx$.
A. $I = 5$. **B.** $I = 15$. **C.** $I = -5$. **D.** $I = 10$.
- Câu 27:** Giả sử $\int_0^9 f(x) dx = 37$ và $\int_0^9 g(x) dx = 16$. Khi đó, $I = \int_0^9 [2f(x) + 3g(x)] dx$ bằng:
A. $I = 26$. **B.** $I = 58$. **C.** $I = 143$. **D.** $I = 122$.
- Câu 28:** Nếu $\int_1^2 f(x) dx = 3$, $\int_2^5 f(x) dx = -1$ thì $\int_1^5 f(x) dx$ bằng:
A. -2. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.
- Câu 29:** Cho $\int_1^2 f(x) dx = 1$ và $\int_2^3 f(x) dx = -2$. Giá trị của $\int_1^3 f(x) dx$ bằng:
A. 1. **B.** -3. **C.** -1. **D.** 3.
- Câu 30:** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 10]$ và $\int_0^{10} f(x) dx = 7$ và $\int_2^6 f(x) dx = 3$. Tính $P = \int_0^2 f(x) dx + \int_6^{10} f(x) dx$.
A. $P = 7$. **B.** $P = -4$. **C.** $P = 4$. **D.** $P = 10$.
- Câu 31:** Cho $\int_0^1 f(x) dx = 2$, $\int_1^2 f(x) dx = 4$, khi đó $\int_0^2 f(x) dx = ?$
A. 6. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.
- Câu 32:** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $\int_0^1 f(x) dx = 2$; $\int_1^3 f(x) dx = 6$. Tính $I = \int_0^3 f(x) dx$.
A. $I = 8$. **B.** $I = 12$. **C.** $I = 36$. **D.** $I = 4$.
- Câu 33:** Cho $\int_{-1}^2 f(x) dx = 2$ và $\int_{-1}^2 g(x) dx = -1$. Tính $I = \int_{-1}^2 [x + 2f(x) + 3g(x)] dx$ bằng:
A. $I = \frac{11}{2}$. **B.** $I = \frac{7}{2}$. **C.** $I = \frac{17}{2}$. **D.** $I = \frac{5}{2}$.
- Câu 34:** Biết $\int_1^8 f(x) dx = -2$; $\int_1^4 f(x) dx = 3$; $\int_1^4 g(x) dx = 7$. Mệnh đề nào sau đây sai?
A. $\int_1^8 f(x) dx = 1$. **B.** $\int_1^4 [f(x) + g(x)] dx = 10$.
C. $\int_4^8 f(x) dx = -5$. **D.** $\int_1^4 [4f(x) - 2g(x)] dx = -2$.
- Câu 35:** Cho hàm số $f(x)$ có $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 3]$, $f(-1) = 3$ và $\int_{-1}^3 f'(x) dx = 10$ giá trị của $f(3)$ bằng:
A. -13. **B.** -7. **C.** 13. **D.** 7.

- Câu 36:** Cho $\int_0^2 f(x) dx = 3$. Tính $\int_0^2 (f(x) + 1) dx$?
A. 4. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 1.
- Câu 37:** Cho $y = f(x)$, $y = g(x)$ là các hàm số có đạo hàm liên tục trên $[0; 2]$ và $\int_0^2 g(x) \cdot f'(x) dx = 2$, $\int_0^2 g'(x) \cdot f(x) dx = 3$. Tính tích phân $I = \int_0^2 [f(x) \cdot g(x)]' dx$.
A. $I = -1$. **B.** $I = 6$. **C.** $I = 5$. **D.** $I = 1$.
- Câu 38:** Cho hai tích phân $\int_{-2}^5 f(x) dx = 8$ và $\int_5^{-2} g(x) dx = 3$. Tính $I = \int_{-2}^5 [f(x) - 4g(x) - 1] dx$.
A. $I = -11$. **B.** $I = 13$. **C.** $I = 27$. **D.** $I = 3$.
- Câu 39:** Cho hàm số $f(x) = x^4 - 4x^3 + 2x^2 - x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Tính $\int_0^1 f^2(x) \cdot f'(x) dx$.
A. $\frac{2}{3}$. **B.** 2. **C.** $-\frac{2}{3}$. **D.** -2.
- Câu 40:** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 6]$ thỏa mãn $\int_0^6 f(x) dx = 10$ và $\int_2^4 f(x) dx = 6$. Tính giá trị của biểu thức $P = \int_0^2 f(x) dx + \int_4^6 f(x) dx$.
A. $P = 4$. **B.** $P = 16$. **C.** $P = 8$. **D.** $P = 10$.
- Câu 41:** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 1]$ và có $\int_0^1 [3 - 2f(x)] dx = 5$. Tính $\int_0^1 f(x) dx$.
A. -1. **B.** 2. **C.** 1. **D.** -2.
- Câu 42:** Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 1]$, có $\int_0^1 f(x) dx = 4$ và $\int_0^1 g(x) dx = -2$. Tính tích phân $I = \int_0^1 [f(x) - 3g(x)] dx$.
A. -10. **B.** 10. **C.** 2. **D.** -2.
- Câu 43:** Cho hàm số $f(x) = \ln|x + \sqrt{x^2 + 1}|$. Tính tích phân $I = \int_0^1 f'(x) dx$.
A. $I = \ln \sqrt{2}$. **B.** $I = \ln(1 + \sqrt{2})$. **C.** $I = \ln 2$ **D.** $I = 2 \ln 2$
- Câu 44:** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1; \ln 3]$ và thỏa mãn $f(1) = e^2$, $\int_1^{\ln 3} f'(x) dx = 9 - e^2$. Tính $I = f(\ln 3)$.
A. $I = 9 - 2e^2$. **B.** $I = 9$. **C.** $I = -9$. **D.** $I = 2e^2 - 9$.
- Câu 45:** Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0; 1]$ và thỏa mãn $\int_0^1 f'(x) \cdot g(x) dx = 1$, $\int_0^1 f(x) \cdot g'(x) dx = -1$. Tính $I = \int_0^1 [f(x) \cdot g(x)]' dx$.
A. $I = -2$. **B.** $I = 0$. **C.** $I = 3$. **D.** $I = 2$.

- Câu 46:** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $(0; +\infty)$ và thỏa $\int_0^{x^2} f(t)dt = x \cdot \cos \pi x$. Tính $f(4)$.
- A. $f(4) = 123$. B. $f(4) = \frac{2}{3}$. C. $f(4) = \frac{3}{4}$. D. $f(4) = \frac{1}{4}$.
- Câu 47:** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int_0^{f(x)} t^2 \cdot dt = x \cdot \cos \pi x$. Tính $f(4)$.
- A. $f(4) = 2\sqrt{3}$. B. $f(4) = -1$. C. $f(4) = \frac{1}{2}$. D. $f(4) = \sqrt[3]{12}$.
- Câu 48:** Cho hàm số $G(x) = \int_0^x t \cdot \cos(x-t) \cdot dt$. Tính $G'\left(\frac{\pi}{2}\right)$.
- A. $G'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$. B. $G'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$. C. $G'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. D. $G'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$.
- Câu 49:** Cho hàm số $G(x) = \int_0^{x^2} \cos \sqrt{t} \cdot dt$ ($x > 0$). Tính $G'(x)$.
- A. $G'(x) = x^2 \cdot \cos x$. B. $G'(x) = 2x \cdot \cos x$. C. $G'(x) = \cos x$. D. $G'(x) = \cos x - 1$.
- Câu 50:** Cho hàm số $G(x) = \int_1^x \sqrt{1+t^2} dt$. Tính $G'(x)$.
- A. $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. B. $\sqrt{1+x^2}$. C. $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. D. $(x^2+1)\sqrt{x^2+1}$.
- Câu 51:** Cho hàm số $F(x) = \int_1^{\sqrt{x}} \sin t^2 \cdot dt$ ($x > 0$). Tính $F'(x)$.
- A. $\sin x$. B. $\frac{\sin x}{2\sqrt{x}}$. C. $\frac{2 \sin x}{\sqrt{x}}$. D. $\sin \sqrt{x}$.
- Câu 52:** Tính đạo hàm của $f(x)$, biết $f(x)$ thỏa $\int_0^x t \cdot e^{f(t)} dt = e^{f(x)}$.
- A. $f'(x) = x$. B. $f'(x) = x^2 + 1$. C. $f'(x) = \frac{1}{x}$. D. $f'(x) = \frac{1}{1-x}$.
- Câu 53:** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[0; +\infty)$ và $\int_0^{x^2} f(t)dt = x \cdot \sin(\pi x)$. Tính $f(4)$.
- A. $f(\pi) = \frac{\pi-1}{4}$. B. $f(\pi) = \frac{\pi}{2}$. C. $f(\pi) = \frac{\pi}{4}$. D. $f(\pi) = \frac{1}{2}$.
- Câu 54:** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng $(-2; 3)$. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên khoảng $(-2; 3)$. Tính $I = \int_{-1}^2 [f(x) + 2x] dx$, biết $F(-1) = 1$ và $F(2) = 4$.
- A. $I = 6$. B. $I = 10$. C. $I = 3$. D. $I = 9$.
- Câu 55:** Cho $\int_{-1}^2 f(x) dx = 2$ và $\int_{-1}^2 g(x) dx = -1$. Tính $I = \int_{-1}^2 [x + 2f(x) - 3g(x)] dx$.
- A. $I = \frac{11}{2}$. B. $I = \frac{7}{2}$. C. $I = \frac{17}{2}$. D. $I = \frac{5}{2}$.
- Câu 56:** Cho $\int_1^2 [3f(x) + 2g(x)] dx = 1$ và $\int_1^2 [2f(x) - g(x)] dx = -3$. Khi đó, $\int_1^2 f(x) dx$ bằng

A. $\frac{11}{7}$.

B. $-\frac{5}{7}$.

C. $\frac{6}{7}$.

D. $\frac{16}{7}$.

Câu 57: Cho $f(x)$, $g(x)$ là hai hàm số liên tục trên đoạn $[-1;1]$ và $f(x)$ là hàm số chẵn, $g(x)$ là hàm số lẻ. Biết $\int_0^1 f(x)dx = 5$; $\int_0^1 g(x)dx = 7$. Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

A. $\int_{-1}^1 f(x)dx = 10$.

B. $\int_{-1}^1 [f(x) + g(x)]dx = 10$.

C. $\int_{-1}^1 [f(x) - g(x)]dx = 10$.

D. $\int_{-1}^1 g(x)dx = 14$.

Câu 58: Cho $f(x)$, $g(x)$ là hai hàm số liên tục trên đoạn $[-1;1]$ và $f(x)$ là hàm số chẵn, $g(x)$ là hàm số lẻ. Biết $\int_0^1 f(x)dx = 5$; $\int_0^1 g(x)dx = 7$. Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

A. $\int_{-1}^1 f(x)dx = 10$.

B. $\int_{-1}^1 [f(x) + g(x)]dx = 10$.

C. $\int_{-1}^1 [f(x) - g(x)]dx = 10$.

D. $\int_{-1}^1 g(x)dx = 14$.

Câu 59: Nếu $\int_0^{10} f(z)dz = 17$ và $\int_0^8 f(t)dt = 12$ thì $\int_8^{10} -3f(x)dx$ bằng

A. -15 .

B. 29 .

C. 15 .

D. 5 .

Câu 60: Cho $\int_{-1}^2 f(x)dx = 2$, $\int_{-1}^7 f(t)dt = 9$. Giá trị của $\int_2^7 f(z)dz$ là

A. 11 .

B. 5 .

C. 7 .

D. 9 .

Câu 61: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, luôn dương trên $[0;3]$ và thỏa mãn $I = \int_0^3 f(x)dx = 4$. Khi đó

giá trị của tích phân $K = \int_0^3 (e^{1+\ln(f(x))} + 4)dx$ là:

A. $4 + 12e$.

B. $12 + 4e$.

C. $3e + 14$.

D. $14 + 3e$.

Câu 62: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa

$$\begin{cases} f(0) = f'(0) = 1; \\ f(x+y) = f(x) + f(y) + 3xy(x+y) - 1, \forall x, y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Tính $\int_0^1 f(x-1)dx$.

A. $\frac{1}{2}$.

B. $-\frac{1}{4}$.

C. $\frac{1}{4}$.

D. $\frac{7}{4}$.

Câu 63: Cho hàm số $f(x)$ là hàm bậc nhất thỏa mãn $\int_0^1 (x+1)f'(x)dx = 10$ và $2f(1) - f(0) = 2$.

Tính $I = \int_0^1 f(x)dx$.

A. $I = 1$.

B. $I = 8$.

C. $I = -12$.

D. $I = -8$.

- Câu 64:** Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, thỏa mãn $f'(x) = \frac{1}{x^3 + x^5}$, $f(1) = a$ và $f(-2) = b$.
 Tính $f(-1) + f(2)$.
A. $f(-1) + f(2) = -a - b$. **B.** $f(-1) + f(2) = a - b$.
C. $f(-1) + f(2) = a + b$. **D.** $f(-1) + f(2) = b - a$.
- Câu 65:** Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ và thỏa mãn $f'(x) = \frac{1}{x^2 + x^4}$, $f(1) = a$, $f(-2) = b$.
 Giá trị của biểu thức $f(-1) - f(2)$ bằng
A. $b - a$. **B.** $a + b$. **C.** $a - b$. **D.** $-a - b$.
- Câu 66:** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện $f(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$; $f'(x) = -e^x \cdot f^2(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = \frac{1}{2}$. Tính giá trị của $f(\ln 2)$.
A. $f(\ln 2) = \frac{2}{9}$. **B.** $f(\ln 2) = -\frac{2}{9}$. **C.** $f(\ln 2) = \frac{2}{3}$. **D.** $f(\ln 2) = \frac{1}{3}$.
- Câu 67:** Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C) , xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện $f(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = (x \cdot f(x))^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 2$. Phương trình tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x = 1$ của đồ thị (C) là.
A. $y = 6x + 30$. **B.** $y = -6x + 30$. **C.** $y = 36x - 30$. **D.** $y = -36x + 42$.
- Câu 68:** Cho hàm số $y = f(x) > 0$ xác định, có đạo hàm trên đoạn $[0; 1]$ và thỏa mãn:
 $g(x) = 1 + 2018 \int_0^x f(t) dt$, $g(x) = f^2(x)$. Tính $\int_0^1 \sqrt{g(x)} dx$.
A. $\frac{1011}{2}$. **B.** $\frac{1009}{2}$. **C.** $\frac{2019}{2}$. **D.** 505.
- Câu 69:** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên đoạn $[-1; 1]$, thỏa mãn $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f'(x) + 2f(x) = 0$. Biết $f(1) = 1$, tính $f(-1)$.
A. $f(-1) = e^{-2}$. **B.** $f(-1) = e^3$. **C.** $f(-1) = e^4$. **D.** $f(-1) = 3$.
- Câu 70:** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0; 1]$ đồng thời thỏa mãn $f'(0) = 9$ và $9f''(x) + [f'(x) - x]^2 = 9$. Tính $T = f(1) - f(0)$.
A. $T = 2 + 9 \ln 2$. **B.** $T = 9$. **C.** $T = \frac{1}{2} + 9 \ln 2$. **D.** $T = 2 - 9 \ln 2$.
- Câu 71:** Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f'(x) \cdot f(x) = x^4 + x^2$. Biết $f(0) = 2$. Tính $f^2(2)$.
A. $f^2(2) = \frac{313}{15}$. **B.** $f^2(2) = \frac{332}{15}$. **C.** $f^2(2) = \frac{324}{15}$. **D.** $f^2(2) = \frac{323}{15}$.
- Câu 72:** Cho $f(x)$ xác định, có đạo hàm, liên tục và đồng biến trên $[1; 4]$ thỏa mãn
 $x + 2xf(x) = [f'(x)]^2, \forall x \in [1; 4], f(1) = \frac{3}{2}$. Giá trị $f(4)$ bằng:
A. $\frac{391}{18}$ **B.** $\frac{361}{18}$ **C.** $\frac{381}{18}$ **D.** $\frac{371}{18}$
- Câu 73:** Cho hàm số $y = f(x)$ có $f'(x)$ liên tục trên nửa khoảng $[0; +\infty)$ thỏa mãn
 $3f(x) + f'(x) = \sqrt{1 + 3e^{-2x}}$. Khi đó:

A. $e^3 f(1) - f(0) = \frac{1}{\sqrt{e^2 + 3}} - \frac{1}{2}.$

B. $e^3 f(1) - f(0) = \frac{1}{2\sqrt{e^2 + 3}} - \frac{1}{4}.$

C. $e^3 f(1) - f(0) = \frac{(e^2 + 3)\sqrt{e^2 + 3} - 8}{3}.$

D. $e^3 f(1) - f(0) = (e^2 + 3)\sqrt{e^2 + 3} - 8.$

Câu 74: Cho hàm số f liên tục, $f(x) > -1$, $f(0) = 0$ và thỏa $f'(x)\sqrt{x^2 + 1} = 2x\sqrt{f(x) + 1}$. Tính $f(\sqrt{3})$.

A. 0.

B. 3.

C. 7.

D. 9.

Câu 75: Cho hàm số $f(x) \neq 0$ thỏa mãn điều kiện $f'(x) = (2x + 3)f^2(x)$ và $f(0) = -\frac{1}{2}$. Biết rằng tổng $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(2017) + f(2018) = \frac{a}{b}$ với $(a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}^*)$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. $\frac{a}{b} < -1.$

B. $\frac{a}{b} > 1.$

C. $a + b = 1010.$

D. $b - a = 3029.$

Câu 76: Biết luôn có hai số a và b để $F(x) = \frac{ax + b}{x + 4}$ ($4a - b \neq 0$) là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ và thỏa mãn: $2f^2(x) = [F(x) - 1]f'(x)$.

Khẳng định nào dưới đây đúng và đầy đủ nhất?

A. $a = 1, b = 4.$

B. $a = 1, b = -1.$

C. $a = 1, b \in \mathbb{R} \setminus \{4\}.$

D. $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}.$

Câu 77: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[1; 2]$ thỏa mãn $f(1) = 4$ và $f(x) = xf'(x) - 2x^3 - 3x^2$. Tính $f(2)$.

A. 5.

B. 20.

C. 10.

D. 15.

Câu 78: Cho $f(x) = \frac{x}{\cos^2 x}$ trên $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ và $F(x)$ là một nguyên hàm của $xf'(x)$ thỏa mãn $F(0) = 0$. Biết $a \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ thỏa mãn $\tan a = 3$. Tính $F(a) - 10a^2 + 3a$.

A. $-\frac{1}{2}\ln 10.$

B. $-\frac{1}{4}\ln 10.$

C. $\frac{1}{2}\ln 10.$

D. $\ln 10.$

Câu 79: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -e^x \cdot f^2(x) \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = \frac{1}{2}$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị tại điểm có hoành độ $x_0 = \ln 2$ là

A. $2x + 9y - 2\ln 2 - 3 = 0.$

B. $2x - 9y - 2\ln 2 + 3 = 0.$

C. $2x - 9y + 2\ln 2 - 3 = 0.$

D. $2x + 9y + 2\ln 2 - 3 = 0.$

Câu 80: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0; 1]$, $f(x)$ và $f'(x)$ đều nhận giá trị dương trên đoạn $[0; 1]$ và thỏa mãn $f(0) = 2, \int_0^1 [f'(x) \cdot [f(x)]^2 + 1] dx = 2 \int_0^1 \sqrt{f'(x)} \cdot f(x) dx$. Tính $\int_0^1 [f(x)]^3 dx$.

A. $\frac{15}{4}.$

B. $\frac{15}{2}.$

C. $\frac{17}{2}.$

D. $\frac{19}{2}.$

- Câu 81:** Cho $f(x)$ không âm thỏa mãn điều kiện $f(x) \cdot f'(x) = 2x\sqrt{f^2(x)+1}$ và $f(0) = 0$. Tổng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên $[1;3]$ là
- A. 22 B. $4\sqrt{11} + \sqrt{3}$ C. $20 + \sqrt{2}$ D. $3\sqrt{11} + \sqrt{3}$
- Câu 82:** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm và đồng biến trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(0) = 1$ và $(f'(x))^2 = e^x f(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Tính tích phân $\int_0^1 f(x) dx$ bằng
- A. $e - 2$. B. $e - 1$. C. $e^2 - 2$. D. $e^2 - 1$.
- Câu 83:** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ thỏa mãn $x^2 f^2(x) + (2x-1)f(x) = xf'(x) - 1$ với $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ và $f(1) = -2$. Tính $\int_1^2 f(x) dx$.
- A. $-\frac{1}{2} - \ln 2$. B. $-\frac{3}{2} - \ln 2$. C. $-1 - \frac{\ln 2}{2}$. D. $-\frac{3}{2} - \frac{\ln 2}{2}$.
- Câu 84:** Cho hàm số $y = f(x)$. Có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(1) = e$ và $(x+2)f(x) = xf'(x) - x^3, \forall x \in \mathbb{R}$. Tính $f(2)$.
- A. $4e^2 - 4e + 4$. B. $4e^2 - 2e + 1$. C. $2e^3 - 2e + 2$. D. $4e^2 + 4e - 4$.
- Câu 85:** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn $f(0) = 0$. Biết $\int_0^1 f^2(x) dx = \frac{9}{2}$ và $\int_0^1 f'(x) \cos \frac{\pi x}{2} dx = \frac{3\pi}{4}$. Tính phân $\int_0^1 f(x) dx$ bằng
- A. $\frac{1}{\pi}$. B. $\frac{4}{\pi}$. C. $\frac{6}{\pi}$. D. $\frac{2}{\pi}$.
- Câu 86:** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$, thỏa mãn $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 xf(x) dx = 1$ và $\int_0^1 [f(x)]^2 dx = 4$. Giá trị của tích phân $\int_0^1 [f(x)]^3 dx$ bằng
- A. 1. B. 8. C. 10. D. 80.
- Câu 87:** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1, 2]$ và thỏa mãn $f(x) > 0$ khi $x \in [1, 2]$. Biết $\int_1^2 f'(x) dx = 10$ và $\int_1^2 \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln 2$. Tính $f(2)$.
- A. $f(2) = -10$. B. $f(2) = 20$. C. $f(2) = 10$. D. $f(2) = -20$.
- Câu 88:** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên đoạn $[4;8]$ và $f(0) \neq 0$ với $\forall x \in [4;8]$. Biết rằng $\int_4^8 \frac{[f'(x)]^2}{[f(x)]^4} dx = 1$ và $f(4) = \frac{1}{4}, f(8) = \frac{1}{2}$. Tính $f(6)$.
- A. $\frac{5}{8}$. B. $\frac{2}{3}$. C. $\frac{3}{8}$. D. $\frac{1}{3}$.
- Câu 89:** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm xác định, liên tục trên đoạn $[0;1]$ đồng thời thỏa mãn các điều kiện $f'(0) = -1$ và $[f'(x)]^2 = f''(x)$. Đặt $T = f(1) - f(0)$, hãy chọn khẳng định đúng?
- A. $-2 \leq T < -1$. B. $-1 \leq T < 0$. C. $0 \leq T < 1$. D. $1 \leq T < 2$.

Câu 90: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp 2 liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa
$$\begin{cases} f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \\ f(0) = f'(0) = 1, \\ xy^2 + y'^2 = yy'', \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.** $\frac{1}{2} < \ln f(1) < 1$. **B.** $0 < \ln f(1) < \frac{1}{2}$. **C.** $\frac{3}{2} < \ln f(1) < 2$. **D.** $1 < \ln f(1) < \frac{3}{2}$.

Câu 91: Cho f, g là hai hàm liên tục trên $[1; 3]$ thỏa mãn điều kiện $\int_1^3 [f(x) + 3g(x)] dx = 10$ đồng thời $\int_1^3 [2f(x) - g(x)] dx = 6$. Tính $\int_1^3 [f(x) + g(x)] dx$.

- A.** 9. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 8.

Câu 92: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a; b]$, nếu $\int_a^d f(x) dx = 5$ và $\int_b^d f(x) dx = 2$ (với $a < d < b$) thì $\int_a^b f(x) dx$ bằng.

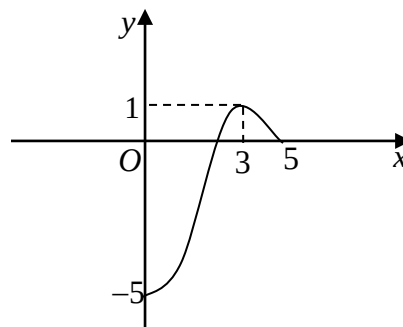
- A.** 3. **B.** 7. **C.** $\frac{5}{2}$. **D.** 10.

Câu 93: Cho $f(x)$ và $g(x)$ là hai hàm số liên tục trên đoạn $[1; 3]$, thỏa mãn:

$$\int_1^3 [f(x) + 3g(x)] dx = 10 \text{ và } \int_1^3 [2f(x) - g(x)] dx = 6. \text{ Tính } I = \int_1^3 [f(x) + g(x)] dx$$

- A.** $I = 8$. **B.** $I = 9$. **C.** $I = 6$. **D.** $I = 7$.

Câu 94: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 5]$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ trên đoạn $[0; 5]$ được cho như hình bên.



Tìm mệnh đề đúng

- A.** $f(0) = f(5) < f(3)$. **B.** $f(3) < f(0) = f(5)$.
C. $f(3) < f(0) < f(5)$. **D.** $f(3) < f(5) < f(0)$.

Câu 95: Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm tại mọi $x \in (0; +\infty)$ đồng thời thỏa mãn điều kiện:

$$f(x) = x(\sin x + f'(x)) + \cos x \text{ và } \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x) \sin x dx = -4. \text{ Khi đó, } f(\pi) \text{ nằm trong khoảng}$$

nào?

- A.** $(6; 7)$. **B.** $(5; 6)$. **C.** $(12; 13)$. **D.** $(11; 12)$.

Câu 96: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ thỏa mãn

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[f^2(x) - 2\sqrt{2} f(x) \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \right] dx = \frac{2-\pi}{2}. \text{ Tích phân } \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx \text{ bằng}$$

- A. $\frac{\pi}{4}$. B. 0. C. 1. D. $\frac{\pi}{2}$.

Câu 97: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $3f(x) + f(2-x) = 2(x-1)e^{x^2-2x+1} + 4$. Tính tích phân $I = \int_0^2 f(x) dx$ ta được kết quả:

- A. $I = e + 4$. B. $I = 8$. C. $I = 2$. D. $I = e + 2$.

Câu 98: Suy ra $4 \int_0^2 f(x) dx = 8 \Leftrightarrow \int_0^2 f(x) dx = 2$. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{0; -1\}$ thỏa mãn điều kiện $f(1) = -2 \ln 2$ và $x(x+1) \cdot f'(x) + f(x) = x^2 + x$. Giá trị $f(2) = a + b \ln 3$, với $a, b \in \mathbb{Q}$. Tính $a^2 + b^2$.

- A. $\frac{25}{4}$. B. $\frac{9}{2}$. C. $\frac{5}{2}$. D. $\frac{13}{4}$.

Câu 99: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $f'(x) \geq x^4 + \frac{2}{x^2} - 2x \quad \forall x > 0$ và $f(1) = -1$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Phương trình $f(x) = 0$ có 1 nghiệm trên $(0; 1)$.
 B. Phương trình $f(x) = 0$ có đúng 3 nghiệm trên $(0; +\infty)$.
 C. Phương trình $f(x) = 0$ có 1 nghiệm trên $(1; 2)$.
 C. Phương trình $f(x) = 0$ có 1 nghiệm trên $(2; 5)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$f'(x) \geq x^4 + \frac{2}{x^2} - 2x = \frac{x^6 - 2x^3 + 2}{x^2} = \frac{(x^3 - 1)^2 + 1}{x^2} > 0, \quad \forall x > 0.$$

$\Rightarrow y = f(x)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

$\Rightarrow f(x) = 0$ có nhiều nhất 1 nghiệm trên khoảng $(0; +\infty)$ (1).

Mặt khác ta có:

$$f'(x) \geq x^4 + \frac{2}{x^2} - 2x > 0, \quad \forall x > 0 \Rightarrow \int_1^2 f'(x) dx \geq \int_1^2 \left(x^4 + \frac{2}{x^2} - 2x \right) dx = \frac{21}{5}$$

$$\Rightarrow f(2) - f(1) \geq \frac{21}{5} \Rightarrow f(2) \geq \frac{17}{5}.$$

Kết hợp giả thiết ta có $y = f(x)$ liên tục trên $[1; 2]$ và $f(2) \cdot f(1) < 0$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra phương trình $f(x) = 0$ có đúng 1 nghiệm trên khoảng $(1; 2)$.

Câu 100: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f'(x) \in [-1; 1]$ với

$\forall x \in (0; 2)$. Biết $f(0) = f(2) = 1$. Đặt $I = \int_0^2 f(x) dx$, phát biểu nào dưới đây đúng?

- A. $I \in (-\infty; 0]$. B. $I \in (0; 1]$. C. $I \in [1; +\infty)$. D. $I \in (0; 1)$.

Câu 101: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[0; 1]$ thỏa mãn $\int_0^1 xf(x)dx = 0$ và $\max_{[0;1]} |f(x)| = 1$. Tích phân $I = \int_0^1 e^x f(x)dx$ thuộc khoảng nào trong các khoảng sau đây?

- A. $\left(-\infty; -\frac{5}{4}\right)$. B. $\left(\frac{3}{2}; e-1\right)$. C. $\left(-\frac{5}{4}; \frac{3}{2}\right)$. D. $(e-1; +\infty)$.

Câu 102: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm dương, liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(0)=1$ và $3\int_0^1 \left[f'(x)[f(x)]^2 + \frac{1}{9} \right] dx \leq 2\int_0^1 \sqrt{f'(x)} f(x) dx$. Tính tích phân $\int_0^1 [f(x)]^3 dx$:

- A. $\frac{3}{2}$. B. $\frac{5}{4}$. C. $\frac{5}{6}$. D. $\frac{7}{6}$.

Câu 103: Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[1;4]$ và thỏa mãn hệ thức $\begin{cases} f(1)+g(1)=4 \\ g(x)=-x.f'(x); \quad f(x)=-x.g'(x) \end{cases}$. Tính $I = \int_1^4 [f(x)+g(x)]dx$.

- A. $8\ln 2$. B. $3\ln 2$. C. $6\ln 2$. D. $4\ln 2$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

DẠNG 1: ỨNG DỤNG ĐỊNH NGHĨA, TÍNH CHẤT NGUYÊN HÀM

Câu 1: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{1}{x-1}$, $f(0) = 2017$,

$$f(2) = 2018. \text{ Tính } S = f(3) - f(-1).$$

- A.** $S = 1$. **B.** $S = \ln 2$. **C.** $S = \ln 4035$. **D.** $S = 4$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Cách 1: Ta có $\int f'(x) dx = \int \frac{1}{x-1} dx = \ln|x-1| + C$.

Theo giả thiết $f(0) = 2017$, $f(2) = 2018$ nên $\begin{cases} f(x) = \ln|x-1| + 2017 & \text{khi } x < 1 \\ f(x) = \ln|x-1| + 2018 & \text{khi } x > 1 \end{cases}$.

Do đó $S = f(3) - f(-1) = \ln 2 + 2018 - \ln 2 - 2017 = 1$.

Cách 2:

$$\text{Ta có: } \begin{cases} f(0) - f(-1) = \int_{-1}^0 f'(x) dx = \int_{-1}^0 \frac{dx}{x-1} = \ln|x-1| \Big|_{-1}^0 = \ln \frac{1}{2} & (1) \\ f(3) - f(2) = \int_2^3 f'(x) dx = \int_2^3 \frac{dx}{x-1} = \ln|x-1| \Big|_2^3 = \ln 2 & (2) \end{cases}$$

Lấy (1)+(2), ta được $f(3) - f(2) + f(0) - f(-1) = 0 \Rightarrow S = 1$.

Câu 2: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{2}{2x-1}$ và $f(0) = 1$. Giá trị của biểu thức $f(-1) + f(3)$ bằng

- A.** $4 + \ln 15$. **B.** $3 + \ln 15$. **C.** $2 + \ln 15$. **D.** $\ln 15$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$\text{Ta có } f(x) = \int f'(x) dx = \int \frac{2}{2x-1} dx = \int \frac{2 \cdot \frac{1}{2} d(2x-1)}{2x-1} = \ln|2x-1| + c.$$

$$f(0) = 1 \Leftrightarrow c = 1 \Leftrightarrow f(x) = \ln|2x-1| + 1.$$

$$\begin{cases} f(-1) = \ln 3 + 1 \\ f(3) = \ln 5 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow f(-1) + f(3) = 2 + \ln 15.$$

Câu 3: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{2}{2x-1}$, $f(0) = 1$ và $f(1) = 2$.

Giá trị của biểu thức $f(-1) + f(3)$ bằng

- A.** $4 + \ln 5$. **B.** $2 + \ln 15$. **C.** $3 + \ln 15$. **D.** $\ln 15$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Cách 1: • Trên khoảng $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$: $f(x) = \int \frac{2}{2x-1} dx = \ln(2x-1) + C_1$.

$$\text{Lại có } f(1) = 2 \Rightarrow C_1 = 2.$$

• Trên khoảng $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$: $f(x) = \int \frac{2}{2x-1} dx = \ln(1-2x) + C_2$.

Lại có $f(0)=1 \Rightarrow C_2=1$.

$$\text{Vậy } f(x) = \begin{cases} \ln(2x-1)+2 & \text{khi } x > \frac{1}{2} \\ \ln(1-2x)+1 & \text{khi } x < \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Suy ra $f(-1)+f(3)=3+\ln 15$.

Cách 2:

$$\text{Ta có: } \begin{cases} f(0)-f(-1)=\int_{-1}^0 f'(x)dx=\int_{-1}^0 \frac{2dx}{2x-1}=\ln|2x-1|\Big|_{-1}^0=\ln\frac{1}{3} & (1) \\ f(3)-f(1)=\int_1^3 f'(x)dx=\int_1^3 \frac{2dx}{2x-1}=\ln|2x-1|\Big|_1^3=\ln 5 & (2) \end{cases}$$

Lấy (2)-(1), ta được $f(3)-f(1)-f(0)+f(-1)=\ln 15 \Rightarrow f(-1)+f(3)=3+\ln 15$.

Câu 4: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x)=2x+1$ và $f(1)=5$. Phương trình $f(x)=5$ có hai nghiệm x_1, x_2 . Tính tổng $S=\log_2|x_1|+\log_2|x_2|$.

A. $S=1$.

B. $S=2$.

C. $S=0$.

D. $S=4$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có: $f(x)=\int f'(x)dx=\int (2x+1)dx=x^2+x+C$.

Mà $f(1)=5 \Leftrightarrow 1+1+C=5 \Leftrightarrow C=3 \Rightarrow f(x)=x^2+x+3$.

Xét phương trình: $f(x)=5 \Leftrightarrow x^2+x+3=5 \Leftrightarrow x^2+x-2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-2 \end{cases}$.

$S=\log_2|x_1|+\log_2|x_2|=\log_2|1|+\log_2|-2|=1$.

Câu 5: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$ thỏa mãn $f'(x)=\frac{3}{3x-1}$, $f(0)=1$ và $f\left(\frac{2}{3}\right)=2$.

Giá trị của biểu thức $f(-1)+f(3)$ bằng

A. $3+5\ln 2$.

B. $-2+5\ln 2$.

C. $4+5\ln 2$.

D. $2+5\ln 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$\text{Cách 1: Từ } f'(x)=\frac{3}{3x-1} \Rightarrow f(x)=\int \frac{3}{3x-1}dx=\begin{cases} \ln|3x-1|+C_1 & \text{khi } x \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \\ \ln|3x-1|+C_2 & \text{khi } x \in \left(\frac{1}{3}; +\infty\right) \end{cases}.$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} f(0)=1 \\ f\left(\frac{2}{3}\right)=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0+C_1=1 \\ 0+C_2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1=1 \\ C_2=2 \end{cases} \Rightarrow f(x)=\begin{cases} \ln|3x-1|+1 & \text{khi } x \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \\ \ln|3x-1|+2 & \text{khi } x \in \left(\frac{1}{3}; +\infty\right) \end{cases}.$$

Khi đó: $f(-1)+f(3)=\ln 4+1+\ln 8+2=3+\ln 32=3+5\ln 2$.

$$\text{Cách 2: Ta có } \begin{cases} f(0)-f(-1)=f(x)\Big|_{-1}^0=\int_{-1}^0 f'(x)dx=\int_{-1}^0 \frac{3}{3x-1}dx=\ln|3x-1|\Big|_{-1}^0=\ln\frac{1}{4} & (1) \\ f(3)-f\left(\frac{2}{3}\right)=f(x)\Big|_{\frac{2}{3}}^3=\int_{\frac{2}{3}}^3 f'(x)dx=\int_{\frac{2}{3}}^3 \frac{3}{3x-1}dx=\ln|3x-1|\Big|_{\frac{2}{3}}^3=\ln 8 & (2) \end{cases}$$

Lấy (2)-(1), ta được: $f(3) + f(-1) - f(0) - f\left(\frac{2}{3}\right) = \ln 32 \Rightarrow f(-1) + f(3) = 3 + 5\ln 2$.

Câu 6: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$ và thỏa mãn $f'(x) = \frac{4}{x^2 - 4}$; $f(-3) = 0$;

$f(0) = 1$ và $f(3) = 2$. Tính giá trị biểu thức $P = f(-4) + f(-1) + f(4)$.

A. $P = 3 + \ln \frac{3}{25}$.

B. $P = 3 + \ln 3$.

C. $P = 2 + \ln \frac{5}{3}$.

D. $P = 2 - \ln \frac{5}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$\text{Từ } f'(x) = \frac{4}{x^2 - 4} \Rightarrow f(x) = \int \frac{4dx}{x^2 - 4} = \int \frac{4dx}{(x-2)(x+2)} = \begin{cases} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + C_1 & \text{khi } x \in (-\infty; -2) \\ \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + C_2 & \text{khi } x \in (-2; 2) \\ \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + C_3 & \text{khi } x \in (2; +\infty) \end{cases}$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} f(-3) = 0 \\ f(0) = 1 \\ f(2) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ln 5 + C_1 = 0 \\ 0 + C_2 = 1 \\ \ln \frac{1}{5} + C_3 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = -\ln 5 \\ C_2 = 1 \\ C_3 = 2 + \ln 5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| - \ln 5 & \text{khi } x \in (-\infty; -2) \\ \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + 1 & \text{khi } x \in (-2; 2) \\ \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + 2 + \ln 5 & \text{khi } x \in (2; +\infty) \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } P = f(-4) + f(-1) + f(4) = \ln 3 - \ln 5 + \ln 3 + 1 + \ln \frac{1}{3} + 2 + \ln 5 = 3 + \ln 3.$$

Câu 7: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-2; 1\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{1}{x^2 + x - 2}$; $f(-3) - f(3) = 0$

và $f(0) = \frac{1}{3}$. Giá trị của biểu thức $f(-4) + f(-1) - f(4)$ bằng

A. $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \ln 2$.

B. $1 + \ln 80$.

C. $1 + \ln 2 + \frac{1}{3} \ln \frac{4}{5}$.

D. $1 + \frac{1}{3} \ln \frac{8}{5}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$f'(x) = \frac{1}{x^2 + x - 2} \Rightarrow f(x) = \int \frac{dx}{x^2 + x - 2} = \int \frac{dx}{(x-1)(x+2)} = \begin{cases} \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right| + C_1 & \text{khi } x \in (-\infty; -2) \\ \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right| + C_2 & \text{khi } x \in (-2; 1) \\ \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right| + C_3 & \text{khi } x \in (1; +\infty) \end{cases}$$

$$\text{Do đó } f(-3) - f(3) = 0 \Rightarrow \frac{1}{3} \ln 4 + C_1 - \frac{1}{3} \ln \frac{2}{5} - C_3 \Rightarrow C_3 = C_1 + \frac{1}{3} \ln 10.$$

Và $f(0) = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{3} \ln \frac{1}{2} + C_2 = \frac{1}{3} \Rightarrow C_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \ln 2$.

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right| + C_1 & \text{khi } x \in (-\infty; -2) \\ \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right| + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \ln 2 & \text{khi } x \in (-2; 1) \\ \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right| + C_1 + \frac{1}{3} \ln 10 & \text{khi } x \in (1; +\infty) \end{cases}$$

Khi đó:

$$f(-4) + f(-1) - f(4) = \left(\frac{1}{3} \ln \frac{5}{2} + C_1 \right) + \left(\frac{1}{3} \ln 2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \ln 2 \right) - \left(\frac{1}{3} \ln \frac{1}{2} + C_1 + \frac{1}{3} \ln 10 \right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \ln 2.$$

Câu 8: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ và thỏa mãn $f'(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$; $f(-3) + f(3) = 0$

và $f\left(-\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) = 2$. Tính giá trị của biểu thức $P = f(0) + f(4)$.

A. $P = 2 + \ln \frac{3}{5}$.

B. $P = 1 + \ln \frac{3}{5}$.

C. $P = 1 + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{5}$.

D. $P = \frac{1}{2} \ln \frac{3}{5}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$f'(x) = \frac{1}{x^2 - 1} \Rightarrow \int \frac{dx}{x^2 - 1} = \int \frac{dx}{(x-1)(x+1)} = \begin{cases} \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C_1 & \text{khi } x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty) \\ \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C_2 & \text{khi } x \in (-1; 1) \end{cases}$$

Ta có $f(-3) + f(3) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \ln 2 + C_1 + \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} + C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = 0$.

Và $f\left(-\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \Rightarrow \frac{1}{2} \ln 3 + C_2 + \frac{1}{2} \ln \frac{1}{3} + C_2 = 2 \Rightarrow C_2 = 1$.

$$\text{Suy ra } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| & \text{khi } x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty) \\ \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + 1 & \text{khi } x \in (-1; 1) \end{cases}$$

Vậy $P = f(0) + f(4) = 1 + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{5}$.

Câu 9: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$. Biết $f(-3) + f(3) = 0$

và $f\left(-\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) = 2$. Giá trị $T = f(-2) + f(0) + f(4)$ bằng:

A. $T = 2 + \frac{1}{2} \ln \frac{5}{9}$.

B. $T = 1 + \frac{1}{2} \ln \frac{9}{5}$.

C. $T = 3 + \frac{1}{2} \ln \frac{9}{5}$.

D. $T = \frac{1}{2} \ln \frac{9}{5}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có $\int f'(x) dx = \int \frac{1}{x^2 - 1} dx = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C$.

$$\text{Do đó } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \ln \frac{x-1}{x+1} + C_1 & \text{khi } x < -1, x > 1 \\ \frac{1}{2} \ln \frac{1-x}{x+1} + C_2 & \text{khi } -1 < x < 1 \end{cases}.$$

$$\text{Do } f(-3) + f(3) = 0 \text{ nên } C_1 = 0, f\left(-\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \text{ nên } C_2 = 1.$$

$$\text{Nên } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \ln \frac{x-1}{x+1} & \text{khi } x < -1, x > 1 \\ \frac{1}{2} \ln \frac{1-x}{x+1} + 1 & \text{khi } -1 < x < 1 \end{cases}. T = f(-2) + f(0) + f(4) = 1 + \frac{1}{2} \ln \frac{9}{5}.$$

Câu 10: Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương, có đạo hàm liên tục trên $(0; +\infty)$ thỏa mãn

$$f(2) = \frac{1}{15} \text{ và } f'(x) + (2x+4)f^2(x) = 0. \text{ Tính } f(1) + f(2) + f(3).$$

A. $\frac{7}{15}.$

B. $\frac{11}{15}.$

C. $\frac{11}{30}.$

D. $\frac{7}{30}.$

Huongd dẫn giải

Chọn D

$$\text{Vì } f'(x) + (2x+4)f^2(x) = 0 \text{ và } f(x) > 0, \text{ với mọi } x \in (0; +\infty) \text{ nên ta có } -\frac{f'(x)}{f^2(x)} = 2x+4.$$

$$\text{Suy ra } \frac{1}{f(x)} = x^2 + 4x + C. \text{ Mặt khác } f(2) = \frac{1}{15} \text{ nên } C = 3 \text{ hay } f(x) = \frac{1}{x^2 + 4x + 3}.$$

$$\text{Do đó } f(1) + f(2) + f(3) = \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24} = \frac{7}{30}.$$

Câu 11: Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f^6(x) \cdot f'(x) = 12x + 13$ và $f(0) = 2$.

Khi đó phương trình $f(x) = 3$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 2.

B. 3.

C. 7.

D. 1.

Huongd dẫn giải

Chọn A

$$\begin{aligned} \text{Từ } f^6(x) \cdot f'(x) = 12x + 13 &\Rightarrow \int f^6(x) \cdot f'(x) dx = \int (12x + 13) dx \Leftrightarrow \int f^6(x) df(x) = 6x^2 + 13x + C \\ \Leftrightarrow \frac{f^7(x)}{7} = 6x^2 + 13x + C &\xrightarrow{f(0)=2} C = \frac{2}{7}. \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra: } f^7(x) = 42x^2 + 91x + 2.$$

$$\text{Từ } f(x) = 3 \Leftrightarrow f^7(x) = 2187 \Rightarrow 42x^2 + 91x + 2 = 2187 \Leftrightarrow 42x^2 + 91x - 2185 = 0(*).$$

Phương trình (*) có 2 nghiệm trái dấu do $ac < 0$.

Câu 12: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x) = \sqrt{e^x + e^{-x} - 2}$, $f(0) = 5$ và

$$f\left(\ln \frac{1}{4}\right) = 0. \text{ Giá trị của biểu thức } S = f(-\ln 16) + f(\ln 4) \text{ bằng}$$

A. $S = \frac{31}{2}.$

B. $S = \frac{9}{2}.$

C. $S = \frac{5}{2}.$

D. $f(0) \cdot f(2) = 1.$

Huongd dẫn giải

Chọn C

Ta có $f'(x) = \sqrt{e^x + e^{-x} - 2} = \frac{|e^x - 1|}{\sqrt{e^x}} = \begin{cases} e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}} & \text{khi } x \geq 0 \\ e^{-\frac{x}{2}} - e^{\frac{x}{2}} & \text{khi } x < 0 \end{cases}.$

Do đó $f(x) = \begin{cases} 2e^{\frac{x}{2}} + 2e^{-\frac{x}{2}} + C_1 & \text{khi } x \geq 0 \\ -2e^{-\frac{x}{2}} - 2e^{\frac{x}{2}} + C_2 & \text{khi } x < 0 \end{cases}.$

Theo đề bài ta có $f(0) = 5$ nên $2e^0 + 2e^0 + C_1 = 5 \Leftrightarrow C_1 = 1.$

$\Rightarrow f(\ln 4) = 2e^{\frac{\ln 4}{2}} + 2e^{-\frac{\ln 4}{2}} + 1 = 6$

Tương tự $f\left(\ln \frac{1}{4}\right) = 0$ nên $-2e^{-\frac{\ln(\frac{1}{4})}{2}} - 2e^{\frac{\ln(\frac{1}{4})}{2}} + C_2 = 0 \Leftrightarrow C_2 = 5.$

$\Rightarrow f(-\ln 16) = -2e^{-\frac{(-\ln 16)}{2}} - 2e^{\frac{(-\ln 16)}{2}} + 5 = -\frac{7}{2}.$

Vậy $S = f(-\ln 16) + f(\ln 4) = \frac{5}{2}.$

Câu 13: Cho hàm số $f(x)$ liên tục, không âm trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, thỏa mãn $f(0) = \sqrt{3}$ và

$f(x) \cdot f'(x) = \cos x \cdot \sqrt{1 + f^2(x)}, \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$ Tìm giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M

của hàm số $f(x)$ trên đoạn $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right].$

A. $m = \frac{\sqrt{21}}{2}, M = 2\sqrt{2}.$ **B.** $m = \frac{5}{2}, M = 3.$

C. $m = \frac{\sqrt{5}}{2}, M = \sqrt{3}.$ **D.** $m = \sqrt{3}, M = 2\sqrt{2}.$

Hướng dẫn giải

Chọn A

Từ giả thiết $f(x) \cdot f'(x) = \cos x \cdot \sqrt{1 + f^2(x)}$

$\Rightarrow \frac{f(x) \cdot f'(x)}{\sqrt{1 + f^2(x)}} = \cos x \Rightarrow \int \frac{f(x) \cdot f'(x)}{\sqrt{1 + f^2(x)}} dx = \sin x + C$

Đặt $t = \sqrt{1 + f^2(x)} \Rightarrow t^2 = 1 + f^2(x) \Rightarrow t dt = f(x) f'(x) dx.$

Thay vào ta được $\int dt = \sin x + C \Rightarrow t = \sin x + C \Rightarrow \sqrt{1 + f^2(x)} = \sin x + C.$

Do $f(0) = \sqrt{3} \Rightarrow C = 2.$

Vậy $\sqrt{1 + f^2(x)} = \sin x + 2 \Rightarrow f^2(x) = \sin^2 x + 4 \sin x + 3$

$\Rightarrow f(x) = \sqrt{\sin^2 x + 4 \sin x + 3}$, vì hàm số $f(x)$ liên tục, không âm trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right].$

Ta có $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \sin x \leq 1$, xét hàm số $g(t) = t^2 + 4t + 3$ có hoành độ đỉnh $t = -2$ loại.

Suy ra $\max_{\left[\frac{1}{2}; 1\right]} g(t) = g(1) = 8, \min_{\left[\frac{1}{2}; 1\right]} g(t) = g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{21}{4}.$

Suy ra $\max_{\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]} f(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\sqrt{2}$, $\min_{\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]} f(x) = g\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{21}}{2}$.

Câu 14: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Biết

$$f(0) = 1 \text{ và } \frac{f'(x)}{f(x)} = 2 - 2x. \text{ Tìm các giá trị thực của tham số } m \text{ để phương trình } f(x) = m$$

có hai nghiệm thực phân biệt.

- A. $m > e$. B. $0 < m \leq 1$. C. $0 < m < e$. D. $1 < m < e$.

Huongd dẫn giải

Chọn C

Ta có $\frac{f'(x)}{f(x)} = 2 - 2x \Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int (2 - 2x) dx$.

$$\Leftrightarrow \ln f(x) = 2x - x^2 + C \Leftrightarrow f(x) = Ae^{2x - x^2}. \text{ Mà } f(0) = 1 \text{ suy ra } f(x) = e^{2x - x^2}.$$

Ta có $2x - x^2 = 1 - (x^2 - 2x + 1) = 1 - (x - 1)^2 \leq 1$. Suy ra $0 < e^{2x - x^2} \leq e$ và ứng với một giá trị thực $t < 1$ thì phương trình $2x - x^2 = t$ sẽ có hai nghiệm phân biệt.

Vậy để phương trình $f(x) = m$ có 2 nghiệm phân biệt khi $0 < m < e^1 = e$.

Câu 15: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(x) \neq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. $f'(x) = (2x + 1)f^2(x)$ và

$$f(1) = -0,5. \text{ Biết rằng tổng } f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(2017) = \frac{a}{b}; (a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}) \text{ với } \frac{a}{b}$$

tối giản. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $a + b = -1$. B. $a \in (-2017; 2017)$. C. $\frac{a}{b} < -1$. D. $b - a = 4035$.

Huongd dẫn giải

Chọn D

Ta có $f'(x) = (2x + 1)f^2(x) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = (2x + 1) \Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f^2(x)} dx = \int (2x + 1) dx$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{f(x)} = x^2 + x + C$$

Mà $f(1) = -\frac{1}{2}$ nên $C = 0 \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{x^2 + x} = \frac{1}{x + 1} - \frac{1}{x}$.

Mặt khác $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(2017) = \left(\frac{1}{2} - 1\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2018} - \frac{1}{2017}\right)$

$$\Leftrightarrow f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(2017) = -1 + \frac{1}{2018} = \frac{-2017}{2018} \Rightarrow a = -2017; b = 2018.$$

Khi đó $b - a = 4035$.

Câu 16: Cho hàm số $f(x) \neq 0$ thỏa mãn điều kiện $f'(x) = (2x + 3)f^2(x)$ và $f(0) = \frac{-1}{2}$. Biết tổng

$$f(1) + f(2) + \dots + f(2017) + f(2018) = \frac{a}{b} \text{ với } a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}^* \text{ và } \frac{a}{b} \text{ là phân số tối giản.}$$

Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\frac{a}{b} < -1$. B. $\frac{a}{b} > 1$.
C. $a + b = 1010$. D. $b - a = 3029$.

Huongd dẫn giải

Chọn D

$$\text{Biến đổi } f'(x) = (2x+3) \cdot f^2(x) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = 2x+3 \Leftrightarrow \int \frac{f'(x)}{f^2(x)} dx = \int (2x+3) dx$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{f(x)} = x^2 + 3x + C \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{x^2 + 3x + C}. \text{ Mà } f(0) = \frac{-1}{2} \text{ nên } = 2.$$

$$\text{Do đó } f(x) = -\frac{1}{x^2 + 3x + 2} = -\frac{1}{(x+1)(x+2)}.$$

$$\text{Khi đó } \frac{a}{b} = f(1) + f(2) + \dots + f(2017) + f(2018) = -\left(\frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{2018 \cdot 2019} + \frac{1}{2019 \cdot 2020}\right) \\ = -\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2018} - \frac{1}{2019} - \frac{1}{2020}\right) = -\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2020}\right) = \frac{-1009}{2020}.$$

$$\text{Với điều kiện } a, b \text{ thỏa mãn bài toán, suy ra: } \begin{cases} a = -1009 \\ b = 2020 \end{cases} \Rightarrow b - a = 3029.$$

Câu 17: Cho hàm số $y = f(x)$, $\forall x \geq 0$, thỏa mãn $\begin{cases} f''(x) \cdot f(x) - 2[f'(x)]^2 + xf^3(x) = 0 \\ f'(0) = 0; f(0) = 1 \end{cases}$. Tính $f(1)$.

A. $\frac{2}{3}$.

B. $\frac{3}{2}$.

C. $\frac{6}{7}$.

D. $\frac{7}{6}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } f''(x) \cdot f(x) - 2[f'(x)]^2 + xf^3(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{f''(x) \cdot f(x) - 2[f'(x)]^2}{f^3(x)} = -x$$

$$\Rightarrow \left[\frac{f'(x)}{f^2(x)} \right]' = -x \Rightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = -\frac{x^2}{2} + C \Rightarrow \frac{f'(0)}{f^2(0)} = -\frac{0^2}{2} + C \Rightarrow C = 0.$$

$$\text{Do đó } \frac{f'(x)}{f^2(x)} = -\frac{x^2}{2}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{f'(x)}{f^2(x)} dx = -\int_0^1 \frac{x^2}{2} dx \Rightarrow -\frac{1}{f(x)} \Big|_0^1 = \left(-\frac{x^3}{6} \right) \Big|_0^1 \Rightarrow -\frac{1}{f(1)} + \frac{1}{f(0)} = -\frac{1}{6} \Rightarrow f(1) = \frac{6}{7}.$$

Câu 18: Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục, dương trên $\mathbb{R}$; thỏa mãn $f(0) = 1$ và $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{x}{x^2 + 1}$. Khi đó

hiệu $T = f(2\sqrt{2}) - 2f(1)$ thuộc khoảng

A. $(2;3)$.

B. $(7;9)$.

C. $(0;1)$.

D. $(9;12)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int \frac{x}{x^2 + 1} dx \Leftrightarrow \int \frac{d(f(x))}{f(x)} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2 + 1)}{x^2 + 1}.$$

$$\text{Vậy } \ln(f(x)) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C, \text{ mà } f(0) = 1 \Leftrightarrow C = 0. \text{ Do đó } f(x) = \sqrt{x^2 + 1}.$$

$$\text{Nên } f(2\sqrt{2}) = 3; 2f(1) = 2\sqrt{2} \Rightarrow f(2\sqrt{2}) - 2f(1) = 3 - 2\sqrt{2} \in (0;1).$$

Câu 19: Khi đó $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{f(\tan t)}{\cos^2 t} dt = \int_0^1 f(x) dx$. Vậy $\int_0^1 f(x) dx = 6$. Cho hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$; $y = f(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $(0; +\infty)$ và thỏa mãn $f(3) = \frac{2}{3}$ và

$[f'(x)]^2 = (x+1) \cdot f(x)$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. $2613 < f^2(8) < 2614$.

B. $2614 < f^2(8) < 2615$.

C. $2618 < f^2(8) < 2619$.

D. $2616 < f^2(8) < 2617$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$ nên suy ra $f'(x) \geq 0, \forall x \in (0; +\infty)$.

Mặt khác $y = f(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $(0; +\infty)$ nên

$$[f'(x)]^2 = (x+1)f(x) \Rightarrow f'(x) = \sqrt{(x+1)f(x)}, \forall x \in (0; +\infty)$$

$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} = \sqrt{x+1}, \forall x \in (0; +\infty);$$

$$\Rightarrow \int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx = \int \sqrt{x+1} dx \Rightarrow \sqrt{f(x)} = \frac{1}{3} \sqrt{(x+1)^3} + C;$$

Từ $f(3) = \frac{2}{3}$ suy ra $C = \sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{8}{3}$

Như vậy $f(x) = \left(\frac{1}{3} \sqrt{(x+1)^3} + \sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{8}{3} \right)^2$

Bởi thế:

$$f(8) = \left(\frac{1}{3} \sqrt{(8+1)^3} + \sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{8}{3} \right)^2 = \left(9 + \sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{8}{3} \right)^2 \Rightarrow f^2(8) = \left(9 + \sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{8}{3} \right)^4 \approx 2613,26.$$

Câu 20: Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $(0; +\infty)$ và thỏa mãn $f(1) = 1$, $f(x) = f'(x) \sqrt{3x+1}$, với mọi $x > 0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $4 < f(5) < 5$.

B. $2 < f(5) < 3$.

C. $3 < f(5) < 4$.

D. $1 < f(5) < 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Cách 1:

Với điều kiện bài toán ta có

$$f(x) = f'(x) \sqrt{3x+1} \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{\sqrt{3x+1}} \Leftrightarrow \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int \frac{1}{\sqrt{3x+1}} dx$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{d(f(x))}{f(x)} = \frac{1}{3} \int (3x+1)^{-\frac{1}{2}} d(3x+1) \Leftrightarrow \ln f(x) = \frac{2}{3} \sqrt{3x+1} + C \Leftrightarrow f(x) = e^{\frac{2}{3} \sqrt{3x+1} + C}.$$

Khi đó $f(1) = 1 \Leftrightarrow e^{\frac{4}{3} + C} = 1 \Leftrightarrow C = -\frac{4}{3} \Rightarrow f(x) = e^{\frac{2}{3} \sqrt{3x+1} - \frac{4}{3}} \Rightarrow f(5) = e^{\frac{4}{3}} \approx 3,79 \in (3; 4).$

Vậy $3 < f(5) < 4$.

Chú ý: Các bạn có thể tính $\int \frac{dx}{\sqrt{3x+1}}$ bằng cách đặt $t = \sqrt{3x+1}$.

Cách 2:

Với điều kiện bài toán ta có

$$\begin{aligned} f(x) = f'(x)\sqrt{3x+1} &\Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{\sqrt{3x+1}} \Leftrightarrow \int_1^5 \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int_1^5 \frac{1}{\sqrt{3x+1}} dx \Leftrightarrow \int_1^5 \frac{d(f(x))}{f(x)} = \frac{4}{3} \\ \Leftrightarrow \ln f(x) \Big|_1^5 &= \frac{4}{3} \Leftrightarrow \ln \frac{f(5)}{f(1)} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow f(5) = f(1) \cdot e^{\frac{4}{3}} \approx 3,79 \in (3; 4). \end{aligned}$$

Câu 21: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $[f'(x)]^2 + f(x) \cdot f''(x) = 15x^4 + 12x, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = f'(0) = 1$. Giá trị của $f^2(1)$ bằng

A. $\frac{9}{2}$.

B. $\frac{5}{2}$.

C. 10.

D. 8.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có: $(f'(x))^2 + f(x) \cdot f''(x) = 15x^4 + 12x, \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\Leftrightarrow [f'(x) \cdot f(x)]' = 15x^4 + 12x, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f'(x) \cdot f(x) = 3x^5 + 6x^2 + C_1$$

Do $f(0) = f'(0) = 1$ nên ta có $C_1 = 1$. Do đó: $f'(x) \cdot f(x) = 3x^5 + 6x^2 + 1$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2} f^2(x) \right)' = 3x^5 + 6x^2 + 1 \Leftrightarrow f^2(x) = x^6 + 4x^3 + 2x + C_2.$$

Mà $f(0) = 1$ nên ta có $C_2 = 1$. Do đó $f^2(x) = x^6 + 4x^3 + 2x + 1$.

Vậy $f^2(1) = 8$.

Câu 22: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int \frac{f(\sqrt{x+1})}{\sqrt{x+1}} dx = \frac{2(\sqrt{x+1}+3)}{x+5} + C$. Nguyên hàm của hàm số $f(2x)$ trên tập $\mathbb{R}^+$ là:

A. $\frac{x+3}{2(x^2+4)} + C$.

B. $\frac{x+3}{x^2+4} + C$.

C. $\frac{2x+3}{4(x^2+1)} + C$.

D. $\frac{2x+3}{8(x^2+1)} + C$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Theo đề ra ta có:

$$\int \frac{f(\sqrt{x+1})}{\sqrt{x+1}} dx = \frac{2(\sqrt{x+1}+3)}{x+5} + C \Leftrightarrow 2 \int f(\sqrt{x+1}) d(\sqrt{x+1}) = \frac{2(\sqrt{x+1}+3)}{(\sqrt{x+1})^2 + 4} + C.$$

$$\text{Hay } 2 \int f(t) dt = \frac{2(t+3)}{t^2+4} + C \Rightarrow \int f(t) dt = \frac{t+3}{t^2+4} + C'.$$

$$\text{Suy ra } \int f(2x) dx = \frac{1}{2} \int f(2x) d(2x) = \frac{1}{2} \left(\frac{2x+3}{(2x)^2+4} + C_1 \right) = \frac{2x+3}{8x^2+8} + C$$

DẠNG 2: ỨNG DỤNG ĐỊNH NGHĨA, TÍNH CHẤT, GIẢI HỆ TÍCH PHÂN

Câu 23: Cho $\int_2^5 f(x) dx = 10$. Kết quả $\int_5^2 [2 - 4f(x)] dx$ bằng:

A. 34.

B. 36.

C. 40.

D. 32.

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \int_5^2 [2 - 4f(x)] dx = 2 \int_5^2 dx - 4 \int_5^2 f(x) dx = -2x \Big|_5^2 + 4 \int_2^5 f(x) dx = -2(5-2) + 4 \cdot 10 = 34.$$

Câu 24: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$, biết $\int_0^9 f(x) dx = 9$ và $F(0) = 3$. Tính $F(9)$.

A. $F(9) = -6$.

B. $F(9) = 6$.

C. $F(9) = 12$.

D. $F(9) = -12$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } I = \int_0^9 f(x) dx = F(x) \Big|_0^9 = F(9) - F(0) = 9 \Leftrightarrow F(9) = 12.$$

Câu 25: Cho $I = \int_0^2 f(x) dx = 3$ và $J = \int_0^2 [4f(x) - 3] dx$. Khi đó J bằng:

A. 2.

B. 6.

C. 8.

D. 4.

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$\text{Ta có } J = \int_0^2 [4f(x) - 3] dx = 4 \int_0^2 f(x) dx - 3 \int_0^2 dx = 4 \cdot 3 - 3x \Big|_0^2 = 6.$$

Câu 26: Cho $\int_2^4 f(x) dx = 10$ và $\int_2^4 g(x) dx = 5$. Tính $I = \int_2^4 [3f(x) - 5g(x)] dx$.

A. $I = 5$.

B. $I = 15$.

C. $I = -5$.

D. $I = 10$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$\text{Có: } I = \int_2^4 [3f(x) - 5g(x)] dx = 3 \int_2^4 f(x) dx - 5 \int_2^4 g(x) dx = 5.$$

Câu 27: Giả sử $\int_0^9 f(x) dx = 37$ và $\int_9^0 g(x) dx = 16$. Khi đó, $I = \int_0^9 [2f(x) + 3g(x)] dx$ bằng:

A. $I = 26$.

B. $I = 58$.

C. $I = 143$.

D. $I = 122$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } I = \int_0^9 [2f(x) + 3g(x)] dx = \int_0^9 2f(x) dx + \int_0^9 3g(x) dx = 2 \int_0^9 f(x) dx - 3 \int_9^0 g(x) dx = 26.$$

Câu 28: Nếu $\int_1^2 f(x) dx = 3$, $\int_2^5 f(x) dx = -1$ thì $\int_1^5 f(x) dx$ bằng:

A. -2.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có $\int_1^5 f(x) dx = \int_1^2 f(x) dx + \int_2^5 f(x) dx = 3 - 1 = 2.$

Câu 29: Cho $\int_1^2 f(x) dx = 1$ và $\int_2^3 f(x) dx = -2$. Giá trị của $\int_1^3 f(x) dx$ bằng

A. 1. **B.** -3. **C.** -1. **D.** 3.

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$\int_1^3 f(x) dx = \int_1^2 f(x) dx + \int_2^3 f(x) dx = -1.$$

Câu 30: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;10]$ và $\int_0^{10} f(x) dx = 7$ và $\int_2^6 f(x) dx = 3$. Tính

$$P = \int_0^2 f(x) dx + \int_6^{10} f(x) dx.$$

A. $P = 7$. **B.** $P = -4$. **C.** $P = 4$. **D.** $P = 10$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \int_0^{10} f(x) dx = 7 \Leftrightarrow \int_0^2 f(x) dx + \int_2^6 f(x) dx + \int_6^{10} f(x) dx = 7$$

$$\Leftrightarrow \int_0^2 f(x) dx + \int_6^{10} f(x) dx = 7 - 3 = 4.$$

Vậy $P = 4$.

Câu 31: Cho $\int_0^1 f(x) dx = 2$, $\int_1^2 f(x) dx = 4$, khi đó $\int_0^2 f(x) dx = ?$

A. 6. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$\int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx = 6.$$

Câu 32: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $\int_0^1 f(x) dx = 2$; $\int_1^3 f(x) dx = 6$. Tính $I = \int_0^3 f(x) dx$.

A. $I = 8$. **B.** $I = 12$. **C.** $I = 36$. **D.** $I = 4$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$I = \int_0^3 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^3 f(x) dx = 2 + 6 = 8.$$

Câu 33: Cho $\int_{-1}^2 f(x) dx = 2$ và $\int_{-1}^2 g(x) dx = -1$. Tính $I = \int_{-1}^2 [x + 2f(x) + 3g(x)] dx$ bằng

A. $I = \frac{11}{2}$. **B.** $I = \frac{7}{2}$. **C.** $I = \frac{17}{2}$. **D.** $I = \frac{5}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có: $I = \frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^2 + 2 \int_{-1}^2 f(x) dx + 3 \int_{-1}^2 g(x) dx = \frac{3}{2} + 4 - 3 = \frac{5}{2}$.

$\int_1^8 f(x) dx = -2$; $\int_1^4 f(x) dx = 3$; $\int_1^4 g(x) dx = 7$

Câu 34: Biết . Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $\int_4^8 f(x) dx = 1$.

B. $\int_1^4 [f(x) + g(x)] dx = 10$.

C. $\int_4^8 f(x) dx = -5$.

D. $\int_1^4 [4f(x) - 2g(x)] dx = -2$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có $\int_4^8 f(x) dx = \int_1^8 f(x) dx - \int_1^4 f(x) dx = -2 - 3 = -5$

Câu 35: Cho hàm số $f(x)$ có $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 3]$, $f(-1) = 3$ và $\int_{-1}^3 f'(x) dx = 10$ giá trị

của $f(3)$ bằng

A. -13 .

B. -7 .

C. 13 .

D. 7 .

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có $\int_{-1}^3 f'(x) dx = 10 \Rightarrow f(x) \Big|_{-1}^3 = 10 \Leftrightarrow f(3) - f(-1) = 10 \Leftrightarrow f(3) = f(-1) + 10 = 13$.

$\int_0^2 f(x) dx = 3$; $\int_0^2 (f(x) + 1) dx = ?$

Câu 36: Cho . Tính ?

A. 4 .

B. 5 .

C. 7 .

D. 1 .

Hướng dẫn giải.

Chọn B

Ta có $\int_0^2 (f(x) + 1) dx = \int_0^2 f(x) dx + \int_0^2 1 dx = 3 + 2 = 5$.

Câu 37: Cho $y = f(x)$, $y = g(x)$ là các hàm số có đạo hàm liên tục trên $[0; 2]$ và

$\int_0^2 g(x) \cdot f'(x) dx = 2$, $\int_0^2 g'(x) \cdot f(x) dx = 3$. Tính tích phân $I = \int_0^2 [f(x) \cdot g(x)]' dx$.

A. $I = -1$.

B. $I = 6$.

C. $I = 5$.

D. $I = 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Xét tích phân $I = \int_0^2 [f(x) \cdot g(x)]' dx = \int_0^2 [f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)] dx$

$= \int_0^2 g'(x) \cdot f(x) dx + \int_0^2 g(x) \cdot f'(x) dx = 5$.

$\int_{-2}^5 f(x) dx = 8$ và $\int_5^{-2} g(x) dx = 3$

Câu 38: Cho hai tích phân . Tính $I = \int_{-2}^5 [f(x) - 4g(x) - 1] dx$.

A. $I = -11$.

B. $I = 13$.

C. $I = 27$.

D. $I = 3$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có: $I = \int_{-2}^5 [f(x) - 4g(x) - 1] dx = \int_{-2}^5 f(x) dx + 4 \int_5^{-2} g(x) dx - x \Big|_{-2}^5 = 8 + 4.3 - (5 + 2) = 13.$

Câu 39: Cho hàm số $f(x) = x^4 - 4x^3 + 2x^2 - x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Tính $\int_0^1 f^2(x) \cdot f'(x) dx$.

- A. $\frac{2}{3}$. B. 2. C. $-\frac{2}{3}$. D. -2.

Hướng dẫn giải:

Chọn C

Ta có $\int_0^1 f^2(x) \cdot f'(x) dx = \int_0^1 f^2(x) \cdot d[f(x)] = \frac{f^3(x)}{3} \Big|_0^1 = \frac{f^3(1) - f^3(0)}{3} = -\frac{2}{3}.$

Câu 40: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 6]$ thỏa mãn $\int_0^6 f(x) dx = 10$ và $\int_2^4 f(x) dx = 6$. Tính

giá trị của biểu thức $P = \int_0^2 f(x) dx + \int_4^6 f(x) dx$.

- A. $P = 4$. B. $P = 16$. C. $P = 8$. D. $P = 10$.

Hướng dẫn giải:

Ta có: $P = \int_0^2 f(x) dx + \int_4^6 f(x) dx = \left(\int_0^6 f(x) dx + \int_6^2 f(x) dx \right) + \int_4^6 f(x) dx$
 $= \int_0^6 f(x) dx + \left(\int_6^4 f(x) dx + \int_4^2 f(x) dx \right) + \int_4^6 f(x) dx = \int_0^6 f(x) dx + \int_4^2 f(x) dx = 10 - 6 = 4$

Chọn A

Câu 41: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 1]$ và có $\int_0^1 [3 - 2f(x)] dx = 5$. Tính $\int_0^1 f(x) dx$.

- A. -1. B. 2. C. 1. D. -2.

Hướng dẫn giải:

Ta có: $\int_0^1 [3 - 2f(x)] dx = 5 \Leftrightarrow \int_0^1 3 dx - 2 \int_0^1 f(x) dx = 5 \Leftrightarrow 3x \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 f(x) dx = 5$
 $\Leftrightarrow -2 \int_0^1 f(x) dx = 5 - 3 = 2 \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = -1$

Chọn A

Câu 42: Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 1]$, có $\int_0^1 f(x) dx = 4$ và $\int_0^1 g(x) dx = -2$

. Tính tích phân $I = \int [f(x) - 3g(x)] dx$.

- A. -10. B. 10. C. 2. D. -2.

Hướng dẫn giải:

$I = \int_0^1 [f(x) - 3g(x)] dx = \int_0^1 f(x) dx - 3 \int_0^1 g(x) dx = 4 - 3(-2) = 10$

Chọn B

Câu 43: Cho hàm số $f(x) = \ln|x + \sqrt{x^2 + 1}|$. Tính tích phân $I = \int_0^1 f'(x) dx$.

- A. $I = \ln \sqrt{2}$. B. $I = \ln(1 + \sqrt{2})$. C. $I = \ln 2$ D. $I = 2 \ln 2$

Hướng dẫn giải:

Ta có: $I = \int_0^1 f'(x) dx = f(x) \Big|_0^1 = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + 1} \right| \Big|_0^1 = \ln(1 + \sqrt{2})$

Chọn B

Câu 44: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1; \ln 3]$ và thỏa mãn $f(1) = e^2$,

$$\int_1^{\ln 3} f'(x) dx = 9 - e^2. \text{ Tính } I = f(\ln 3).$$

A. $I = 9 - 2e^2$.

B. $I = 9$.

C. $I = -9$.

D. $I = 2e^2 - 9$.

Hướng dẫn giải:

Ta có: $\int_1^{\ln 3} f'(x) dx = f(x) \Big|_1^{\ln 3} = f(\ln 3) - f(1) = 9 - e^2$ (gt)

$$\Rightarrow f(\ln 3) - e^2 = 9 - e^2 \Rightarrow f(\ln 3) = 9$$

Chọn B

Câu 45: Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0; 1]$ và thỏa mãn

$$\int_0^1 f'(x).g(x) dx = 1, \int_0^1 f(x).g'(x) dx = -1. \text{ Tính } I = \int_0^1 [f(x).g(x)]' dx.$$

A. $I = -2$.

B. $I = 0$.

C. $I = 3$.

D. $I = 2$.

Hướng dẫn giải:

$$I = \int_0^1 [f(x).g(x)]' dx = \int_0^1 [f(x).g'(x) + f'(x).g(x)] dx$$

$$= \int_0^1 f(x).g'(x) dx + \int_0^1 f'(x).g(x) dx = 1 - 1 = 0$$

Chọn B

Câu 46: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $(0; +\infty)$ và thỏa $\int_0^{x^2} f(t) dt = x.\cos \pi x$. Tính $f(4)$.

A. $f(4) = 123$.

B. $f(4) = \frac{2}{3}$.

C. $f(4) = \frac{3}{4}$.

D. $f(4) = \frac{1}{4}$.

Hướng dẫn giải:

Ta có: $F(t) = \int f(t) dt \Rightarrow F'(t) = f(t)$

$$\text{Đặt } G(x) = \int_0^{x^2} f(t) dt = F(x^2) - F(0)$$

$$\Rightarrow G'(x) = [F(x^2)]' = 2x.f(x^2) \text{ (Tính chất đạo hàm hợp: } f'[u(x)] = f'(u).u'(x))$$

$$\text{Mặt khác, từ gt: } G(x) = \int_0^{x^2} f(t) dt = x.\cos \pi x$$

$$\Rightarrow G'(x) = (x.\cos \pi x)' = -x\pi \sin \pi x + \cos \pi x$$

$$\Rightarrow 2x.f(x^2) = -x\pi \sin \pi x + \cos \pi x \quad (1)$$

Tính $f(4) \Rightarrow$ ứng với $x = 2$

$$\text{Thay } x = 2 \text{ vào (1)} \Rightarrow 4.f(4) = -2\pi \sin 2\pi + \cos 2\pi = 1 \Rightarrow f(4) = \frac{1}{4}$$

Chọn D

Câu 47: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int_0^{f(x)} t^2 dt = x \cdot \cos \pi x$. Tính $f(4)$.

- A. $f(4) = 2\sqrt{3}$. B. $f(4) = -1$. C. $f(4) = \frac{1}{2}$. D. $f(4) = \sqrt[3]{12}$.

Hướng dẫn giải:

$$\int_0^{f(x)} t^2 dt = \frac{t^3}{3} \Big|_0^{f(x)} = \frac{[f(x)]^3}{3} = x \cos \pi x \Rightarrow [f(x)]^3 = 3x \cos \pi x$$

$$\Rightarrow f(x) = \sqrt[3]{3x \cos \pi x} \Rightarrow f(4) = \sqrt[3]{12}$$

Chọn D

Câu 48: Cho hàm số $G(x) = \int_0^x t \cdot \cos(x-t) dt$. Tính $G'\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

- A. $G'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$. B. $G'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$. C. $G'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. D. $G'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$.

Hướng dẫn giải:

Cách 1: Ta có: $F(t) = \int t \cdot \cos(x-t) dt \Rightarrow F'(x) = t \cdot \cos(x-t)$

$$\text{Đặt } G(x) = \int_0^x t \cdot \cos(x-t) dt = F(x) - F(0)$$

$$\Rightarrow G'(x) = [F(x) - F(0)]' = F'(x) - F'(0) = [x \cos(x-x) - 0]' = x' = 1 \Rightarrow G'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

Chọn B

Cách 2: Ta có $G(x) = \int_0^x t \cdot \cos(x-t) dt$. Đặt $u = t \Rightarrow du = dt$, $dv = \cos(x-t) dx$ chọn

$$v = -\sin(x-t)$$

$$\Rightarrow G(x) = -t \cdot \sin(x-t) \Big|_0^x + \int_0^x \sin(x-t) dt = \int_0^x \sin(x-t) dt = \cos(x-t) \Big|_0^x = \cos 0 - \cos x = 1 - \cos x$$

$$\Rightarrow G'(x) = \sin x \Rightarrow G'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

Chọn B

Câu 49: Cho hàm số $G(x) = \int_0^{x^2} \cos \sqrt{t} dt$ ($x > 0$). Tính $G'(x)$.

- A. $G'(x) = x^2 \cdot \cos x$. B. $G'(x) = 2x \cdot \cos x$. C. $G'(x) = \cos x$. D. $G'(x) = \cos x - 1$.

Hướng dẫn giải:

$$\text{Ta có } F(t) = \int \cos \sqrt{t} dt \Rightarrow F'(t) = \cos \sqrt{t} \Rightarrow G(x) = \int_0^{x^2} \cos \sqrt{t} dt = F(x^2) - F(0)$$

$$\Rightarrow G'(x) = [F(x^2) - F(0)]' = [F(x^2)]' - [F(0)]' = [F(x^2)]' = 2x \cdot F'(\sqrt{x^2})$$

$$= 2x \cdot \cos \sqrt{x^2} = 2x \cdot \cos x$$

Chọn B

Câu 50: Cho hàm số $G(x) = \int_1^x \sqrt{1+t^2} dt$. Tính $G'(x)$.

- A. $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. B. $\sqrt{1+x^2}$. C. $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. D. $(x^2+1)\sqrt{x^2+1}$.

Hướng dẫn giải:

$$\text{Đặt } F(t) = \int \sqrt{1+t^2} dt \Rightarrow F'(t) = \sqrt{1+t^2}$$

$$G(x) = \int_1^x \sqrt{1+t^2} dt = F(x) - F(1) \Rightarrow G'(x) = F'(x) - F'(1) = F'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

Chọn A

Câu 51: Cho hàm số $F(x) = \int_1^{\sqrt{x}} \sin t^2 dt$ ($x > 0$). Tính $F'(x)$.

- A. $\sin x$. B. $\frac{\sin x}{2\sqrt{x}}$. C. $\frac{2\sin x}{\sqrt{x}}$. D. $\sin \sqrt{x}$.

Hướng dẫn giải:

$$\text{Đặt } F(t) = \int \sin t^2 dt, G(x) = \int_1^{\sqrt{x}} \sin t^2 dt = F(\sqrt{x}) - F(1)$$

$$\Rightarrow G'(x) = F'(\sqrt{x}) - F'(1) = F'(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})' \cdot \sin(\sqrt{x})^2 = \frac{\sin x}{2\sqrt{x}}$$

Chọn B

Câu 52: Tính đạo hàm của $f(x)$, biết $f(x)$ thỏa $\int_0^x t e^{f(t)} dt = e^{f(x)}$.

- A. $f'(x) = x$. B. $f'(x) = x^2 + 1$. C. $f'(x) = \frac{1}{x}$. D. $f'(x) = \frac{1}{1-x}$.

Hướng dẫn giải:

$$\text{Đặt } F(t) = \int t e^{f(t)} dt \Rightarrow F'(t) = t e^{f(t)} \Rightarrow G(x) = \int_0^x t e^{f(t)} dt = F(x) - F(0)$$

$$\Rightarrow G'(x) = F'(x) = e^{f(x)} \text{ (gt)} \Leftrightarrow x e^{f(x)} = e^{f(x)} \Rightarrow [x e^{f(x)}]' = [e^{f(x)}]'$$

$$\Rightarrow e^{f(x)} + x \cdot f'(x) \cdot e^{f(x)} = f'(x) \cdot e^{f(x)} \Rightarrow 1 + x \cdot f'(x) = f'(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1-x}$$

Chọn D

Câu 53: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[0; +\infty)$ và $\int_0^{x^2} f(t) dt = x \sin(\pi x)$. Tính $f(4)$

- A. $f(\pi) = \frac{\pi-1}{4}$. B. $f(\pi) = \frac{\pi}{2}$. C. $f(\pi) = \frac{\pi}{4}$. D. $f(\pi) = \frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải:**Chọn B**

$$\text{Ta có } \int f(t) dt = F(t) \Rightarrow F'(t) = f(t)$$

$$\text{Khi đó } \int_0^{x^2} f(t) dt = x \sin(\pi x) \Leftrightarrow F(t) \Big|_0^{x^2} = x \sin(\pi x) \Leftrightarrow F(x^2) - F(0) = x \sin(\pi x)$$

$$\Rightarrow F'(x^2) \cdot 2x = \sin(\pi x) + \pi x \cos(\pi x) \Leftrightarrow f(x^2) \cdot 2x = \sin(\pi x) + \pi x \cos(\pi x)$$

$$\Rightarrow f(4) = \frac{\pi}{2}$$

Câu 54: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng $(-2; 3)$. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên khoảng $(-2; 3)$. Tính $I = \int_{-1}^2 [f(x) + 2x] dx$, biết $F(-1) = 1$ và $F(2) = 4$.

A. $I = 6$.

B. $I = 10$.

C. $I = 3$.

D. $I = 9$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$I = \int_{-1}^2 [f(x) + 2x] dx = F(x) \Big|_{-1}^2 + x^2 \Big|_{-1}^2 = F(2) - F(-1) + (4 - 1) = 4 - 1 + 3 = 6.$$

Câu 55: Cho $\int_{-1}^2 f(x) dx = 2$ và $\int_{-1}^2 g(x) dx = -1$. Tính $I = \int_{-1}^2 [x + 2f(x) - 3g(x)] dx$

A. $I = \frac{11}{2}$.

B. $I = \frac{7}{2}$.

C. $I = \frac{17}{2}$.

D. $I = \frac{5}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có: $I = \int_{-1}^2 [x + 2f(x) - 3g(x)] dx = \int_{-1}^2 x dx + 2 \int_{-1}^2 f(x) dx - 3 \int_{-1}^2 g(x) dx = \frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^2 + 4 + 3 = \frac{17}{2}$.

Câu 56: Cho $\int_1^2 [3f(x) + 2g(x)] dx = 1$, $\int_1^2 [2f(x) - g(x)] dx = -3$. Khi đó, $\int_1^2 f(x) dx$ bằng

A. $\frac{11}{7}$.

B. $-\frac{5}{7}$.

C. $\frac{6}{7}$.

D. $\frac{16}{7}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Đặt $a = \int_1^2 f(x) dx$, $b = \int_1^2 g(x) dx$, ta có hệ phương trình $\begin{cases} 3a + 2b = 1 \\ 2a - b = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{5}{7} \\ b = \frac{11}{7} \end{cases}$

Vậy $\int_1^2 f(x) dx = -\frac{5}{7}$.

Câu 57: Cho $f(x)$, $g(x)$ là hai hàm số liên tục trên đoạn $[-1; 1]$ và $f(x)$ là hàm số chẵn, $g(x)$ là hàm số lẻ. Biết $\int_0^1 f(x) dx = 5$; $\int_0^1 g(x) dx = 7$. Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

A. $\int_{-1}^1 f(x) dx = 10$.

B. $\int_{-1}^1 [f(x) + g(x)] dx = 10$.

C. $\int_{-1}^1 [f(x) - g(x)] dx = 10$.

D. $\int_{-1}^1 g(x) dx = 14$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Vì $f(x)$ là hàm số chẵn nên $\int_{-1}^1 f(x) dx = 2 \int_0^1 f(x) dx = 2 \cdot 5 = 10$.

Vì $g(x)$ là hàm số lẻ nên $\int_{-1}^1 g(x) dx = 0$.

$\Rightarrow \int_{-1}^1 [f(x) + g(x)] dx = 10$ và $\int_{-1}^1 [f(x) - g(x)] dx = 10$.

Vậy đáp án D sai.

Câu 58: Cho $f(x)$, $g(x)$ là hai hàm số liên tục trên đoạn $[-1;1]$ và $f(x)$ là hàm số chẵn, $g(x)$ là hàm số lẻ. Biết $\int_0^1 f(x)dx = 5$; $\int_0^1 g(x)dx = 7$. Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

- A. $\int_{-1}^1 f(x)dx = 10$. B. $\int_{-1}^1 [f(x) + g(x)]dx = 10$.
 C. $\int_{-1}^1 [f(x) - g(x)]dx = 10$. **D.** $\int_{-1}^1 g(x)dx = 14$.

Huongd dẫn giải

Chọn D

Vì $f(x)$ là hàm số chẵn nên $\int_{-1}^1 f(x)dx = 2\int_0^1 f(x)dx = 2 \cdot 5 = 10$.

Vì $g(x)$ là hàm số lẻ nên $\int_{-1}^1 g(x)dx = 0$.

$\Rightarrow \int_{-1}^1 [f(x) + g(x)]dx = 10$ và $\int_{-1}^1 [f(x) - g(x)]dx = 10$.

Câu 59: Nếu $\int_0^{10} f(z)dz = 17$ và $\int_0^8 f(t)dt = 12$ thì $\int_8^{10} -3f(x)dx$ bằng
A. -15. **B.** 29. **C.** 15. **D.** 5.

Huongd dẫn giải

Chọn A

$I = -3\int_8^{10} f(x)dx = -3\left(\int_8^0 f(x)dx + \int_0^{10} f(x)dx\right) = -3(-12 + 17) = -15$.

Câu 60: Cho $\int_{-1}^2 f(x)dx = 2$, $\int_{-1}^7 f(t)dt = 9$. Giá trị của $\int_2^7 f(z)dz$ là
A. 11. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 9.

Huongd dẫn giải

Chọn C

Ta có $\int_{-1}^7 f(t)dt = \int_{-1}^2 f(x)dx$ và $\int_2^7 f(z)dz = \int_2^7 f(x)dx$ nên $\int_{-1}^7 f(x)dx = \int_{-1}^2 f(x)dx + \int_2^7 f(x)dx$.

Vậy $\int_2^7 f(z)dz = 7$.

Câu 61: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, luôn dương trên $[0;3]$ và thỏa mãn $I = \int_0^3 f(x)dx = 4$. Khi

đó giá trị của tích phân $K = \int_0^3 (e^{1+\ln(f(x))} + 4)dx$ là:

- A.** $4 + 12e$. **B.** $12 + 4e$. **C.** $3e + 14$. **D.** $14 + 3e$.

Huongd dẫn giải

Chọn B

Ta có $K = \int_0^3 (e^{1+\ln(f(x))} + 4)dx = \int_0^3 e^{1+\ln(f(x))}dx + \int_0^3 4dx = e \cdot \int_0^3 f(x)dx + \int_0^3 4dx = 4e + 4x \Big|_0^3 = 4e + 12$.

Vậy $K = 4e + 12$.

Câu 62: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa

$$\begin{cases} f(0) = f'(0) = 1; \\ f(x+y) = f(x) + f(y) + 3xy(x+y) - 1, \forall x, y \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Tính $\int_0^1 f(x-1)dx$.

A. $\frac{1}{2}$.

B. $-\frac{1}{4}$.

C. $\frac{1}{4}$.

D. $\frac{7}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Lấy đạo hàm theo hàm số y

$$f'(x+y) = f'(y) + 3x^2 + 6xy, \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Cho } y=0 \Rightarrow f'(x) = f'(0) + 3x^2 \Rightarrow f'(x) = 1 + 3x^2$$

$$\text{Vậy } f(x) = \int f'(x)dx = x^3 + x + C \text{ mà } f(0) = 1 \Rightarrow C = 1 \text{ suy ra } f(x) = x^3 + x + 1.$$

$$\int_0^1 f(x-1)dx = \int_{-1}^0 f(x)dx = \int_{-1}^0 (x^3 + x + 1)dx = \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + x \right) \Big|_{-1}^0 = -\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{4}.$$

Câu 63: Cho hàm số $f(x)$ là hàm bậc nhất thỏa mãn $\int_0^1 (x+1)f'(x)dx = 10$ và $2f(1) - f(0) = 2$.

Tính $I = \int_0^1 f(x)dx$.

A. $I = 1$.

B. $I = 8$.

C. $I = -12$.

D. $I = -8$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

$$\text{Gọi } f(x) = ax + b, (a \neq 0) \Rightarrow f'(x) = a.$$

Theo giả thiết ta có:

$$+) \int_0^1 (x+1)f'(x)dx = 10 \Leftrightarrow a \int_0^1 (x+1)dx = 10 \Leftrightarrow \int_0^1 (x+1)dx = \frac{10}{a} \Leftrightarrow \frac{3}{2} = \frac{10}{a} \Rightarrow a = \frac{20}{3}.$$

$$+) 2f(1) - f(0) = 2 \Leftrightarrow 2\left(\frac{20}{3} + b\right) - b = 2 \Leftrightarrow b = -\frac{34}{3}.$$

$$\text{Do đó, } f(x) = \frac{20}{3}x - \frac{34}{3}.$$

$$\text{Vậy } I = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \left(\frac{20}{3}x - \frac{34}{3}\right)dx = -8.$$

Câu 64: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, thỏa mãn $f'(x) = \frac{1}{x^3 + x^5}$, $f(1) = a$ và

$$f(-2) = b. \text{ Tính } f(-1) + f(2).$$

A. $f(-1) + f(2) = -a - b$.

B. $f(-1) + f(2) = a - b$.

C. $f(-1) + f(2) = a + b$. **D.** $f(-1) + f(2) = b - a$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$\text{Ta có } f'(-x) = \frac{1}{(-x)^3 + (-x)^5} = -\frac{1}{x^3 + x^5} = -f'(x) \text{ nên } f'(x) \text{ là hàm lẻ.}$$

$$\text{Do đó } \int_{-2}^2 f'(x)dx = 0 \Leftrightarrow \int_{-2}^{-1} f'(x)dx = -\int_1^2 f'(x)dx.$$

Suy ra $f(-1) - f(-2) = -f(2) + f(1) \Rightarrow f(-1) + f(2) = f(-2) + f(1) = a + b$.

Câu 65: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ và thỏa mãn $f'(x) = \frac{1}{x^2 + x^4}$, $f(1) = a$,

$f(-2) = b$. Giá trị của biểu thức $f(-1) - f(2)$ bằng

- A.** $b - a$. **B.** $a + b$. **C.** $a - b$. **D.** $-a - b$.

Huongd dẫn giải

Chọn A

Ta có $f'(-x) = \frac{1}{(-x)^2 + (-x)^4} = \frac{1}{x^2 + x^4} = f'(x)$ nên $f'(x)$ là hàm chẵn.

Do đó $\int_{-2}^{-1} f'(x) dx = \int_1^2 f'(x) dx$.

Suy ra $f(-1) - f(2) = f(-1) - f(-2) + f(-2) - f(1) + f(1) - f(2)$
 $= \int_{-2}^{-1} f'(x) dx + b - a - \int_1^2 f'(x) dx = b - a$.

Câu 66: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện

$f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}; f'(x) = -e^x \cdot f^2(x), \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = \frac{1}{2}$. Tính giá trị của $f(\ln 2)$.

- A.** $f(\ln 2) = \frac{2}{9}$. **B.** $f(\ln 2) = -\frac{2}{9}$. **C.** $f(\ln 2) = \frac{2}{3}$. **D.** $f(\ln 2) = \frac{1}{3}$.

Huongd dẫn giải

Chọn D

$f'(x) = -e^x \cdot f^2(x) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = -e^x \Leftrightarrow \int_0^{\ln 2} \frac{f'(x)}{f^2(x)} dx = -\int_0^{\ln 2} e^x dx \Leftrightarrow \int_0^{\ln 2} \frac{df(x)}{f^2(x)} = -e^x \Big|_0^{\ln 2}$
 $\Leftrightarrow -\frac{1}{f(x)} \Big|_0^{\ln 2} = -1 \Leftrightarrow \frac{1}{f(\ln 2)} - \frac{1}{f(0)} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{f(\ln 2)} = 3 \Leftrightarrow f(\ln 2) = \frac{1}{3}$.

Câu 67: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C), xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện $f(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = (x \cdot f(x))^2, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 2$. Phương trình tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x = 1$ của đồ thị (C) là.

- A.** $y = 6x + 30$. **B.** $y = -6x + 30$. **C.** $y = 36x - 30$. **D.** $y = -36x + 42$.

Huongd dẫn giải

Chọn C

$f'(x) = (x \cdot f(x))^2 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = x^2 \Leftrightarrow \int_0^1 \frac{f'(x)}{f^2(x)} dx = \int_0^1 x^2 dx \Leftrightarrow \int_0^1 \frac{df(x)}{f^2(x)} = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 \Leftrightarrow -\frac{1}{f(x)} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$
 $\Leftrightarrow \frac{1}{f(1)} - \frac{1}{f(0)} = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{f(1)} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow f(1) = 6$.
 $f'(1) = (1 \cdot f(1))^2 = 36$.

Vậy phương trình tiếp tuyến cần lập là $y = 36x - 30$.

Câu 68: Cho hàm số $y = f(x) > 0$ xác định, có đạo hàm trên đoạn $[0; 1]$ và thỏa mãn:

$g(x) = 1 + 2018 \int_0^x f(t) dt, g(x) = f^2(x)$. Tính $\int_0^1 \sqrt{g(x)} dx$.

A. $\frac{1011}{2}$.

B. $\frac{1009}{2}$.

C. $\frac{2019}{2}$.

D. 505.

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$\begin{aligned} \text{Ta có } g(x) &= 1 + 2018 \int_0^x f(t) dt \Rightarrow g'(x) = 2018 f(x) = 2018 \sqrt{g(x)} \\ \Rightarrow \frac{g'(x)}{\sqrt{g(x)}} &= 2018 \Rightarrow \int_0^t \frac{g'(x)}{\sqrt{g(x)}} dx = 2018 \int_0^t dx \Rightarrow 2 \left(\sqrt{g(x)} \right) \Big|_0^t = 2018x \Big|_0^t \\ \Rightarrow 2 \left(\sqrt{g(t)} - 1 \right) &= 2018t \text{ (do } g(0) = 1) \\ \Rightarrow \sqrt{g(t)} &= 1009t + 1 \\ \Rightarrow \int_0^1 \sqrt{g(t)} dt &= \left(\frac{1009}{2} t^2 + t \right) \Big|_0^1 = \frac{1011}{2}. \end{aligned}$$

Câu 69: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên đoạn $[-1; 1]$, thỏa mãn $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f'(x) + 2f(x) = 0$. Biết $f(1) = 1$, tính $f(-1)$.

A. $f(-1) = e^{-2}$.

B. $f(-1) = e^3$.

C. $f(-1) = e^4$.

D. $f(-1) = 3$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Biến đổi:

$$\begin{aligned} f'(x) + 2f(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = -2 \Leftrightarrow \int_{-1}^1 \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int_{-1}^1 -2 dx \Leftrightarrow \int_{-1}^1 \frac{df(x)}{f(x)} = -4 \Leftrightarrow \ln f(x) \Big|_{-1}^1 = -4 \\ \ln \frac{f(1)}{f(-1)} &= -4 \Leftrightarrow \frac{f(1)}{f(-1)} = e^{-4} \Leftrightarrow f(-1) = f(1) \cdot e^4 = e^4. \end{aligned}$$

Câu 70: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0; 1]$ đồng thời thỏa mãn $f'(0) = 9$ và $9f''(x) + [f'(x) - x]^2 = 9$. Tính $T = f(1) - f(0)$.

A. $T = 2 + 9 \ln 2$.

B. $T = 9$.

C. $T = \frac{1}{2} + 9 \ln 2$.

D. $T = 2 - 9 \ln 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$\text{Ta có } 9f''(x) + [f'(x) - x]^2 = 9 \Rightarrow 9(f''(x) - 1) = -[f'(x) - x]^2 \Rightarrow -\frac{f''(x) - 1}{[f'(x) - x]^2} = \frac{1}{9}.$$

$$\text{Lấy nguyên hàm hai vế } -\int \frac{f''(x) - 1}{[f'(x) - x]^2} dx = \int \frac{1}{9} dx \Rightarrow \frac{1}{f'(x) - x} = \frac{x}{9} + C.$$

$$\text{Do } f'(0) = 9 \text{ nên } C = \frac{1}{9} \text{ suy ra } f'(x) - x = \frac{9}{x+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{9}{x+1} + x$$

$$\text{Vậy } T = f(1) - f(0) = \int_0^1 \left(\frac{9}{x+1} + x \right) dx = \left(9 \ln|x+1| + \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 = 9 \ln 2 + \frac{1}{2}.$$

Câu 71: Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f'(x) \cdot f(x) = x^4 + x^2$. Biết $f(0) = 2$. Tính $f^2(2)$.

A. $f^2(2) = \frac{313}{15}$.

B. $f^2(2) = \frac{332}{15}$.

C. $f^2(2) = \frac{324}{15}$.

D. $f^2(2) = \frac{323}{15}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có

$$f'(x) \cdot f(x) = x^4 + x^2 \Rightarrow \int_0^2 f'(x) \cdot f(x) dx = \int_0^2 (x^4 + x^2) dx \Leftrightarrow \int_0^2 f(x) df(x) = \frac{136}{15} \Leftrightarrow \frac{f^2(x)}{2} \Big|_0^2 = \frac{136}{15}$$

$$\frac{f^2(2) - 4}{2} = \frac{136}{15} \Leftrightarrow f^2(2) = \frac{332}{15}.$$

Câu 72: Cho $f(x)$ xác định, có đạo hàm, liên tục và đồng biến trên $[1; 4]$ thỏa mãn

$$x + 2xf(x) = [f'(x)]^2, \forall x \in [1; 4], f(1) = \frac{3}{2}. \text{ Giá trị } f(4) \text{ bằng:}$$

A. $\frac{391}{18}$

B. $\frac{361}{18}$

C. $\frac{381}{18}$

D. $\frac{371}{18}$

Huongd dẫn giải**Chọn A**

Biến đổi:

$$x + 2xf(x) = [f'(x)]^2 \Leftrightarrow x(1 + 2f(x)) = [f'(x)]^2 \Leftrightarrow \frac{[f'(x)]^2}{1 + 2f(x)} = x \Rightarrow \frac{f'(x)}{\sqrt{1 + 2f(x)}} = \sqrt{x}.$$

$$\Rightarrow \int_1^4 \frac{f'(x)}{\sqrt{1 + 2f(x)}} dx = \int_1^4 \sqrt{x} dx \Leftrightarrow \sqrt{1 + 2f(x)} \Big|_1^4 = \frac{14}{3} \Leftrightarrow \sqrt{1 + 2f(4)} - 2 = \frac{14}{3} \Leftrightarrow f(4) = \frac{391}{18}.$$

Chọn A**Chú ý:** Nếu không nhìn được ra luôn $I = \int_1^4 \frac{f'(x)}{\sqrt{1 + 2f(x)}} dx = \sqrt{1 + 2f(x)} \Big|_1^4 = \sqrt{1 + 2f(4)} - 2$ thì ta có

thể sử dụng kỹ thuật vi phân hoặc đổi biến (bản chất là một).

+ Vi phân: $\int_1^4 \frac{f'(x)}{\sqrt{1 + 2f(x)}} dx = \int_1^4 \frac{df(x)}{\sqrt{1 + 2f(x)}} = \frac{1}{2} \int_1^4 (1 + 2f(x))^{-\frac{1}{2}} d(1 + 2f(x)) = \sqrt{1 + 2f(x)} \Big|_1^4.$

+ Đổi biến: Đặt $t = \sqrt{1 + 2f(x)} \Rightarrow t^2 = 1 + 2f(x) \Leftrightarrow tdt = f'(x)dx$

với $x = 1 \Rightarrow t = \sqrt{1 + 2f(1)} = 2; x = 4 \Rightarrow t = \sqrt{1 + 2f(4)}.$

Khi đó $I = \int_2^{\sqrt{1 + 2f(4)}} \frac{tdt}{t} = \int_2^{\sqrt{1 + 2f(4)}} dt = t \Big|_2^{\sqrt{1 + 2f(4)}} = \sqrt{1 + 2f(4)} - 2.$

Câu 73: Cho hàm số $y = f(x)$ có $f'(x)$ liên tục trên nửa khoảng $[0; +\infty)$ thỏa mãn

$$3f(x) + f'(x) = \sqrt{1 + 3e^{-2x}}. \text{ Khi đó:}$$

A. $e^3 f(1) - f(0) = \frac{1}{\sqrt{e^2 + 3}} - \frac{1}{2}.$

B. $e^3 f(1) - f(0) = \frac{1}{2\sqrt{e^2 + 3}} - \frac{1}{4}.$

C. $e^3 f(1) - f(0) = \frac{(e^2 + 3)\sqrt{e^2 + 3} - 8}{3}.$

D. $e^3 f(1) - f(0) = (e^2 + 3)\sqrt{e^2 + 3} - 8.$

Huongd dẫn giải**Chọn C**

Ta có: $3f(x) + f'(x) = \sqrt{1 + 3e^{-2x}} = \frac{\sqrt{e^{2x} + 3}}{e^x} \Rightarrow 3e^{3x} f(x) + e^{3x} f'(x) = e^{2x} \sqrt{e^{2x} + 3}.$

$$\Leftrightarrow [e^{3x} f(x)]' = e^{2x} \sqrt{e^{2x} + 3}.$$

Lấy tích phân từ 0 đến 1 hai vế ta được $\int_0^1 [e^{3x} f(x)]' dx = \int_0^1 e^{2x} \sqrt{e^{2x} + 3} dx$

$$\Leftrightarrow [e^{3x} f(x)]_0^1 = \frac{1}{3} (\sqrt{e^{2x} + 3})^3 \Big|_0^1 \Leftrightarrow e^3 f(1) - f(0) = \frac{(e^2 + 3)\sqrt{e^2 + 3} - 8}{3}.$$

Câu 74: Cho hàm số f liên tục, $f(x) > -1$, $f(0) = 0$ và thỏa $f'(x)\sqrt{x^2 + 1} = 2x\sqrt{f(x) + 1}$. Tính $f(\sqrt{3})$.

A. 0.

B. 3.

C. 7.

D. 9.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có $f'(x)\sqrt{x^2 + 1} = 2x\sqrt{f(x) + 1} \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x) + 1}} = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\sqrt{3}} \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x) + 1}} dx = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx \Leftrightarrow \sqrt{f(x) + 1} \Big|_0^{\sqrt{3}} = \sqrt{x^2 + 1} \Big|_0^{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \sqrt{f(x) + 1} \Big|_0^{\sqrt{3}} = 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{f(\sqrt{3}) + 1} - \sqrt{f(0) + 1} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{f(\sqrt{3}) + 1} = 2 \Leftrightarrow f(\sqrt{3}) = 3.$$

Câu 75: Cho hàm số $f(x) \neq 0$ thỏa mãn điều kiện $f'(x) = (2x + 3)f^2(x)$ và $f(0) = -\frac{1}{2}$. Biết rằng

tổng $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(2017) + f(2018) = \frac{a}{b}$ với $(a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}^*)$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. $\frac{a}{b} < -1$.

B. $\frac{a}{b} > 1$.

C. $a + b = 1010$.

D. $b - a = 3029$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có $f'(x) = (2x + 3)f^2(x) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = 2x + 3$

$$\Leftrightarrow \int \frac{f'(x)}{f^2(x)} dx = \int (2x + 3) dx \Leftrightarrow -\frac{1}{f(x)} = x^2 + 3x + C.$$

Vì $f(0) = -\frac{1}{2} \Rightarrow C = 2$.

Vậy $f(x) = -\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+1}$.

Do đó $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(2017) + f(2018) = \frac{1}{2020} - \frac{1}{2} = -\frac{1009}{2020}$.

Vậy $a = -1009$; $b = 2020$. Do đó $b - a = 3029$.

Câu 76: Biết luôn có hai số a và b để $F(x) = \frac{ax+b}{x+4}$ ($4a - b \neq 0$) là nguyên hàm của hàm số $f(x)$

và thỏa mãn: $2f^2(x) = [F(x) - 1]f'(x)$.

Khẳng định nào dưới đây đúng và đầy đủ nhất?

A. $a = 1, b = 4$.

B. $a = 1, b = -1$.

C. $a = 1, b \in \mathbb{R} \setminus \{4\}$.

D. $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có $F(x) = \frac{ax+b}{x+4}$ là nguyên hàm của $f(x)$ nên $f(x) = F'(x) = \frac{4a-b}{(x+4)^2}$ và $f'(x) = \frac{2b-8a}{(x+4)^3}$.

$$\text{Do đó: } 2f^2(x) = (F(x)-1)f'(x) \Leftrightarrow \frac{2(4a-b)^2}{(x+4)^4} = \left(\frac{ax+b}{x+4} - 1\right) \frac{2b-8a}{(x+4)^3}$$

$$\Leftrightarrow 4a-b = -(ax+b-x-4) \Leftrightarrow (x+4)(1-a) = 0 \Leftrightarrow a=1 \text{ (do } x+4 \neq 0)$$

Với $a=1$ mà $4a-b \neq 0$ nên $b \neq 4$.

Vậy $a=1, b \in \mathbb{R} \setminus \{4\}$.

Chú ý: Ta có thể làm trắc nghiệm như sau:

+ Vì $4a-b \neq 0$ nên loại được ngay phương án A: $a=1, b=4$ và phương án D: $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$.

+ Để kiểm tra hai phương án còn lại, ta lấy $b=0, a=1$. Khi đó, ta có

$$F(x) = \frac{x}{x+4}, f(x) = \frac{4}{(x+4)^2}, f'(x) = -\frac{8}{(x+4)^3}.$$

Thay vào $2f^2(x) = (F(x)-1)f'(x)$ thấy đúng nên

Chọn C

Câu 77: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[1; 2]$ thỏa mãn $f(1) = 4$ và $f(x) = xf'(x) - 2x^3 - 3x^2$. Tính $f(2)$

A. 5.

B. 20.

C. 10.

D. 15.

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$\text{Do } x \in [1; 2] \text{ nên } f(x) = xf'(x) - 2x^3 - 3x^2 \Leftrightarrow \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = 2x + 3 \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x}\right)' = 2x + 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} = x^2 + 3x + C.$$

$$\text{Do } f(1) = 4 \text{ nên } C = 0 \Rightarrow f(x) = x^3 + 3x^2.$$

$$\text{Vậy } f(2) = 20.$$

Câu 78: Cho $f(x) = \frac{x}{\cos^2 x}$ trên $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ và $F(x)$ là một nguyên hàm của $xf'(x)$ thỏa mãn

$$F(0) = 0. \text{ Biết } a \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \text{ thỏa mãn } \tan a = 3. \text{ Tính } F(a) - 10a^2 + 3a.$$

A. $-\frac{1}{2}\ln 10$.

B. $-\frac{1}{4}\ln 10$.

C. $\frac{1}{2}\ln 10$.

D. $\ln 10$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } F(x) = \int xf'(x)dx = \int xdf(x) = xf(x) - \int f(x)dx$$

$$\text{Ta lại có: } \int f(x)dx = \int \frac{x}{\cos^2 x}dx = \int x d(\tan x) = x \tan x - \int \tan x dx = x \tan x - \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$$

$$= x \tan x + \int \frac{1}{\cos x} d(\cos x) = x \tan x + \ln|\cos x| + C \Rightarrow F(x) = xf(x) - x \tan x - \ln|\cos x| + C$$

$$\text{Lại có: } F(0) = 0 \Rightarrow C = 0, \text{ do đó: } F(x) = xf(x) - x \tan x - \ln|\cos x|.$$

$$\Rightarrow F(a) = af(a) - a \tan a - \ln|\cos a|$$

Khi đó $f(a) = \frac{a}{\cos^2 a} = a(1 + \tan^2 a) = 10a$ và $\frac{1}{\cos^2 a} = 1 + \tan^2 a = 10 \Leftrightarrow \cos^2 a = \frac{1}{10}$
 $\Leftrightarrow |\cos a| = \frac{1}{\sqrt{10}}$.

Vậy $F(a) - 10a^2 + 3a = 10a^2 - 3a - \ln \left| \frac{1}{\sqrt{10}} \right| - 10a^2 + 3a = \frac{1}{2} \ln 10$.

Câu 79: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau

$f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -e^x \cdot f^2(x) \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = \frac{1}{2}$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị tại điểm có hoành độ $x_0 = \ln 2$ là

A. $2x + 9y - 2 \ln 2 - 3 = 0$.

B. $2x - 9y - 2 \ln 2 + 3 = 0$.

C. $2x - 9y + 2 \ln 2 - 3 = 0$.

D. $2x + 9y + 2 \ln 2 - 3 = 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có $f'(x) = -e^x \cdot f^2(x) \Leftrightarrow -\frac{f'(x)}{f^2(x)} = e^x \Rightarrow \int_0^{\ln 2} \left[-\frac{f'(x)}{f^2(x)} \right] dx = \int_0^{\ln 2} e^x dx \Rightarrow \left(\frac{1}{f(x)} \right) \Big|_0^{\ln 2} = (e^x) \Big|_0^{\ln 2}$
 $\Rightarrow \frac{1}{f(\ln 2)} - \frac{1}{f(0)} = 1 \Rightarrow f(\ln 2) = \frac{1}{3}$.

Từ đó ta có $f'(\ln 2) = -e^{\ln 2} f^2(\ln 2) = -2 \cdot \left(\frac{1}{3} \right)^2 = -\frac{2}{9}$.

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y = -\frac{2}{9}(x - \ln 2) + \frac{1}{3} \Leftrightarrow 2x + 9y - 2 \ln 2 - 3 = 0$.

Câu 80: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0; 1]$, $f(x)$ và $f'(x)$ đều nhận giá trị dương trên đoạn $[0; 1]$ và thỏa mãn $f(0) = 2$,

$\int_0^1 [f'(x) \cdot [f(x)]^2 + 1] dx = 2 \int_0^1 \sqrt{f'(x)} \cdot f(x) dx$. Tính $\int_0^1 [f(x)]^3 dx$.

A. $\frac{15}{4}$.

B. $\frac{15}{2}$.

C. $\frac{17}{2}$.

D. $\frac{19}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Theo giả thiết, ta có $\int_0^1 [f'(x) \cdot [f(x)]^2 + 1] dx = 2 \int_0^1 \sqrt{f'(x)} \cdot f(x) dx$

$\Leftrightarrow \int_0^1 [f'(x) \cdot [f(x)]^2 + 1] dx - 2 \int_0^1 \sqrt{f'(x)} \cdot f(x) dx = 0$

$\Leftrightarrow \int_0^1 [f'(x) \cdot [f(x)]^2 - 2\sqrt{f'(x)} \cdot f(x) + 1] dx = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 [\sqrt{f'(x)} \cdot f(x) - 1]^2 dx = 0$

$\Rightarrow \sqrt{f'(x)} \cdot f(x) - 1 = 0 \Rightarrow f^2(x) \cdot f'(x) = 1 \Rightarrow \frac{f^3(x)}{3} = x + C$. Mà $f(0) = 2 \Rightarrow C = \frac{8}{3}$.

Vậy $f^3(x) = 3x + 8$.

Vậy $\int_0^1 [f(x)]^3 dx = \int_0^1 (3x + 8) dx = \left(\frac{3x^2}{2} + 8x \right) \Big|_0^1 = \frac{19}{2}$.

Câu 81: Cho $f(x)$ không âm thỏa mãn điều kiện $f(x) \cdot f'(x) = 2x\sqrt{f^2(x)+1}$ và $f(0) = 0$. Tổng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên $[1;3]$ là

- A. 22 B. $4\sqrt{11} + \sqrt{3}$ C. $20 + \sqrt{2}$ D. $3\sqrt{11} + \sqrt{3}$

Huongd dẫn giải

Chọn D

Biến đổi:

$$f(x) \cdot f'(x) = 2x\sqrt{f^2(x)+1} \Leftrightarrow \frac{f(x) \cdot f'(x)}{\sqrt{f^2(x)+1}} = 2x \Rightarrow \int \frac{f(x) \cdot f'(x)}{\sqrt{f^2(x)+1}} dx = \int 2x dx \Leftrightarrow \sqrt{f^2(x)+1} = x^2 + C$$

$$\text{Với } f(0) = 0 \Rightarrow C = 1 \Rightarrow \sqrt{f^2(x)+1} = x^2 + 1 \Rightarrow f^2(x) = x^4 + 2x^2 = g(x)$$

Ta có: $g'(x) = 4x^3 + 4x > 0, \forall x \in [1;3]$. Suy ra $g(x)$ đồng biến trên $[1;3]$

$$\text{Suy ra: } g(1) \leq g(x) = f^2(x) \leq g(3) \Rightarrow 3 \leq f^2(x) \leq 99 \xrightarrow{f(x) \geq 0} \sqrt{3} \leq f(x) \leq 3\sqrt{11}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \min_{[1;3]} f(x) = \sqrt{3} \\ \max_{\sqrt{3}} f(x) = 3\sqrt{11} \end{cases}$$

Chú ý: Nếu không tìm được ra luôn $\int \frac{f(x) \cdot f'(x)}{\sqrt{f^2(x)+1}} dx = \sqrt{f^2(x)+1} + C$ thì ta có thể sử dụng kỹ thuật

vi phân hoặc đổi biến (bản chất là một)

$$+) \text{Vi phân: } \int \frac{f(x) \cdot f'(x)}{\sqrt{f^2(x)+1}} dx = \int \frac{f(x)}{\sqrt{f^2(x)+1}} d(f(x)) = \frac{1}{2} \int (f^2(x)+1)^{-\frac{1}{2}} d(f^2(x)+1) = \sqrt{f^2(x)+1} + C$$

$$+ \text{Đổi biến: Đặt } t = \sqrt{f^2(x)+1} \Rightarrow t^2 = f^2(x)+1 \Rightarrow t dt = f(x) f'(x) dx$$

$$\text{Suy ra: } \int \frac{f(x) \cdot f'(x)}{\sqrt{f^2(x)+1}} dx = \int \frac{t dt}{t} = \int dt = t + C = \sqrt{f^2(x)+1} + C$$

Câu 82: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm và đồng biến trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(0) = 1$ và

$$(f'(x))^2 = e^x f(x), \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Tính tích phân } \int_0^1 f(x) dx \text{ bằng}$$

- A. $e-2$. B. $e-1$. C. e^2-2 . D. e^2-1 .

Huongd dẫn giải

Chọn B

$$\text{Biến đổi } (f'(x))^2 = e^x f(x) \Leftrightarrow \frac{(f'(x))^2}{f(x)} = e^x \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} = \sqrt{e^x} \Rightarrow \int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx = \int \sqrt{e^x} dx$$

$$\Leftrightarrow \int (f(x))^{-\frac{1}{2}} df(x) = \int e^{\frac{x}{2}} dx \Leftrightarrow 2\sqrt{f(x)} = 2e^{\frac{x}{2}} + C$$

$$\text{Với } f(0) = 1 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow \sqrt{f(x)} = e^{\frac{x}{2}} \Leftrightarrow f(x) = e^x$$

$$\text{Suy ra } \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 e^x dx = e^x \Big|_0^1 = e-1$$

Câu 83: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ thỏa mãn

$$x^2 f^2(x) + (2x-1)f(x) = x f'(x) - 1 \text{ với } \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ và } f(1) = -2. \text{ Tính } \int_1^2 f(x) dx.$$

A. $-\frac{1}{2} - \ln 2$.

B. $-\frac{3}{2} - \ln 2$.

C. $-1 - \frac{\ln 2}{2}$.

D. $-\frac{3}{2} - \frac{\ln 2}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có $x^2 f'(x) + (2x-1)f(x) = xf'(x) - 1 \Leftrightarrow (xf(x)+1)^2 = f(x) + xf'(x) (*)$

Đặt $h(x) = f(x) + xf'(x) \Rightarrow h'(x) = f(x) + xf'(x)$, khi đó $(*)$ có dạng

$$h^2(x) = h'(x) \Rightarrow \frac{h'(x)}{h^2(x)} = 1 \Rightarrow \int \frac{h'(x)}{h^2(x)} dx = \int 1 dx \Rightarrow \int \frac{dh(x)}{h^2(x)} = x + C \Leftrightarrow -\frac{1}{h(x)} = x + C$$

$$\Rightarrow h(x) = -\frac{1}{x+C} \Rightarrow xf(x)+1 = -\frac{1}{x+C}$$

$$\text{Vì } f(1) = -2 \text{ nên } -2+1 = -\frac{1}{1+C} \Rightarrow C = 0$$

$$\text{Khi đó } xf(x)+1 = -\frac{1}{x} \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}$$

$$\text{Suy ra: } \int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 \left(-\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} \right) dx = \left(\frac{1}{x} - \ln x \right) \Big|_1^2 = -\frac{1}{2} - \ln 2$$

Câu 84: Cho hàm số $y = f(x)$. Có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(1) = e$ và $(x+2)f(x) = xf'(x) - x^3, \forall x \in \mathbb{R}$. Tính $f(2)$.

A. $4e^2 - 4e + 4$.

B. $4e^2 - 2e + 1$.

C. $2e^3 - 2e + 2$.

D. $4e^2 + 4e - 4$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } (x+2)f(x) = xf'(x) - x^3 \Leftrightarrow \frac{xf'(x) - (x+2)f(x)}{x^3} = 1 \Leftrightarrow \left[\frac{e^{-x}f(x)}{x^2} \right]' = e^{-x}$$

$$\text{Suy ra } \int_1^2 \left[\frac{e^{-x}f(x)}{x^2} \right]' dx = \int_1^2 e^{-x} dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^{-2}f(2)}{2^2} - \frac{e^{-1}f(1)}{1^2} = -[e^{-2} - e^{-1}]$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^{-2}f(2)}{4} - \frac{e^{-1}f(1)}{1} = e^{-1} - e^{-2}$$

$$\Leftrightarrow f(2) = 4[ef(1) + e - 1] = 4e^2 + 4e - 4.$$

Câu 85: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn $f(0) = 0$. Biết

$$\int_0^1 f^2(x) dx = \frac{9}{2} \text{ và } \int_0^1 f'(x) \cos \frac{\pi x}{2} dx = \frac{3\pi}{4}. \text{ Tích phân } \int_0^1 f(x) dx \text{ bằng}$$

A. $\frac{1}{\pi}$.

B. $\frac{4}{\pi}$.

C. $\frac{6}{\pi}$.

D. $\frac{2}{\pi}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \int_0^1 f'(x) \cos \frac{\pi x}{2} dx &= \int_0^1 \cos \frac{\pi x}{2} d(f(x)) = \cos \frac{\pi x}{2} \cdot f(x) \Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi x}{2} \cdot f(x) dx \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^1 \sin \frac{\pi x}{2} \cdot f(x) dx. \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } \int_0^1 \sin \frac{\pi x}{2} \cdot f(x) dx = \frac{3}{2}$$

$$\text{Mặt khác } \int_0^1 \left(\sin \frac{\pi x}{2} \right)^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (1 - \cos \pi x) dx = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Do đó } \int_0^1 f^2(x) dx - 2 \int_0^1 3 \sin \frac{\pi x}{2} f(x) dx + \int_0^1 \left[3 \sin \frac{\pi x}{2} \right]^2 dx = 0.$$

$$\text{hay } \int_0^1 \left[f(x) - 3 \sin \frac{\pi x}{2} \right]^2 dx = 0 \text{ suy ra } f(x) = 3 \sin \frac{\pi x}{2}.$$

$$\text{Vậy } \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 3 \sin \frac{\pi x}{2} dx = -\frac{6}{\pi} \cos \frac{\pi x}{2} \Big|_0^1 = \frac{6}{\pi}.$$

Câu 86: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 1]$, thỏa mãn $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 xf(x) dx = 1$ và

$$\int_0^1 [f(x)]^2 dx = 4. \text{ Giá trị của tích phân } \int_0^1 [f(x)]^3 dx \text{ bằng}$$

A. 1.

B. 8.

C. 10.

D. 80.

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$\begin{aligned} \text{Xét } \int_0^1 [f(x) + (ax + b)]^2 dx &= \int_0^1 [f(x)]^2 dx + 2 \int_0^1 [f(x) \cdot (ax + b)] dx + \int_0^1 (ax + b)^2 dx \\ &= 4 + 2a \int_0^1 xf(x) dx + 2b \int_0^1 f(x) dx + \frac{1}{3a} (ax + b)^3 \Big|_0^1 = 4 + 2(a + b) + \frac{a^2}{3} + ab + b^2. \end{aligned}$$

$$\text{Cần xác định } a, b \text{ để } \frac{a^2}{3} + (2 + b)a + b^2 + 2b + 4 = 0$$

$$\text{Ta có: } \Delta = b^2 + 4b + 4 - \frac{4}{3}(b^2 + 2b + 4) = \frac{-(b - 2)^2}{3} \leq 0 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow a = -6.$$

$$\text{Khi đó: } \int_0^1 [f(x) + (-6x + 2)]^2 dx = 0 \Rightarrow f(x) = 6x - 2$$

$$\text{Suy ra } \int_0^1 [f(x)]^3 dx = \int_0^1 (6x - 2)^3 dx = \frac{1}{24} (6x - 2)^4 \Big|_0^1 = 10.$$

Câu 87: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1, 2]$ và thỏa mãn $f(x) > 0$ khi $x \in [1, 2]$.

$$\text{Biết } \int_1^2 f'(x) dx = 10 \text{ và } \int_1^2 \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln 2. \text{ Tính } f(2).$$

A. $f(2) = -10.$

B. $f(2) = 20.$

C. $f(2) = 10.$

D. $f(2) = -20.$

Hướng dẫn giải:

$$\text{Ta có: } \int_1^2 f'(x) dx = f(x) \Big|_1^2 = f(2) - f(1) = 10 \text{ (gt)}$$

$$\int_1^2 \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln [f(x)] \Big|_1^2 = \ln [f(2)] - \ln [f(1)] = \ln \frac{f(2)}{f(1)} = \ln 2 \text{ (gt)}$$

Vậy ta có hệ:
$$\begin{cases} f(2) - f(1) = 10 \\ \frac{f(2)}{f(1)} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(2) = 20 \\ f(1) = 10 \end{cases}$$

Chọn B

Câu 88: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên đoạn $[4;8]$ và $f(0) \neq 0$ với $\forall x \in [4;8]$. Biết

rằng $\int_4^8 \frac{[f'(x)]^2}{[f(x)]^4} dx = 1$ và $f(4) = \frac{1}{4}$, $f(8) = \frac{1}{2}$. Tính $f(6)$.

A. $\frac{5}{8}$.

B. $\frac{2}{3}$.

C. $\frac{3}{8}$.

D. $\frac{1}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

+) Xét $\int_4^8 \frac{f'(x)}{f^2(x)} dx = \int_4^8 \frac{df(x)}{f^2(x)} = -\frac{1}{f(x)} \Big|_4^8 = -\left(\frac{1}{f(8)} - \frac{1}{f(4)}\right) = -(2 - 4) = 2$.

+) Gọi k là một hằng số thực, ta sẽ tìm k để $\int_4^8 \left(\frac{f'(x)}{f^2(x)} + k\right) dx = 0$.

Ta có: $\int_4^8 \left(\frac{f'(x)}{f^2(x)} + k\right) dx = \int_4^8 \frac{[f'(x)]^2}{[f(x)]^4} dx + 2k \int_4^8 \frac{f'(x)}{f^2(x)} dx + k^2 \int_4^8 dx = 1 + 4k + 4k^2 = (2k + 1)^2$.

Suy ra: $k = -\frac{1}{2}$ thì $\int_4^8 \left(\frac{f'(x)}{f^2(x)} - \frac{1}{2}\right) dx = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \int_4^6 \frac{f'(x)}{f^2(x)} dx = \frac{1}{2} \int_4^6 dx$

$\Leftrightarrow \int_4^6 \frac{df(x)}{f^2(x)} = 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{f(x)} \Big|_4^6 = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{f(4)} - \frac{1}{f(6)} = 1 \Leftrightarrow 4 - \frac{1}{f(6)} = 1 \Leftrightarrow f(6) = \frac{1}{3}$.

Chú ý: $\int_a^b f(x) dx = 0$ không được phép suy ra $f(x) = 0$, nhưng $\int_a^b f^{2k}(x) dx = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$.

Câu 89: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm xác định, liên tục trên đoạn $[0;1]$ đồng thời thỏa mãn các điều kiện $f'(0) = -1$ và $[f'(x)]^2 = f''(x)$. Đặt $T = f(1) - f(0)$, hãy chọn khẳng định đúng?

A. $-2 \leq T < -1$.

B. $-1 \leq T < 0$.

C. $0 \leq T < 1$.

D. $1 \leq T < 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có: $T = f(1) - f(0) = \int_0^1 f'(x) dx$

Lại có: $[f'(x)]^2 = f''(x) \Leftrightarrow -1 = -\frac{f''(x)}{[f'(x)]^2} \Leftrightarrow -1 = \left[\frac{1}{f'(x)}\right]'$

$\Leftrightarrow -x + c = \frac{1}{f'(x)} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{-x + c}$.

Mà $f'(0) = -1$ nên $c = -1$.

Vậy $T = \int_0^1 f'(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{-x-1} dx = -\ln|-x-1| \Big|_0^1 = -\ln 2$.

Câu 90: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp 2 liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa $\begin{cases} f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \\ f(0) = f'(0) = 1, \\ xy^2 + y'^2 = yy'', \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases}$

Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.** $\frac{1}{2} < \ln f(1) < 1$. **B.** $0 < \ln f(1) < \frac{1}{2}$. **C.** $\frac{3}{2} < \ln f(1) < 2$. **D.** $1 < \ln f(1) < \frac{3}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

$$\text{Ta có } xy^2 + y'^2 = yy'' \Leftrightarrow \frac{y''y - y'^2}{y^2} = x \Leftrightarrow \left(\frac{y'}{y}\right)' = x \Leftrightarrow \frac{y'}{y} = \frac{x^2}{2} + C \text{ hay } \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{x^2}{2} + C.$$

$$\text{Lại có } f(0) = f'(0) = 1 \Rightarrow C = 1.$$

$$\text{Ta có } \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{x^2}{2} + 1 \Leftrightarrow \int_0^1 \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} + 1\right) dx \Leftrightarrow \ln(f(x)) \Big|_0^1 = \frac{7}{6} \Leftrightarrow \ln f(1) = \frac{7}{6}.$$

$$\Rightarrow 1 < \ln(f(1)) < \frac{3}{2}.$$

Câu 91: Cho f, g là hai hàm liên tục trên $[1; 3]$ thỏa mãn điều kiện $\int_1^3 [f(x) + 3g(x)] dx = 10$ đồng

$$\text{thời } \int_1^3 [2f(x) - g(x)] dx = 6. \text{ Tính } \int_1^3 [f(x) + g(x)] dx.$$

- A.** 9. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 8.

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$\text{Đặt } a = \int_1^3 f(x) dx, b = \int_1^3 g(x) dx. \text{ Khi đó } \int_1^3 [f(x) + 3g(x)] dx = 10 \Leftrightarrow a + 3b = 10,$$

$$\int_1^3 [2f(x) - g(x)] dx = 6 \Leftrightarrow 2a - b = 6.$$

$$\text{Do đó: } \begin{cases} a + 3b = 10 \\ 2a - b = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 2 \end{cases}. \text{ Vậy } \int_1^3 [f(x) + g(x)] dx = a + b = 6.$$

Câu 92: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a; b]$, nếu $\int_a^d f(x) dx = 5$ và $\int_b^d f(x) dx = 2$ (với

$$a < d < b) \text{ thì } \int_a^b f(x) dx \text{ bằng.}$$

- A.** 3. **B.** 7. **C.** $\frac{5}{2}$. **D.** 10.

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$\begin{cases} \int_a^d f(x) dx = 5 \\ \int_b^d f(x) dx = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F(d) - F(a) = 5 \\ F(d) - F(b) = 2 \end{cases} \Rightarrow F(b) - F(a) = 3 = \int_a^b f(x) dx.$$

Câu 93: Cho $f(x)$ và $g(x)$ là hai hàm số liên tục trên đoạn $[1; 3]$, thỏa mãn:

$$\int_1^3 [f(x) + 3g(x)] dx = 10 \text{ và } \int_1^3 [2f(x) - g(x)] dx = 6. \text{ Tính } I = \int_1^3 [f(x) + g(x)] dx$$

A. $I = 8.$

B. $I = 9.$

C. $I = 6.$

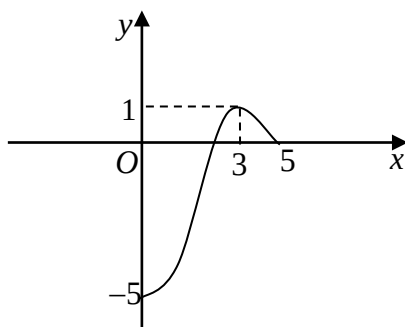
D. $I = 7.$

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \int_1^3 [f(x) + 3g(x)] dx = 10 \\ \int_1^3 [2f(x) - g(x)] dx = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \int_1^3 f(x) dx = 4 \\ \int_1^3 g(x) dx = 2 \end{cases} \Rightarrow I = \int_1^3 [f(x) + g(x)] dx = 6.$$

Câu 94: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 5]$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ trên đoạn $[0; 5]$ được cho như hình bên.



Tìm mệnh đề đúng

A. $f(0) = f(5) < f(3).$

B. $f(3) < f(0) = f(5).$

C. $f(3) < f(0) < f(5).$

D. $f(3) < f(5) < f(0).$

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \int_3^5 f'(x) dx = f(5) - f(3) > 0, \text{ do đó } f(5) > f(3).$$

$$\int_0^3 f'(x) dx = f(3) - f(0) < 0, \text{ do đó } f(3) < f(0)$$

$$\int_0^5 f'(x) dx = f(5) - f(0) < 0, \text{ do đó } f(5) < f(0)$$

Câu 95: Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm tại mọi $x \in (0; +\infty)$ đồng thời thỏa mãn điều kiện:

$$f(x) = x(\sin x + f'(x)) + \cos x \text{ và } \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x) \sin x dx = -4. \text{ Khi đó, } f(\pi) \text{ nằm trong khoảng}$$

nào?

A. $(6; 7).$

B. $(5; 6).$

C. $(12; 13).$

D. $(11; 12).$

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có:

$$f(x) = x(\sin x + f'(x)) + \cos x$$

$$\Rightarrow \frac{f(x) - xf'(x)}{x^2} = \frac{\sin x}{x} + \frac{\cos x}{x^2} \Rightarrow \left(\frac{f(x)}{x} \right)' = \left(\frac{1}{x} \cos x \right)' \Rightarrow \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{x} \cos x + c$$

$$\Rightarrow f(x) = \cos x + cx$$

Khi đó:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x) \sin x dx = -4 \Leftrightarrow \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (\cos x + cx) \sin x dx = -4$$

$$\Leftrightarrow \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos x \sin x dx + c \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} x \sin x dx = -4 \Leftrightarrow 0 + c(-2) = -4 \Leftrightarrow c = 2$$

$$\Rightarrow f(x) = \cos x + 2x \Rightarrow f(\pi) = 2\pi - 1 \in (5; 6).$$

Câu 96: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ thỏa mãn

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[f^2(x) - 2\sqrt{2} f(x) \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \right] dx = \frac{2-\pi}{2}. \text{ Tích phân } \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx \text{ bằng}$$

A. $\frac{\pi}{4}$.

B. 0.

C. 1.

D. $\frac{\pi}{2}$.

Huongd dẫn giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[1 - \cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) \right] dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin 2x) dx$$

$$= \left(x + \frac{1}{2} \cos 2x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi - 2}{2}.$$

$$\text{Do đó: } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[f^2(x) - 2\sqrt{2} f(x) \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \right] dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) dx = \frac{2-\pi}{2} + \frac{\pi-2}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[f^2(x) - 2\sqrt{2} f(x) \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 2 \sin^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \right] dx = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[f(x) - \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \right]^2 dx = 0$$

$$\text{Suy ra } f(x) - \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0, \text{ hay } f(x) = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

$$\text{Bởi vậy: } \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) dx = -\sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 0.$$

Câu 97: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $3f(x) + f(2-x) = 2(x-1)e^{x^2-2x+1} + 4$. Tính

tích phân $I = \int_0^2 f(x) dx$ ta được kết quả:

A. $I = e + 4$.

B. $I = 8$.

C. $I = 2$.

D. $I = e + 2$.

Đề ban đầu bị sai vì khi thay $x=0$ và $x=2$ vào ta thấy mâu thuẫn nên tôi đã sửa lại đề

Huongd dẫn giải

Chọn C

Theo giả thuyết ta có $\int_0^2 [3f(x) + f(2-x)] dx = \int_0^2 [2(x-1)e^{x^2-2x+1} + 4] dx$ (*).

$$\text{Ta tính } \int_0^2 f(2-x) dx = -\int_0^2 f(2-x) d(2-x) = \int_0^2 f(x) dx.$$

$$\text{Vì vậy } \int_0^2 [3f(x) + f(2-x)] dx = 4 \int_0^2 f(x) dx.$$

$$\text{Hơn nữa } \int_0^2 2(x-1)e^{x^2-2x+1} dx = \int_0^2 e^{x^2-2x+1} d(x^2-2x+1) = e^{x^2-2x+1} \Big|_0^2 = 0 \text{ và } \int_0^2 4 dx = 8.$$

Câu 98: Suy ra $4 \int_0^2 f(x) dx = 8 \Leftrightarrow \int_0^2 f(x) dx = 2$. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{0; -1\}$ thỏa mãn điều kiện $f(1) = -2 \ln 2$ và $x(x+1) \cdot f'(x) + f(x) = x^2 + x$. Giá trị $f(2) = a + b \ln 3$, với $a, b \in \mathbb{Q}$. Tính $a^2 + b^2$.

A. $\frac{25}{4}$.

B. $\frac{9}{2}$.

C. $\frac{5}{2}$.

D. $\frac{13}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$\text{Từ giả thiết, ta có } x(x+1) \cdot f'(x) + f(x) = x^2 + x \Leftrightarrow \frac{x}{x+1} \cdot f'(x) + \frac{1}{(x+1)^2} f(x) = \frac{x}{x+1}$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{x}{x+1} \cdot f(x) \right]' = \frac{x}{x+1}, \text{ với } \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0; -1\}.$$

$$\text{Suy ra } \frac{x}{x+1} \cdot f(x) = \int \frac{x}{x+1} dx \text{ hay } \frac{x}{x+1} \cdot f(x) = x - \ln|x+1| + C.$$

$$\text{Mặt khác, ta có } f(1) = -2 \ln 2 \text{ nên } C = -1. \text{ Do đó } \frac{x}{x+1} \cdot f(x) = x - \ln|x+1| - 1.$$

$$\text{Với } x = 2 \text{ thì } \frac{2}{3} \cdot f(2) = 1 - \ln 3 \Leftrightarrow f(2) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \ln 3. \text{ Suy ra } a = \frac{3}{2} \text{ và } b = -\frac{3}{2}.$$

$$\text{Vậy } a^2 + b^2 = \frac{9}{2}.$$

Câu 99: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $f'(x) \geq x^4 + \frac{2}{x^2} - 2x \quad \forall x > 0$ và $f(1) = -1$.

Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Phương trình $f(x) = 0$ có 1 nghiệm trên $(0; 1)$.

B. Phương trình $f(x) = 0$ có đúng 3 nghiệm trên $(0; +\infty)$.

C. Phương trình $f(x) = 0$ có 1 nghiệm trên $(1; 2)$.

C. Phương trình $f(x) = 0$ có 1 nghiệm trên $(2; 5)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$f'(x) \geq x^4 + \frac{2}{x^2} - 2x = \frac{x^6 - 2x^3 + 2}{x^2} = \frac{(x^3 - 1)^2 + 1}{x^2} > 0, \quad \forall x > 0.$$

$$\Rightarrow y = f(x) \text{ đồng biến trên } (0; +\infty).$$

$$\Rightarrow f(x) = 0 \text{ có nhiều nhất 1 nghiệm trên khoảng } (0; +\infty) \quad (1).$$

Mặt khác ta có:

$$f'(x) \geq x^4 + \frac{2}{x^2} - 2x > 0, \forall x > 0 \Rightarrow \int_1^2 f'(x) dx \geq \int_1^2 \left(x^4 + \frac{2}{x^2} - 2x \right) dx = \frac{21}{5}$$

$$\Rightarrow f(2) - f(1) \geq \frac{21}{5} \Rightarrow f(2) \geq \frac{17}{5}.$$

Kết hợp giả thiết ta có $y = f(x)$ liên tục trên $[1; 2]$ và $f(2), f(1) < 0$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra phương trình $f(x) = 0$ có đúng 1 nghiệm trên khoảng $(1; 2)$.

Câu 100: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f'(x) \in [-1; 1]$ với

$\forall x \in (0; 2)$. Biết $f(0) = f(2) = 1$. Đặt $I = \int_0^2 f(x) dx$, phát biểu nào dưới đây đúng?

A. $I \in (-\infty; 0]$.

B. $I \in (0; 1]$.

C. $I \in [1; +\infty)$.

D. $I \in (0; 1)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có $I = \int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx$.

$$\square \int_0^1 f(x) dx = (x-1)f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 (x-1)f'(x) dx = 1 + \int_0^1 (1-x)f'(x) dx \geq 1 - \int_0^1 (1-x) dx = \frac{1}{2} \quad (1).$$

$$\square \int_1^2 f(x) dx = (x-1)f(x) \Big|_1^2 - \int_1^2 (x-1)f'(x) dx = 1 - \int_1^2 (x-1)f'(x) dx \geq 1 - \int_1^2 (1-x) dx = \frac{1}{2} \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra $I \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.

Câu 101: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[0; 1]$ thỏa mãn $\int_0^1 xf(x) dx = 0$ và $\max_{[0; 1]} |f(x)| = 1$. Tích

phân $I = \int_0^1 e^x f(x) dx$ thuộc khoảng nào trong các khoảng sau đây?

A. $\left(-\infty; -\frac{5}{4}\right)$.

B. $\left(\frac{3}{2}; e-1\right)$.

C. $\left(-\frac{5}{4}; \frac{3}{2}\right)$.

D. $(e-1; +\infty)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Với mọi $a \in [0; 1]$, ta có $0 = \int_0^1 xf(x) dx = a \int_0^1 xf(x) dx = \int_0^1 axf(x) dx$

Kí hiệu $I(a) = \int_0^1 (e^x - ax) dx$.

$$\begin{aligned} \text{Khi đó, với mọi } a \in [0; 1] \text{ ta có } \left| \int_0^1 e^x f(x) dx \right| &= \left| \int_0^1 e^x f(x) dx - \int_0^1 axf(x) dx \right| = \left| \int_0^1 (e^x - ax) f(x) dx \right| \\ &\leq \int_0^1 |e^x - ax| \cdot |f(x)| dx \leq \int_0^1 |e^x - ax| \cdot \max_{x \in [0; 1]} |f(x)| dx = \int_0^1 |e^x - ax| dx = I(a). \end{aligned}$$

Suy ra $\left| \int_0^1 e^x f(x) dx \right| \leq \min_{a \in [0; 1]} I(a)$

Mặt khác

$$\text{Với mọi } a \in [0; 1] \text{ ta có } I(a) = \int_0^1 |e^x - ax| dx = \int_0^1 (e^x - ax) dx = \left(e^x - \frac{a}{2} x^2 \right) \Big|_0^1 = e - \frac{a}{2} - 1$$

$$\min_{a \in [0;1]} I(a) = e - \frac{3}{2} \Rightarrow \left| \int_0^1 e^x f(x) dx \right| \leq e - \frac{3}{2} \approx 1,22.$$

$$\text{Vậy } I \in \left(-\frac{5}{4}; \frac{3}{2} \right).$$

Câu 102: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm dương, liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(0)=1$ và

$$3 \int_0^1 \left[f'(x) [f(x)]^2 + \frac{1}{9} \right] dx \leq 2 \int_0^1 \sqrt{f'(x)} f(x) dx. \text{ Tính tích phân } \int_0^1 [f(x)]^3 dx:$$

A. $\frac{3}{2}.$

B. $\frac{5}{4}.$

C. $\frac{5}{6}.$

D. $\frac{7}{6}.$

Hướng dẫn giải

Chọn D

Từ giả thiết suy ra:

$$\int_0^1 \left[\left(3\sqrt{f'(x)} f(x) \right)^2 - 2 \cdot 3\sqrt{f'(x)} f(x) + 1 \right] dx \leq 0 \Leftrightarrow \int_0^1 \left[3\sqrt{f'(x)} f(x) - 1 \right]^2 dx \leq 0.$$

$$\text{Suy ra } 3\sqrt{f'(x)} f(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{f'(x)} f(x) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow f'(x) \cdot f^2(x) = \frac{1}{9}.$$

$$\text{Vì } [f^3(x)]' = 3 \cdot f^2(x) f'(x) \text{ nên suy ra } [f^3(x)]' = \frac{1}{3} \Rightarrow f^3(x) = \frac{1}{3}x + C.$$

$$\text{Vì } f(0)=1 \text{ nên } f^3(0)=1 \Rightarrow C=1.$$

$$\text{Vậy } \Rightarrow f^3(x) = \frac{1}{3}x + 1.$$

$$\text{Suy ra } \int_0^1 [f(x)]^3 dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{3}x + 1 \right) dx = \frac{7}{6}.$$

Câu 103: Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[1;4]$ và thỏa mãn hệ thức

$$\begin{cases} f(1) + g(1) = 4 \\ g(x) = -x \cdot f'(x); \quad f(x) = -x \cdot g'(x) \end{cases}. \text{ Tính } I = \int_1^4 [f(x) + g(x)] dx.$$

A. $8 \ln 2.$

B. $3 \ln 2.$

C. $6 \ln 2.$

D. $4 \ln 2.$

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$\text{Cách 1: Ta có } f(x) + g(x) = -x[f'(x) + g'(x)] \Leftrightarrow \frac{f(x) + g(x)}{f'(x) + g'(x)} = -\frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{f(x) + g(x)}{f'(x) + g'(x)} dx = -\int \frac{1}{x} dx \Rightarrow \ln|f(x) + g(x)| = -\ln|x| + C$$

$$\text{Theo giả thiết ta có } C - \ln|1| = \ln|f(1) + g(1)| \Rightarrow C = \ln 4.$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} f(x) + g(x) = \frac{4}{x} \\ f(x) + g(x) = -\frac{4}{x} \end{cases}, \text{ vì } f(1) + g(1) = 4 \text{ nên } f(x) + g(x) = \frac{4}{x}$$

$$\Rightarrow I = \int_1^4 [f(x) + g(x)] dx = 8 \ln 2.$$

$$\text{Cách 2: Ta có } f(x) + g(x) = -x[f'(x) + g'(x)]$$

$$\Rightarrow \int [f(x) + g(x)] dx = -\int x[f'(x) + g'(x)] dx.$$

$$\Rightarrow \int [f(x) + g(x)] dx = -x[f(x) + g(x)] + \int [f(x) + g(x)] dx.$$

$$\Rightarrow -x[f(x) + g(x)] = C \Rightarrow f(x) + g(x) = -\frac{C}{x}. \text{ V\grave{a}i } f(1) + g(1) = -C \Rightarrow C = -4$$

$$\text{Do \acute{a}o } f(x) + g(x) = \frac{4}{x}. \text{ V\grave{a}y } I = \int_1^4 [f(x) + g(x)] dx = 8 \ln 2.$$

DẠNG 3: PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN

BÀI TẬP

TÍCH PHÂN HÀM ẨN ĐỔI BIẾN DẠNG 1

Câu 104: Cho $\int_0^4 f(x) dx = 16$. Tính $\int_0^2 f(2x) dx$

- A. 16. B. 4. C. 32. D. 8.

Câu 105: Nếu $\int_0^6 f(x) dx = 12$ thì $\int_0^2 f(3x) dx$ bằng

- A. 6. B. 36. C. 2. D. 4.

Câu 106: Cho $\int_1^2 f(x^2 + 1) x dx = 2$. Khi đó $I = \int_2^5 f(x) dx$ bằng:

- A. 2. B. 1. C. -1. D. 4.

Câu 107: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int_{-5}^1 f(x) dx = 9$. Tính tích phân $\int_0^2 [f(1-3x) + 9] dx$.

- A. 27. B. 21. C. 15. D. 75.

Câu 108: Biết $f(x)$ làm hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^9 f(x) dx = 9$. Khi đó giá trị của $\int_1^4 f(3x-3) dx$ là

- A. 27. B. 3. C. 0. D. 24.

Câu 109: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa $\int_0^1 f(x) dx = 10$. Tính $\int_0^2 f\left(\frac{x}{2}\right) dx$.

- A. $\int_0^2 f\left(\frac{x}{2}\right) dx = \frac{5}{2}$. B. $\int_0^2 f\left(\frac{x}{2}\right) dx = 20$. C. $\int_0^2 f\left(\frac{x}{2}\right) dx = 10$. D. $\int_0^2 f\left(\frac{x}{2}\right) dx = 5$.

Câu 110: Cho $\int_{-1}^5 f(x) dx = 4$. Tính $I = \int_{-1}^2 f(2x+1) dx$.

- A. $I = 2$. B. $I = \frac{5}{2}$. C. $I = 4$. D. $I = \frac{3}{2}$.

Câu 111: Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_3^5 f(x) dx = a$, ($a \in \mathbb{R}$). Tích phân

$I = \int_1^2 f(2x+1) dx$ có giá trị là

- A. $I = \frac{1}{2}a + 1$. B. $I = 2a + 1$. C. $I = 2a$. D. $I = \frac{1}{2}a$.

Câu 112: Cho $\int_1^2 f(x^2 + 1) x dx = 2$. Khi đó $I = \int_2^5 f(x) dx$ bằng

- A. 2. B. 1. C. -1. D. 4.

Câu 113: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[1; +\infty)$ và $\int_0^3 f(\sqrt{x+1}) dx = 8$. Tích phân $I = \int_1^2 xf(x) dx$ bằng:

- A. $I = 16$. B. $I = 2$. C. $I = 8$. D. $I = 4$

Câu 114: Biết $\int_{-1}^{11} f(x) dx = 18$. Tính $I = \int_0^2 x(2 + f(3x^2 - 1)) dx$.

A. $I = 5$. **B.** $I = 7$. **C.** $I = 8$ **D.** $I = 10$.

Câu 115: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^1 f(2x)dx = 8$. Tính $I = \int_0^{\sqrt{2}} xf(x^2)dx$

A. 4. **B.** 16. **C.** 8. **D.** 32.

Câu 116: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $\int_0^1 f(x)dx = 2$; $\int_0^3 f(x)dx = 6$. Tính

$$I = \int_{-1}^1 f(|2x-1|)dx.$$

A. $I = \frac{2}{3}$. **B.** $I = 4$. **C.** $I = \frac{3}{2}$. **D.** $I = 6$.

Câu 117: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[0;4]$ và $\int_0^2 f(x)dx = 1$; $\int_0^4 f(x)dx = 3$. Tính

$$\int_{-1}^1 f(|3x-1|)dx.$$

A. 4. **B.** 2. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** 1.

Câu 118: Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^1 f(x)dx = 4$, $\int_0^3 f(x)dx = 6$. Tính

$$I = \int_{-1}^1 f(|2x+1|)dx.$$

A. $I = 3$. **B.** $I = 5$. **C.** $I = 6$. **D.** $I = 4$.

Câu 119: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa $\int_0^1 f(2x)dx = 2$ và $\int_0^2 f(6x)dx = 14$. Tính

$$\int_{-2}^2 f(5|x|+2)dx.$$

A. 30. **B.** 32. **C.** 34. **D.** 36.

Câu 120: Cho tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot f(\sin x)dx = 8$. Tính tích phân $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot f(\cos x)dx$.

A. $K = -8$. **B.** $K = 4$. **C.** $K = 8$. **D.** $K = 16$.

Câu 121: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $\int_0^1 f(x)dx = 1$. Tính

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan^2 x + 1) \cdot f(\tan x)dx.$$

A. $I = 1$. **B.** $I = -1$. **C.** $I = \frac{\pi}{4}$. **D.** $I = -\frac{\pi}{4}$.

Câu 122: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(2x) = 3f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Biết rằng $\int_0^1 f(x)dx = 1$

. Giá trị của tích phân $I = \int_1^2 f(x)dx$ bằng bao nhiêu?

A. $I = 5$. **B.** $I = 3$. **C.** $I = 8$. **D.** $I = 2$.

Câu 123: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(2) = -2$; $\int_0^2 f(x) dx = 1$. Tính

tích phân $I = \int_0^4 f'(\sqrt{x}) dx$.

A. $I = -10$.

B. $I = -5$.

C. $I = 0$.

D. $I = -18$.

Câu 124: Cho $\int_1^2 f(x) dx = 2$. Tính $I = \int_1^4 \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx$ bằng

A. $I = 1$.

B. $I = 2$.

C. $I = 4$.

D. $I = \frac{1}{2}$.

Câu 125: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int_1^{16} \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = 6$ và $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) \cos x dx = 3$. Tính

tích phân $I = \int_0^4 f(x) dx$.

A. $I = -2$.

B. $I = 6$.

C. $I = 9$.

D. $I = 2$.

Câu 126: Cho $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa $\int_1^9 \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = 4$ và $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) \cos x dx = 2$. Tính

$I = \int_0^3 f(x) dx$.

A. $I = 10$.

B. $I = 6$.

C. $I = 4$.

D. $I = 2$.

Câu 127: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[1; 4]$ và thỏa mãn $f(x) = \frac{f(2\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}} + \frac{\ln x}{x}$. Tính tích

phân $I = \int_3^4 f(x) dx$.

A. $I = 3 + 2\ln^2 2$.

B. $I = 2\ln^2 2$.

C. $I = \ln^2 2$.

D. $I = 2\ln 2$.

Câu 128: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-4; +\infty)$ và $\int_0^5 f(\sqrt{x+4}) dx = 8$. Tính $I = \int_3^2 x \cdot f(x) dx$.

A. $I = 8$.

B. $I = 4$.

C. $I = -16$.

D. $I = -4$.

Câu 129: Cho $\int_0^1 f(2x+1) dx = 12$ và $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin^2 x) \sin 2x dx = 3$. Tính $\int_0^3 f(x) dx$.

A. 26.

B. 22.

C. 27.

D. 15.

Câu 130: Cho hàm $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x) dx = 3$ và $\int_0^1 \frac{x^2 f(x)}{x^2 + 1} dx = 1$. Tính

$\int_0^1 f(x) dx$.

A. 4.

B. 2.

C. 5.

D. 1.

Câu 131: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x) dx = 4$; $\int_0^1 \frac{x^2 f(x)}{x^2 + 1} dx = 2$. Tính $I = \int_0^1 f(x) dx$.

A. $I = 6$.

B. $I = 2$.

C. $I = 3$.

D. $I = 1$.

Câu 132: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa $\int_0^{2018} f(x)dx = 2$. Khi đó tích phân

$$\int_0^{\sqrt{e^{2018}-1}} \frac{x}{x^2+1} f(\ln(x^2+1))dx \text{ bằng}$$

- A. 4. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 133: Tìm tất cả các giá trị dương của m để $\int_0^3 x(3-x)^m dx = -f''\left(\frac{10}{9}\right)$, với $f(x) = \ln x^{15}$.

- A. $m = 20$. B. $m = 4$. C. $m = 5$. D. $m = 3$.

Câu 134: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(4-x) = f(x)$. Biết $\int_1^3 xf(x)dx = 5$.

Tính $I = \int_1^3 f(x)dx$.

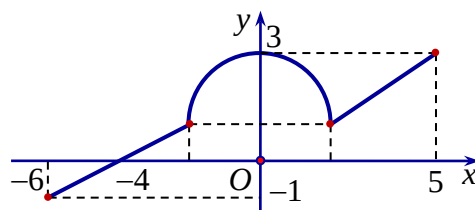
- A. $I = \frac{5}{2}$. B. $I = \frac{7}{2}$. C. $I = \frac{9}{2}$. D. $I = \frac{11}{2}$.

Câu 135: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[1;3]$ thỏa mãn $f(4-x) = f(x), \forall x \in [1;3]$ và

$$\int_1^3 xf(x)dx = -2. \text{ Giá trị } \int_1^3 f(x)dx \text{ bằng}$$

- A. 2. B. -1. C. -2. D. 1.

Câu 136: Cho hàm số f liên tục trên đoạn $[-6;5]$, có đồ thị gồm hai đoạn thẳng và nửa đường tròn như hình vẽ. Tính giá trị $I = \int_{-6}^5 [f(x) + 2]dx$.



- A. $I = 2\pi + 35$. B. $I = 2\pi + 34$. C. $I = 2\pi + 33$. D. $I = 2\pi + 32$.

TÍCH PHÂN HÀM ẨN ĐỔI BIẾN DẠNG 2

Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn: $A.f(x) + B.u'.f(u) + C.f(a+b-x) = g(x)$

+) Với $\begin{cases} u(a)=a \\ u(b)=b \end{cases}$ thì $\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{A+B+C} \int_a^b g(x)dx$.

+) Với $\begin{cases} u(a)=b \\ u(b)=a \end{cases}$ thì $\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{A-B+C} \int_a^b g(x)dx$.

Trong đề bài thường sẽ bị khuyết một trong các hệ số A, B, C .

☞ Nếu $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ thì $\int_a^b f(a+b-x)dx = \int_a^b f(x)dx$.

Câu 137: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $f(x) = 6x^2 f(x^3) - \frac{6}{\sqrt{3x+1}}$. Tính $\int_0^1 f(x)dx$

- A. 2. B. 4. C. -1. D. 6.

Câu 138: Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ và thỏa mãn điều kiện $4xf(x^2)+3f(x-1)=\sqrt{1-x^2}$.

Tích phân $I=\int_0^1 f(x)dx$ bằng

- A. $I=\frac{\pi}{4}$. B. $I=\frac{\pi}{6}$. C. $I=\frac{\pi}{20}$. D. $I=\frac{\pi}{16}$

Câu 139: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;2]$ và thỏa mãn điều kiện $f(x)+f(2-x)=2x$. Tính giá trị của tích phân $I=\int_0^2 f(x)dx$.

- A. $I=-4$. B. $I=\frac{1}{2}$. C. $I=\frac{4}{3}$. D. $I=2$.

Câu 140: Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn $2f(x)+3f(1-x)=\sqrt{1-x}$. Tích phân $\int_0^1 f(x)dx$ bằng

- A. $\frac{2}{3}$. B. $\frac{1}{6}$. C. $\frac{2}{15}$. D. $\frac{3}{5}$.

Câu 141: Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn điều kiện $2f(x)-3f(1-x)=x\sqrt{1-x}$. Tính tích phân $I=\int_0^1 f(x)dx$.

- A. $I=\frac{1}{25}$. B. $I=-\frac{4}{15}$. C. $I=-\frac{1}{15}$. D. $I=\frac{4}{75}$.

Câu 142: Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-1;2]$ và thỏa mãn $f(x)+2xf(x^2-2)+3f(1-x)=4x^3$. Tính giá trị của tích phân $I=\int_{-1}^2 f(x)dx$.

- A. $I=5$. B. $I=\frac{5}{2}$. C. $I=3$. D. $I=15$.

Câu 143: Hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-1;2]$ và thỏa mãn điều kiện $f(x)=\sqrt{x+2}+xf(3-x^2)$. Tính giá trị của $I=\int_{-1}^2 f(x)dx$

- A. $I=\frac{14}{3}$. B. $I=\frac{28}{3}$. C. $I=\frac{4}{3}$. D. $I=2$.

Câu 144: Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ và thỏa mãn $f(x)+xf(1-x^2)+3f(1-x)=\frac{1}{x+1}$. Tính giá trị của tích phân $I=\int_0^1 f(x)dx$.

- A. $I=\frac{9}{2}\ln 2$. B. $I=\frac{2}{9}\ln 2$. C. $I=\frac{4}{3}$. D. $I=\frac{3}{2}$.

Câu 145: Cho hàm số $y=f(x)$ và thỏa mãn $f(x)-8x^3f(x^4)+\frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}=0$. Tích phân

$I=\int_0^1 f(x)dx=\frac{a-b\sqrt{2}}{c}$ với $a,b,c\in\mathbb{Z}$ và $\frac{a}{c};\frac{b}{c}$ tối giản. Tính $a+b+c$

- A. 6. B. -4. C. 4. D. -10.

Câu 146: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-\ln 2; \ln 2]$ và thỏa mãn $f(x) + f(-x) = \frac{1}{e^x + 1}$. Biết $\int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(x) dx = a \ln 2 + b \ln 3$, với $a, b \in \mathbb{Q}$. Tính giá trị của $P = a + b$.

A. $P = \frac{1}{2}$. B. $P = -2$. C. $P = -1$. D. $P = 2$.

Câu 147: Biết hàm số $y = f\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ là hàm số chẵn trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ và $f(x) + f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin x + \cos x$. Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$.

A. $I = 0$. B. $I = 1$. C. $I = \frac{1}{2}$. D. $I = -1$.

Câu 148: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, $f(0) = 0$ và $f(x) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \cdot \cos x$ với $\forall x \in \mathbb{R}$. Giá trị của tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x f'(x) dx$ bằng

A. $-\frac{\pi}{4}$. B. $\frac{1}{4}$. C. $\frac{\pi}{4}$. D. $-\frac{1}{4}$.

Câu 149: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(1+2x) + f(1-2x) = \frac{x^2}{x^2+1}, \forall x \in \mathbb{R}$. tính tích phân $I = \int_{-1}^3 f(x) dx$.

A. $I = 2 - \frac{\pi}{2}$. B. $I = 1 - \frac{\pi}{4}$. C. $I = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{8}$. D. $I = \frac{\pi}{4}$.

TÍCH PHÂN HÀM ẨN ĐỔI BIẾN DẠNG 3

Cách giải: Lần lượt đặt $t = u(x)$ và $t = v(x)$ để giải hệ phương trình hai ẩn (trong đó có ẩn $f(x)$) để suy ra hàm số $f(x)$ (nếu $u(x) = x$ thì chỉ cần đặt một lần $t = v(x)$).

Các kết quả đặc biệt:

Cho $A.f(ax+b) + B.f(-ax+c) = g(x)$ với $A^2 \neq B^2$ khi đó $f(x) = \frac{A.g\left(\frac{x-b}{a}\right) - B.g\left(\frac{x-c}{-a}\right)}{A^2 - B^2}$ (*)

+) Hệ quả 1 của (*): $A.f(x) + B.f(-x) = g(x) \Rightarrow f(x) = \frac{A.g(x) - B.g(-x)}{A^2 - B^2}$

+) Hệ quả 2 của (*): $A.f(x) + B.f(-x) = g(x) \Rightarrow f(x) = \frac{g(x)}{A+B}$ với $g(x)$ là hàm số chẵn.

Câu 150: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 3x$. Tính $I = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{f(x)}{x} dx$.

A. $I = \frac{3}{2}$. B. $I = 1$. C. $I = \frac{1}{2}$. D. $I = -1$.

Câu 151: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ và thỏa mãn $2f(3x) + 3f\left(\frac{2}{x}\right) = -\frac{15x}{2}$, $\int_3^9 f(x) dx = k$. Tính $I = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} f\left(\frac{1}{x}\right) dx$ theo k .

A. $I = -\frac{45+k}{9}$. B. $I = \frac{45-k}{9}$. C. $I = \frac{45+k}{9}$. D. $I = \frac{45-2k}{9}$.

Câu 152: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(-x) + 2018f(x) = 2x \sin x$. Tính giá

trị của $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$.

- A. $I = \frac{2}{2019}$. B. $I = \frac{2}{1009}$. C. $I = \frac{4}{2019}$. D. $I = \frac{1}{1009}$.

Câu 153: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(-x) + 2018f(x) = e^x$. Tính giá trị của

$I = \int_{-1}^1 f(x) dx$

- A. $I = \frac{e^2 - 1}{2019e}$. B. $I = \frac{e^2 - 1}{2018e}$. C. $I = 0$. D. $I = \frac{e^2 - 1}{e}$.

Câu 154: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $2f(2x) + f(1-x) = 12x^2$.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ bằng 1 là

- A. $y = 2x + 2$. B. $y = 4x - 6$. C. $y = 2x - 6$. D. $y = 4x - 2$.

Câu 155: Cho $f(x)$ là hàm số chẵn, liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int_0^1 f(x) dx = 2018$ và $g(x)$ là hàm số

liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $g(x) + g(-x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Tính tích phân $I = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx$.

- A. $I = 2018$. B. $I = \frac{1009}{2}$. C. $I = 4036$. D. $I = 1008$.

Câu 156: Cho số dương a và hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x) + f(-x) = a, \forall x \in \mathbb{R}$. Giá

trị của biểu thức $\int_{-a}^a f(x) dx$ bằng

- A. $2a^2$. B. a . C. a^2 . D. $2a$.

Câu 157: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa điều kiện $f(x) + f(-x) = 2 \sin x$. Tính $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$

- A. -1 . B. 0 . C. 1 . D. 2 .

Câu 158: Cho $f(x)$ là một hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x) + f(-x) = \sqrt{2 - 2 \cos 2x}$. Tính tích

phân $I = \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x) dx$.

- A. $I = 3$. B. $I = 4$. C. $I = 6$. D. $I = 8$.

Câu 159: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x) + f(-x) = \sqrt{2 + 2 \cos 2x}$. Tính

$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$.

- A. $I = -1$. B. $I = 1$. C. $I = -2$. D. $I = 2$.

Câu 160: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $3f(-x) - 2f(x) = \tan^2 x$. Tính $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx$

- A. $1 - \frac{\pi}{2}$. B. $\frac{\pi}{2} - 1$. C. $1 + \frac{\pi}{4}$. D. $2 - \frac{\pi}{2}$.

Câu 161: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-\ln 2; \ln 2]$ và thỏa mãn $f(x) + f(-x) = \frac{1}{e^x + 1}$.

Biết $\int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(x) dx = a \ln 2 + b \ln 3$ ($a, b \in \mathbb{Q}$). Tính $P = a + b$.

- A. $P = \frac{1}{2}$. B. $P = -2$. C. $P = -1$. D. $P = 2$.

Câu 162: Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0; 1]$ và thỏa mãn điều kiện $2f(x) + 3f(1-x) = x\sqrt{1-x}$. Tính tích phân $I = \int_0^1 f(x) dx$.

- A. $I = -\frac{4}{15}$. B. $I = \frac{1}{15}$. C. $I = \frac{4}{75}$. D. $I = \frac{1}{25}$.

TÍCH PHÂN HÀM ẢN ĐỐI BIẾN DẠNG 4

Câu 163: Cho $f(x)$ và $g(x)$ là hai hàm số liên tục trên $[-1, 1]$ và $f(x)$ là hàm số chẵn, $g(x)$ là hàm số lẻ. Biết $\int_0^1 f(x) dx = 5$ và $\int_0^1 g(x) dx = 7$. Mệnh đề nào dưới đây sai?

- A. $\int_{-1}^1 f(x) dx = 10$. B. $\int_{-1}^1 g(x) dx = 14$.
C. $\int_{-1}^1 [f(x) + g(x)] dx = 10$. D. $\int_{-1}^1 [f(x) - g(x)] dx = 10$.

Câu 164: Nếu hàm $f(x)$ CHẼN thì $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$ 2. Nếu hàm $f(x)$ LẼ thì $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$

Nếu chứng minh thì như sau:

$$\text{Đặt } A = \int_{-1}^1 f(x) dx = \underbrace{\int_{-1}^0 f(x) dx}_{A_1} + \underbrace{\int_0^1 f(x) dx}_{A_2}$$

$$A_1 = \int_{-1}^0 f(x) dx. \text{ Đặt } t = -x \Rightarrow dt = -dx$$

$$\text{Đổi cận: } \begin{array}{c|c} 0 & -1 \\ \hline t \mapsto & A_1 = \int_1^0 f(-t) \cdot (-dt) = \int_0^1 f(-t) dt = \int_0^1 f(-x) dx \end{array} \quad (\text{Do tích phân xác định không phụ thuộc vào biến số tích phân})$$

$$= \int_0^1 f(x) dx \quad (\text{Do } f(x) \text{ là hàm chẵn} \Rightarrow f(-x) = f(x))$$

$$\text{Vậy } A = \int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx = 10 \quad (1)$$

$$\text{Đặt } B = \int_{-1}^1 g(x) dx = \underbrace{\int_{-1}^0 g(x) dx}_{B_1} + \underbrace{\int_0^1 g(x) dx}_{B_2}$$

$$B_1 = \int_{-1}^0 g(x) dx. \text{ Đặt } t = -x \Rightarrow dt = -dx$$

$$\begin{array}{c|c} \text{Đổi cận:} & \\ \hline -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{array} \quad t \Rightarrow B_1 = \int_1^0 g(-t) \cdot (-dt) = \int_0^1 g(-t) dt = \int_0^1 g(-x) dx \text{ (Do tích phân xác định không phụ thuộc}$$

$$\text{vào biến số tích phân)} = -\int_0^1 g(x) dx \text{ (Do } f(x) \text{ là hàm chẵn } \Rightarrow g(-x) = -g(x))$$

$$\text{Vậy } B = \int_{-1}^1 g(x) dx = -\int_0^1 g(x) dx + \int_0^1 g(x) dx = 0 \quad (2)$$

Từ (1) và (2)

Chọn B

Câu 165: Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm lẻ và liên tục trên $[-4; 4]$ biết $\int_{-2}^0 f(-x) dx = 2$ và

$$\int_1^2 f(-2x) dx = 4. \text{ Tính } I = \int_0^4 f(x) dx.$$

- A.** $I = -10.$ **B.** $I = -6.$ **C.** $I = 6.$ **D.** $I = 10.$

Câu 166: Cho hàm số chẵn $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_{-1}^1 \frac{f(2x)}{1+2^x} dx = 8$. Tính $\int_0^2 f(x) dx$.

- A.** 2. **B.** 4. **C.** 8. **D.** 16.

Câu 167: Cho $f(x)$ là hàm số chẵn liên tục trong đoạn $[-1; 1]$ và $\int_{-1}^1 f(x) dx = 2$. Kết quả

$$I = \int_{-1}^1 \frac{f(x)}{1+e^x} dx \text{ bằng}$$

- A.** $I = 1.$ **B.** $I = 3.$ **C.** $I = 2.$ **D.** $I = 4.$

Câu 168: Cho $y = f(x)$ là hàm số chẵn và liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2} \int_1^2 f(x) dx = 1$. Giá trị của

$$\int_{-2}^2 \frac{f(x)}{3^x + 1} dx \text{ bằng}$$

- A.** 1. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 169: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f^3(x) + f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$. Tính $I = \int_0^2 f(x) dx$

- A.** $I = 2.$ **B.** $I = \frac{3}{2}.$ **C.** $I = \frac{1}{2}.$ **D.** $I = \frac{5}{4}.$

Câu 170: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $2f^3(x) - 3f^2(x) + 6f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$. Tính tích phân $I = \int_0^5 f(x) dx$.

- A.** $I = \frac{5}{4}.$ **B.** $I = \frac{5}{2}.$ **C.** $I = \frac{5}{12}.$ **D.** $I = \frac{5}{3}.$

Câu 171: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $x + f^3(x) + 2f(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Tính

$$I = \int_{-2}^1 f(x) dx.$$

- A.** $I = \frac{7}{4}.$ **B.** $I = \frac{7}{2}.$ **C.** $I = \frac{7}{3}.$ **D.** $I = \frac{5}{4}.$

TÍCH PHÂN HÀM ẨN ĐỔI BIẾN DẠNG 5

Bài toán: “ Cho $f(x) \cdot f(a+b-x) = k^2$, khi đó $I = \int_a^b \frac{dx}{k+f(x)} = \frac{b-a}{2k}$

Chứng minh:

$$\text{Đặt } t = a+b-x \Rightarrow \begin{cases} dt = -dx \\ f(x) = \frac{k^2}{f(t)} \text{ và } x=a \Rightarrow t=b; x=b \Rightarrow t=a. \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } I = \int_a^b \frac{dx}{k+f(x)} = \int_a^b \frac{dx}{k+\frac{k^2}{f(t)}} = \frac{1}{k} \int_a^b \frac{f(x)dx}{k+f(x)}.$$

$$2I = \int_a^b \frac{dx}{k+f(x)} + \frac{1}{k} \int_a^b \frac{f(x)dx}{k+f(x)} = \frac{1}{k} \int_a^b dx = \frac{1}{k}(b-a) \Rightarrow I = \frac{b-a}{2k}.$$

Câu 172: Cho hàm số $f(x)$ liên tục và nhận giá trị dương trên $[0;1]$. Biết $f(x) \cdot f(1-x) = 1$ với

$$\forall x \in [0;1]. \text{ Tính giá trị } I = \int_0^1 \frac{dx}{1+f(x)}$$

A. $\frac{3}{2}$.

B. $\frac{1}{2}$.

C. 1.

D. 2.

Câu 173: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, ta có $f(x) > 0$ và $f(0) \cdot f(2018-x) = 1$. Giá trị của tích

$$\text{phân } I = \int_0^{2018} \frac{dx}{1+f(x)}$$

A. $I = 2018$.

B. $I = 0$

C. $I = 1009$

D. 4016

Câu 174: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm, liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(x) > 0$ khi $x \in [0;5]$. Biết

$$f(x) \cdot f(5-x) = 1, \text{ tính tích phân } I = \int_0^5 \frac{dx}{1+f(x)}.$$

A. $I = \frac{5}{4}$.

B. $I = \frac{5}{3}$.

C. $I = \frac{5}{2}$.

D. $I = 10$.

Câu 175: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(4-x) = f(x)$. Biết $\int_1^3 xf(x)dx = 5$.

$$\text{Tính tích phân } \int_1^3 f(x)dx.$$

A. $\frac{5}{2}$.

B. $\frac{7}{2}$.

C. $\frac{9}{2}$.

D. $\frac{11}{2}$.

Câu 176: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(x) > 0$ khi $x \in [0; a]$ ($a > 0$). Biết

$$f(x) \cdot f(a-x) = 1, \text{ tính tích phân } I = \int_0^a \frac{dx}{1+f(x)}.$$

A. $I = \frac{a}{2}$.

B. $I = 2a$.

C. $I = \frac{a}{3}$.

D. $I = \frac{a}{4}$.

Câu 177: Cho $f(x)$ là hàm liên tục trên đoạn $[0; a]$ thỏa mãn $\begin{cases} f(x) \cdot f(a-x) = 1 \\ f(x) > 0, \forall x \in [0; a] \end{cases}$ và

$$\int_0^a \frac{dx}{1+f(x)} = \frac{ba}{c}, \text{ trong đó } b, c \text{ là hai số nguyên dương và } \frac{b}{c} \text{ là phân số tối giản. Khi đó}$$

$b+c$ có giá trị thuộc khoảng nào dưới đây?

A. (11; 22).

B. (0; 9).

C. (7; 21).

D. (2017; 2020).

TÍCH PHÂN HÀM ẨN ĐỐI BIẾN DẠNG 6

Câu 178: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1; 4]$, đồng biến trên đoạn $[1; 4]$ và thỏa mãn đẳng thức $x + 2x \cdot f(x) = [f'(x)]^2, \forall x \in [1; 4]$. Biết rằng $f(1) = \frac{3}{2}$, tính $I = \int_1^4 f(x) dx$?

A. $I = \frac{1186}{45}$.

B. $I = \frac{1174}{45}$.

C. $I = \frac{1222}{45}$.

D. $I = \frac{1201}{45}$.

Câu 179: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $3f'(x) \cdot e^{f^3(x) - x^2 - 1} - \frac{2x}{f^2(x)} = 0$ và

$$f(0) = 1. \text{ Tích phân } \int_0^{\sqrt{7}} x \cdot f(x) dx \text{ bằng}$$

A. $\frac{2\sqrt{7}}{3}$.

B. $\frac{15}{4}$.

C. $\frac{45}{8}$.

D. $\frac{5\sqrt{7}}{4}$.

Câu 180: Cho hàm số $f(x) = x^4 + 4x^3 - 3x^2 - x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Tính $I = \int_0^1 f^2(x) \cdot f'(x) dx$.

A. 2.

B. -2.

C. $-\frac{7}{3}$.

D. $\frac{7}{3}$.

Câu 181: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên khoảng $(0; 1)$ và $f(x) \neq 0, \forall x \in (0; 1)$. Biết rằng

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = a, \quad f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = b \quad \text{và} \quad x + xf'(x) = 2f(x) - 4, \quad \forall x \in (0; 1). \text{ Tính tích phân}$$

$$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^2 x \cdot \cos x + 2 \sin 2x}{f^2(\sin x)} dx \text{ theo } a \text{ và } b.$$

A. $I = \frac{3a+b}{4ab}$.

B. $I = \frac{3b+a}{4ab}$.

C. $I = \frac{3b-a}{4ab}$.

D. $I = \frac{3a-b}{4ab}$.

Câu 182: Cho hàm số f liên tục, $f(x) > -1, f(0) = 0$ và thỏa $f'(x)\sqrt{x^2+1} = 2x\sqrt{f(x)+1}$. Tính $f(\sqrt{3})$.

A. 0.

B. 3.

C. 7.

D. 9.

Câu 183: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_2^5 f(x) dx = 4, f(5) = 3, f(2) = 2$. Tính

$$I = \int_1^2 x^3 f'(x^2 + 1) dx$$

A. 3.

B. 4.

C. 1.

D. 6.

Câu 184: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[1; 4]$ và thỏa mãn $f(x) = \frac{f(2\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}} + \frac{\ln x}{x}$. Tính tích

$$\text{phân } I = \int_3^4 f(x) dx.$$

A. $I = 3 + 2\ln^2 2$.

B. $I = 2\ln^2 2$.

C. $I = \ln^2 2$.

D. $I = 2\ln 2$.

Câu 185: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cot x \cdot f(\sin^2 x) dx = \int_1^{16} \frac{f(\sqrt{x})}{x} dx = 1$. Tính

tích phân $\int_{\frac{1}{8}}^1 \frac{f(4x)}{x} dx$.

- A.** $I = 3$. **B.** $I = \frac{3}{2}$. **C.** $I = 2$. **D.** $I = \frac{5}{2}$.

Câu 186: Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ và thỏa mãn điều kiện $4x \cdot f(x^2) + 3f(1-x) = \sqrt{1-x^2}$.

Tích phân $I = \int_0^1 f(x) dx$ bằng:

- A.** $I = \frac{\pi}{4}$. **B.** $I = \frac{\pi}{6}$. **C.** $I = \frac{\pi}{20}$. **D.** $I = \frac{\pi}{16}$.

Câu 187: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1) = 1$, $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \frac{9}{5}$

và $\int_0^1 f(\sqrt{x}) dx = \frac{2}{5}$. Tính tích phân $I = \int_0^1 f(x) dx$.

- A.** $I = \frac{3}{5}$. **B.** $I = \frac{1}{4}$. **C.** $I = \frac{3}{4}$. **D.** $I = \frac{1}{5}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

TÍCH PHÂN HÀM ẨN ĐỔI BIẾN DẠNG 1

Câu 104: Cho $\int_0^4 f(x) dx = 16$. Tính $\int_0^2 f(2x) dx$

A. 16.

B. 4.

C. 32.

D. 8.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Xét tích phân $\int_0^2 f(2x) dx$ ta có

Đặt $2x = t \Rightarrow dx = \frac{1}{2} dt$. Khi $x = 0$ thì $t = 0$; khi $x = 2$ thì $t = 4$.

Do đó $\int_0^2 f(2x) dx = \frac{1}{2} \int_0^4 f(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^4 f(x) dx = \frac{1}{2} \cdot 16 = 8$.

Câu 105: Nếu $\int_0^6 f(x) dx = 12$ thì $\int_0^2 f(3x) dx$ bằng

A. 6.

B. 36.

C. 2.

D. 4.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Đặt $t = 3x \Rightarrow dt = 3dx$. Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 0$, $x = 2 \Rightarrow t = 6$

Khi đó: $\int_0^2 f(3x) dx = \frac{1}{3} \int_0^6 f(t) dt = \frac{1}{3} \cdot 12 = 4$.

Câu 106: Cho $\int_1^2 f(x^2 + 1) x dx = 2$. Khi đó $I = \int_2^5 f(x) dx$ bằng:

A. 2.

B. 1.

C. -1.

D. 4.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Đặt $t = x^2 + 1 \Rightarrow dt = 2x dx$.

Đổi cận: $x = 1 \Rightarrow t = 2$, $x = 2 \Rightarrow t = 5$.

Khi đó: $\int_1^2 f(x^2 + 1) x dx = \frac{1}{2} \int_2^5 f(t) dt \Rightarrow \int_2^5 f(t) dt = 2 \int_1^2 f(x^2 + 1) x dx = 4$.

Mà tích phân không phụ thuộc vào biến nên: $I = \int_2^5 f(x) dx = \int_2^5 f(t) dt = 4$.

Câu 107: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int_{-5}^1 f(x) dx = 9$. Tính tích phân

$$\int_0^2 [f(1-3x) + 9] dx.$$

A. 27.

B. 21.

C. 15.

D. 75.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Đặt $t = 1 - 3x \Rightarrow dt = -3dx$.

Với $x = 0 \rightarrow t = 1$ và $x = 2 \rightarrow t = -5$.

Ta có $\int_0^2 [f(1-3x) + 9] dx = \int_0^2 f(1-3x) dx + \int_0^2 9 dx = \int_1^{-5} f(t) \left(-\frac{dt}{3}\right) + 9x \Big|_0^2 = \frac{1}{3} \int_{-5}^1 f(x) dx + 18$

$$= \frac{1}{3} \cdot 9 + 18 = 21.$$

Câu 108: Biết $f(x)$ làm hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^9 f(x) dx = 9$. Khi đó giá trị của $\int_1^4 f(3x-3) dx$ là

A. 27.

B. 3.

C. 0.

D. 24.

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$I = \int_1^4 f(3x-3) dx. \text{ Đặt } t = 3x-3 \Rightarrow dt = 3dx$$

$$\text{Đổi cận: } \begin{cases} x=1 \Rightarrow t=0 \\ x=4 \Rightarrow t=9 \end{cases}$$

$$I = \frac{1}{3} \int_0^9 f(t) dt = \frac{1}{3} \int_0^9 f(x) dx = 3.$$

Câu 109: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa $\int_0^1 f(x) dx = 10$. Tính $\int_0^2 f\left(\frac{x}{2}\right) dx$.

A. $\int_0^2 f\left(\frac{x}{2}\right) dx = \frac{5}{2}.$

B. $\int_0^2 f\left(\frac{x}{2}\right) dx = 20.$

C. $\int_0^2 f\left(\frac{x}{2}\right) dx = 10.$

D. $\int_0^2 f\left(\frac{x}{2}\right) dx = 5.$

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$\text{Đặt } t = \frac{x}{2} \Rightarrow dt = \frac{1}{2} dx.$$

$$\text{Đổi cận: } x=0 \Rightarrow t=0; x=2 \Rightarrow t=1.$$

$$\text{Ta có: } \int_0^2 f\left(\frac{x}{2}\right) dx = 2 \cdot \int_0^1 f(t) dt = 2 \cdot 10 = 20.$$

Câu 110: Cho $\int_{-1}^5 f(x) dx = 4$. Tính $I = \int_{-1}^2 f(2x+1) dx$.

A. $I = 2.$

B. $I = \frac{5}{2}.$

C. $I = 4.$

D. $I = \frac{3}{2}.$

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$\text{Đặt } t = 2x+1 \Rightarrow dt = 2dx \Rightarrow dx = \frac{1}{2} dt.$$

$$\text{Với } x=-1 \Rightarrow t=-1, \text{ với } x=2 \Rightarrow t=5.$$

$$\text{Khi đó ta có } I = \int_{-1}^2 f(2x+1) dx \Rightarrow I = \int_{-1}^5 f(t) \cdot \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^5 f(t) dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^5 f(x) dx = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2.$$

Câu 111: Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_3^5 f(x) dx = a, (a \in \mathbb{R})$. Tích phân

$$I = \int_1^2 f(2x+1) dx \text{ có giá trị là}$$

A. $I = \frac{1}{2}a + 1.$

B. $I = 2a + 1.$

C. $I = 2a.$

D. $I = \frac{1}{2}a.$

Hướng dẫn giải

Chọn D

$$\text{Đặt } t = 2x+1 \Rightarrow dt = 2dx.$$

$$\text{Đổi cận: } x=1 \Rightarrow t=3; x=2 \Rightarrow t=5.$$

$$\Rightarrow I = \int_3^5 \frac{1}{2} f(t) dt = \frac{1}{2} \int_3^5 f(x) dx = \frac{1}{2} a.$$

Câu 112: Cho $\int_1^2 f(x^2 + 1) x dx = 2$. Khi đó $I = \int_2^5 f(x) dx$ bằng

- A. 2. B. 1. C. -1. **D. 4.**

Hướng dẫn giải

Chọn D

Đặt $t = x^2 + 1 \Rightarrow dt = 2x dx$

Đổi cận: $x = 1 \Rightarrow t = 2$; $x = 2 \Rightarrow t = 5$.

Khi đó: $2 = \frac{1}{2} \int_2^5 f(t) dt = \frac{1}{2} \int_2^5 f(x) dx \Rightarrow I = \int_2^5 f(x) dx = 4.$

Câu 113: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[1; +\infty)$ và $\int_0^3 f(\sqrt{x+1}) dx = 8$. Tích phân $I = \int_1^2 xf(x) dx$ bằng:

- A. $I = 16$. B. $I = 2$. C. $I = 8$. **D. $I = 4$**

Hướng dẫn giải

Chọn D

$I = \int_0^3 f(\sqrt{x+1}) dx = 8$. Đặt $t = \sqrt{x+1} \Rightarrow t^2 = x+1 \Rightarrow 2t dt = dx$;

đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 1$; $x = 3 \Rightarrow t = 2$.

Khi đó $I = \int_1^2 2tf(t) dt = 8 \Rightarrow \int_1^2 tf(t) dt = 4$. Vậy $I = \int_1^2 xf(x) dx = 4$.

Câu 114: Biết $\int_{-1}^{11} f(x) dx = 18$. Tính $I = \int_0^2 x(2 + f(3x^2 - 1)) dx$.

- A. $I = 5$. **B. $I = 7$.** C. $I = 8$ D. $I = 10$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Đặt $t = 3x^2 - 1 \Rightarrow dt = 6x dx$. Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = -1$, $x = 2 \Rightarrow t = 11$

$I = \int_0^2 x(2 + f(3x^2 - 1)) dx = \int_0^2 2x dx + \int_0^2 xf(3x^2 - 1) dx = 4 + \frac{1}{6} \int_{-1}^{11} f(t) dt = 4 + \frac{1}{6} \cdot 18 = 7$.

Câu 115: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^1 f(2x) dx = 8$. Tính $I = \int_0^{\sqrt{2}} xf(x^2) dx$

- A. 4. B. 16. **C. 8.** D. 32.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Đặt $x^2 = 2t \Rightarrow 2x dx = 2dt \Rightarrow x dx = dt$. Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 0$, $x = \sqrt{2} \Rightarrow t = 1$.

Ta có: $I = \int_0^1 f(2t) dt = 8$.

Câu 116: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $\int_0^1 f(x) dx = 2$; $\int_0^3 f(x) dx = 6$. Tính

$$I = \int_{-1}^1 f(|2x-1|) dx.$$

- A. $I = \frac{2}{3}$. **B. $I = 4$.** C. $I = \frac{3}{2}$. D. $I = 6$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$\text{Có } I = \int_{-1}^1 f(|2x-1|)dx = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} f(1-2x)dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 f(2x-1)dx = I_1 + I_2$$

$$\text{Tính } I_1 = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} f(1-2x)dx. \text{ Đặt } u = 1-2x \Rightarrow du = -2dx. \text{ Đổi cận: } \begin{cases} x = -1 \Rightarrow u = 3 \\ x = \frac{1}{2} \Rightarrow u = 0 \end{cases}.$$

$$\Rightarrow I_1 = -\frac{1}{2} \int_3^0 f(u)du = \frac{1}{2} \int_0^3 f(u)du = 3$$

$$\text{Tính } I_2 = \int_{\frac{1}{2}}^1 f(2x-1)dx. \text{ Đặt } u = 2x-1 \Rightarrow du = 2dx. \text{ Đổi cận: } \begin{cases} x = 1 \Rightarrow u = 1 \\ x = \frac{1}{2} \Rightarrow u = 0 \end{cases}.$$

$$\Rightarrow I_2 = \frac{1}{2} \int_0^1 f(u)du = \frac{1}{2} \int_0^1 f(u)du = 1$$

$$\text{Vậy } I = I_1 + I_2 = 4.$$

Câu 117: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[0; 4]$ và $\int_0^2 f(x)dx = 1; \int_0^4 f(x)dx = 3$. Tính

$$\int_{-1}^1 f(|3x-1|)dx.$$

A. 4.

B. 2.

C. $\frac{4}{3}$.

D. 1.

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(|3x-1|)dx &= \int_{-1}^{1/3} f(1-3x)dx + \int_{1/3}^1 f(3x-1)dx. \\ &= -\frac{1}{3} \int_{-1}^{1/3} f(1-3x)d(1-3x) + \frac{1}{3} \int_{1/3}^1 f(3x-1)d(3x-1). \\ &= -\frac{1}{3} \int_4^0 f(t)dt + \frac{1}{3} \int_0^2 f(t)dt = -\frac{1}{3}(-3) + \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Câu 118: Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^1 f(x)dx = 4, \int_0^3 f(x)dx = 6$. Tính

$$I = \int_{-1}^1 f(|2x+1|)dx.$$

A. $I = 3$.

B. $I = 5$.

C. $I = 6$.

D. $I = 4$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$\text{Đặt } u = 2x+1 \Rightarrow dx = \frac{1}{2}du. \text{ Khi } x = -1 \text{ thì } u = -1. \text{ Khi } x = 1 \text{ thì } u = 3.$$

$$\begin{aligned} \text{Nên } I &= \frac{1}{2} \int_{-1}^3 f(|u|)du = \frac{1}{2} \left(\int_{-1}^0 f(|u|)du + \int_0^3 f(|u|)du \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_{-1}^0 f(-u)du + \int_0^3 f(u)du \right). \end{aligned}$$

Xét $\int_0^1 f(x) dx = 4$. Đặt $x = -u \Rightarrow dx = -du$.

Khi $x = 0$ thì $u = 0$. Khi $x = 1$ thì $u = -1$.

$$\text{Nên } 4 = \int_0^1 f(x) dx = -\int_0^{-1} f(-u) du = \int_{-1}^0 f(-u) du.$$

$$\text{Ta có } \int_0^3 f(x) dx = 6 \Rightarrow \int_0^3 f(u) du = 6.$$

$$\text{Nên } I = \frac{1}{2} \left(\int_{-1}^0 f(-u) du + \int_0^3 f(u) du \right) = \frac{1}{2}(4+6) = 5.$$

Câu 119: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa $\int_0^1 f(2x) dx = 2$ và $\int_0^2 f(6x) dx = 14$. Tính

$$\int_{-2}^2 f(5|x|+2) dx.$$

A. 30.

B. 32.

C. 34.

D. 36.

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$+ \text{Xét } \int_0^1 f(2x) dx = 2.$$

$$\text{Đặt } u = 2x \Rightarrow du = 2dx; x = 0 \Rightarrow u = 0; x = 1 \Rightarrow u = 2.$$

$$\text{Nên } 2 = \int_0^1 f(2x) dx = \frac{1}{2} \int_0^2 f(u) du \Rightarrow \int_0^2 f(u) du = 4.$$

$$+ \text{Xét } \int_0^2 f(6x) dx = 14.$$

$$\text{Đặt } v = 6x \Rightarrow dv = 6dx; x = 0 \Rightarrow v = 0; x = 2 \Rightarrow v = 12.$$

$$\text{Nên } 14 = \int_0^2 f(6x) dx = \frac{1}{6} \int_0^{12} f(v) dv \Rightarrow \int_0^{12} f(v) dv = 84.$$

$$+ \text{Xét } \int_{-2}^2 f(5|x|+2) dx = \int_{-2}^0 f(5|x|+2) dx + \int_0^2 f(5|x|+2) dx.$$

$$\square \text{ Tính } I_1 = \int_{-2}^0 f(5|x|+2) dx.$$

$$\text{Đặt } t = 5|x|+2.$$

$$\text{Khi } -2 < x < 0, t = -5x+2 \Rightarrow dt = -5dx; x = -2 \Rightarrow t = 12; x = 0 \Rightarrow t = 2.$$

$$I_1 = \frac{-1}{5} \int_{12}^2 f(t) dt = \frac{1}{5} \left[\int_0^{12} f(t) dt - \int_0^2 f(t) dt \right] = \frac{1}{5}(84-4) = 16.$$

$$\square \text{ Tính } I_1 = \int_0^2 f(5|x|+2) dx.$$

$$\text{Đặt } t = 5|x|+2.$$

$$\text{Khi } 0 < x < 2, t = 5x+2 \Rightarrow dt = 5dx; x = 2 \Rightarrow t = 12; x = 0 \Rightarrow t = 2.$$

$$I_2 = \frac{1}{5} \int_2^{12} f(t) dt = \frac{1}{5} \left[\int_0^{12} f(t) dt - \int_0^2 f(t) dt \right] = \frac{1}{5}(84-4) = 16.$$

$$\text{Vậy } \int_{-2}^2 f(5|x|+2) dx = 32.$$

Câu 120: Cho tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot f(\sin x) dx = 8$. Tính tích phân $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot f(\cos x) dx$.

A. $K = -8$.

B. $K = 4$.

C. $K = 8$.

D. $K = 16$.

Hướng dẫn giải:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot f(\sin x) dx \quad \text{Đặt } t = \frac{\pi}{2} - x \Rightarrow dt = -dx \quad \text{Đổi cận:}$$

$$\Rightarrow I = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) \cdot f\left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right] \cdot (-dt) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cdot f(\cos t) \cdot dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot f(\cos x) \cdot dx \quad (\text{Tích phân xác}$$

định không phụ thuộc vào biến số tích phân) $= K \Rightarrow K = I = 8$

Chọn C

Câu 121: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbf{R}$, thỏa mãn $\int_0^1 f(x) dx = 1$. Tính

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan^2 x + 1) \cdot f(\tan x) dx.$$

A. $I = 1$.

B. $I = -1$.

C. $I = \frac{\pi}{4}$.

D. $I = -\frac{\pi}{4}$.

Hướng dẫn giải:

Đặt $t = \tan x \Rightarrow dt = (1 + \tan^2 x) dx$. Đổi cận:

$$\Rightarrow I = \int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 f(x) dx \quad (\text{Tích phân xác định không phụ thuộc vào biến số tích phân}) = 1$$

Chọn A

Câu 122: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbf{R}$ thỏa mãn $f(2x) = 3f(x)$, $\forall x \in \mathbf{R}$. Biết rằng

$$\int_0^1 f(x) dx = 1. \text{ Giá trị của tích phân } I = \int_1^2 f(x) dx \text{ bằng bao nhiêu?}$$

A. $I = 5$.

B. $I = 3$.

C. $I = 8$.

D. $I = 2$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A

Xét tích phân $J = \int_0^2 f(x) dx$, đặt $x = 2t \Rightarrow dx = 2dt$.

Với $x = 2 \Rightarrow t = 1$, $x = 0 \Rightarrow t = 0$.

$$\text{Ta có } J = \int_0^1 f(2t) 2dt = 2 \int_0^1 f(2t) dt = 2 \int_0^1 3f(t) dt = 6 \int_0^1 f(t) dt = 6 \int_0^1 f(x) dx = 6.$$

$$\text{Mặt khác, ta có } J = \int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx$$

$$\Rightarrow I = \int_1^2 f(x) dx = \int_0^2 f(x) dx - \int_0^1 f(x) dx = J - \int_0^1 f(x) dx = 5.$$

Câu 123: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbf{R}$ thỏa mãn $f(2) = -2$; $\int_0^2 f(x) dx = 1$.

$$\text{Tính tích phân } I = \int_0^4 f'(\sqrt{x}) dx.$$

A. $I = -10$.

B. $I = -5$.

C. $I = 0$.

D. $I = -18$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Đặt $t = \sqrt{x}$, ta có: $t^2 = x$ và $2t dt = dx$. Khi $x = 0 \Rightarrow t = 0$; $x = 4 \Rightarrow t = 2$.

$$I = \int_0^4 f'(\sqrt{x}) dx = \int_0^2 2t f'(t) dt.$$

Đặt $u = 2t$; $dv = f'(t) dt$ ta được: $du = 2dt$; $v = f(t)$.

$$\text{Khi đó: } I = (2t f(t)) \Big|_0^2 - 2 \int_0^2 f(t) dt = 4 f(2) - 2 \cdot 1 = 4 \cdot (-2) - 2 = -10.$$

Câu 124: Cho $\int_1^2 f(x) dx = 2$. Tính $I = \int_1^4 \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx$ bằng

A. $I = 1$.

B. $I = 2$.

C. $I = 4$.

D. $I = \frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Đặt $t = \sqrt{x} \Rightarrow dt = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$; đổi cận: $x = 1 \Rightarrow t = 1$, $x = 4 \Rightarrow t = 2$

$$I = \int_1^4 \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = \int_1^2 f(t) 2dt = 2 \int_1^2 f(t) dt = 2 \cdot 2 = 4.$$

Câu 125: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int_1^{16} \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = 6$ và $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) \cos x dx = 3$.

Tính tích phân $I = \int_0^4 f(x) dx$.

A. $I = -2$.

B. $I = 6$.

C. $I = 9$.

D. $I = 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

• Xét $I = \int_1^{16} \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = 6$, đặt $\sqrt{x} = t \Rightarrow \frac{dx}{2\sqrt{x}} = dt$

Đổi cận: $x = 1 \Rightarrow t = 1$; $x = 16 \Rightarrow t = 4$

$$I = 2 \int_1^4 f(t) dt = 6 \Rightarrow \int_1^4 f(t) dt = \frac{6}{2} = 3.$$

• $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) \cos x dx = 3$, đặt $\sin x = u \Rightarrow \cos x dx = du$

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow u = 0$; $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow u = 1$

$$J = \int_0^1 f(u) du = 3$$

$$\text{Vậy } I = \int_0^4 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^4 f(x) dx = 3 + 3 = 6.$$

Câu 126: Cho $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa $\int_1^9 \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = 4$ và $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) \cos x dx = 2$. Tính

$$I = \int_0^3 f(x) dx.$$

- A. $I = 10$. B. $I = 6$. **C. $I = 4$.** D. $I = 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có: $\int_1^9 \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = 4$, đặt $t = \sqrt{x} \Rightarrow t^2 = x \Rightarrow 2t dt = dx$

đổi cận $x=1 \Rightarrow t=1, x=9 \Rightarrow t=3$

Do đó ta có: $\int_1^3 \frac{f(t)}{t} 2t dt = 4 \Leftrightarrow \int_1^3 f(t) dt = 2$ (1)

Ta có: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) \cos x dx = 2$, đặt $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$

đổi cận $x=0 \Rightarrow t=0, x=\frac{\pi}{2} \Rightarrow t=1$

Do đó ta có: $\int_0^1 f(t) dt = 2 \Leftrightarrow \int_0^1 f(t) dt = 2$ (2)

Từ (1) và (2) ta có: $\int_0^3 f(x) dx = \int_0^1 f(t) dt + \int_1^3 f(t) dt = 4$.

Câu 127: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[1;4]$ và thỏa mãn $f(x) = \frac{f(2\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}} + \frac{\ln x}{x}$. Tính tích

$$\text{phân } I = \int_1^4 f(x) dx.$$

- A. $I = 3 + 2 \ln^2 2$. **B. $I = 2 \ln^2 2$.** C. $I = \ln^2 2$. D. $I = 2 \ln 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có $\int_1^4 f(x) dx = \int_1^4 \left[\frac{f(2\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}} + \frac{\ln x}{x} \right] dx = \int_1^4 \frac{f(2\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}} dx + \int_1^4 \frac{\ln x}{x} dx$.

Xét $K = \int_1^4 \frac{f(2\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}} dx$.

Đặt $2\sqrt{x}-1=t \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{t+1}{2} \Rightarrow \frac{dx}{\sqrt{x}} = dt$.

$\Rightarrow K = \int_1^3 f(t) dt = \int_1^3 f(x) dx$.

Xét $M = \int_1^4 \frac{\ln x}{x} dx = \int_1^4 \ln x d(\ln x) = \frac{\ln^2 x}{2} \Big|_1^4 = 2 \ln^2 2$.

Do đó $\int_1^4 f(x) dx = \int_1^3 f(x) dx + 2 \ln^2 2 \Rightarrow \int_3^4 f(x) dx = 2 \ln^2 2$.

Câu 128: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-4; +\infty)$ và $\int_0^5 f(\sqrt{x+4})dx = 8$. Tính $I = \int_3^2 x.f(x)dx$.

A. $I = 8$. B. $I = 4$. C. $I = -16$. **D. $I = -4$.**

Hướng dẫn giải

Chọn D

$$\text{Đặt } \sqrt{x+4} = t \Rightarrow x = t^2 - 4.$$

$$\text{Khi } \begin{cases} x=0 \Rightarrow t=2 \\ x=5 \Rightarrow t=3 \end{cases} \Rightarrow 8 = \int_2^3 f(t)d(t^2-4) \Leftrightarrow \int_2^3 2t.f(t)dt = 8.$$

$$\text{Mà } \int_2^3 2t.f(t)dt = \int_2^3 2x.f(x)dx \Rightarrow \int_2^3 x.f(x)dx = 4 \Rightarrow I = -4.$$

Câu 129: Cho $\int_0^1 f(2x+1)dx = 12$ và $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin^2 x)\sin 2xdx = 3$. Tính $\int_0^3 f(x)dx$.

A. 26. B. 22. **C. 27.** D. 15.

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$\text{Đặt } 2x+1=t \Rightarrow 12 = \int_1^3 f(t)d\left(\frac{t-1}{2}\right) = \frac{1}{2} \int_1^3 f(t)dt = \frac{1}{2} \int_1^3 f(x)dx \Rightarrow \int_1^3 f(x)dx = 24.$$

$$\text{Ta có } \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin^2 x)\sin 2xdx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin^2 x).2\sin x \cos xdx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin x.f(\sin^2 x)d(\sin x)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin^2 x)d(\sin^2 x) = \int_0^1 f(u)du = \int_0^1 f(x)dx = 3$$

$$\Rightarrow \int_0^3 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^3 f(x)dx = 3 + 24 = 27.$$

Câu 130: Cho hàm $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x)dx = 3$ và $\int_0^1 \frac{x^2 f(x)}{x^2+1}dx = 1$. Tính

$$\int_0^1 f(x)dx.$$

A. 4.

B. 2.

C. 5.

D. 1.

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$\int_0^1 \frac{x^2 f(x)}{x^2+1}dx = \int_0^1 f(x)dx - \int_0^1 \frac{f(x)}{x^2+1}dx \Leftrightarrow \int_0^1 \frac{x^2 f(x)}{x^2+1}dx + \int_0^1 \frac{f(x)}{x^2+1}dx = \int_0^1 f(x)dx.$$

$$\text{Đặt } \tan x = t \text{ suy ra } d(\tan x) = dt \Leftrightarrow \frac{1}{\cos^2 x}dx = dt \Leftrightarrow (1 + \tan^2 x)dx = dt.$$

$$\Leftrightarrow dx = \frac{dt}{(1 + \tan^2 x)} = \frac{dt}{1+t^2}.$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x)dx = \int_0^1 f(t) \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^1 \frac{f(x)}{x^2+1}dx = 3.$$

$$\text{Vậy } \int_0^1 f(x)dx = 4.$$

Câu 131: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x) dx = 4$; $\int_0^1 \frac{x^2 f(x)}{x^2 + 1} dx = 2$. Tính $I = \int_0^1 f(x) dx$.

- A.** $I = 6$. **B.** $I = 2$. **C.** $I = 3$. **D.** $I = 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Từ $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x) dx = 4$; Ta đặt $t = \tan x$ ta được $\int_0^1 \frac{f(t)}{t^2 + 1} dt = 4$

Từ $\int_0^1 \frac{x^2 f(x)}{x^2 + 1} dx = 2 \Leftrightarrow \int_0^1 \frac{(x^2 + 1 - 1) f(x)}{x^2 + 1} dx = 2 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx - \int_0^1 \frac{f(x)}{x^2 + 1} dx = 2$

$\Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = 2 + \int_0^1 \frac{f(x)}{x^2 + 1} dx = 2 + 4 = 6$.

Câu 132: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa $\int_0^{2018} f(x) dx = 2$. Khi đó tích phân

$$\int_0^{\sqrt{e^{2018}-1}} \frac{x}{x^2 + 1} f(\ln(x^2 + 1)) dx \text{ bằng}$$

- A.** 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Xét $I = \int_0^{\sqrt{e^{2018}-1}} \frac{x}{x^2 + 1} f(\ln(x^2 + 1)) dx$.

Đặt $t = \ln(x^2 + 1) \Rightarrow dt = \frac{2x}{x^2 + 1} dx$. Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 0$; $x = \sqrt{e^{2018} - 1} \Rightarrow t = 2018$.

Suy ra $I = \frac{1}{2} \int_0^{2018} f(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^{2018} f(x) dx = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$.

Câu 133: Tìm tất cả các giá trị dương của m để $\int_0^3 x(3-x)^m dx = -f''\left(\frac{10}{9}\right)$, với $f(x) = \ln x^{15}$.

- A.** $m = 20$. **B.** $m = 4$. **C.** $m = 5$. **D.** $m = 3$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

+ Từ $f(x) = \ln x^{15} \Rightarrow f'(x) = \frac{15x^{14}}{x^{15}} = \frac{15}{x} \Rightarrow f''(x) = \frac{-15}{x^2}$ do đó $f''\left(\frac{10}{9}\right) = \frac{-243}{20}$.

+ Tính tích phân $I = \int_0^3 x(3-x)^m dx$:

• Đặt $t = 3 - x \Rightarrow x = 3 - t, dx = -dt$, $\begin{array}{c|c} x & 0 \\ \hline t & 3 \end{array} \quad \begin{array}{c} 3 \\ 0 \end{array}$

• Do đó $I = \int_3^0 (3-t)t^m (-dt) = \int_0^3 (3t^m - t^{m+1}) dt = \frac{3t^{m+1}}{m+1} - \frac{t^{m+2}}{m+2} \Big|_0^3 = \frac{3^{m+2}}{(m+1)(m+2)}$

+ Ta có $\int_0^3 x(3-x)^m dx = -f''\left(\frac{10}{9}\right) \Leftrightarrow \frac{3^{m+2}}{(m+1)(m+2)} = \frac{243}{20} \Leftrightarrow \frac{3^{m+2}}{(m+1)(m+2)} = \frac{3^5}{4 \cdot 5}$

Thay lần lượt các giá trị m ở 4 đáp án, nhận giá trị $m = 3$.

Chú ý:

-Việc giải phương trình $\frac{3^m}{(m+1)(m+2)} = \frac{3^3}{4.5}$ không cần thiết nên chọn phương pháp thế đáp để làm trắc nghiệm trong bài này.

-Để giải phương trình $\frac{3^m}{(m+1)(m+2)} = \frac{3^3}{4.5}$ ta xét hàm trên $f(m) = \frac{3^m}{(m+1)(m+2)} - \frac{3^3}{4.5}$ với $m > 0$ thì chứng minh được phương trình có nghiệm duy nhất $m = 3$.

Câu 134: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(4-x) = f(x)$. Biết $\int_1^3 xf(x)dx = 5$.

Tính $I = \int_1^3 f(x)dx$.

A. $I = \frac{5}{2}$.

B. $I = \frac{7}{2}$.

C. $I = \frac{9}{2}$.

D. $I = \frac{11}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Cách 1: Dùng tính chất để tính nhanh

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và thỏa mãn điều kiện $f(a+b-x) = f(x), \forall x \in [a; b]$. Khi đó

$$\int_a^b xf(x)dx = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x)dx$$

Chứng minh:

Đặt $t = a+b-x \Rightarrow dx = -dt$, với $x \in [a; b]$. Đổi cận: khi $x = a \Rightarrow t = b$; khi $x = b \Rightarrow t = a$

Ta có $\int_a^b xf(x)dx = \int_a^b xf(a+b-x)dx = -\int_b^a (a+b-t)f(t)dt$

$= \int_a^b (a+b-t)f(t)dt = (a+b) \int_a^b f(t)dt - \int_a^b tf(t)dt = (a+b) \int_a^b f(x)dx - \int_a^b xf(x)dx$

$\Rightarrow 2 \int_a^b xf(x)dx = (a+b) \int_a^b f(x)dx \Rightarrow \boxed{\int_a^b xf(x)dx = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x)dx}$.

Áp dụng tính chất trên với $a = 1, b = 3$.

$f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và thỏa mãn $f(1+3-x) = f(x)$.

Khi đó $\int_1^3 xf(x)dx = \frac{1+3}{2} \int_1^3 f(x)dx \Rightarrow \int_1^3 f(x)dx = \frac{5}{2}$.

Cách 2: Đổi biến trực tiếp:

Đặt $t = 4-x$, với $x \in [1; 3]$.

Ta có $\int_1^3 xf(x)dx = \int_1^3 xf(4-x)dx = \int_1^3 (4-t)f(t)dt = 4 \int_1^3 f(t)dt - \int_1^3 t.f(t)dt$

$\Rightarrow 5 = 4 \int_1^3 f(t)dt - 5 \Rightarrow \int_1^3 f(t)dt = \frac{5}{2}$.

Câu 135: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[1; 3]$ thỏa mãn $f(4-x) = f(x), \forall x \in [1; 3]$ và

$\int_1^3 xf(x)dx = -2$. Giá trị $\int_1^3 f(x)dx$ bằng

A. 2.

B. -1.

C. -2.

D. 1.

Hướng dẫn giải

Chọn B

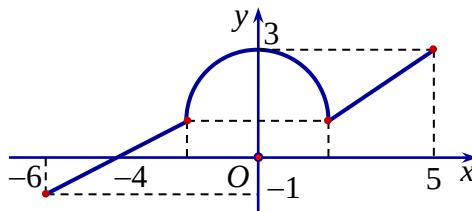
Xét $I = \int_1^3 xf(x)dx$ (1).

Đặt $x = 4 - t$, ta có $dx = -dt$; $x = 1 \Rightarrow t = 3$, $x = 3 \Rightarrow t = 1$.

Suy ra $I = \int_1^3 (4-t)f(4-t)dt = \int_1^3 (4-t)f(t)dt$, hay $I = \int_1^3 (4-x)f(x)dx$ (2).

Cộng (1) và (2) về theo về ta được $2I = \int_1^3 4f(x)dx \Rightarrow \int_1^3 f(x)dx = \frac{I}{2} = -1$.

Câu 136: Cho hàm số f liên tục trên đoạn $[-6; 5]$, có đồ thị gồm hai đoạn thẳng và nửa đường tròn như hình vẽ. Tính giá trị $I = \int_{-6}^5 [f(x) + 2]dx$.



A. $I = 2\pi + 35$.

B. $I = 2\pi + 34$.

C. $I = 2\pi + 33$.

D. $I = 2\pi + 32$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 2 & \text{khi } -6 \leq x \leq -2 \\ 1 + \sqrt{4 - x^2} & \text{khi } -2 \leq x \leq 2 \\ \frac{2}{3}x - \frac{1}{3} & \text{khi } 2 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

Ta có

$$\begin{aligned} I &= \int_{-6}^5 [f(x) + 2]dx = \int_{-6}^5 f(x)dx + 2 \int_{-6}^5 dx \\ &= \int_{-6}^{-2} \left(\frac{1}{2}x + 2\right)dx + \int_{-2}^2 (1 + \sqrt{4 - x^2})dx + \int_2^5 \left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}\right)dx + 22 \\ &= \left(\frac{1}{4}x^2 + 2x\right)\Big|_{-6}^{-2} + J + \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{x}{3}\right)\Big|_2^5 + 22 = J + 28. \end{aligned}$$

Tính $J = \int_{-2}^2 (1 + \sqrt{4 - x^2})dx$

Đặt $x = 2 \sin t \Rightarrow dx = 2 \cos t dt$.

Đổi cận: Khi $x = -2$ thì $t = -\frac{\pi}{2}$; khi $x = 2$ thì $t = \frac{\pi}{2}$.

$$J = \int_{-2}^2 (1 + \sqrt{4 - x^2})dx = 4 + 4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = 4 + 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt = 4 + 2\pi. \text{ Vậy } I = 32 + 2\pi.$$

TÍCH PHÂN HÀM ẨN ĐỔI BIẾN DẠNG 2

Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn: $A.f(x) + B.u'.f(u) + C.f(a+b-x) = g(x)$

$$+) \text{ Với } \begin{cases} u(a)=a \\ u(b)=b \end{cases} \text{ thì } \int_a^b f(x)dx = \frac{1}{A+B+C} \int_a^b g(x)dx.$$

$$+) \text{ Với } \begin{cases} u(a)=b \\ u(b)=a \end{cases} \text{ thì } \int_a^b f(x)dx = \frac{1}{A-B+C} \int_a^b g(x)dx.$$

Trong đề bài thường sẽ bị khuyết một trong các hệ số A, B, C .

$$\text{Nếu } f(x) \text{ liên tục trên } [a; b] \text{ thì } \int_a^b f(a+b-x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Câu 137: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $f(x) = 6x^2 f(x^3) - \frac{6}{\sqrt{3x+1}}$. Tính $\int_0^1 f(x)dx$

A. 2.

B. 4.

C. -1.

D. 6.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Cách 1: (Dùng công thức)

$$\text{Biến đổi } f(x) = 6x^2 f(x^3) - \frac{6}{\sqrt{3x+1}} \Leftrightarrow f(x) - 2 \cdot 3x^2 \cdot f(x^3) = -\frac{6}{\sqrt{3x+1}} \text{ với } A=1, B=-2.$$

$$\text{Áp dụng công thức ta có: } \int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{1+(-2)} \int_0^1 -\frac{6}{\sqrt{3x+1}} dx = 4.$$

Cách 2: (Dùng công thức biến đổi – nếu không nhớ công thức)

$$\text{Từ } f(x) = 6x^2 f(x^3) - \frac{6}{\sqrt{3x+1}} \Rightarrow \int_0^1 f(x)dx - 2 \int_0^1 3x^2 f(x^3)dx = -6 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{3x+1}} dx$$

$$\text{Đặt } u = x^3 \Rightarrow du = 3x^2 dx; \text{ Với } x=0 \Rightarrow u=0 \text{ và } x=1 \Rightarrow u=1.$$

$$\text{Khi đó } \int_0^1 3x^2 f(x^3)dx = \int_0^1 f(u)du = \int_0^1 f(x)dx \text{ thay vào } (*), \text{ ta được:}$$

$$\int_0^1 f(x)dx - 2 \int_0^1 f(x)dx = -6 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{3x+1}} dx \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx = 6 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{3x+1}} dx = 4.$$

Câu 138: Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ và thỏa mãn điều kiện $4xf(x^2) + 3f(x-1) = \sqrt{1-x^2}$.

$$\text{Tích phân } I = \int_0^1 f(x)dx \text{ bằng}$$

A. $I = \frac{\pi}{4}$.

B. $I = \frac{\pi}{6}$.

C. $I = \frac{\pi}{20}$.

D. $I = \frac{\pi}{16}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$\text{Từ } 4x \cdot f(x^2) + 3f(x-1) = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow 2 \int_0^1 2xf(x^2)dx + 3 \int_0^1 f(1-x)dx = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx \quad (*)$$

$$+) \text{ Đặt } u = x^2 \Rightarrow du = 2xdx; \text{ Với } x=0 \Rightarrow u=0 \text{ và } x=1 \Rightarrow u=1.$$

$$\text{Khi đó } \int_0^1 2xf(x^2)dx = \int_0^1 f(u)du = \int_0^1 f(x)dx \quad (1)$$

$$+) \text{ Đặt } t = 1-x \Rightarrow dt = -dx; \text{ Với } x=0 \Rightarrow t=1 \text{ và } x=1 \Rightarrow t=0.$$

$$\text{Khi đó } \int_0^1 f(1-x)dx = \int_1^0 f(t)dt = \int_0^1 f(x)dx \quad (2)$$

Thay (1), (2) vào (*) ta được:

$$2\int_0^1 f(x)dx + 3\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{5}\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \frac{\pi}{20}.$$

Câu 139: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0; 2]$ và thỏa mãn điều kiện $f(x) + f(2-x) = 2x$. Tính giá trị của tích phân $I = \int_0^2 f(x)dx$.

A. $I = -4$.

B. $I = \frac{1}{2}$.

C. $I = \frac{4}{3}$.

D. $I = 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Cách 1: (Dùng công thức)

Với $f(x) + f(2-x) = 2x$ ta có $A=1; B=1$, suy ra: $I = \int_0^2 f(x)dx = \frac{1}{1+1} \int_0^2 2x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^2 = 2$.

Cách 2: (Dùng phương pháp đổi biến – nếu không nhớ công thức)

Từ $f(x) + f(2-x) = 2x \Rightarrow \int_0^2 f(x)dx + \int_0^2 f(2-x)dx = \int_0^2 2x dx = 4$ (*)

Đặt $u = 2-x \Rightarrow du = -dx$; Với $x=0 \Rightarrow u=2$ và $x=2 \Rightarrow u=0$.

Suy ra $\int_0^2 f(2-x)dx = \int_2^0 f(u)du = -\int_0^2 f(x)dx$.

Thay vào (*), ta được $2\int_0^2 f(x)dx = 4 \Leftrightarrow \int_0^2 f(x)dx = 2$.

Câu 140: Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 1]$ và thỏa mãn $2f(x) + 3f(1-x) = \sqrt{1-x}$. Tích phân $\int_0^1 f(x)dx$ bằng

A. $\frac{2}{3}$.

B. $\frac{1}{6}$.

C. $\frac{2}{15}$.

D. $\frac{3}{5}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Đặt $t = 1-x \Rightarrow dx = -dt$.

Suy ra $\int_0^1 f(1-x)dx = -\int_1^0 f(t)dt = \int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 f(x)dx$

$2f(x) + 3f(1-x) = \sqrt{1-x} \Leftrightarrow 5\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \sqrt{1-x}dx = -\frac{2}{3}\sqrt{(1-x)^3} \Big|_0^1 = \frac{2}{3}$.

Suy ra $\int_0^1 f(x)dx = \frac{2}{15}$.

Chú ý: Ta có thể dùng công thức $\int_{ax_1+b}^{ax_2+b} f(ax+b)dx = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$. Khi đó:

Từ $2f(x) + 3f(1-x) = \sqrt{1-x}$ suy ra: $2\int_0^1 f(x)dx + 3\int_0^1 f(1-x)dx = \int_0^1 \sqrt{1-x}dx$

$\Leftrightarrow 2\int_0^1 f(x)dx - 3\int_1^0 f(1-x)dx = \int_0^1 \sqrt{1-x}dx \Leftrightarrow 5\int_0^1 f(x)dx = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx = \frac{2}{15}$.

Câu 141: Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 1]$ và thỏa mãn điều kiện

$2f(x) - 3f(1-x) = x\sqrt{1-x}$. Tính tích phân $I = \int_0^1 f(x)dx$.

A. $I = \frac{1}{25}$.

B. $I = -\frac{4}{15}$.

C. $I = -\frac{1}{15}$.

D. $I = \frac{4}{75}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$\text{Do } 2f(x) - 3f(1-x) = x\sqrt{1-x} \Rightarrow \int_0^1 2f(x)dx - \underbrace{\int_0^1 3f(1-x)dx}_{I_1} = \underbrace{\int_0^1 x\sqrt{1-x}dx}_{I_2} \quad (1).$$

+ Xét $I_1 = 3 \int_0^1 f(1-x)dx$:

Đặt $t = 1-x \Rightarrow dx = -dt$. Khi $x=0 \Rightarrow t=1$; $x=1 \Rightarrow t=0$.

Khi đó $I_1 = 3 \int_1^0 f(t)(-dt) = 3I$.

+ Xét $I_2 = \int_0^1 x\sqrt{1-x}dx$. Đặt $t = \sqrt{1-x} \Rightarrow x = 1-t^2 \Rightarrow dx = -2tdt$.

Khi $x=0 \Rightarrow t=1$; $x=1 \Rightarrow t=0$.

Khi đó $I_2 = \int_1^0 (1-t^2)t(-2tdt) = \left(\frac{2t^5}{5} - \frac{2t^3}{3} \right) \Big|_1^0 = \frac{4}{15}$.

Thay vào (1): $2I - 3I = \frac{4}{15} \Leftrightarrow I = -\frac{4}{15}$.

Câu 142: Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-1; 2]$ và thỏa mãn $f(x) + 2xf(x^2 - 2) + 3f(1-x) = 4x^3$.

Tính giá trị của tích phân $I = \int_{-1}^2 f(x)dx$.

A. $I = 5$.

B. $I = \frac{5}{2}$.

C. $I = 3$.

D. $I = 15$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Cách 1: (Dùng công thức – Dạng 2)

Với: $f(x) + (2x)f(x^2 - 2) + 3f(1-x) = 4x^3$. Ta có:

$A=1; B=1; C=3$ và $u = x^2 - 2$ thỏa mãn $\begin{cases} u(-1) = -1 \\ u(2) = 2 \end{cases}$.

Khi đó áp dụng công thức có:

$$I = \int_{-1}^2 f(x)dx = \frac{1}{1+1+3} \int_{-1}^2 4x^3dx = \frac{x^4}{5} \Big|_{-1}^2 = 3.$$

Cách 2: (Dùng phương pháp đổi biến – nếu không nhớ công thức)

Từ $f(x) + 2xf(x^2 - 2) + 3f(1-x) = 4x^3$.

$$\Rightarrow \int_{-1}^2 f(x)dx + \int_{-1}^2 2xf(x^2 - 2)dx + 3 \int_{-1}^2 f(1-x)dx = \int_{-1}^2 4x^3dx \quad (*)$$

+) Đặt $u = x^2 - 2 \Rightarrow du = 2xdx$; với $x = -1 \Rightarrow u = -1$ và $x = 2 \Rightarrow u = 2$.

Khi đó $\int_{-1}^2 2xf(x^2 - 2)dx = \int_{-1}^2 f(u)du = \int_{-1}^2 f(x)dx \quad (1)$

+) Đặt $t = 1-x \Rightarrow dt = -dx$; Với $x = -1 \Rightarrow t = 2$ và $x = 2 \Rightarrow t = -1$.

Khi đó $\int_{-1}^2 f(1-x)dx = \int_2^{-1} f(t)(-dt) = \int_{-1}^2 f(t)dt = \int_{-1}^2 f(x)dx \quad (2)$

Thay (1), (2) vào (*) ta được: $5 \int_{-1}^2 f(x) dx = 15 \Rightarrow \int_{-1}^2 f(x) dx = 3$.

Câu 143: Hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-1; 2]$ và thỏa mãn điều kiện $f(x) = \sqrt{x+2} + xf(3-x^2)$. Tính giá trị của $I = \int_{-1}^2 f(x) dx$

A. $I = \frac{14}{3}$.

B. $I = \frac{28}{3}$.

C. $I = \frac{4}{3}$.

D. $I = 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Cách 1: (Dùng công thức).

Với $f(x) = \sqrt{x+2} + xf(3-x^2) \Rightarrow f(x) + \frac{1}{2} \cdot (-2x) \cdot f(3-x^2) = \sqrt{x+2}$

$A=1; B=\frac{1}{2}; C=0$ và $u=3-x^2$ thỏa mãn $\begin{cases} u(-1)=2 \\ u(2)=-1 \end{cases}$

Khi đó áp dụng công thức ta có: $I = \int_{-1}^2 f(x) dx = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} + 0} \int_{-1}^2 \sqrt{x+2} dx = \frac{28}{3}$.

Cách 2: (Dùng phương pháp đổi biến).

Từ $f(x) - xf(3-x^2) = \sqrt{x+2} \Rightarrow \int_{-1}^2 f(x) dx - \int_{-1}^2 xf(3-x^2) dx = \int_{-1}^2 \sqrt{x+2} dx = \frac{14}{3}$ (*)

Đặt $u=3-x^2 \Rightarrow du = -2x dx$ với $\begin{cases} x=-1 \Rightarrow u=2 \\ x=2 \Rightarrow u=-1 \end{cases}$

Khi đó $\int_{-1}^2 xf(3-x^2) dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^2 f(u) du = \frac{1}{2} \int_{-1}^2 f(x) dx$ thay vào (*) ta được

$\int_{-1}^2 f(x) dx - \frac{1}{2} \int_{-1}^2 f(x) dx = \frac{14}{3} \Leftrightarrow \int_{-1}^2 f(x) dx = \frac{28}{3}$.

Câu 144: Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ và thỏa mãn $f(x) + xf(1-x^2) + 3f(1-x) = \frac{1}{x+1}$. Tính

giá trị của tích phân $I = \int_0^1 f(x) dx$.

A. $I = \frac{9}{2} \ln 2$.

B. $I = \frac{2}{9} \ln 2$.

C. $I = \frac{4}{3}$.

D. $I = \frac{3}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Cách 1: (Dùng công thức)

Với: $f(x) - \frac{1}{2} \cdot (-2x) \cdot f(1-x^2) + 3f(1-x) = \frac{1}{x+1}$. Ta có:

$A=1; B=\frac{-1}{2}$; và $u=x^2-2$ thỏa mãn $\begin{cases} u(0)=1 \\ u(1)=0 \end{cases}$.

Khi đó áp dụng công thức ta có:

$I = \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right) + 3} \int_0^1 \frac{dx}{x+1} = \frac{2}{9} \ln|x+1| \Big|_0^1 = \frac{2}{9} \ln 2$.

Cách 2: (Dùng công thức đổi biến nếu không nhớ công thức)

$$\text{Từ } f(x) + xf(1-x^2) + 3f(1-x) = \frac{1}{x+1}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 f(x)dx + \int_0^1 xf(1-x^2)dx + 3 \int_0^1 f(1-x)dx = \int_0^1 \frac{1}{x+1}dx = \ln|x+1| \Big|_0^1 = \ln 2. (*)$$

+) Đặt $u = 1 - x^2 \Rightarrow du = -2xdx$; Với $x = 0 \Rightarrow u = 1$ và $x = 1 \Rightarrow u = 0$.

$$\text{Khi đó } \int_0^1 xf(1-x^2)dx = \frac{1}{2} \int_1^0 f(u)du = -\frac{1}{2} \int_0^1 f(x)dx \quad (1).$$

+) Đặt $u = 1 - x \Rightarrow du = -dx$; Với $x = 0 \Rightarrow u = 1$ và $x = 1 \Rightarrow u = 0$.

$$\text{Khi đó } \int_0^1 xf(1-x)dx = \int_1^0 f(t)dt = - \int_0^1 f(t)dt \quad (2).$$

Thay (1), (2) vào (*) ta được:

$$\int_0^1 f(x)dx + \frac{1}{2} \int_0^1 f(x)dx + 3 \int_0^1 f(x)dx = \ln 2 \Rightarrow \frac{9}{2} \int_0^1 f(x)dx = \ln 2 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx = \frac{2}{9} \ln 2.$$

Câu 145: Cho hàm số $y = f(x)$ và thỏa mãn $f(x) - 8x^3 f(x^4) + \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}} = 0$. Tích phân

$$I = \int_0^1 f(x)dx = \frac{a-b\sqrt{2}}{c} \text{ với } a, b, c \in \mathbb{Z} \text{ và } \frac{a}{c}; \frac{b}{c} \text{ tối giản. Tính } a+b+c$$

A. 6.

B. -4.

C. 4.

D. -10.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Cách 1: (Dùng công thức).

$$\text{Biến đổi } f(x) - 8x^3 f(x^4) + \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}} = 0 \Leftrightarrow f(x) - 2 \cdot (4x^3) f(x^4) = -\frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}} \text{ với } A=1; B=-2$$

$$\text{Áp dụng công thức ta có: } \int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{1+(-2)} \int_0^1 \left(-\frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}} \right) dx = \int_0^1 \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Đặt $t = \sqrt{x^2+1} \Rightarrow t^2 = x^2+1 \Rightarrow tdt = xdx$; Với $x=0 \Rightarrow t=1$ và $x=1 \Rightarrow t=\sqrt{2}$.

$$\text{Khi đó: } \int_0^1 f(x)dx = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} \cdot xdx = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{t^2-1}{t} \cdot tdt = \int_1^{\sqrt{2}} (t^2-1)dt = \left(\frac{t^3}{3} - t \right) \Big|_1^{\sqrt{2}} = \frac{2-\sqrt{2}}{3} = \frac{a-b\sqrt{2}}{c}$$

Suy ra $a=2; b=1; c=3 \Rightarrow a+b+c=6$.

Cách 2: (Dùng phương pháp đổi biến – nếu không nhớ công thức)

$$\text{Từ } f(x) - 8x^3 f(x^4) + \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}} = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx - 2 \int_0^1 4x^3 f(x^4)dx + \int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}dx = 0 (*)$$

Đặt $u = x^4 \Rightarrow du = 4x^3 dx$; Với $x=0 \Rightarrow u=0$ và $x=1 \Rightarrow u=1$.

$$\text{Khi đó } \int_0^1 4x^3 f(x^4)dx = \int_0^1 f(u)du = \int_0^1 f(x)dx \text{ thay vào } (*), \text{ ta được:}$$

$$\int_0^1 f(x)dx - 2 \int_0^1 f(x)dx + \int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}dx = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}dx$$

Đặt $t = \sqrt{x^2+1} \Rightarrow t^2 = x^2+1 \Rightarrow tdt = xdx$; Với $x=0 \Rightarrow t=1$ và $x=1 \Rightarrow t=\sqrt{2}$.

$$\text{Khi đó: } \int_0^1 f(x)dx = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} \cdot xdx = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{t^2-1}{t} \cdot tdt = \int_1^{\sqrt{2}} (t^2-1)dt = \left(\frac{t^3}{3} - t \right) \Big|_1^{\sqrt{2}} = \frac{2-\sqrt{2}}{3} = \frac{a-b\sqrt{2}}{c}$$

Suy ra $a=2; b=1; c=3 \Rightarrow a+b+c=6$.

Câu 146: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-\ln 2; \ln 2]$ và thỏa mãn $f(x) + f(-x) = \frac{1}{e^x + 1}$. Biết

$$\int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(x) dx = a \ln 2 + b \ln 3, \text{ với } a, b \in \mathbb{Q}. \text{ Tính giá trị của } P = a + b.$$

A. $P = \frac{1}{2}$.

B. $P = -2$.

C. $P = -1$.

D. $P = 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Cách 1: Dùng công thức

Với $f(x) + f(-x) = \frac{1}{e^x + 1}$ ta có $A = 1; B = 1$, suy ra $\int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(x) dx = \frac{1}{1+1} \int_{-\ln 2}^{\ln 2} \frac{dx}{e^x + 1} = \frac{1}{2} \int_{-\ln 2}^{\ln 2} \frac{dx}{e^x + 1}$

Cách 2: Dùng phương pháp dồn biến nếu không nhớ công thức

Từ $f(x) + f(-x) = \frac{1}{e^x + 1} \Rightarrow \int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(x) dx + \int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(-x) dx = \int_{-\ln 2}^{\ln 2} \frac{dx}{e^x + 1} (*)$

Đặt $u = -x \Rightarrow du = -dx$

$\Rightarrow \int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(-x) dx = \int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(u) du = \int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(x) dx$ thay vào (*) ta được:

$2 \int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(x) dx = \int_{-\ln 2}^{\ln 2} \frac{dx}{e^x + 1} \Leftrightarrow \int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-\ln 2}^{\ln 2} \frac{dx}{e^x + 1}$

Đặt $t = e^x \Rightarrow dt = e^x dx$

Với $x = -\ln 2 \Rightarrow t = \frac{1}{2}, x = \ln 2 \Rightarrow t = 2$

$\Rightarrow \int_{-\ln 2}^{\ln 2} \frac{dx}{e^x + 1} = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{e^x dx}{e^x(e^x + 1)} = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{dt}{t(t+1)} = \ln \left| \frac{t}{t+1} \right| \Big|_{\frac{1}{2}}^2 = \ln 2$

Khi đó: $\int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(x) dx = \frac{1}{2} \ln 2 = a \ln 2 + b \ln 3 \xrightarrow{a, b \in \mathbb{Q}} a = \frac{1}{2}, b = 0$

$\Rightarrow P = a + b = \frac{1}{2}$.

Câu 147: Biết hàm số $y = f\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ là hàm số chẵn trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ và

$f(x) + f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin x + \cos x$. Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$.

A. $I = 0$.

B. $I = 1$.

C. $I = \frac{1}{2}$.

D. $I = -1$.

Hướng dẫn giải:

Đặt $t = \frac{\pi}{2} - x \Rightarrow dt = -dx$ Đổi cận: $\Rightarrow I = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 f\left(\frac{\pi}{2} - t\right) \cdot (-dt) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{\pi}{2} - t\right) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx$ (Tích

phân xác định không phụ thuộc vào biến số tích phân) $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{\pi}{2} + x\right) dx$ (Vì $f\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ là hàm số chẵn

$\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$)

$$\text{Vậy } 2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[f(x) + f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \right] dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x) dx = (\cos x - \sin x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -1 - 1 = -2 \Rightarrow I = -1$$

⇒ Chọn D

Câu 148: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, $f(0) = 0$ và $f(x) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \cdot \cos x$

với $\forall x \in \mathbb{R}$. Giá trị của tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} xf'(x) dx$ bằng

A. $-\frac{\pi}{4}$.

B. $\frac{1}{4}$.

C. $\frac{\pi}{4}$.

D. $-\frac{1}{4}$.

Hướng dẫn giải

Cách 1: (Dùng công thức)

Với $f(x) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \cdot \cos x$, ta có $A = 1; B = 1$.

$$\text{Suy ra } \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \frac{1}{1+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \cos x dx = \frac{1}{4}.$$

Cách 2: (Dùng phương pháp đổi biến – nếu nhớ công thức)

$$\text{Từ } f(x) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \cdot \cos x \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \cos x dx = \frac{1}{2} \quad (*)$$

$$\text{Đặt } u = \frac{\pi}{2} - x \Rightarrow du = -dx$$

$$\text{Với } x = 0 \Rightarrow u = \frac{\pi}{2}; x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow u = 0.$$

$$\text{Suy ra } \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(u) du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx, \text{ thay vào } (*) \text{ ta được}$$

$$2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \frac{1}{4} \quad (1)$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = f(x) \end{cases} \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} xf'(x) dx = xf(x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \frac{\pi}{2} f\left(\frac{\pi}{2}\right) - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx \quad (*)$$

$$\text{Từ điều kiện } f(x) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \cdot \cos x \text{ suy ra}$$

$$\begin{cases} f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f(0) = 0 \\ f(0) + f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad (2).$$

$$\text{Thay (1), (2) vào } (*), \text{ ta được } \int_0^{\frac{\pi}{2}} xf'(x) dx = -\frac{1}{4}.$$

Chọn D

Câu 149: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(1+2x) + f(1-2x) = \frac{x^2}{x^2+1}, \forall x \in \mathbb{R}$. tính

tích phân $I = \int_{-1}^3 f(x) dx$.

A. $I = 2 - \frac{\pi}{2}$.

B. $I = 1 - \frac{\pi}{4}$.

C. $I = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{8}$.

D. $I = \frac{\pi}{4}$.

Hướng dẫn giải.

$$\text{Đặt } t = 1 + 2x \Rightarrow 1 - 2x = 2 - t \text{ và } x = \frac{t-1}{2}, \text{ khi đó điều kiện trở thành}$$

$$f(t) + f(2-t) = \frac{t^2 - 2t + 1}{t^2 - 2t + 5} \Rightarrow f(x) + f(2-x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 2x + 5} (*)$$

Cách 1: (Dùng công thức)

Với $f(x) + f(2-x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 2x + 5}$ ta có $A=1; B=1$.

$$\text{Suy ra } \int_{-1}^3 f(x) dx = \frac{1}{1+1} \int_{-1}^3 \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 2x + 5} dx \approx 0,429 = 2 - \frac{\pi}{2}$$

Chọn A

Cách 2: (Dùng công thức đổi biến – nếu nhớ công thức)

$$\text{Từ } (*), \text{ ta có } f(x) + f(2-x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 2x + 5} \Rightarrow \int_{-1}^3 f(x) dx + \int_{-1}^3 f(2-x) dx = \int_{-1}^3 \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 2x + 5} dx \quad (2*)$$

Đặt $u = 2 - x \Rightarrow du = -dx$. Với $x = -1 \Rightarrow u = 3; x = 3 \Rightarrow u = -1$.

Suy ra $\int_{-1}^3 f(2-x) dx = \int_{-1}^3 f(u) du = \int_{-1}^3 f(x) dx$, thay vào (*), ta được:

$$2 \int_{-1}^3 f(x) dx = \int_{-1}^3 \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 2x + 5} dx \Rightarrow \int_{-1}^3 f(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^3 \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 2x + 5} dx \approx 0,429 = 2 - \frac{\pi}{2}$$

TÍCH PHÂN HÀM ẨN ĐỔI BIẾN DẠNG 3

Cách giải: Lần lượt đặt $t = u(x)$ và $t = v(x)$ để giải hệ phương trình hai ẩn (trong đó có ẩn $f(x)$) để suy ra hàm số $f(x)$ (nếu $u(x) = x$ thì chỉ cần đặt một lần $t = v(x)$).

Các kết quả đặc biệt:

$$\text{Cho } A.f(ax+b) + B.f(-ax+c) = g(x) \text{ với } A^2 \neq B^2 \text{ khi đó } f(x) = \frac{A.g\left(\frac{x-b}{a}\right) - B.g\left(\frac{x-c}{-a}\right)}{A^2 - B^2} \quad (*)$$

$$+) \text{ Hệ quả 1 của } (*): A.f(x) + B.f(-x) = g(x) \Rightarrow f(x) = \frac{A.g(x) - B.g(-x)}{A^2 - B^2}$$

$$+) \text{ Hệ quả 2 của } (*): A.f(x) + B.f(-x) = g(x) \Rightarrow f(x) = \frac{g(x)}{A+B} \text{ với } g(x) \text{ là hàm số chẵn.}$$

Câu 150: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 3x$. Tính $I = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{f(x)}{x} dx$.

A. $I = \frac{3}{2}$.

B. $I = 1$.

C. $I = \frac{1}{2}$.

D. $I = -1$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$\text{Đặt, } t = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{t} \text{ khi đó điều kiện trở thành } f\left(\frac{1}{t}\right) + 2f(t) = \frac{3}{t} \Rightarrow 2f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{3}{x}.$$

$$\text{Hay } 4f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{6}{x}, \text{ kết hợp với điều kiện } f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 3x. \text{ Suy ra:}$$

$$3f(x) = \frac{6}{x} - 3x \Rightarrow \frac{f(x)}{x} = \frac{2}{x^2} - 1 \Rightarrow I = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{f(x)}{x} dx = \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(\frac{2}{x^2} - 1\right) dx = \left(\frac{-2}{x} - x\right) \Bigg|_{\frac{1}{2}}^2 = \frac{3}{2}.$$

Chọn B

Câu 151: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ và thỏa mãn $2f(3x) + 3f\left(\frac{2}{x}\right) = -\frac{15x}{2}$,

$$\int_3^9 f(x) dx = k. \text{ Tính } I = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} f\left(\frac{1}{x}\right) dx \text{ theo } k.$$

A. $I = -\frac{45+k}{9}$.

B. $I = \frac{45-k}{9}$.

C. $I = \frac{45+k}{9}$.

D. $I = \frac{45-2k}{9}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$\text{Đặt } t = 2x \Rightarrow dx = \frac{1}{2} dt. \text{ Đổi cận } \begin{cases} x = \frac{1}{2} \Rightarrow t = 1 \\ x = \frac{3}{2} \Rightarrow t = 3 \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó } I = \frac{1}{2} \int_1^3 f\left(\frac{2}{t}\right) dt.$$

$$\text{Mà } 2f(3x) + 3f\left(\frac{2}{x}\right) = -\frac{15x}{2} \Leftrightarrow f\left(\frac{2}{x}\right) = -\frac{5x}{2} - \frac{2}{3}f(3x)$$

$$\text{Nên } I = \frac{1}{2} \int_1^3 \left[-\frac{5x}{2} - \frac{2}{3}f(3x)\right] dx = -\frac{5}{4} \int_1^3 x dx - \frac{1}{3} \int_1^3 f(3x) dx = -5 - \frac{1}{3} \int_1^3 f(3x) dx \quad (*)$$

Đặt $u = 3x \Rightarrow dx = \frac{1}{3} du$. Đổi cận $\begin{cases} x=1 \Rightarrow u=3 \\ x=3 \Rightarrow u=9 \end{cases}$.

Khi đó $I = -5 - \frac{1}{9} \int_3^9 f(u) du = -5 - \frac{k}{9} = -\frac{45+k}{9}$.

Câu 152: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(-x) + 2018f(x) = 2x \sin x$. Tính giá

trị của $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$.

A. $I = \frac{2}{2019}$.

B. $I = \frac{2}{1009}$.

C. $I = \frac{4}{2019}$.

D. $I = \frac{1}{1009}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Cách 1: (Dùng công thức)

Với $f(-x) + 2018f(x) = 2x \sin x$ ta có $A=1; B=2018$

Suy ra $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \frac{1}{1+2018} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2x \sin x dx \stackrel{\text{Casio}}{=} \frac{4}{2019} \Rightarrow \text{Đáp án C}$

Cách 2:

Áp dụng Hệ quả 2: $Af(x) + Bf(-x) = g(x) \Rightarrow f(x) = \frac{g(x)}{A+B}$ với $g(x)$ là hàm số chẵn.

Ta có $f(-x) + 2018f(x) = 2x \sin x \Rightarrow f(x) = \frac{2x \sin x}{2019}$

$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \frac{2}{2019} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx \stackrel{\text{Casio}}{=} \frac{4}{2019} \Rightarrow \text{Đáp án C}$

Câu 153: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(-x) + 2018f(x) = e^x$. Tính giá trị

của $I = \int_{-1}^1 f(x) dx$

A. $I = \frac{e^2-1}{2019e}$.

B. $I = \frac{e^2-1}{2018e}$.

C. $I = 0$.

D. $I = \frac{e^2-1}{e}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Cách 1: (Dùng công thức).

Với $f(-x) + 2018f(x) = e^x$ ta có $A=1; B=2018$.

Suy ra $I = \int_{-1}^1 f(x) dx = \frac{1}{1+2018} \int_{-1}^1 e^x dx = \frac{1}{2019} e^x \Big|_{-1}^1 = \frac{e^2-1}{2019e}$.

Cách 2: (Dùng công thức)

Áp dụng Hệ quả 1: $Af(x) + Bf(-x) = g(x) \Rightarrow f(x) = \frac{A.g(x) - B.g(-x)}{A^2 - B^2}$.

Ta có:

$f(-x) + 2018f(x) = e^x \Rightarrow f(x) = \frac{2018e^x - e^{-x}}{2018^2 - 1} \Rightarrow \int_{-1}^1 f(x) dx = \frac{1}{2019 \cdot 2017} \int_{-1}^1 (2018e^x - e^{-x}) dx$

$$\approx 1,164.10^{-3} \approx \frac{e^2 - 1}{2019e} \text{ (Casio).}$$

Câu 154: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $2f(2x) + f(1-x) = 12x^2$.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ bằng 1 là

- A.** $y = 2x + 2$. **B.** $y = 4x - 6$. **C.** $y = 2x - 6$. **D.** $y = 4x - 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Áp dụng kết quả

“Cho $A.f(ax+b) + B.f(-ax+c) = g(x)$ (với $A^2 \neq B^2$) khi đó $f(x) = \frac{A.g\left(\frac{x-b}{a}\right) - B.g\left(\frac{x-c}{a}\right)}{A^2 - B^2}$ ”.

Ta có

$$2f(2x) + f(1-x) = 12x^2 = g(x) \Leftrightarrow f(x) = \frac{2.g\left(\frac{x}{2}\right) - g\left(\frac{x-1}{-2}\right)}{2^2 - 1} = \frac{6x^2 - 3(x-1)^2}{3} = x^2 + 2x - 1.$$

Suy ra $\begin{cases} f(1) = 2 \\ f'(1) = 4 \end{cases}$, khi đó phương trình tiếp tuyến cần lập là: $y = 4x - 2$.

Câu 155: Cho $f(x)$ là hàm số chẵn, liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int_0^1 f(x)dx = 2018$ và $g(x)$ là hàm số

liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $g(x) + g(-x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Tính tích phân $I = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$.

- A.** $I = 2018$. **B.** $I = \frac{1009}{2}$. **C.** $I = 4036$. **D.** $I = 1008$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Áp dụng Hệ quả

$$A.g(x) + B.g(-x) = h(x) \Rightarrow g(x) = \frac{h(x)}{A+B} \text{ với } h(x) \text{ là hàm số chẵn.}$$

$$\text{Ta có: } g(x) + g(-x) = 1 = h(x) \Rightarrow g(x) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

Kết hợp với điều kiện $f(x)$ là hàm số chẵn, ta có:

$$I = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx = 2018.$$

Chú ý: Nếu $f(x)$ là hàm số chẵn, liên tục trên $[-a; a] \Rightarrow \int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx$.

Câu 156: Cho số dương a và hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x) + f(-x) = a, \forall x \in \mathbb{R}$.

Giá trị của biểu thức $\int_{-a}^a f(x)dx$ bằng

- A.** $2a^2$. **B.** a . **C.** a^2 . **D.** $2a$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$\begin{aligned} \text{Đặt } x = -t &\Rightarrow \int_{-a}^a f(x) dx = \int_a^{-a} f(-t)(-dt) = \int_{-a}^a f(-t) dt = \int_{-a}^a f(-x) dx \\ &\Rightarrow 2 \int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^a [f(x) + f(-x)] dx = \int_{-a}^a a dx \Leftrightarrow 2 \int_{-a}^a f(x) dx = 2a^2 \Leftrightarrow \int_{-a}^a f(x) dx = a^2. \end{aligned}$$

Câu 157: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa điều kiện $f(x) + f(-x) = 2 \sin x$. Tính $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$

A. -1.

B. 0.

C. 1.

D. 2.

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$\text{Giả sử } I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx.$$

$$\text{Đặt } t = -x \Rightarrow dt = -dx, \text{ đổi cận } x = -\frac{\pi}{2} \rightarrow t = \frac{\pi}{2} \quad x = \frac{\pi}{2} \rightarrow t = -\frac{\pi}{2}.$$

$$\text{Khi đó } I = - \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} f(t) dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(t) dt.$$

$$\text{Suy ra } 2I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [f(x) + f(-x)] dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin x dx = 0 \Rightarrow 2I = 0 \Rightarrow I = 0$$

Câu 158: Cho $f(x)$ là một hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x) + f(-x) = \sqrt{2 - 2 \cos 2x}$. Tính tích

$$\text{phân } I = \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x) dx.$$

A. $I = 3$.

B. $I = 4$.

C. $I = 6$.

D. $I = 8$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$\text{Ta có } I = \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x) dx = \int_{-\frac{3\pi}{2}}^0 f(x) dx + \int_0^{\frac{3\pi}{2}} f(x) dx.$$

$$\text{Xét } \int_{-\frac{3\pi}{2}}^0 f(x) dx \quad \text{Đặt } t = -x \Rightarrow dt = -dx; \text{ Đổi cận: } x = -\frac{3\pi}{2} \Rightarrow t = \frac{3\pi}{2}; \quad x = 0 \Rightarrow t = 0.$$

$$\text{Suy ra } \int_{-\frac{3\pi}{2}}^0 f(x) dx = - \int_{\frac{3\pi}{2}}^0 f(-t) dt = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} f(-t) dt = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} f(-x) dx.$$

$$\begin{aligned} \text{Theo giả thiết ta có: } f(x) + f(-x) &= \sqrt{2 - 2\cos 2x} \Leftrightarrow \int_0^{\frac{3\pi}{2}} (f(x) + f(-x)) dx = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sqrt{2 - 2\cos x} dx \\ \Leftrightarrow \int_0^{\frac{3\pi}{2}} f(x) dx + \int_0^{\frac{3\pi}{2}} f(-x) dx &= 2 \int_0^{\frac{3\pi}{2}} |\sin x| dx \\ \Leftrightarrow \int_0^{\frac{3\pi}{2}} f(x) dx + \int_{-\frac{3\pi}{2}}^0 f(x) dx &= 2 \int_0^{\pi} \sin x dx - 2 \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sin x dx \end{aligned}$$

Câu 159: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbf{R}$ và thỏa mãn $f(x) + f(-x) = \sqrt{2 + 2\cos 2x}$. Tính

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx.$$

A. $I = -1$.

B. $I = 1$.

C. $I = -2$.

D. $I = 2$.

Hướng dẫn giải

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx \quad (1) \text{ Đặt } t = -x \Rightarrow dt = -dx \text{ Đổi cận:}$$

$$\Rightarrow I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} f(-t) \cdot (-dt) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(-t) dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(-x) dx \quad (2) \text{ (Tích phân xác định không phụ thuộc vào}$$

biến số tích phân)

$$(1) + (2) \Rightarrow 2I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [f(x) + f(-x)] dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2 + 2\cos 2x} dx$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2(1 + \cos 2x)} dx =$$

$$\sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2\cos^2 x} dx = 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\cos x| dx = 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 2 \sin x \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2[1 - (-1)] = 4$$

$$\Rightarrow I = 2$$

Chọn D

Câu 160: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbf{R}$ và $3f(-x) - 2f(x) = \tan^2 x$. Tính $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx$

A. $1 - \frac{\pi}{2}$.

B. $\frac{\pi}{2} - 1$.

C. $1 + \frac{\pi}{4}$.

D. $2 - \frac{\pi}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Cách 1: Ta có $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = (\tan x - x) \Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = 1 - \frac{\pi}{4} - \left(-1 + \frac{\pi}{4} \right) = 2 - \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow 2 - \frac{\pi}{2} = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} [3f(-x) - 2f(x)] dx.$$

Đặt $t = -x \Rightarrow dt = -dx$, đổi cận $x = -\frac{\pi}{4} \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = -\frac{\pi}{4}$.

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} [3f(-x) - 2f(x)] dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{-\frac{\pi}{4}} [3f(t) - 2f(-t)] dt = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} [3f(x) - 2f(-x)] dx$$

Suy ra, $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(-x) dx \Rightarrow 2 - \frac{\pi}{2} = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} [3f(x) - 2f(-x)] dx \Leftrightarrow 2 - \frac{\pi}{2} = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx$

Vậy $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx = 2 - \frac{\pi}{2}$

Cách 2: (Trắc nghiệm)

Chọn $f(x) = f(-x) = \tan^2 x$ (Thỏa mãn giả thiết).

Khi đó $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = 2 - \frac{\pi}{2}$

Câu 161: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-\ln 2; \ln 2]$ và thỏa mãn $f(x) + f(-x) = \frac{1}{e^x + 1}$.

Biết $\int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(x) dx = a \ln 2 + b \ln 3$ ($a; b \in \mathbb{Q}$). Tính $P = a + b$.

A. $P = \frac{1}{2}$.

B. $P = -2$.

C. $P = -1$.

D. $P = 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Gọi $I = \int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(x) dx$.

Đặt $t = -x \Rightarrow dt = -dx$.

Đổi cận: Với $x = -\ln 2 \Rightarrow t = \ln 2$; Với $x = \ln 2 \Rightarrow t = -\ln 2$.

Ta được $I = - \int_{\ln 2}^{-\ln 2} f(-t) dt = \int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(-t) dt = \int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(-x) dx$.

Khi đó ta có: $2I = \int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(x) dx + \int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(-x) dx = \int_{-\ln 2}^{\ln 2} [f(x) + f(-x)] dx = \int_{-\ln 2}^{\ln 2} \frac{1}{e^x + 1} dx$.

Xét $\int_{-\ln 2}^{\ln 2} \frac{1}{e^x + 1} dx$. Đặt $u = e^x \Rightarrow du = e^x dx$

Đổi cận: Với $x = -\ln 2 \Rightarrow u = \frac{1}{2}$; $x = \ln 2 \Rightarrow u = 2$.

$$\begin{aligned} \text{Ta được } \int_{-\ln 2}^{\ln 2} \frac{1}{e^x + 1} dx &= \int_{-\ln 2}^{\ln 2} \frac{e^x}{e^x(e^x + 1)} dx = \int_{-\ln 2}^{\ln 2} \frac{1}{u(u+1)} du \\ &= \int_{-\ln 2}^{\ln 2} \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1} \right) du = (\ln|u| - \ln|u+1|) \Big|_{-\ln 2}^{\ln 2} = \ln 2 \end{aligned}$$

$$\text{Vậy ta có } a = \frac{1}{2}, b = 0 \Rightarrow a + b = \frac{1}{2}.$$

Câu 162: Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ và thỏa mãn điều kiện $2f(x) + 3f(1-x) = x\sqrt{1-x}$.

$$\text{Tính tích phân } I = \int_0^1 f(x) dx.$$

A. $I = -\frac{4}{15}.$

B. $I = \frac{1}{15}.$

C. $I = \frac{4}{75}.$

D. $I = \frac{1}{25}.$

Hướng dẫn giải

Chọn C

Cách 1: (Dùng công thức)

$$\text{Với } 2f(x) + 3f(1-x) = x\sqrt{1-x} \text{ ta có } A=2; B=3.$$

$$\text{Suy ra: } \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2+3} \int_0^1 x\sqrt{1-x} dx \stackrel{\text{Casio}}{=} 0,05(3) = \frac{4}{75}.$$

Áp dụng kết quả

“Cho $A.f(ax+b) + B.f(-ax+c) = g(x)$ (Với $A^2 \neq B^2$) khi đó

$$f(x) = \frac{A.g\left(\frac{x-b}{a}\right) - B.g\left(\frac{x-c}{-a}\right)}{A^2 - B^2}.”$$

$$\text{Ta có: } 2f(x) + 3f(1-x) = x\sqrt{1-x} = g(x) \Rightarrow f(x) = \frac{2g(x) - 3g(1-x)}{2^2 - 3^2} = \frac{2x\sqrt{1-x} - 3(1-x)\sqrt{x}}{-5}.$$

$$\text{Suy ra: } I = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{2x\sqrt{1-x} - 3(1-x)\sqrt{x}}{-5} dx \stackrel{\text{Casio}}{=} 0,05(3) = \frac{4}{75}.$$

Cách 3: (Dùng phương pháp đổi biến – nếu không nhớ công thức)

$$\text{Từ } 2f(x) + 3f(1-x) = x\sqrt{1-x} \Rightarrow 2 \int_0^1 f(x) dx + 3 \int_0^1 f(1-x) dx = \int_0^1 x\sqrt{1-x} dx \stackrel{\text{Casio}}{=} 0,2(6) = \frac{4}{15} (*) \text{ Đặt}$$

$$u = 1-x \Rightarrow du = -dx; \text{ Với } x=0 \Rightarrow u=1 \text{ và } x=1 \Rightarrow u=0.$$

$$\text{Suy ra } \int_0^1 f(1-x) dx = \int_1^0 f(u) du = - \int_0^1 f(x) dx \text{ thay vào } (*), \text{ ta được:}$$

$$5 \int_0^1 f(x) dx = \frac{4}{15} \Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx = \frac{4}{75}.$$

TÍCH PHÂN HÀM ẨN ĐỔI BIẾN DẠNG 4

Câu 163: Cho $f(x)$ và $g(x)$ là hai hàm số liên tục trên $[-1,1]$ và $f(x)$ là hàm số chẵn, $g(x)$ là

hàm số lẻ. Biết $\int_0^1 f(x) dx = 5$ và $\int_0^1 g(x) dx = 7$. Mệnh đề nào dưới đây sai?

A. $\int_{-1}^1 f(x) dx = 10.$

B. $\int_{-1}^1 g(x) dx = 14.$

C. $\int_{-1}^1 [f(x) + g(x)] dx = 10.$

D. $\int_{-1}^1 [f(x) - g(x)] dx = 10.$

Hướng dẫn giải

Nhớ 2 tích chất sau để làm trắc nghiệm nhanh:

Câu 164: Nếu hàm $f(x)$ CHẼN thì $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$ 2. Nếu hàm $f(x)$ LẼ thì $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$

Nếu chứng minh thì như sau:

Đặt $A = \int_{-1}^1 f(x) dx = \underbrace{\int_{-1}^0 f(x) dx}_{A_1} + \underbrace{\int_0^1 f(x) dx}_{A_2}$

$A_1 = \int_{-1}^0 f(x) dx$. Đặt $t = -x \Rightarrow dt = -dx$

Đổi cận: $\begin{array}{c|cc} x & -1 & 0 \\ \hline & 0 & 1 \end{array}$
 $\Rightarrow A_1 = \int_1^0 f(-t) \cdot (-dt) = \int_0^1 f(-t) dt = \int_0^1 f(-x) dx$ (Do tích phân xác định không phụ thuộc vào biến

số tích phân) $= \int_0^1 f(x) dx$ (Do $f(x)$ là hàm chẵn $\Rightarrow f(-x) = f(x)$)

Vậy $A = \int_{-1}^1 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx = 10$ (1)

Đặt $B = \int_{-1}^1 g(x) dx = \underbrace{\int_{-1}^0 g(x) dx}_{B_1} + \underbrace{\int_0^1 g(x) dx}_{B_2}$

$B_1 = \int_{-1}^0 g(x) dx$. Đặt $t = -x \Rightarrow dt = -dx$

Đổi cận: $\begin{array}{c|cc} x & -1 & 0 \\ \hline & 0 & 1 \end{array}$
 $\Rightarrow B_1 = \int_1^0 g(-t) \cdot (-dt) = \int_0^1 g(-t) dt = \int_0^1 g(-x) dx$ (Do tích phân xác định không phụ thuộc vào biến

số tích phân) $= -\int_0^1 g(x) dx$ (Do $f(x)$ là hàm lẻ $\Rightarrow g(-x) = -g(x)$)

Vậy $B = \int_{-1}^1 g(x) dx = -\int_0^1 g(x) dx + \int_0^1 g(x) dx = 0$ (2)

Từ (1) và (2)

Chọn B

Câu 165: Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm lẻ và liên tục trên $[-4; 4]$ biết $\int_{-2}^0 f(-x) dx = 2$ và

$\int_1^2 f(-2x) dx = 4$. Tính $I = \int_0^4 f(x) dx$.

A. $I = -10$.

B. $I = -6$.

C. $I = 6$.

D. $I = 10$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Cách 1: Sử dụng công thức: $\int_{x_1}^{x_2} f(ax+b) dx = \frac{1}{a} \int_{x_1}^{x_2} f(ax) dx$ và tính chất $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$ với $f(x)$ là hàm số lẻ trên đoạn $[-a; a]$.

Áp dụng, ta có:

$$\bullet 4 = \int_1^2 f(-2x) dx = -\frac{1}{2} \int_{-2}^{-4} f(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-4}^{-2} f(x) dx \Leftrightarrow \int_{-4}^{-2} f(x) dx = 8.$$

$$\bullet 2 = \int_{-2}^0 f(-x) dx = -\int_2^0 f(x) dx = \int_0^2 f(x) dx \Leftrightarrow \int_0^2 f(x) dx = 2$$

$$\text{Suy ra: } 0 = \int_{-4}^4 f(x) dx = \int_{-4}^{-2} f(x) dx + \int_{-2}^0 f(x) dx + \int_0^4 f(x) dx \\ \Leftrightarrow 0 = 8 + \left(\int_{-2}^2 f(x) dx - \int_0^2 f(x) dx \right) + I \Leftrightarrow 0 = 8 + (0 - 2) + I \Leftrightarrow I = -6.$$

Cách 2: Xét tích phân $\int_{-2}^0 f(-x) dx = 2.$

Đặt $-x = t \Rightarrow dx = -dt.$

Đổi cận: khi $x = -2$ thì $t = 2$; khi $x = 0$ thì $t = 0$ do đó $\int_{-2}^0 f(-x) dx = -\int_2^0 f(t) dt = \int_0^2 f(t) dt$

$$\Rightarrow \int_0^2 f(t) dt = 2 \Rightarrow \int_0^2 f(x) dx = 2.$$

Do hàm số $y = f(x)$ là hàm số lẻ nên $f(-2x) = -f(2x).$

Do đó $\int_1^2 f(-2x) dx = -\int_1^2 f(2x) dx \Rightarrow \int_1^2 f(2x) dx = -4.$

Xét $\int_1^2 f(2x) dx.$

Đặt $2x = t \Rightarrow dx = \frac{1}{2} dt.$

Đổi cận: khi $x = 1$ thì $t = 2$; khi $x = 2$ thì $t = 4$ do đó $\int_1^2 f(2x) dx = \frac{1}{2} \int_2^4 f(t) dt = -4$

$$\Rightarrow \int_2^4 f(t) dt = -8 \Rightarrow \int_2^4 f(x) dx = -8.$$

Do $I = \int_0^4 f(x) dx = \int_0^2 f(x) dx + \int_2^4 f(x) dx = 2 - 8 = -6.$

Câu 166: Cho hàm số chẵn $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_{-1}^1 \frac{f(2x)}{1+2^x} dx = 8.$ Tính $\int_0^2 f(x) dx.$

A. 2.

B. 4.

C. 8.

D. 16.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có $\int_{-1}^1 \frac{f(2x)}{1+2^x} dx = 8 \Leftrightarrow \int_{-2}^2 \frac{f(x)}{1+\sqrt{2}^x} dx = 16.$

Đặt $t = -x \Rightarrow dt = -dx$, khi đó $16 = I = \int_{-2}^2 \frac{f(x)}{1+\sqrt{2}^x} dx = -\int_2^{-2} \frac{f(-t)}{1+\sqrt{2}^{-t}} dt = \int_2^{-2} \frac{\sqrt{2}^t f(t)}{1+\sqrt{2}^t} dt.$

Suy ra $2I = \int_{-2}^2 \frac{f(x)}{1+\sqrt{2}^x} dx + \int_2^{-2} \frac{\sqrt{2}^x f(x)}{1+\sqrt{2}^x} dx = \int_{-2}^2 f(x) dx = 2 \int_0^2 f(x) dx.$

Vậy $\int_0^2 f(x) dx = 16.$

Câu 167: Cho $f(x)$ là hàm số chẵn liên tục trong đoạn $[-1; 1]$ và $\int_{-1}^1 f(x) dx = 2$. Kết quả

$$I = \int_{-1}^1 \frac{f(x)}{1+e^x} dx \text{ bằng}$$

A. $I = 1$.

B. $I = 3$.

C. $I = 2$.

D. $I = 4$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$I = \int_{-1}^1 \frac{f(x)}{1+e^x} dx = \int_{-1}^0 \frac{f(x)}{1+e^x} dx + \int_0^1 \frac{f(x)}{1+e^x} dx = I_1 + I_2$$

$$\text{Xét } I_1 = \int_{-1}^0 \frac{f(x)}{1+e^x} dx$$

Đặt $x = -t \Rightarrow dx = -dt$, đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 0$, $x = -1 \Rightarrow t = 1$

$$I_1 = \int_1^0 \frac{f(-t)}{1+e^{-t}} (-dt) = \int_0^1 \frac{e^t \cdot f(t)}{1+e^t} dt.$$

$$\text{Lại có } \int_0^1 \frac{e^t \cdot f(t)}{1+e^t} dt = \int_0^1 \frac{e^x \cdot f(x)}{1+e^x} dx.$$

$$\text{Suy ra: } I = \int_{-1}^1 \frac{f(x)}{1+e^x} dx = \int_0^1 \frac{e^t \cdot f(t)}{1+e^t} dt + \int_0^1 \frac{f(t)}{1+e^t} dt = \int_0^1 \frac{(1+e^t) \cdot f(t)}{1+e^t} dt = \int_0^1 f(t) dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(t) dt = 1.$$

Câu 168: Cho $y = f(x)$ là hàm số chẵn và liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $\int_0^2 f(x) dx = \frac{1}{2} \int_1^2 f(x) dx = 1$. Giá trị

$$\text{của } \int_{-2}^2 \frac{f(x)}{3^x+1} dx \text{ bằng}$$

A. 1.

B. 6.

C. 4.

D. 3.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Cách 1: Sử dụng tính chất của hàm số chẵn

Ta có: $\int_{-a}^a \frac{f(x)}{b^x+1} dx = \int_0^a f(x) dx$, với $f(x)$ là hàm số chẵn và liên tục trên $[-a; a]$.

Áp dụng ta có:

$$\int_{-2}^2 \frac{f(x)}{3^x+1} dx = \int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx = 1 + 2 = 3$$

$$\text{Cách 2: Do } \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2} \int_1^2 f(x) dx = 1 \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = 1 \text{ và } \int_1^2 f(x) dx = 2$$

$$\Rightarrow \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx = \int_0^2 f(x) dx = 3.$$

$$\text{Mặt khác } \int_{-2}^2 \frac{f(x)}{3^x+1} dx = \int_{-2}^0 \frac{f(x)}{3^x+1} dx + \int_0^2 \frac{f(x)}{3^x+1} dx \text{ và } y = f(x) \text{ là hàm số chẵn, liên tục trên } \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f(-x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Xét } I = \int_{-2}^0 \frac{f(x)}{3^x+1} dx. \text{ Đặt } t = -x \Rightarrow dx = -dt$$

$$\begin{aligned} \text{Suy ra } I &= \int_{-2}^0 \frac{f(x)}{3^x+1} dx = -\int_2^0 \frac{f(-t)}{3^{-t}+1} dt = \int_0^2 \frac{f(-t)}{\frac{1}{3^t}+1} dt = \int_0^2 \frac{3^t f(t)}{3^t+1} dt = \int_0^2 \frac{3^x f(x)}{3^x+1} dx \\ &\Rightarrow \int_{-2}^2 \frac{f(x)}{3^x+1} dx = \int_{-2}^0 \frac{f(x)}{3^x+1} dx + \int_0^2 \frac{f(x)}{3^x+1} dx = \int_0^2 \frac{3^x f(x)}{3^x+1} dx + \int_0^2 \frac{f(x)}{3^x+1} dx = \int_0^2 \frac{(3^x+1)f(x)}{3^x+1} dx = \\ &\int_0^2 f(x) dx = 3. \end{aligned}$$

TÍCH PHÂN HÀM ẨN ĐỔI BIẾN DẠNG 5

“ Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $g[f(x)] = x$ và $g(t)$ là hàm đơn điệu (luôn đồng biến hoặc nghịch biến) trên $\mathbb{R}$. Hãy tính tích phân $I = \int_a^b f(x) dx$ “

Cách giải: Đặt $y = f(x) \Rightarrow x = g(y) \Rightarrow dx = g'(y) dy$

$$\text{Đổi cận } \begin{cases} x = a \rightarrow g(y) = a \Leftrightarrow y = \alpha \\ x = b \rightarrow g(y) = b \Leftrightarrow y = \beta \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } I = \int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} yg(y) dy$$

Câu 169: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f^3(x) + f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$. Tính

$$I = \int_0^2 f(x) dx$$

A. $I = 2$.

B. $I = \frac{3}{2}$.

C. $I = \frac{1}{2}$.

D. $I = \frac{5}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

$$\text{Đặt } y = f(x) \Rightarrow x = y^3 + y \Rightarrow dx = (3y^2 + 1) dy$$

$$\text{Đổi cận } \begin{cases} x = 0 \rightarrow y^3 + y = 0 \Leftrightarrow y = 0 \\ x = 2 \rightarrow y^3 + y = 2 \Leftrightarrow y = 1 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } I = \int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 y(3y^2 + 1) dy = \int_0^1 (3y^3 + y) dy = \frac{5}{4} \Rightarrow \text{đáp án D}$$

Câu 170: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $2f^3(x) - 3f^2(x) + 6f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$. Tính

$$\text{tích phân } I = \int_0^5 f(x) dx.$$

A. $I = \frac{5}{4}$.

B. $I = \frac{5}{2}$.

C. $I = \frac{5}{12}$.

D. $I = \frac{5}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$\text{Đặt } y = f(x) \Rightarrow x = 2y^3 - 3y^2 + 6y \Rightarrow dx = 6(y^2 - y + 1) dy.$$

$$\text{Đổi cận: với } x = 0 \Rightarrow 2y^3 - 3y^2 + 6y = 0 \Leftrightarrow y = 0 \text{ và } x = 5 \Rightarrow 2y^3 - 3y^2 + 6y = 5 \Leftrightarrow y = 1.$$

$$\text{Khi đó } I = \int_0^5 f(x) dx = \int_0^1 y \cdot 6(y^2 - y + 1) dy = 6 \int_0^1 (y^3 - y^2 + y) dy = \frac{5}{2}.$$

Câu 171: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $x + f^3(x) + 2f(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Tính

$$I = \int_{-2}^1 f(x) dx.$$

A. $I = \frac{7}{4}$.

B. $I = \frac{7}{2}$.

C. $I = \frac{7}{3}$.

D. $I = \frac{5}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Đặt $y = f(x) \Rightarrow x = -y^3 - 2y + 1 \Rightarrow dx = (-3y^2 - 2)dy$.

Đổi cận: Với $x = -2 \Rightarrow -y^3 - 2y + 1 = -2 \Leftrightarrow y = 1; x = 1 \Rightarrow -y^3 - 2y + 1 = 1 \Leftrightarrow y = 0$.

Khi đó: $I = \int_1^0 y(-3y^2 - 2)dy = \frac{7}{4}$.

TÍCH PHÂN HÀM ẨN ĐỔI BIẾN DẠNG 5

Bài toán: “ Cho $f(x) \cdot f(a+b-x) = k^2$, khi đó $I = \int_a^b \frac{dx}{k+f(x)} = \frac{b-a}{2k}$

Chứng minh:

Đặt $t = a+b-x \Rightarrow \begin{cases} dt = -dx \\ f(x) = \frac{k^2}{f(t)} \end{cases}$ và $x=a \Rightarrow t=b; x=b \Rightarrow t=a$.

Khi đó $I = \int_a^b \frac{dx}{k+f(x)} = \int_a^b \frac{dx}{k+\frac{k^2}{f(t)}} = \frac{1}{k} \int_a^b \frac{f(x)dx}{k+f(x)}$.

$2I = \int_a^b \frac{dx}{k+f(x)} + \frac{1}{k} \int_a^b \frac{f(x)dx}{k+f(x)} = \frac{1}{k} \int_a^b dx = \frac{1}{k}(b-a) \Rightarrow I = \frac{b-a}{2k}$.

Câu 172: Cho hàm số $f(x)$ liên tục và nhận giá trị dương trên $[0;1]$. Biết $f(x) \cdot f(1-x) = 1$ với

$\forall x \in [0;1]$. Tính giá trị $I = \int_0^1 \frac{dx}{1+f(x)}$

A. $\frac{3}{2}$.

B. $\frac{1}{2}$.

C. 1.

D. 2.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có: $1+f(x) = f(x)f(1-x) + f(x) \Rightarrow \frac{f(x)}{1+f(x)} = \frac{1}{f(1-x)+1}$

Xét $I = \int_0^1 \frac{dx}{1+f(x)}$.

Đặt $t = 1-x \Leftrightarrow x = 1-t \Rightarrow dx = -dt$. Đổi cận: $x=0 \Rightarrow t=1; x=1 \Rightarrow t=0$.

Khi đó $I = -\int_1^0 \frac{dt}{1+f(1-t)} = \int_0^1 \frac{dt}{1+f(1-t)} = \int_0^1 \frac{dx}{1+f(1-x)} = \int_0^1 \frac{f(x)dx}{1+f(x)}$

Mặt khác $\int_0^1 \frac{dx}{1+f(x)} + \int_0^1 \frac{f(x)dx}{1+f(x)} = \int_0^1 \frac{1+f(x)}{1+f(x)} dx = \int_0^1 dx = 1$ hay $2I = 1$. Vậy $I = \frac{1}{2}$.

Câu 173: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, ta có $f(x) > 0$ và $f(0) \cdot f(2018-x) = 1$. Giá trị của

tích phân $I = \int_0^{2018} \frac{dx}{1+f(x)}$

A. $I = 2018$.

B. $I = 0$

C. $I = 1009$

D. 4016

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$\text{ta có } I = \int_0^{2018} \frac{1}{1+f(x)} dx = \frac{2018-0}{2.1} = 1009.$$

Câu 174: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm, liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(x) > 0$ khi $x \in [0; 5]$. Biết

$$f(x) \cdot f(5-x) = 1, \text{ tính tích phân } I = \int_0^5 \frac{dx}{1+f(x)}.$$

A. $I = \frac{5}{4}$.

B. $I = \frac{5}{3}$.

C. $I = \frac{5}{2}$.

D. $I = 10$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$\text{Đặt } x = 5 - t \Rightarrow dx = -dt$$

$$x = 0 \Rightarrow t = 5; x = 5 \Rightarrow t = 0$$

$$I = -\int_5^0 \frac{dt}{1+f(5-t)} = \int_0^5 \frac{f(t)dt}{1+f(t)} \text{ (do } f(5-t) = \frac{1}{f(t)})$$

$$\Rightarrow 2I = \int_0^5 dt = 5 \Rightarrow I = \frac{5}{2}.$$

Câu 175: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(4-x) = f(x)$. Biết $\int_1^3 xf(x)dx = 5$.

$$\text{Tính tích phân } \int_1^3 f(x)dx.$$

A. $\frac{5}{2}$.

B. $\frac{7}{2}$.

C. $\frac{9}{2}$.

D. $\frac{11}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$\text{Đặt } t = 4 - x \Rightarrow dt = -dx \text{ và } x = 1 \Rightarrow t = 3; x = 3 \Rightarrow t = 1.$$

$$\text{Khi đó: } 5 = \int_1^3 xf(x)dx = \int_1^3 (4-t)f(4-t)dt = \int_1^3 (4-x)f(4-x)dx = \int_1^3 (4-x)f(x)dx.$$

$$\text{Suy ra: } 10 = \int_1^3 xf(x)dx + \int_1^3 (4-x)f(x)dx = 4 \int_1^3 f(x)dx = \frac{5}{2}.$$

Câu 176: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(x) > 0$ khi $x \in [0; a]$ ($a > 0$). Biết

$$f(x) \cdot f(a-x) = 1, \text{ tính tích phân } I = \int_0^a \frac{dx}{1+f(x)}.$$

A. $I = \frac{a}{2}$.

B. $I = 2a$.

C. $I = \frac{a}{3}$.

D. $I = \frac{a}{4}$.

Hướng dẫn giải:

$$I = \int_0^a \frac{dx}{1+f(x)} \text{ (1) Đặt } t = a - x \Rightarrow dt = -dx \text{ Đổi cận:}$$

$$\Rightarrow I = \int_a^0 -\frac{dt}{1+f(a-t)} = \int_0^a \frac{1}{1+f(a-t)} dt = \int_0^a \frac{1}{1+f(a-x)} dx \text{ (2) (Tích phân xác định không phụ}$$

thuộc vào biến số tích phân)

$$(1) + (2) \Rightarrow 2I = \int_0^a \left[\frac{1}{1+f(x)} + \frac{1}{1+f(a-x)} \right] dx$$

$$= \frac{1 + f(a-x) + 1 + f(x)}{1 + f(x) \cdot f(a-x) + f(x) + f(a-x)} dx = \int_0^a \frac{2 + f(a-x) + f(x)}{2 + f(a-x) + f(x)} dx = \int_0^a dx = a \Rightarrow I = \frac{a}{2}$$

Chọn A

Câu 177: Cho $f(x)$ là hàm liên tục trên đoạn $[0; a]$ thỏa mãn $\begin{cases} f(x) \cdot f(a-x) = 1 \\ f(x) > 0, \forall x \in [0; a] \end{cases}$ và

$\int_0^a \frac{dx}{1 + f(x)} = \frac{ba}{c}$, trong đó b, c là hai số nguyên dương và $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản. Khi đó $b + c$ có giá trị thuộc khoảng nào dưới đây?

A. (11; 22).

B. (0; 9).

C. (7; 21).

D. (2017; 2020).

Hướng dẫn giải

Chọn B

Cách 1. Đặt $t = a - x \Rightarrow dt = -dx$

Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = a; x = a \Rightarrow t = 0$.

$$\text{Lúc đó } I = \int_0^a \frac{dx}{1 + f(x)} = \int_a^0 \frac{-dt}{1 + f(a-t)} = \int_0^a \frac{dx}{1 + f(a-x)} = \int_0^a \frac{dx}{1 + \frac{1}{f(x)}} = \int_0^a \frac{f(x) dx}{1 + f(x)}$$

$$\text{Suy ra } 2I = I + I = \int_0^a \frac{dx}{1 + f(x)} + \int_0^a \frac{f(x) dx}{1 + f(x)} = \int_0^a 1 dx = a$$

$$\text{Do đó } I = \frac{1}{2}a \Rightarrow b = 1; c = 2 \Rightarrow b + c = 3.$$

Cách 2. Chọn $f(x) = 1$ là một hàm thỏa các giả thiết.

$$\text{Dễ dàng tính được } I = \frac{1}{2}a \Rightarrow b = 1; c = 2 \Rightarrow b + c = 3.$$

TÍCH PHÂN HÀM ẨN ĐỔI BIẾN DẠNG 6

Câu 178: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1;4]$, đồng biến trên đoạn $[1;4]$ và thỏa mãn đẳng thức $x + 2x.f(x) = [f'(x)]^2, \forall x \in [1;4]$. Biết rằng $f(1) = \frac{3}{2}$, tính $I = \int_1^4 f(x) dx$?

- A.** $I = \frac{1186}{45}$. **B.** $I = \frac{1174}{45}$. **C.** $I = \frac{1222}{45}$. **D.** $I = \frac{1201}{45}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có $x + 2x.f(x) = [f'(x)]^2 \Rightarrow \sqrt{x} \cdot \sqrt{1 + 2f(x)} = f'(x) \Rightarrow \frac{f'(x)}{\sqrt{1 + 2f(x)}} = \sqrt{x}, \forall x \in [1;4]$.

Suy ra $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1 + 2f(x)}} dx = \int \sqrt{x} dx + C \Leftrightarrow \int \frac{df(x)}{\sqrt{1 + 2f(x)}} dx = \int \sqrt{x} dx + C$

$\Rightarrow \sqrt{1 + 2f(x)} = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C$. Mà $f(1) = \frac{3}{2} \Rightarrow C = \frac{4}{3}$. Vậy $f(x) = \frac{\left(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + \frac{4}{3}\right)^2 - 1}{2}$.

Vậy $I = \int_1^4 f(x) dx = \frac{1186}{45}$.

Câu 179: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $3f'(x) \cdot e^{f^3(x) - x^2 - 1} - \frac{2x}{f^2(x)} = 0$ và

$f(0) = 1$. Tích phân $\int_0^{\sqrt{7}} x.f(x) dx$ bằng

- A.** $\frac{2\sqrt{7}}{3}$. **B.** $\frac{15}{4}$. **C.** $\frac{45}{8}$. **D.** $\frac{5\sqrt{7}}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có $3f'(x) \cdot e^{f^3(x) - x^2 - 1} - \frac{2x}{f^2(x)} = 0 \Leftrightarrow 3f^2(x) \cdot f'(x) \cdot e^{f^3(x)} = 2x \cdot e^{x^2 + 1}$

Suy ra $e^{f^3(x)} = e^{x^2 + 1} + C$. Mặt khác, vì $f(0) = 1$ nên $C = 0$.

Do đó $e^{f^3(x)} = e^{x^2 + 1} \Leftrightarrow f^3(x) = x^2 + 1 \Leftrightarrow f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 1}$.

Vậy $\int_0^{\sqrt{7}} x.f(x) dx = \int_0^{\sqrt{7}} x \cdot \sqrt[3]{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{7}} \sqrt[3]{x^2 + 1} d(x^2 + 1) = \frac{3}{8} \left[(x^2 + 1)^{\frac{4}{3}} \sqrt[3]{x^2 + 1} \right]_0^{\sqrt{7}} = \frac{45}{8}$.

Câu 180: Cho hàm số $f(x) = x^4 + 4x^3 - 3x^2 - x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Tính $I = \int_0^1 f^2(x) \cdot f'(x) dx$.

- A.** 2. **B.** -2. **C.** $-\frac{7}{3}$. **D.** $\frac{7}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Đặt $t = f(x) \Rightarrow dt = f'(x) dx$. Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = f(0) = 1, x = 1 \Rightarrow t = f(1) = 2$.

Khi đó $I = \int_1^2 t^2 dt = \frac{t^3}{3} \Big|_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$.

Câu 181: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên khoảng $(0;1)$ và $f(x) \neq 0, \forall x \in (0;1)$. Biết

rằng $f\left(\frac{1}{2}\right) = a, f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = b$ và $x + xf'(x) = 2f(x) - 4, \forall x \in (0;1)$. Tính tích phân

$$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^2 x \cdot \cos x + 2 \sin 2x}{f^2(\sin x)} dx \text{ theo } a \text{ và } b.$$

A. $I = \frac{3a+b}{4ab}.$

B. $I = \frac{3b+a}{4ab}.$

C. $I = \frac{3b-a}{4ab}.$

D. $I = \frac{3a-b}{4ab}.$

Hướng dẫn giải

Chọn D

$\forall x \in (0;1)$ ta có:

$$x + xf'(x) = 2f(x) - 4 \Leftrightarrow x + 4 = 2f(x) - xf'(x) \Rightarrow x^2 + 4x = 2xf(x) - x^2 f'(x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 + 4x}{f^2(x)} = \frac{2xf(x) - x^2 f'(x)}{f^2(x)} \Leftrightarrow \frac{x^2 + 4x}{f^2(x)} = \left(\frac{x^2}{f(x)} \right)'$$

$$\text{Tính } I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^2 x \cdot \cos x + 2 \sin 2x}{f^2(\sin x)} dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^2 x \cdot \cos x + 4 \sin x \cdot \cos x}{f^2(\sin x)} dx$$

$$\text{Đặt } t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx, \text{ đổi cận } x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow t = \frac{1}{2}, x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow t = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Ta có } I = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{t^2 + 4t}{f^2(t)} dt = \frac{t^2}{f(t)} \Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{f\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{3}{4b} - \frac{1}{4a} = \frac{3a-b}{4ab}.$$

Câu 182: Cho hàm số f liên tục, $f(x) > -1, f(0) = 0$ và thỏa $f'(x)\sqrt{x^2+1} = 2x\sqrt{f(x)+1}$. Tính $f(\sqrt{3})$.

A. 0.

B. 3.

C. 7.

D. 9.

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$\text{Ta có } f'(x)\sqrt{x^2+1} = 2x\sqrt{f(x)+1} \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)+1}} = \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\sqrt{3}} \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)+1}} dx = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} dx \Leftrightarrow \sqrt{f(x)+1} \Big|_0^{\sqrt{3}} = \sqrt{x^2+1} \Big|_0^{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \sqrt{f(x)+1} \Big|_0^{\sqrt{3}} = 2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{f(\sqrt{3})+1} - \sqrt{f(0)+1} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{f(\sqrt{3})+1} = 2 \Leftrightarrow f(\sqrt{3}) = 3.$$

Câu 183: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_2^5 f(x) dx = 4, f(5) = 3, f(2) = 2$. Tính

$$I = \int_1^2 x^3 f'(x^2+1) dx$$

A. 3.

B. 4.

C. 1.

D. 6.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Đặt $t = x^2 + 1 \Rightarrow dt = 2x dx$.

$x = 1 \Rightarrow t = 2$; $x = 2 \Rightarrow t = 5$. Khi đó $I = \frac{1}{2} \int_2^5 (t-1) f'(t) dt$.

Đặt $u = t-1 \Rightarrow du = dt$; $dv = f'(t) dt$, chọn $v = f(t)$.

$$I = \frac{1}{2} (t-1) f(t) \Big|_2^5 - \frac{1}{2} \int_2^5 f(t) dt = \frac{1}{2} (4f(5) - f(2)) - 2 = 3.$$

Câu 184: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[1; 4]$ và thỏa mãn $f(x) = \frac{f(2\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}} + \frac{\ln x}{x}$. Tính tích

phân $I = \int_3^4 f(x) dx$.

A. $I = 3 + 2 \ln^2 2$.

B. $I = 2 \ln^2 2$.

C. $I = \ln^2 2$.

D. $I = 2 \ln 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có $\int_1^4 f(x) dx = \int_1^4 \left[\frac{f(2\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}} + \frac{\ln x}{x} \right] dx = \int_1^4 \frac{f(2\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}} dx + \int_1^4 \frac{\ln x}{x} dx$.

Xét $K = \int_1^4 \frac{f(2\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}} dx$.

Đặt $2\sqrt{x}-1 = t \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{t+1}{2} \Rightarrow \frac{dx}{\sqrt{x}} = dt$.

$\Rightarrow K = \int_1^3 f(t) dt = \int_1^3 f(x) dx$.

Xét $M = \int_1^4 \frac{\ln x}{x} dx = \int_1^4 \ln x d(\ln x) = \frac{\ln^2 x}{2} \Big|_1^4 = 2 \ln^2 2$.

Do đó $\int_1^4 f(x) dx = \int_1^3 f(x) dx + 2 \ln^2 2 \Rightarrow \int_3^4 f(x) dx = 2 \ln^2 2$.

Câu 185: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cot x \cdot f(\sin^2 x) dx = \int_1^{16} \frac{f(\sqrt{x})}{x} dx = 1$. Tính

tích phân $\int_{\frac{1}{8}}^1 \frac{f(4x)}{x} dx$.

A. $I = 3$.

B. $I = \frac{3}{2}$.

C. $I = 2$.

D. $I = \frac{5}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Đặt $I_1 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cot x \cdot f(\sin^2 x) dx = 1$, $I_2 = \int_1^{16} \frac{f(\sqrt{x})}{x} dx = 1$.

□ Đặt $t = \sin^2 x \Rightarrow dt = 2 \sin x \cdot \cos x dx = 2 \sin^2 x \cdot \cot x dx = 2t \cdot \cot x dx$.

x	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
t	$\frac{1}{2}$	1

$$I_1 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cot x \cdot f(\sin^2 x) dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 f(t) \cdot \frac{1}{2t} dt = \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{f(t)}{t} dt = \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{4}} \frac{f(4x)}{4x} d(4x) = \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{4}} \frac{f(4x)}{x} dx.$$

$$\text{Suy ra } \int_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{4}} \frac{f(4x)}{x} dx = 2I_1 = 2$$

$$\square \text{Đặt } t = \sqrt{x} \Rightarrow 2t dt = dx.$$

x	1	16
t	1	4

$$I_2 = \int_1^{16} \frac{f(\sqrt{x})}{x} dx = \int_1^4 \frac{f(t)}{t^2} 2t dt = 2 \int_1^4 \frac{f(t)}{t} dt = 2 \int_{\frac{1}{4}}^1 \frac{f(4x)}{4x} d(4x) = 2 \int_{\frac{1}{4}}^1 \frac{f(4x)}{x} dx.$$

$$\text{Suy ra } \int_{\frac{1}{4}}^1 \frac{f(4x)}{x} dx = \frac{1}{2} I_2 = \frac{1}{2}$$

Khi đó, ta có:

$$\int_{\frac{1}{8}}^1 \frac{f(4x)}{x} dx = \int_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{4}} \frac{f(4x)}{x} dx + \int_{\frac{1}{4}}^1 \frac{f(4x)}{x} dx = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}.$$

Câu 186: Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ và thỏa mãn điều kiện $4x \cdot f(x^2) + 3f(1-x) = \sqrt{1-x^2}$.

Tích phân $I = \int_0^1 f(x) dx$ bằng:

A. $I = \frac{\pi}{4}$.

B. $I = \frac{\pi}{6}$.

C. $I = \frac{\pi}{20}$.

D. $I = \frac{\pi}{16}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Vì $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ và $4x \cdot f(x^2) + 3f(1-x) = \sqrt{1-x^2}$ nên ta có

$$\int_0^1 [4x \cdot f(x^2) + 3f(1-x)] dx = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx \Leftrightarrow \int_0^1 4x \cdot f(x^2) dx + \int_0^1 3f(1-x) dx = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx \quad (1).$$

$$\text{Mà } \int_0^1 4x \cdot f(x^2) dx = 2 \int_0^1 f(x^2) d(x^2) \xrightarrow{t=x^2} 2 \int_0^1 f(t) dt = 2I$$

$$\text{và } \int_0^1 3f(1-x) dx = -3 \int_0^1 f(1-x) d(1-x) \xrightarrow{u=1-x} 3 \int_0^1 f(u) du = 3I$$

$$\text{Đồng thời } \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx \xrightarrow{x=\sin t} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t} \cdot \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt = \frac{\pi}{4}.$$

$$\text{Do đó, } (1) \Leftrightarrow 2I + 3I = \frac{\pi}{4} \text{ hay } I = \frac{\pi}{20}.$$

Câu 187: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=1$, $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \frac{9}{5}$

và $\int_0^1 f(\sqrt{x}) dx = \frac{2}{5}$. Tính tích phân $I = \int_0^1 f(x) dx$.

A. $I = \frac{3}{5}$.

B. $I = \frac{1}{4}$.

C. $I = \frac{3}{4}$.

D. $I = \frac{1}{5}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Đặt $t = \sqrt{x} \Rightarrow t^2 = x \Rightarrow dx = 2t dt$. Đổi cận $x=0 \Rightarrow t=0$; $x=1 \Rightarrow t=1$

Suy ra $\int_0^1 f(\sqrt{x}) dx = 2 \int_0^1 t f(t) dt \Leftrightarrow \int_0^1 t f(t) dt = \frac{1}{5}$. Do đó $\Leftrightarrow \int_0^1 x f(x) dx = \frac{1}{5}$

Mặt khác $\int_0^1 x f(x) dx = \frac{x^2}{2} f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2} f'(x) dx = \frac{1}{2} - \int_0^1 \frac{x^2}{2} f'(x) dx$.

Suy ra $\int_0^1 \frac{x^2}{2} f'(x) dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{5} = \frac{3}{10} \Rightarrow \int_0^1 x^2 f'(x) dx = \frac{3}{5}$

Ta tính được $\int_0^1 (3x^2)^2 dx = \frac{9}{5}$.

Do đó $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx - 2 \int_0^1 3x^2 f'(x) dx + \int_0^1 (3x^2)^2 dx = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 (f'(x) - 3x^2)^2 dx = 0$

$\Leftrightarrow f'(x) - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 3x^2 \Leftrightarrow f(x) = x^3 + C$.

Vì $f(1)=1$ nên $f(x) = x^3$

Vậy $I = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}$.

DẠNG 4: PHƯƠNG PHÁP TỪNG PHẦN

BÀI TẬP

Câu 188. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $[0; 2]$ và $f(2) = 3$, $\int_0^2 f(x) dx = 3$.

Tính $\int_0^2 x \cdot f'(x) dx$.

A. -3.

B. 3.

C. 0.

D. 6.

Câu 189. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 1]$ và $f(1) = 2$. Biết

$\int_0^1 f(x) dx = 1$, tính tích phân $I = \int_0^1 x \cdot f'(x) dx$.

A. $I = 1$.

B. $I = -1$.

C. $I = 3$.

D. $I = -3$.

Câu 190. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int_0^1 (x+1) f'(x) dx = 10$ và $2f(1) - f(0) = 2$. Tính

$I = \int_0^1 f(x) dx$.

A. $I = 8$.

B. $I = -8$.

C. $I = 4$.

D. $I = -4$.

Câu 191. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0; 2]$ và thỏa mãn $f(2) = 16$,

$\int_0^2 f(x) dx = 4$. Tính tích phân $I = \int_0^1 x \cdot f'(2x) dx$.

A. $I = 12$.

B. $I = 7$.

C. $I = 13$.

D. $I = 20$.

Câu 192. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(-2) = 1$,

$\int_1^2 f(2x-4) dx = 1$. Tính $\int_{-2}^0 x f'(x) dx$.

A. $I = 1$.

B. $I = 0$.

C. $I = -4$.

D. $I = 4$.

Câu 193. Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f(x^3 + 3x + 1) = 3x + 2, \forall x \in \mathbb{R}$. Tính $I = \int_1^5 x \cdot f'(x) dx$.

A. $\frac{5}{4}$.

B. $\frac{17}{4}$.

C. $\frac{33}{4}$.

D. -1761.

Câu 194. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trong đoạn $[1; e]$, biết $\int_1^e \frac{f(x)}{x} dx = 1$, $f(e) = 1$. Khi đó

$I = \int_1^e f'(x) \cdot \ln x dx$ bằng

A. $I = 4$.

B. $I = 3$.

C. $I = 1$.

D. $I = 0$.

Câu 195. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$f(x) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \cdot \cos x$, với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 0$. Giá trị của tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot f'(x) dx$ bằng

A. $-\frac{\pi}{4}$.

B. $\frac{1}{4}$.

C. $\frac{\pi}{4}$.

D. $-\frac{1}{4}$.

Câu 196. Cho hàm số $f(x)$ thỏa $f(0) = f(1) = 1$. Biết $\int_0^1 e^x [f(x) + f'(x)] dx = ae + b$. Tính biểu thức $Q = a^{2018} + b^{2018}$.

- A. $Q = 8$. B. $Q = 6$. C. $Q = 4$. D. $Q = 2$.

Câu 197. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x) - 2018f(x) = 2018x^{2017} \cdot e^{2018x}$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 2018$. Tính giá trị $f(1)$.

- A. $f(1) = 2019e^{2018}$. B. $f(1) = 2018e^{-2018}$. C. $f(1) = 2018e^{2018}$. D. $f(1) = 2017e^{2018}$.

Câu 198. Cho hàm số $y = f(x)$ với $f(0) = f(1) = 1$. Biết rằng: $\int_0^1 e^x [f(x) + f'(x)] dx = ae + b$. Tính $Q = a^{2017} + b^{2017}$.

- A. $Q = 2^{2017} + 1$. B. $Q = 2$. C. $Q = 0$. D. $Q = 2^{2017} - 1$.

Câu 199. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0; 5]$ và $f(5) = 10$, $\int_0^5 xf'(x) dx = 30$.

Tính $\int_0^5 f(x) dx$.

- A. 20. B. -30. C. -20. D. 70.

Câu 200. Cho hai hàm số liên tục f và g có nguyên hàm lần lượt là F và G trên đoạn $[1; 2]$. Biết rằng $F(1) = 1$, $F(2) = 4$, $G(1) = \frac{3}{2}$, $G(2) = 2$ và $\int_1^2 f(x)G(x) dx = \frac{67}{12}$. Tính $\int_1^2 F(x)g(x) dx$.

- A. $\frac{11}{12}$. B. $-\frac{145}{12}$. C. $-\frac{11}{12}$. D. $\frac{145}{12}$.

Câu 201. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0; 1]$ thỏa mãn $\int_0^1 x[f'(x) - 2] dx = f(1)$. Giá trị của $I = \int_0^1 f(x) dx$ bằng

- A. -2. B. 2. C. -1. D. 1.

Câu 202. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[1; 2]$ và $\int_1^2 (x-1)f'(x) dx = a$. Tính $\int_1^2 f(x) dx$ theo a và $b = f(2)$.

- A. $b - a$. B. $a - b$. C. $a + b$. D. $-a - b$.

Câu 203. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(2) = 16$, $\int_0^2 f(x) dx = 4$. Tính tích phân

$I = \int_0^1 x \cdot f'(2x) dx$.

- A. $I = 13$. B. $I = 12$. C. $I = 20$. D. $I = 7$.

Câu 204. Cho $y = f(x)$ là hàm số chẵn, liên tục trên $\mathbb{R}$ biết đồ thị hàm số $y = f(x)$ đi qua điểm

$M\left(-\frac{1}{2}; 4\right)$ và $\int_0^{\frac{1}{2}} f(t) dt = 3$, tính $I = \int_{-\frac{\pi}{6}}^0 \sin 2x \cdot f'(\sin x) dx$.

A. $I = 10$.

B. $I = -2$.

C. $I = 1$.

D. $I = -1$.

Câu 205. Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot f(x) dx = f(0) = 1$. Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot f'(x) dx$.

A. $I = 1$.

B. $I = 0$.

C. $I = 2$.

D. $I = -1$.

Câu 206. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(-x) + 2018 f(x) = 2x \sin x$. Tính

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx?$$

A. $\frac{2}{2019}$.

B. $\frac{2}{2018}$.

C. $\frac{2}{1009}$.

D. $\frac{4}{2019}$.

Câu 207. Cho hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục, có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f'(0) \cdot f'(2) \neq 0$ và $g(x) f'(x) = x(x-2)e^x$. Tính giá trị của tích phân $I = \int_0^2 f(x) \cdot g'(x) dx$?

A. -4 .

B. $e-2$.

C. 4 .

D. $2-e$.

Câu 208. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ thỏa mãn $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{f(x)}{\cos x} dx = 1 \text{ và } \int_0^{\frac{\pi}{4}} [\sin x \cdot \tan x \cdot f(x)] dx = 2. \text{ Tích phân } \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x \cdot f'(x) dx \text{ bằng:}$$

A. 4 .

B. $\frac{2+3\sqrt{2}}{2}$.

C. $\frac{1+3\sqrt{2}}{2}$.

D. 6 .

Câu 209. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(2) = 16$, $\int_0^2 f(x) dx = 4$. Tính $I = \int_0^4 x f'\left(\frac{x}{2}\right) dx$

A. $I = 12$.

B. $I = 112$.

C. $I = 28$.

D. $I = 144$.

Câu 210. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp hai $f''(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 1]$ thỏa mãn $f(1) = f(0) = 1$, $f'(0) = 2018$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\int_0^1 f''(x)(1-x) dx = -2018$.

B. $\int_0^1 f''(x)(1-x) dx = -1$.

C. $\int_0^1 f''(x)(1-x) dx = 2018$.

D. $\int_0^1 f''(x)(1-x) dx = 1$.

Câu 211. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục thỏa mãn $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} [f'(x)]^2 dx = \frac{\pi}{4}$ và

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x \cdot f(x) dx = \frac{\pi}{4}. \text{ Tính } f(2018\pi).$$

A. -1 .

B. 0 .

C. $\frac{1}{2}$.

D. 1 .

Câu 212. Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương, có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0; 2]$. Biết $f(0) = 1$

và $f(x) \cdot f(2-x) = e^{2x^2-4x}$, với mọi $x \in [0; 2]$. Tính tích phân $I = \int_0^2 \frac{(x^3 - 3x^2) f'(x)}{f(x)} dx$.

A. $I = -\frac{16}{3}$. **B.** $I = -\frac{16}{5}$. **C.** $I = -\frac{14}{3}$. **D.** $I = -\frac{32}{5}$.

Câu 213. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1) = 0$ và

$$\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \int_0^1 (x+1)e^x f(x) dx = \frac{e^2 - 1}{4}. \text{ Tính tích phân } I = \int_0^1 f(x) dx.$$

A. $I = 2 - e$. **B.** $I = e - 2$. **C.** $I = \frac{e}{2}$. **D.** $I = \frac{e-1}{2}$.

Câu 214. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1;2]$ thỏa mãn $\int_1^2 (x-1)^2 f(x) dx = -\frac{1}{3}$,

$$f(2) = 0 \text{ và } \int_1^2 [f'(x)]^2 dx = 7. \text{ Tính tích phân } I = \int_1^2 f(x) dx.$$

A. $I = \frac{7}{5}$. **B.** $I = -\frac{7}{5}$. **C.** $I = -\frac{7}{20}$. **D.** $I = \frac{7}{20}$.

Câu 215. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1) = 1$,

$$\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 9 \text{ và } \int_0^1 x^3 f(x) dx = \frac{1}{2}. \text{ Tích phân } \int_0^1 f(x) dx \text{ bằng}$$

A. $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{5}{2}$. **C.** $\frac{7}{4}$. **D.** $\frac{6}{5}$.

Câu 216. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ và $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$. Biết

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f^2(x) dx = \frac{\pi}{8}, \int_0^{\frac{\pi}{4}} f'(x) \sin 2x dx = -\frac{\pi}{4}. \text{ Tính tích phân } I = \int_0^{\frac{\pi}{8}} f(2x) dx$$

A. $I = 1$. **B.** $I = \frac{1}{2}$. **C.** $I = 2$. **D.** $I = \frac{1}{4}$.

Câu 217. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ và $f(0) + f(1) = 0$. Biết

$$\int_0^1 f^2(x) dx = \frac{1}{2}, \int_0^1 f'(x) \cos(\pi x) dx = \frac{\pi}{2}. \text{ Tính } \int_0^1 f(x) dx.$$

A. π . **B.** $\frac{1}{\pi}$. **C.** $\frac{2}{\pi}$. **D.** $\frac{3\pi}{2}$.

Câu 218. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa $f(1) = 0$,

$$\int_0^1 (f'(x))^2 dx = \frac{\pi^2}{8} \text{ và } \int_0^1 \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) f(x) dx = \frac{1}{2}. \text{ Tính } \int_0^1 f(x) dx.$$

A. $\frac{\pi}{2}$. **B.** π . **C.** $\frac{1}{\pi}$. **D.** $\frac{2}{\pi}$.

Câu 219. Xét hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện $f(1) = 1$ và

$$f(2) = 4. \text{ Tính } J = \int_1^2 \left(\frac{f'(x)+2}{x} - \frac{f(x)+1}{x^2} \right) dx.$$

A. $J = 1 + \ln 4$. **B.** $J = 4 - \ln 2$. **C.** $J = \ln 2 - \frac{1}{2}$. **D.** $J = \frac{1}{2} + \ln 4$.

Câu 220. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn

$$\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \int_0^1 (x+1)e^x f(x) dx = \frac{e^2-1}{4} \text{ và } f(1) = 0. \text{ Tính } \int_0^1 f(x) dx$$

A. $\frac{e-1}{2}.$

B. $\frac{e^2}{4}.$

C. $e-2.$

D. $\frac{e}{2}.$

Câu 221. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1) = 0$,

$$\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 7 \text{ và } \int_0^1 x^2 f(x) dx = \frac{1}{3}. \text{ Tích phân } \int_0^1 f(x) dx \text{ bằng}$$

A. $\frac{7}{5}.$

B. $1.$

C. $\frac{7}{4}.$

D. $4.$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 188. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $[0; 2]$ và $f(2) = 3, \int_0^2 f(x) dx = 3$.

Tính $\int_0^2 x \cdot f'(x) dx$.

A. -3.

B. 3.

C. 0.

D. 6.

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \int_0^2 x \cdot f'(x) dx = \int_0^2 x d(f(x)) = x \cdot f(x) \Big|_0^2 - \int_0^2 f(x) dx = 2f(2) - 3 = 3.$$

Câu 189. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 1]$ và $f(1) = 2$. Biết $\int_0^1 f(x) dx = 1$, tính tích phân $I = \int_0^1 x \cdot f'(x) dx$.

A. $I = 1$.

B. $I = -1$.

C. $I = 3$.

D. $I = -3$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } I = \int_0^1 x \cdot f'(x) dx$$

$$\text{Đặt } u = x \Rightarrow du = dx, dv = f'(x) dx \text{ chọn } v = \int f'(x) dx = f(x)$$

$$\Rightarrow I = x \cdot f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 f(x) dx = 1 \cdot f(1) - 0 \cdot f(0) - \int_0^1 f(x) dx = 2 - 1 = 1$$

Chọn A

Câu 190. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int_0^1 (x+1) f'(x) dx = 10$ và $2f(1) - f(0) = 2$. Tính

$$I = \int_0^1 f(x) dx.$$

A. $I = 8$.

B. $I = -8$.

C. $I = 4$.

D. $I = -4$.

Hướng dẫn giải

$$A = \int_0^1 (x+1) f'(x) dx \text{ Đặt } u = x+1 \Rightarrow du = dx, dv = f'(x) dx \text{ chọn } v = f(x)$$

$$\Rightarrow A = (x+1) \cdot f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 f(x) dx = 2f(1) - f(0) - \int_0^1 f(x) dx = 2 - \int_0^1 f(x) dx = 10 \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = -8$$

Chọn B

Câu 191. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0; 2]$ và thỏa mãn $f(2) = 16$,

$$\int_0^2 f(x) dx = 4. \text{ Tính tích phân } I = \int_0^1 x \cdot f'(2x) dx.$$

A. $I = 12$.

B. $I = 7$.

C. $I = 13$.

D. $I = 20$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = f'(2x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{f(2x)}{2} \end{cases}$$

$$\text{Khi đó: } I = \frac{x \cdot f(2x)}{2} \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 f(2x) dx = \frac{f(2)}{2} - \frac{1}{4} \int_0^2 f(t) dt = \frac{16}{2} - \frac{1}{4} \cdot 4 = 7.$$

Câu 192. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(-2) = 1$,

$$\int_1^2 f(2x-4) dx = 1. \text{ Tính } \int_{-2}^0 xf'(x) dx.$$

A. $I = 1.$

B. $I = 0.$

C. $I = -4.$

D. $I = 4.$

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$\text{Đặt } t = 2x - 4 \Rightarrow dt = 2dx, \text{ đổi cận } x = 1 \Rightarrow t = -2, x = 2 \Rightarrow t = 0.$$

$$1 = \int_1^2 f(2x-4) dx = \frac{1}{2} \int_{-2}^0 f(t) dt \Rightarrow \int_{-2}^0 f(t) dt = 2 \Rightarrow \int_{-2}^0 f(x) dx = 2.$$

$$\text{Đặt } u = x \Rightarrow du = dx, dv = f'(x) dx \Rightarrow v = f(x).$$

$$\text{Vậy } \int_{-2}^0 xf'(x) dx = xf(x) \Big|_{-2}^0 - \int_{-2}^0 f(x) dx = 2f(-2) - 2 = 2 \cdot 1 - 2 = 0.$$

Câu 193. Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f(x^3 + 3x + 1) = 3x + 2, \forall x \in \mathbb{R}$. Tính $I = \int_1^5 x \cdot f'(x) dx$.

A. $\frac{5}{4}.$

B. $\frac{17}{4}.$

C. $\frac{33}{4}.$

D. $-1761.$

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = f(x) \end{cases} \Rightarrow I = xf(x) \Big|_1^5 - \int_1^5 f(x) dx.$$

$$\text{Từ } f(x^3 + 3x + 1) = 3x + 2 \Rightarrow \begin{cases} f(5) = 5 \quad (x=1) \\ f(1) = 2 \quad (x=0) \end{cases}, \text{ suy ra } I = 23 - \int_1^5 f(x) dx.$$

$$\text{Đặt } t = x^3 + 3x + 1 \Rightarrow \begin{cases} dt = (3x^2 + 3) dx \\ f(t) = 3x + 2 \end{cases}$$

$$\text{Đổi cận: Với } t = 1 \Rightarrow 1 = x^3 + 3x + 1 \Leftrightarrow x = 0 \text{ và } t = 5 \Rightarrow x^3 + 3x + 1 = 5 \Leftrightarrow x = 1.$$

$$\text{Khi đó } I = 23 - \int_1^5 f(x) dx = 23 - \int_0^1 (3x + 2)(3x^2 + 3) dx \stackrel{\text{Casio}}{=} \frac{33}{4}$$

Chọn C

Câu 194. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trong đoạn $[1; e]$, biết $\int_1^e \frac{f(x)}{x} dx = 1, f(e) = 1$. Khi đó

$$I = \int_1^e f'(x) \cdot \ln x dx \text{ bằng}$$

A. $I = 4.$

B. $I = 3.$

C. $I = 1.$

D. $I = 0.$

Hướng dẫn giải

Chọn D

Cách 1: Ta có $I = \int_1^e f'(x) \cdot \ln x dx = f(x) \cdot \ln x \Big|_1^e - \int_1^e f(x) \cdot \frac{1}{x} dx = f(e) - 1 = 1 - 1 = 0$.

Cách 2: Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = f(x) \end{cases}$.

Suy ra $I = \int_1^e f'(x) \cdot \ln x dx = f(x) \ln x \Big|_1^e - \int_1^e \frac{f(x)}{x} dx = f(e) - 1 = 1 - 1 = 0$.

Câu 195. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$f(x) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \cdot \cos x$, với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 0$. Giá trị của tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot f'(x) dx$ bằng

A. $-\frac{\pi}{4}$.

B. $\frac{1}{4}$.

C. $\frac{\pi}{4}$.

D. $-\frac{1}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Theo giả thiết, $f(0) = 0$ và $f(x) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \cdot \cos x$ nên

$$f(0) + f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Ta có:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot f'(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x d[f(x)] = [xf(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$$

$$\text{Suy ra: } I = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx.$$

Mặt khác, ta có:

$$f(x) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \cdot \cos x \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \cos x dx = \frac{1}{2}$$

$$\text{Suy ra: } \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \frac{1}{4}$$

$$\text{Vậy } I = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = -\frac{1}{4}.$$

Câu 196. Cho hàm số $f(x)$ thỏa $f(0) = f(1) = 1$. Biết $\int_0^1 e^x [f(x) + f'(x)] dx = ae + b$. Tính biểu

thức $Q = a^{2018} + b^{2018}$.

A. $Q = 8$.

B. $Q = 6$.

C. $Q = 4$.

D. $Q = 2$.

Hướng dẫn giải

$$A = \int_0^1 e^x [f(x) + f'(x)] dx = \underbrace{\int_0^1 e^x f(x) dx}_{A_1} + \underbrace{\int_0^1 e^x f'(x) dx}_{A_2}$$

$$A_1 = \int_0^1 e^x f(x) dx$$

$$\text{Đặt } u = f(x) \Rightarrow du = f'(x)dx, dv = e^x dx \text{ chọn } v = e^x \Rightarrow A_1 = e^x \cdot f(x) \Big|_0^1 - \underbrace{\int_0^1 e^x f'(x) dx}_{A_2}$$

$$\text{Vậy } A = e^x f(x) \Big|_0^1 - A_2 + A_2 = e^x f(x) \Big|_0^1 = e \cdot f(1) - f(0) = e - 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases} \Rightarrow a^{2018} + b^{2018} = 1 + 1 = 2$$

Chọn D

Câu 197. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x) - 2018f(x) = 2018 \cdot x^{2017} \cdot e^{2018x}$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 2018$. Tính giá trị $f(1)$.

A. $f(1) = 2019e^{2018}$. **B.** $f(1) = 2018e^{-2018}$. **C.** $f(1) = 2018e^{2018}$. **D.** $f(1) = 2017e^{2018}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } f'(x) - 2018f(x) = 2018 \cdot x^{2017} \cdot e^{2018x} \Leftrightarrow \frac{f'(x) - 2018f(x)}{e^{2018x}} = 2018 \cdot x^{2017}$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 \frac{f'(x) - 2018f(x)}{e^{2018x}} dx = \int_0^1 2018 \cdot x^{2017} dx \quad (1)$$

$$\text{Xét } I = \int_0^1 \frac{f'(x) - 2018f(x)}{e^{2018x}} dx = \int_0^1 f'(x) \cdot e^{-2018x} dx - \int_0^1 2018f(x) \cdot e^{-2018x} dx$$

$$\text{Xét } I_1 = \int_0^1 2018f(x) \cdot e^{-2018x} dx. \text{ Đặt } \begin{cases} u = f(x) \\ dv = 2018e^{-2018x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = -e^{-2018x} \end{cases}.$$

$$\text{Do đó } I_1 = f(x) \cdot (-e^{-2018x}) \Big|_0^1 + \int_0^1 f'(x) \cdot e^{-2018x} dx \Rightarrow I = f(1) \cdot e^{-2018} - 2018$$

$$\text{Khi đó } (1) \Leftrightarrow f(1) \cdot e^{-2018} - 2018 = x^{2018} \Big|_0^1 \Rightarrow f(1) = 2019e^{2018}.$$

Câu 198. Cho hàm số $y = f(x)$ với $f(0) = f(1) = 1$. Biết rằng: $\int_0^1 e^x [f(x) + f'(x)] dx = ae + b$ Tính

$$Q = a^{2017} + b^{2017}.$$

A. $Q = 2^{2017} + 1$.

B. $Q = 2$.

C. $Q = 0$.

D. $Q = 2^{2017} - 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = f(x) \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = e^x \end{cases}.$$

$$\int_0^1 e^x [f(x) + f'(x)] dx = e^x f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x f'(x) dx + \int_0^1 e^x f'(x) dx = ef(1) - f(0) = e - 1.$$

$$\text{Do đó } a = 1, b = -1.$$

$$\text{Suy ra } Q = a^{2017} + b^{2017} = 1^{2017} + (-1)^{2017} = 0.$$

$$\text{Vậy } Q = 0.$$

Câu 199. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0; 5]$ và $f(5) = 10$, $\int_0^5 x f'(x) dx = 30$.
 . Tính $\int_0^5 f(x) dx$.

A. 20.

B. -30.

C. -20.

D. 70.

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = f'(x) dx \Rightarrow v = f(x) \end{cases}$$

$$\int_0^5 x \cdot f'(x) dx = (x \cdot f(x)) \Big|_0^5 - \int_0^5 f(x) dx \Leftrightarrow 30 = 5f(5) - \int_0^5 f(x) dx$$

$$\Leftrightarrow \int_0^5 f(x) dx = 5f(5) - 30 = 20.$$

Câu 200. Cho hai hàm số liên tục f và g có nguyên hàm lần lượt là F và G trên đoạn $[1; 2]$. Biết rằng $F(1) = 1$, $F(2) = 4$, $G(1) = \frac{3}{2}$, $G(2) = 2$ và $\int_1^2 f(x)G(x) dx = \frac{67}{12}$. Tính $\int_1^2 F(x)g(x) dx$

A. $\frac{11}{12}$.

B. $-\frac{145}{12}$.

C. $-\frac{11}{12}$.

D. $\frac{145}{12}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = F(x) \\ dv = g(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f(x) dx \\ v = G(x) \end{cases}$$

$$\int_1^2 F(x)g(x) dx = (F(x)G(x)) \Big|_1^2 - \int_1^2 f(x)G(x) dx = F(2)G(2) - F(1)G(1) - \int_1^2 f(x)G(x) dx$$

$$= 4 \cdot 2 - 1 \cdot \frac{3}{2} - \frac{67}{12} = \frac{11}{12}.$$

Câu 201. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0; 1]$ thỏa mãn $\int_0^1 x[f'(x) - 2] dx = f(1)$. Giá

trị của $I = \int_0^1 f(x) dx$ bằng

A. -2.

B. 2.

C. -1.

D. 1.

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \int_0^1 x[f'(x) - 2] dx = \int_0^1 x \cdot f'(x) dx - \int_0^1 2x dx$$

$$= \int_0^1 x d[f(x)] - x^2 \Big|_0^1 = x \cdot f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 f(x) dx - 1 = f(1) - I - 1.$$

$$\text{Theo đề bài } \int_0^1 x[f'(x) - 2] dx = f(1) \Rightarrow I = -1.$$

Câu 202. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[1; 2]$ và $\int_1^2 (x-1) f'(x) dx = a$. Tính $\int_1^2 f(x) dx$ theo a và $b = f(2)$.

A. $b - a$.

B. $a - b$.

C. $a + b$.

D. $-a - b$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Đặt $u = x - 1 \Rightarrow du = dx$; $dv = f'(x) dx$ chọn $v = f(x)$.

$$\int_1^2 (x-1) f'(x) dx = (x-1) f(x) \Big|_1^2 - \int_1^2 f(x) dx = f(2) - \int_a^b f(x) dx = b - \int_1^2 f(x) dx.$$

$$\text{Ta có } \int_1^2 (x-1) f'(x) dx = a \Leftrightarrow b - \int_1^2 f(x) dx = a \Leftrightarrow \int_1^2 f(x) dx = b - a.$$

Câu 203. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(2) = 16$, $\int_0^2 f(x) dx = 4$. Tính tích phân

$$I = \int_0^1 x \cdot f'(2x) dx.$$

A. $I = 13$.

B. $I = 12$.

C. $I = 20$.

D. $I = 7$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = f'(2x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{2} f(2x) \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó, } I = x \cdot \frac{1}{2} f(2x) \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 f(2x) dx = \frac{1}{2} f(2) - \frac{1}{2} \int_0^1 f(2x) dx = 8 - \frac{1}{2} \int_0^1 f(2x) dx.$$

$$\text{Đặt } t = 2x \Rightarrow dt = 2dx.$$

$$\text{Với } x = 0 \Rightarrow t = 0; x = 1 \Rightarrow t = 2.$$

$$\text{Suy ra } I = 8 - \frac{1}{4} \int_0^2 f(t) dt = 8 - 1 = 7.$$

Câu 204. Cho $y = f(x)$ là hàm số chẵn, liên tục trên $\mathbb{R}$ biết đồ thị hàm số $y = f(x)$ đi qua điểm

$$M\left(-\frac{1}{2}; 4\right) \text{ và } \int_0^{\frac{1}{2}} f(t) dt = 3, \text{ tính } I = \int_{\frac{\pi}{6}}^0 \sin 2x \cdot f'(\sin x) dx.$$

A. $I = 10$.

B. $I = -2$.

C. $I = 1$.

D. $I = -1$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$\text{Xét tích phân } I = \int_{\frac{\pi}{6}}^0 \sin 2x \cdot f'(\sin x) dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^0 2 \sin x \cdot f'(\sin x) \cdot \cos x dx.$$

$$\text{Đặt: } t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx. \text{ Đổi cận: } \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} \Rightarrow t = -\frac{1}{2} \\ x = 0 \Rightarrow t = 0 \end{cases}.$$

$$\Rightarrow I = 2 \int_{-\frac{1}{2}}^0 t \cdot f'(t) dt.$$

$$\text{Đặt: } \begin{cases} u = 2t \\ dv = f'(t)dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2dt \\ v = f(t) \end{cases}.$$

$$\Rightarrow I = 2t \cdot f(t) \Big|_{-\frac{1}{2}}^0 - 2 \int_{-\frac{1}{2}}^0 f(t) dt = f\left(-\frac{1}{2}\right) - 2 \int_{-\frac{1}{2}}^0 f(t) dt.$$

$$\square \text{ Đồ thị hàm số } y = f(x) \text{ đi qua điểm } M\left(-\frac{1}{2}; 4\right) \Rightarrow f\left(-\frac{1}{2}\right) = 4.$$

$$\square \text{ Hàm số } y = f(x) \text{ là hàm số chẵn, liên tục trên } \mathbb{R} \Rightarrow \int_{-\frac{1}{2}}^0 f(t) dt = \int_0^{\frac{1}{2}} f(t) dt = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx = 3.$$

$$\text{Vậy } I = 4 - 2 \cdot 3 = -2.$$

Câu 205. Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot f(x) dx = f(0) = 1$. Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot f'(x) dx$.

A. $I = 1$.

B. $I = 0$.

C. $I = 2$.

D. $I = -1$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = f(x) \Rightarrow du = f'(x)dx \\ dv = \sin x dx \Rightarrow v = -\cos x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot f(x) dx = (-\cos x \cdot f(x)) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot f'(x) dx.$$

$$\Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot f'(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot f(x) dx + \cos x \cdot f(x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 - 1 = 0.$$

Câu 206. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(-x) + 2018 f(x) = 2x \sin x$. Tính

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx?$$

A. $\frac{2}{2019}$.

B. $\frac{2}{2018}$.

C. $\frac{2}{1009}$.

D. $\frac{4}{2019}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

$$\text{Ta có } \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (f(-x) + 2018 f(x)) dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2x \sin x dx$$

$$\Leftrightarrow \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(-x) dx + 2018 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2x \sin x dx \Leftrightarrow 2019 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2x \sin x dx \quad (1)$$

$$+ \text{ Xét } P = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2x \sin x dx$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = 2x \\ dv = \sin x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2dx \\ v = -\cos x \end{cases}$$

$$P = 2x \cdot (-\cos x) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \sin x \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 4$$

$$\text{Từ (1) suy ra } I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \frac{4}{2019}.$$

Câu 207. Cho hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục, có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f'(0) \cdot f'(2) \neq 0$ và $g(x) f'(x) = x(x-2)e^x$. Tính giá trị của tích phân $I = \int_0^2 f(x) \cdot g'(x) dx$?

A. -4.

B. $e-2$.

C. -4.

D. $2-e$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có $g(x) f'(x) = x(x-2)e^x \Rightarrow g(0) = g(2) = 0$ (vì $f'(0) \cdot f'(2) \neq 0$)

$$I = \int_0^2 f(x) \cdot g'(x) dx = \int_0^2 f(x) dg(x) = \left(f(x) \cdot g(x) \right) \Big|_0^2 - \int_0^2 g(x) \cdot f'(x) dx = - \int_0^2 (x^2 - 2x) e^x dx = 4.$$

Câu 208. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ thỏa mãn $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{f(x)}{\cos x} dx = 1 \text{ và } \int_0^{\frac{\pi}{4}} [\sin x \cdot \tan x \cdot f(x)] dx = 2. \text{ Tích phân } \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x \cdot f'(x) dx \text{ bằng:}$$

A. 4.

B. $\frac{2+3\sqrt{2}}{2}$.

C. $\frac{1+3\sqrt{2}}{2}$.

D. 6.

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x \cdot f'(x) dx. \text{ Đặt } \begin{cases} u = \sin x \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \cos x dx \\ v = f(x) \end{cases}.$$

$$I = \sin x \cdot f(x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x \cdot f(x) dx = \frac{3\sqrt{2}}{2} - I_1.$$

$$2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} [\sin x \cdot \tan x \cdot f(x)] dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\sin^2 x \cdot \frac{f(x)}{\cos x} \right] dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[(1 - \cos^2 x) \cdot \frac{f(x)}{\cos x} \right] dx.$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{f(x)}{\cos x} \right] dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x \cdot f(x) dx = 1 - I_1.$$

$$\Rightarrow I_1 = -1 \Rightarrow I = \frac{3\sqrt{2}}{2} + 1 = \frac{3\sqrt{2} + 2}{2}.$$

Câu 209. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(2) = 16$, $\int_0^2 f(x) dx = 4$. Tính $I = \int_0^4 x f'\left(\frac{x}{2}\right) dx$

A. $I = 12$.

B. $I = 112$.

C. $I = 28$.

D. $I = 144$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = f'\left(\frac{x}{2}\right)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = 2f\left(\frac{x}{2}\right) \end{cases}.$$

Khi đó

$$I = \int_0^4 xf'\left(\frac{x}{2}\right)dx = 2xf\left(\frac{x}{2}\right) \Big|_0^4 - 2 \int_0^4 f\left(\frac{x}{2}\right)dx = 128 - 2I_1 \text{ với } I_1 = \int_0^4 f\left(\frac{x}{2}\right)dx.$$

$$\text{Đặt } u = \frac{x}{2} \Rightarrow dx = 2du, \text{ khi đó } I_1 = \int_0^4 f\left(\frac{x}{2}\right)dx = 2 \int_0^2 f(u)du = 2 \int_0^2 f(x)dx = 8.$$

$$\text{Vậy } I = 128 - 2I_1 = 128 - 16 = 112.$$

Câu 210. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp hai $f''(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 1]$ thỏa mãn $f(1) = f(0) = 1, f'(0) = 2018$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\int_0^1 f''(x)(1-x)dx = -2018.$

B. $\int_0^1 f''(x)(1-x)dx = -1.$

C. $\int_0^1 f''(x)(1-x)dx = 2018.$

D. $\int_0^1 f''(x)(1-x)dx = 1.$

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$\text{Xét } I = \int_0^1 f''(x)(1-x)dx = \int_0^1 (1-x)d(f'(x))$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = 1-x \\ dv = d(f'(x)) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = -dx \\ v = f'(x) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow I = (1-x)f'(x) \Big|_0^1 + \int_0^1 f'(x)dx = [(1-1)f'(1) - f'(0)] + f(x) \Big|_0^1 = -f'(0) + [f(1) - f(0)] = -2018 + (1-1) = -2018.$$

Câu 211. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục thỏa mãn $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} [f'(x)]^2 dx = \frac{\pi}{4}$ và

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x f(x) dx = \frac{\pi}{4}. \text{ Tính } f(2018\pi).$$

A. $-1.$

B. $0.$

C. $\frac{1}{2}.$

D. $1.$

Hướng dẫn giải

Chọn D

Bằng công thức tích phân từng phần ta có

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x f(x) dx = \left[\sin x f(x) \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x f'(x) dx. \text{ Suy ra } \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x f'(x) dx = -\frac{\pi}{4}.$$

$$\text{Hơn nữa ta tính được } \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^2 x dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \left[\frac{2x - \sin 2x}{4} \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{\pi}{4}.$$

$$\text{Do đó: } \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f'(x)]^2 dx + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x f'(x) dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = 0 \Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f'(x) + \sin x]^2 dx = 0.$$

Suy ra $f'(x) = -\sin x$. Do đó $f(x) = \cos x + C$. Vì $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ nên $C = 0$.

Ta được $f(x) = \cos x \Rightarrow f(2018\pi) = \cos(2018\pi) = 1$.

Câu 212. Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương, có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0; 2]$. Biết $f(0) = 1$

và $f(x) \cdot f(2-x) = e^{2x^2-4x}$, với mọi $x \in [0; 2]$. Tính tích phân $I = \int_0^2 \frac{(x^3 - 3x^2) f'(x)}{f(x)} dx$.

A. $I = -\frac{16}{3}$.

B. $I = -\frac{16}{5}$.

C. $I = -\frac{14}{3}$.

D. $I = -\frac{32}{5}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Cách 1: Theo giả thiết, ta có $f(x) \cdot f(2-x) = e^{2x^2-4x}$ và $f(x)$ nhận giá trị dương nên

$$\ln[f(x) \cdot f(2-x)] = \ln e^{2x^2-4x} \Leftrightarrow \ln f(x) + \ln f(2-x) = 2x^2 - 4x.$$

Mặt khác, với $x = 0$, ta có $f(0) \cdot f(2) = 1$ và $f(0) = 1$ nên $f(2) = 1$.

$$\text{Xét } I = \int_0^2 \frac{(x^3 - 3x^2) f'(x)}{f(x)} dx, \text{ ta có } I = \int_0^2 (x^3 - 3x^2) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} dx$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x^3 - 3x^2 \\ dv = \frac{f'(x)}{f(x)} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = (3x^2 - 6x) dx \\ v = \ln f(x) \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } I = \left[(x^3 - 3x^2) \ln f(x) \right]_0^2 - \int_0^2 (3x^2 - 6x) \cdot \ln f(x) dx = - \int_0^2 (3x^2 - 6x) \cdot \ln f(x) dx \quad (1).$$

Đến đây, đổi biến $x = 2 - t \Rightarrow dx = -dt$. Khi $x = 0 \rightarrow t = 2$ và $x = 2 \rightarrow t = 0$.

$$\text{Ta có } I = - \int_2^0 (3t^2 - 6t) \cdot \ln f(2-t) (-dt) = - \int_0^2 (3t^2 - 6t) \cdot \ln f(2-t) dt$$

$$\text{Vì tích phân không phụ thuộc vào biến nên } I = - \int_0^2 (3x^2 - 6x) \cdot \ln f(2-x) dx \quad (2).$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta cộng vế theo vế, ta được } 2I = - \int_0^2 (3x^2 - 6x) \cdot [\ln f(x) + \ln f(2-x)] dx$$

$$\text{Hay } I = - \frac{1}{2} \int_0^2 (3x^2 - 6x) \cdot (2x^2 - 4x) dx = - \frac{16}{5}.$$

Cách 2 (Trắc nghiệm)

Chọn hàm số $f(x) = e^{x^2-2x}$, khi đó:

$$I = \int_0^2 \frac{(x^3 - 3x^2) \cdot e^{x^2-2x} \cdot (2x-2)}{e^{x^2-2x}} dx = \int_0^2 (x^3 - 3x^2) \cdot (2x-2) dx = -\frac{16}{5}.$$

Câu 213. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0; 1]$ thỏa mãn $f(1) = 0$ và

$$\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \int_0^1 (x+1) e^x f(x) dx = \frac{e^2 - 1}{4}. \text{ Tính tích phân } I = \int_0^1 f(x) dx.$$

A. $I = 2 - e$.

B. $I = e - 2$.

C. $I = \frac{e}{2}$.

D. $I = \frac{e-1}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Xét $A = \int_0^1 (x+1)e^x f(x) dx$. Đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = (x+1)e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = xe^x \end{cases}$

Suy ra $A = xe^x f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 xe^x f'(x) dx = - \int_0^1 xe^x f'(x) dx \Rightarrow \int_0^1 xe^x f'(x) dx = \frac{1-e^2}{4}$

Xét $\int_0^1 x^2 e^{2x} dx = e^{2x} \left(\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \right) \Big|_0^1 = \frac{e^2 - 1}{4}$.

Ta có $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx + 2 \int_0^1 xe^x f'(x) dx + \int_0^1 x^2 e^{2x} dx = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 (f'(x) + xe^x)^2 dx = 0$

Suy ra $f'(x) + xe^x = 0 \quad \forall x \in [0;1]$ (do $(f'(x) + xe^x)^2 \geq 0 \quad \forall x \in [0;1]$)

$\Rightarrow f'(x) = -xe^x \Rightarrow f(x) = (1-x)e^x + C$

Do $f(1) = 0$ nên $f(x) = (1-x)e^x$

Vậy $I = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (1-x)e^x dx = (2-x)e^x \Big|_0^1 = e - 2$.

Câu 214. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1;2]$ thỏa mãn $\int_1^2 (x-1)^2 f(x) dx = -\frac{1}{3}$,

$f(2) = 0$ và $\int_1^2 [f'(x)]^2 dx = 7$. Tính tích phân $I = \int_1^2 f(x) dx$.

A. $I = \frac{7}{5}$.

B. $I = -\frac{7}{5}$.

C. $I = -\frac{7}{20}$.

D. $I = \frac{7}{20}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Đặt $u = f(x) \Rightarrow du = f'(x) dx, dv = (x-1)^2 dx \Rightarrow v = \frac{(x-1)^3}{3}$

Ta có $-\frac{1}{3} = \int_1^2 (x-1)^2 f(x) dx = \frac{(x-1)^3}{3} \cdot f(x) \Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{(x-1)^3}{3} f'(x) dx$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{3} = -\frac{1}{3} \int_1^2 (x-1)^3 f'(x) dx \Leftrightarrow \int_1^2 (x-1)^3 f'(x) dx = 1 \Rightarrow -\int_1^2 2.7(x-1)^3 f'(x) dx = -14$

Tính được $\int_1^2 49(x-1)^6 dx = 7 \Rightarrow \int_1^2 [f'(x)]^2 dx - \int_1^2 2.7(x-1)^3 f'(x) dx + \int_1^2 49(x-1)^6 dx = 0$

$\Rightarrow \int_1^2 [7(x-1)^3 - f'(x)]^2 dx = 0 \Rightarrow f'(x) = 7(x-1)^3 \Rightarrow f(x) = \frac{7(x-1)^4}{4} + C$.

Do $f(2) = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{7(x-1)^4}{4} - \frac{7}{4}$.

Vậy $I = \int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 \left[\frac{7(x-1)^4}{4} - \frac{7}{4} \right] dx = -\frac{7}{5}$.

Câu 215. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=1$,

$\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 9$ và $\int_0^1 x^3 f(x) dx = \frac{1}{2}$. Tích phân $\int_0^1 f(x) dx$ bằng

A. $\frac{2}{3}$.

B. $-\frac{5}{2}$.

C. $\frac{7}{4}$.

D. $\frac{6}{5}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có: $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 9$ (1)

- Tính $\int_0^1 x^3 f(x) dx = \frac{1}{2}$.

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = f(x) \\ dv = x^3 \cdot dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = \frac{x^4}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \int_0^1 x^3 f(x) dx = \left(\frac{x^4}{4} \cdot f(x) \right) \Big|_0^1 - \frac{1}{4} \int_0^1 x^4 \cdot f'(x) dx = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \int_0^1 x^4 \cdot f'(x) dx$$

$$\Rightarrow \int_0^1 x^4 \cdot f'(x) dx = -1 \Rightarrow 18 \int_0^1 x^4 \cdot f'(x) dx = -18 \quad (2)$$

$$\text{- Lại có: } \int_0^1 x^8 dx = \frac{x^9}{9} \Big|_0^1 = \frac{1}{9} \Rightarrow 81 \int_0^1 x^8 dx = 9 \quad (3)$$

- Cộng vế với vế các đẳng thức (1), (2) và (3) ta được:

$$\int_0^1 [f'(x)]^2 + 18x^4 \cdot f'(x) + 81x^8 dx = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 [f'(x) + 9x^4]^2 dx = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 [f'(x) + 9x^4] dx = 0$$

Hay thể tích khối tròn xoay sinh bởi hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f'(x) + 9x^4$, trục hoành Ox , các đường thẳng $x = 0$, $x = 1$ khi quay quanh Ox bằng 0

$$\Rightarrow f'(x) + 9x^4 = 0 \Rightarrow f'(x) = -9x^4 \Rightarrow f(x) = \int f'(x) \cdot dx = -\frac{9}{5}x^5 + C.$$

$$\text{Lại do } f(1)=1 \Rightarrow C = \frac{14}{5} \Rightarrow f(x) = -\frac{9}{5}x^5 + \frac{14}{5}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \left(-\frac{9}{5}x^5 + \frac{14}{5} \right) dx = \left(-\frac{3}{10}x^6 + \frac{14}{5}x \right) \Big|_0^1 = \frac{5}{2}.$$

Câu 216. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ và $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$. Biết

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f^2(x) dx = \frac{\pi}{8}, \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} f'(x) \sin 2x dx = -\frac{\pi}{4}. \text{ Tính tích phân } I = \int_0^{\frac{\pi}{8}} f(2x) dx$$

A. $I = 1$.

B. $I = \frac{1}{2}$.

C. $I = 2$.

D. $I = \frac{1}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Tính $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f'(x) \sin 2x dx = -\frac{\pi}{4}$. Đặt $\begin{cases} \sin 2x = u \\ f'(x) dx = dv \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 \cos 2x dx = du \\ f(x) = v \end{cases}$, khi đó

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{4}} f'(x) \sin 2x dx &= \sin 2x \cdot f(x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) \cos 2x dx = \sin \frac{\pi}{2} \cdot f\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin 0 \cdot f(0) - 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) \cos 2x dx \\ &= -2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) \cos 2x dx. \end{aligned}$$

Theo đề bài ta có $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f'(x) \sin 2x dx = -\frac{\pi}{4} \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) \cos 2x dx = \frac{\pi}{8}$.

Mặt khác ta lại có $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 2x dx = \frac{\pi}{8}$.

Do $\int_0^{\frac{\pi}{4}} [f(x) - \cos 2x]^2 dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} [f^2(x) - 2f(x) \cdot \cos 2x + \cos^2 2x] dx = \left(\frac{\pi}{8} - 2 \cdot \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{8} \right) = 0$ nên $f(x) = \cos 2x$.

Ta có $I = \int_0^{\frac{\pi}{8}} \cos 4x dx = \frac{1}{4} \sin 4x \Big|_0^{\frac{\pi}{8}} = \frac{1}{4}$.

Câu 217. . Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ và $f(0) + f(1) = 0$. Biết

$\int_0^1 f^2(x) dx = \frac{1}{2}$, $\int_0^1 f'(x) \cos(\pi x) dx = \frac{\pi}{2}$. Tính $\int_0^1 f(x) dx$.

- A. π . B. $\frac{1}{\pi}$. **C. $-\frac{2}{\pi}$.** D. $\frac{3\pi}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Đặt $\begin{cases} u = \cos(\pi x) \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -\pi \sin(\pi x) dx \\ v = f(x) \end{cases}$.

Khi đó: $\int_0^1 f'(x) \cos(\pi x) dx = \cos(\pi x) f(x) \Big|_0^1 + \pi \int_0^1 f(x) \sin(\pi x) dx$

$= -(f(1) + f(0)) + \pi \int_0^1 f(x) \sin(\pi x) dx = \pi \int_0^1 f(x) \sin(\pi x) dx$

$\Rightarrow \int_0^1 f(x) \sin(\pi x) dx = \frac{1}{2}$.

Cách 1: Ta có

Tìm k sao cho $\int_0^1 [f(x) - k \sin(\pi x)]^2 dx = 0$

Ta có: $\int_0^1 [f(x) - k \sin(\pi x)]^2 dx = \int_0^1 f^2(x) dx - 2k \int_0^1 f(x) \sin(\pi x) dx + k^2 \int_0^1 \sin^2(\pi x) dx$

$$= \frac{1}{2} - k + \frac{k^2}{2} = 0 \Leftrightarrow k = 1.$$

Do đó $\int_0^1 [f(x) - \sin(\pi x)]^2 dx = 0 \Rightarrow f(x) = \sin(\pi x)$ (do $[f(x) - \sin(\pi x)]^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$).

$$\text{Vậy } \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \sin(\pi x) dx = \frac{2}{\pi}.$$

Cách 2: Sử dụng BĐT Holder.

$$\left[\int_a^b f(x)g(x) dx \right]^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx \cdot \int_a^b g^2(x) dx.$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow f(x) = k \cdot g(x), \forall x \in [a; b]$.

$$\text{Áp dụng vào bài ta có } \frac{1}{4} = \left[\int_0^1 f(x) \sin(\pi x) dx \right]^2 \leq \int_0^1 f^2(x) dx \cdot \int_0^1 \sin^2(\pi x) dx = \frac{1}{4},$$

suy ra $f(x) = k \cdot \sin(\pi x), k \in \mathbb{R}$.

$$\text{Mà } \int_0^1 f(x) \sin(\pi x) dx = \frac{1}{2} \Leftrightarrow k \int_0^1 \sin^2(\pi x) dx = \frac{1}{2} \Leftrightarrow k = 1 \Rightarrow f(x) = \sin(\pi x)$$

$$\text{Vậy } \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \sin(\pi x) dx = \frac{2}{\pi}.$$

Câu 218. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 1]$ thỏa $f(1) = 0$,

$$\int_0^1 (f'(x))^2 dx = \frac{\pi^2}{8} \text{ và } \int_0^1 \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) f(x) dx = \frac{1}{2}. \text{ Tính } \int_0^1 f(x) dx.$$

A. $\frac{\pi}{2}.$

B. $\pi.$

C. $\frac{1}{\pi}.$

D. $\frac{2}{\pi}.$

Hướng dẫn giải

Chọn D

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = f(x) \\ dv = \cos \frac{\pi x}{2} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = \frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi x}{2} \end{cases}$$

$$\text{Do đó } \int_0^1 \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) f(x) dx = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi x}{2} f(x) \Big|_0^1 - \frac{2}{\pi} \int_0^1 \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) f'(x) dx = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \int_0^1 \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) f'(x) dx = -\frac{\pi}{4}.$$

$$\text{Lại có: } \int_0^1 \sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow I = \int_0^1 \left(-\frac{2}{\pi} f'(x) \right)^2 dx - 2 \left(-\frac{2}{\pi} \right) \int_0^1 \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) f'(x) dx + \int_0^1 \sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(-\frac{2}{\pi} f'(x) - \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \right)^2 dx = \frac{4}{\pi^2} \frac{\pi^2}{8} - \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} = 0$$

$$\text{Vì } \left(-\frac{2}{\pi} f'(x) - \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \right)^2 \geq 0 \text{ trên đoạn } [0; 1] \text{ nên}$$

$$\int_0^1 \left(-\frac{2}{\pi} f'(x) - \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \right)^2 dx = 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{\pi} f'(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \Leftrightarrow f'(x) = -\frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right).$$

Suy ra $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + C$ mà $f(1) = 0$ do đó $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$.

Vậy $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx = \frac{2}{\pi}$.

Câu 219. Xét hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện $f(1) = 1$ và

$f(2) = 4$. Tính $J = \int_1^2 \left(\frac{f'(x)+2}{x} - \frac{f(x)+1}{x^2} \right) dx$.

A. $J = 1 + \ln 4$. **B.** $J = 4 - \ln 2$. **C.** $J = \ln 2 - \frac{1}{2}$. **D.** $J = \frac{1}{2} + \ln 4$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Cách 1: Ta có $J = \int_1^2 \left(\frac{f'(x)+2}{x} - \frac{f(x)+1}{x^2} \right) dx = \int_1^2 \frac{f'(x)}{x} dx - \int_1^2 \frac{f(x)}{x^2} dx + \int_1^2 \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx$.

Đặt $\begin{cases} u = \frac{1}{x} \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -\frac{1}{x^2} dx \\ v = f(x) \end{cases}$

$$J = \int_1^2 \left(\frac{f'(x)+2}{x} - \frac{f(x)+1}{x^2} \right) dx = \frac{1}{x} \cdot f(x) \Big|_1^2 + \int_1^2 \frac{f(x)}{x^2} dx - \int_1^2 \frac{f(x)}{x^2} dx + \int_1^2 \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx$$

$$= \frac{1}{2} f(2) - f(1) + \left(2 \ln x + \frac{1}{x} \right) \Big|_1^2 = \frac{1}{2} + \ln 4.$$

Cách 2: $J = \int_1^2 \left(\frac{f'(x)+2}{x} - \frac{f(x)+1}{x^2} \right) dx = \int_1^2 \left(\frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx$

$$= \int_1^2 \left(\frac{f(x)}{x} \right)' dx + \int_1^2 \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx = \left(\frac{f(x)}{x} + 2 \ln|x| + \frac{1}{x} \right) \Big|_1^2 = \frac{1}{2} + \ln 4.$$

Cách 3: (Trắc nghiệm)

Chọn hàm số $f(x) = ax + b$. Vì $\begin{cases} f(1) = 1 \\ f(2) = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -2 \end{cases}$, suy ra $f(x) = 3x - 2$.

Vậy $J = \int_1^2 \left(\frac{5}{x} - \frac{3x-1}{x^2} \right) dx = \left(2 \ln|x| - \frac{1}{x} \right) \Big|_1^2 = \ln 4 + \frac{1}{2}$.

Câu 220. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn

$\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \int_0^1 (x+1)e^x f(x) dx = \frac{e^2-1}{4}$ và $f(1) = 0$. Tính $\int_0^1 f(x) dx$

A. $\frac{e-1}{2}$. **B.** $\frac{e^2}{4}$. **C.** $e-2$. **D.** $\frac{e}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

- Tính: $I = \int_0^1 (x+1)e^x f(x) dx = \int_0^1 xe^x f(x) dx + \int_0^1 e^x f(x) dx = J + K$.

Tính $K = \int_0^1 e^x f(x) dx$

Đặt $\begin{cases} u = e^x f(x) \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = [e^x f(x) + e^x f'(x)] dx \\ v = x \end{cases}$

$$\Rightarrow K = (xe^x f(x)) \Big|_0^1 - \int_0^1 [xe^x f(x) + xe^x f'(x)] dx = -\int_0^1 xe^x f(x) dx - \int_0^1 xe^x f'(x) dx \quad (\text{do } f(1) = 0)$$

$$\Rightarrow K = -J - \int_0^1 xe^x f'(x) dx \Rightarrow I = J + K = -\int_0^1 xe^x f'(x) dx.$$

- Kết hợp giả thiết ta được:

$$\begin{cases} \int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \frac{e^2 - 1}{4} \\ -\int_0^1 xe^x f'(x) dx = \frac{e^2 - 1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \frac{e^2 - 1}{4} \quad (1) \\ 2 \int_0^1 xe^x f'(x) dx = -\frac{e^2 - 1}{2} \quad (2) \end{cases}$$

- Mặt khác, ta tính được: $\int_0^1 x^2 e^{2x} dx = \frac{e^2 - 1}{4} \quad (3).$

- Cộng vế với vế các đẳng thức (1), (2), (3) ta được:

$$\int_0^1 ([f'(x)]^2 + 2xe^x f'(x) + x^2 e^{2x}) dx = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 (f'(x) + xe^x)^2 dx = 0 \Leftrightarrow \pi \int_0^1 (f'(x) + xe^x)^2 dx = 0$$

hay thể tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f'(x) + xe^x$, trục Ox , các đường thẳng $x = 0$, $x = 1$ khi quay quanh trục Ox bằng 0

$$\Rightarrow f'(x) + xe^x = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -xe^x$$

$$\Rightarrow f(x) = -\int xe^x dx = (1-x)e^x + C.$$

- Lại do $f(1) = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) = (1-x)e^x$

$$\Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (1-x)e^x dx = ((1-x)e^x) \Big|_0^1 + \int_0^1 e^x dx = -1 + e^x \Big|_0^1 = e - 2.$$

Vậy $\int_0^1 f(x) dx = e - 2.$

Câu 221. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1) = 0$,

$$\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 7 \quad \text{và} \quad \int_0^1 x^2 f(x) dx = \frac{1}{3}. \quad \text{Tích phân } \int_0^1 f(x) dx \text{ bằng}$$

A. $-\frac{7}{5}.$

B. 1.

C. $\frac{7}{4}.$

D. 4.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Cách 1: Tính: $\int_0^1 x^2 f(x) dx$. Đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = x^2 dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = \frac{x^3}{3} \end{cases}.$

Ta có: $\int_0^1 x^2 f(x) dx = \frac{x^3 f(x)}{3} \Big|_0^1 - \frac{1}{3} \int_0^1 x^3 \cdot f'(x) dx$

$$= \frac{1 \cdot f(1) - 0 \cdot f(0)}{3} - \frac{1}{3} \int_0^1 x^3 \cdot f'(x) dx = -\frac{1}{3} \int_0^1 x^3 \cdot f'(x) dx.$$

$$\text{Mà } \int_0^1 x^2 f(x) dx = \frac{1}{3} \Rightarrow -\frac{1}{3} \int_0^1 x^3 \cdot f'(x) dx = \frac{1}{3} \Rightarrow \int_0^1 x^3 \cdot f'(x) dx = -1.$$

$$\text{Ta có } \int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 7 \quad (1).$$

$$\int_0^1 x^6 dx = \frac{x^7}{7} \Big|_0^1 = \frac{1}{7} \Rightarrow \int_0^1 49x^6 dx = \frac{1}{7} \cdot 49 = 7 \quad (2).$$

$$\int_0^1 x^3 \cdot f'(x) dx = -1 \Rightarrow \int_0^1 14x^3 \cdot f'(x) dx = -14 \quad (3).$$

$$\text{Cộng hai vế (1) (2) và (3) suy ra } \int_0^1 [f'(x)]^2 dx + \int_0^1 49x^6 dx + \int_0^1 14x^3 \cdot f'(x) dx = 7 + 7 - 14 = 0.$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \left\{ [f'(x)]^2 + 14x^3 f'(x) + 49x^6 \right\} dx = 0 \Rightarrow \int_0^1 [f'(x) + 7x^3]^2 dx = 0.$$

$$\text{Do } [f'(x) + 7x^3]^2 \geq 0 \Rightarrow \int_0^1 [f'(x) + 7x^3]^2 dx \geq 0. \text{ Mà } \int_0^1 [f'(x) + 7x^3]^2 dx = 0 \Rightarrow f'(x) = -7x^3.$$

$$f(x) = -\frac{7x^4}{4} + C. \text{ Mà } f(1) = 0 \Rightarrow -\frac{7}{4} + C = 0 \Rightarrow C = \frac{7}{4}.$$

$$\text{Do đó } f(x) = -\frac{7x^4}{4} + \frac{7}{4}.$$

$$\text{Vậy } \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \left(-\frac{7x^4}{4} + \frac{7}{4} \right) dx = \left(-\frac{7x^5}{20} + \frac{7}{4}x \right) \Big|_0^1 = \frac{7}{5}.$$

$$\textbf{Cách 2:} \text{ Tương tự như trên ta có: } \int_0^1 x^3 \cdot f'(x) dx = -1$$

Áp dụng BĐT Cauchy-Schwarz, ta có:

$$7 = 7 \left(\int_0^1 x^3 f'(x) dx \right)^2 \leq 7 \left(\int_0^1 (x^3)^2 dx \right) \cdot \left(\int_0^1 [f'(x)]^2 dx \right) = 7 \cdot \frac{1}{7} \cdot \int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \int_0^1 [f'(x)]^2 dx$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $f'(x) = ax^3$, với $a \in \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } \int_0^1 x^3 \cdot f'(x) dx = -1 \Rightarrow \int_0^1 x^3 \cdot ax^3 dx = -1 \Rightarrow \frac{ax^7}{7} \Big|_0^1 = -1 \Rightarrow a = -7.$$

$$\text{Suy ra } f'(x) = -7x^3 \Rightarrow f(x) = -\frac{7x^4}{4} + C, \text{ mà } f(1) = 0 \text{ nên } C = \frac{7}{4}$$

$$\text{Do đó } f(x) = \frac{7}{4}(1 - x^4) \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Vậy } \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \left(-\frac{7x^4}{4} + \frac{7}{4} \right) dx = \left(-\frac{7x^5}{20} + \frac{7}{4}x \right) \Big|_0^1 = \frac{7}{5}.$$

Chú ý: Chứng minh bất đẳng thức Cauchy-Schwarz

Cho hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$.

Khi đó, ta có $\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(x)dx\right) \cdot \left(\int_a^b g^2(x)dx\right)$.

Chứng minh:

Trước hết ta có tính chất:

Nếu hàm số $h(x)$ liên tục và không âm trên đoạn $[a; b]$ thì $\int_a^b h(x)dx \geq 0$

Xét tam thức bậc hai $[\lambda f(x) + g(x)]^2 = \lambda^2 f^2(x) + 2\lambda f(x)g(x) + g^2(x) \geq 0$, với mọi $\lambda \in \mathbb{R}$

Lấy tích phân hai vế trên đoạn $[a; b]$ ta được

$$\lambda^2 \int_a^b f^2(x)dx + 2\lambda \int_a^b f(x)g(x)dx + \int_a^b g^2(x)dx \geq 0, \text{ với mọi } \lambda \in \mathbb{R} (*)$$

Coi $(*)$ là tam thức bậc hai theo biến λ nên ta có $\Delta' \leq 0$

$$\Leftrightarrow \left(\int_a^b f^2(x)dx\right)^2 - \left(\int_a^b f^2(x)dx\right) \left(\int_a^b g^2(x)dx\right) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\int_a^b f^2(x)dx\right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(x)dx\right) \left(\int_a^b g^2(x)dx\right) \text{ (đpcm)}$$