SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
THÀNH PHỐ CẦN THƠ

ĐỀ CHÍNH THỨC

KÌ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN HỌC SINH GIỎI THPT
DỰ THI CẤP QUỐC GIA NĂM HỌC 2021-2022
Khóa ngày 16 tháng 11 năm 2021

MÔN: TOÁN HỌC
Thời gian làm bài: 180 phút, không kể thời gian phát đề

Câu 1. (3,0 điểm) Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn điều kiện $a \geq bc^2, b \geq ca^2$ và $c \geq ab^2$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = abc(a - bc^2)(b - ca^2)(c - ab^2)$.

Câu 2. (3,0 điểm) Cho dãy số thực (u_n) được xác định bởi

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = \dfrac{u_{n-1}^2 + 2021}{2u_{n-1}}, \forall n \in \mathbf{N}, n \geq 2. \end{cases}$$

Chứng minh rằng dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Câu 3. (3,0 điểm) Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f\big(f(x) + yz\big) = x + f(y)f(z) \text{ với mọi } x, y, z \in \mathbf{R}.$$

Câu 4. (5,0 điểm) Cho tam giác ABC không là tam giác cân. Đường tròn tâm I nội tiếp tam giác ABC và tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Gọi P là hình chiếu của D lên EF và M là trung điểm của BC. Hai tia AP và IP cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC lần lượt tại G và Q. Chứng minh rằng

4.1. Điểm Q thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF.

4.2. Đường thẳng GD đi qua điểm chính giữa cung $\overset{\frown}{BC}$ chứa A.

4.3. Điểm D là tâm đường tròn nội tiếp tam giác QGM.

Câu 5. (3,0 điểm) Cho a,b,c là các số nguyên dương. Chứng minh rằng nếu $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{c} + \dfrac{c}{a}$ là số nguyên thì abc là lập phương của một số nguyên.

Câu 6. (3,0 điểm) Một công ty xây dựng đang lên kế hoạch thiết kế một khu phức hợp gồm tổ hợp 7 khu tiện ích hạ tầng tách biệt nhau (khu biệt thự, khu chung cư, trường học, trung tâm thương mại, bệnh viện, trung tâm hành chính và công viên). Ngoài việc tập trung xây dựng hệ thống hạ tầng, công ty này còn đặt ra mục tiêu là tăng cường chất lượng không khí trong khu phức hợp bằng cách xây dựng thêm các lối đi trồng nhiều cây xanh. Nếu xem mỗi khu tiện ích là một điểm trên bảng thiết kế thì người ta có thể thiết kế được nhiều nhất bao nhiêu lối đi với yêu cầu mỗi lối đi là một đường tròn đi qua đúng 4 trong 7 điểm đó.

----------HẾT----------