XÁC ĐỊNH TÂM, BÁN KÍNH, DIỆN TÍCH VÀ THỂ TÍCH CỦA MẶT CẦU

KIẾN THỨC CẦN NHỚ:

- **Phương trình mặt cầu dạng chính tắc:**

Cho mặt cầu có tâm $I\left(a;b;c\right)$, bán kính R. Khi đó phương trình chính tắc của mặt cầu là

$\left(S\right):\left(x-a\right)^2+\left(y-b\right)^2+\left(z-c\right)^2=R^2$.

- **Phương trình mặt cầu dạng khai triển là $\left(S\right):x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$.**

Khi đó mặt cầu có có tâm $I\left(a;b;c\right)$, bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$ $\left(a^2+b^2+c^2-d>0\right)$.

BÀI TẬP MẪU

(ĐỀ MINH HỌA BDG 2019-2020) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu: $\left(S\right):\left(x+1\right)^2+\left(y-2\right)^2+\left(z-1\right)^2=9$. Tìm tọa độ tâm I và tính bán kính R của $\left(S\right)$.

A. $I\left(-1;2;1\right)$ và $R=3$ **B.** $I\left(1;-2;-1\right)$ và $R=3$

C. $I\left(-1;2;1\right)$ và $R=9$ **D.** $I\left(1;-2;-1\right)$ và $R=9$

Phân tích hướng dẫn giải

1. DẠNG TOÁN: Đây là dạng toán sử dụng tính chất để xác định tâm và bán kính của mặt cầu.

2. HƯỚNG GIẢI:

B1: Dựa trên phương trình mặt cầu dạng chính tắc tìm tâm và bán kính của mặt cầu.

B2: Mặt cầu $\left(S\right):\left(x-a\right)^2+\left(y-b\right)^2+\left(z-c\right)^2=R^2$ có tâm $I\left(a;b;c\right)$ và bán kính R.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn B

Mặt cầu $\left(S\right):\left(x+1\right)^2+\left(y-2\right)^2+\left(z-1\right)^2=9$ có tâm $I\left(-1;2;1\right)$ và bán kính $R=3$.

Bài tập tương tự:

Câu 14.1: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu có phương trình $\left(x-1\right)^2+\left(y+3\right)^2+z^2=9$. Tìm tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu đó

A. $I\left(-1;3;0\right)$; $R=3$. **B.** $I\left(1;-3;0\right)$; $R=9$. **C.** $I\left(1;-3;0\right)$; $R=3$. **D.** $I\left(-1;3;0\right)$; $R=9$.

Lời giải

Chọn C

Mặt cầu đã cho có tâm $I\left(1;-3;0\right)$ và bán kính $R=3$.

Câu 14.2: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S): $x^2+y^2+z^2-6x+4y-8z+4=0$. Tìm tọa độ tâm I và tính bán kính R của mặt cầu (S).

A. $I(3;-2;4)$, $R=25$. **B.** $I(-3;2;-4)$, $R=5$.

C. $I(3;-2;4)$, $R=5$. **D.** $I(-3;2;-4)$, $R=25$.

Lời giải

Chọn C

Mặt cầu (S) có tâm là $I(3;-2;4)$.

Bán kính của mặt cầu (S) là $R=\sqrt{(3)^2+(-2)^2+(4)^2-4}=5$.

Câu 14.3: Trong không gian $Oxyz$, diện tích của mặt cầu (S): $3x^2+3y^2+3z^2+6x+12y+18z-3=0$ bằng

A. 20π. **B.** 40π. **C.** 60π. **D.** 100π.

Lời giải

Chọn C

Ta có $3x^2+3y^2+3z^2+6x+12y+18z-3=0 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+2x+4y-6z-1=0$.

Mặt cầu (S) có tâm là $I(-1;-2;3)$.

Bán kính của mặt cầu (S) là $R=\sqrt{(-1)^2+(-2)^2+(3)^2+1}=\sqrt{15}$.

Diện tích mặt cầu $V=4\pi R^2=60\pi$.

Câu 14.4: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z+5=0$. Tính diện tích mặt cầu (S).

A. 42π. **B.** 36π. **C.** 9π. **D.** 12π.

Lời giải

Chọn B

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$ và bán kính $R=\sqrt{1^2+2^2+3^2-5}=3$.

Diện tích mặt cầu (S) là: $S=4\pi R^2=4\pi 3^2=36\pi$.

Câu 14.5: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y+2)^2+z^2=9$. Mặt cầu (S) có thể tích bằng

A. $V=16\pi$. **B.** $V=36\pi$. **C.** $V=14\pi$. **D.** $V=\frac{4}{36}\pi$.

Lời giải

Chọn B

Mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y+2)^2+z^2=9$ có tâm là $(1;-2;0)$, bán kính $R=3$.

Thể tích mặt cầu $V=\frac{4}{3}\pi R^3=36\pi$.

Bài tập tương tự và phát triển:

Câu 14.6: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $I(1;0;2)$ và đường thẳng $d:\frac{x-1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{1}$. Gọi (S) là mặt cầu có tâm I, tiếp xúc với đường thẳng d. Bán kính của (S) bằng

A. $\frac{2\sqrt{5}}{3}$. **B.** $\frac{5}{3}$. **C.** $\frac{4\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{30}}{3}$.

Phân tích hướng dẫn giải

1. DẠNG TOÁN: Đây là dạng toán sử dụng tính chất để xác định tâm và bán kính của mặt cầu.

2. HƯỚNG GIẢI:

B1: Dựa vào vị trí tương đối của đường thẳng và mặt cầu ta tìm được bán kính của mặt cầu $R=d(I;d)$.

B2: Dựa vào công thức tính khoảng cách từ một điểm dến đường thẳng ta tìm bán kính

$R=\frac{\left|\left[\overrightarrow{MI};\vec{u}\right]\right|}{|\vec{u}|}=\frac{\sqrt{30}}{3}$.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn D

d qua $M(1;0;0)$ và có một vectơ chỉ phương $\vec{u}(2;-1;1)$

Bán kính mặt cầu bằng khoảng cách từ I đến d nên ta có: $R=\frac{\left|\left[\overrightarrow{MI};\vec{u}\right]\right|}{|\vec{u}|}=\frac{\sqrt{30}}{3}$.

Câu 14.7: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(1;-2;3)$. Bán kính mặt cầu tâm I, tiếp xúc với trục Oy là

A. $\sqrt{10}$. **B.** $\sqrt{5}$. **C.** 5. **D.** 10.

Lời giải

Chọn A

Gọi M là hình chiếu vuông góc của tâm $I(1;-2;3)$ lên trục Oy, suy ra $M(0;-2;0)$.

Vì mặt cầu tiếp xúc với trục Oy nên có bán kính $R=IM=\sqrt{10}$.

Câu 14.8: Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu có tâm $I(1;0;-2)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(\alpha):x+2y-2z+4=0$ có đường kính là

A. 3. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 2.

Phân tích hướng dẫn giải

1. DẠNG TOÁN: Đây là dạng toán sử dụng tính chất để xác định tâm và bán kính của mặt cầu.

2. HƯỚNG GIẢI:

B1: Dựa vào vị trí tương đối của mặt phẳng và mặt cầu ta tìm được bán kính của mặt cầu $R=d(I;(\alpha))$.

B2: Dựa vào công thức tính khoảng cách từ một điểm đến mặt phẳng ta tìm bán kính

$R=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn C

Ta có $R=d\left(I,(\alpha)\right)=\dfrac{|1+4+4|}{3}=3$.

Đường kính là $2R=6$.

Câu 14.9: Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu có tâm $A(2;1;1)$ và tiếp xúc với mặt phẳng (Oxy) có bán kính là

A. 5. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Gọi M là hình chiếu vuông góc của tâm $A(2;1;1)$ lên mặt phẳng (Oxy), suy ra $M(2;1;0)$.

Vì mặt cầu tiếp xúc với mặt phẳng (Oxy) nên có bán kính $R=AM=1$.

Câu 14.10: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x-2y+2z-2=0$ và điểm $I(-1;2;-1)$. Bán kính mặt cầu (S) có tâm I và cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính bằng 5 là

A. $\sqrt{34}$. **B.** $\sqrt{5}$. **C.** 5. **D.** 10.

Phân tích hướng dẫn giải

1. DẠNG TOÁN: Đây là dạng toán sử dụng tính chất để xác định tâm và bán kính của mặt cầu.

2. HƯỚNG GIẢI:

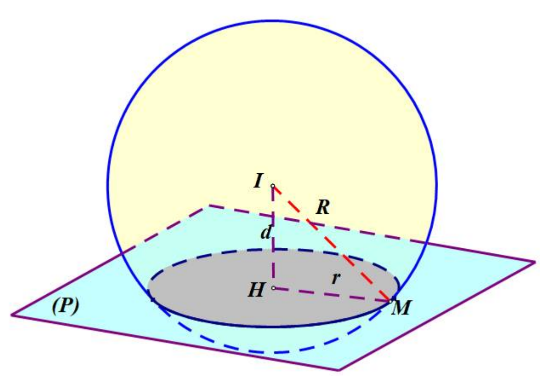
B1: Dựa vào vị trí tương đối của mặt phẳng và mặt cầu ta tìm được bán kính của mặt cầu $R=d\left(I;(\alpha)\right)$.

B2: Dựa vào công thức $R=\sqrt{d^2+r^2}$ ta tìm bán kính của mặt cầu, với d là khoảng cách từ tâm của mặt cầu đến mặt phẳng cắt, r là bán kính của đường tròn giao tuyến của mặt phẳng và mặt cầu.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn A



Ta có $d=d\left(I,(P)\right)=\dfrac{|-1-4-2-2|}{3}=3$.

+) $R^2 = d^2 + r^2 = 9 + 25 = 34$.

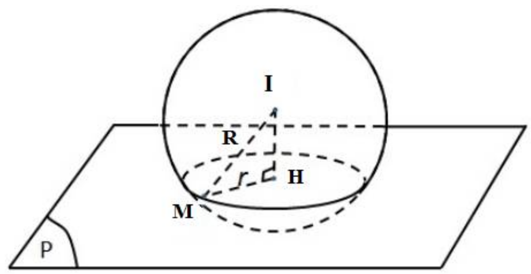
Bán kính $R = \sqrt{34}$.

Câu 14.11: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(-2;3;4)$ cắt mặt phẳng tọa độ (Oxz) theo một hình tròn giao tuyến có diện tích bằng 16π có thể tích bằng

A. 80π. **B.** $\frac{500}{3}\pi$. **C.** 100π. **D.** 25π.

Lời giải

Chọn B



Gọi R, r lần lượt là bán kính mặt cầu và bán kính đường tròn giao tuyến.

Hình tròn giao tuyến có diện tích bằng $16\pi \Leftrightarrow \pi r^2 = 16\pi \Leftrightarrow r = 4$.

Khoảng cách từ $I(-2;3;4)$ đến (Oxz) là $h = |y_I| = 3$.

Suy ra $R = \sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{16+9} = 5$.

Thể tích của mặt cầu (S) là $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{500}{3}\pi$.

Câu 14.12: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(-1;2;3)$ cắt mặt phẳng $(\beta): 2x - y + 2z - 8 = 0$ theo một hình tròn giao tuyến có chu vi bằng bằng 8π có diện tích bằng

A. 80π. **B.** 50π. **C.** 100π. **D.** 25π.

Lời giải

Chọn A

Đường tròn giao tuyến có chu vi bằng 8π nên bán kính của nó là $r = 4$.

Khoảng cách từ tâm mặt cầu tới mặt phẳng giao tuyến là $d = d(I,(\beta)) = \frac{|-2-2+6-8|}{\sqrt{2^2+1^1+2^2}} = 2$.

Theo công thức $R^2 = r^2 + d^2 = 20$.

Diện tích của mặt cầu (S) là $S = 4\pi R^2 = 80\pi$.

Câu 14.13: Trong không gian $Oxyz$ cho các mặt phẳng $(P): x - y + 2z + 1 = 0$, $(Q): 2x + y + z - 1 = 0$. Gọi (S) là mặt cầu có tâm thuộc trục hoành, đồng thời (S) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính bằng 2 và (S) cắt mặt phẳng (Q) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính bằng r. Xác định r sao cho chỉ có đúng một mặt cầu (S) thỏa yêu cầu.

A. $r=\sqrt{3}$. **B.** $r=\sqrt{\frac{3}{2}}$. **C.** $r=\sqrt{2}$. **D.** $r=\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi $I(m;0;0)$ là tâm mặt cầu có bán kính R, d_1, d_2 là các khoảng cách từ I đến (P) và (Q). Ta có $d_1=\frac{|m+1|}{\sqrt{6}}$ và $d_2=\frac{|2m-1|}{\sqrt{6}}$.

Theo đề ta có $\sqrt{d_1^2+4}=\sqrt{d_2^2+r^2}$ $\Leftrightarrow \sqrt{\frac{m^2+2m+1}{6}+4}=\sqrt{\frac{4m^2-4m+1}{6}+r^2}$

$.\Leftrightarrow m^2-2m+2r^2-8=0\ (1)$.

Yêu cầu bài toán tương đương phương trình (1) có đúng một nghiệm m $\Leftrightarrow 1-(2r^2-8)=0$

$\Leftrightarrow r^2=\frac{9}{2}\Leftrightarrow r=\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Câu 14.14: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(-1;0;0)$, $B(0;0;2)$, $C(0;-3;0)$. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ là

A. $\frac{\sqrt{14}}{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{14}}{4}$. **C.** $\frac{\sqrt{14}}{2}$. **D.** $\sqrt{14}$.

Phân tích hướng dẫn giải

1. DẠNG TOÁN: Đây là dạng toán xác định tâm và bán kính của mặt cầu đi qua bốn điểm hay ngoại tiếp tứ diện.

2. HƯỚNG GIẢI:

B1: Giả sử mặt cầu có dạng $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ $(*)$.

B2: Thế tọa độ các điểm nằm trên mặt cầu vào phương trình $(*)$ ta giải hệ phương trình tìm a,b,c,d.

B3: Khi đó mặt cầu cần tìm có tâm $I(a,b,c)$, bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn C

Cách 1:

Gọi (S) là mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$.

Phương trình mặt cầu (S) có dạng: $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$.

Vì O, A, B, C thuộc (S) nên ta có: $\begin{cases} d=0 \\ 1+2a+d=0 \\ 4-4c+d=0 \\ 9+6b+d=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\dfrac{1}{2} \\ b=-\dfrac{3}{2} \\ c=1 \\ d=0 \end{cases}$.

Vậy bán kính mặt cầu (S) là $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}=\sqrt{\dfrac{1}{4}+\dfrac{9}{4}+1}=\dfrac{\sqrt{14}}{2}$.

Cách 2: $OABC$ là tứ diện vuông có cạnh $OA=1$, $OB=3$, $OC=2$ có bán kính mặt cầu ngoại tiếp là $R=\dfrac{1}{2}\sqrt{OA^2+OB^2+OC^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{1+9+4}=\dfrac{\sqrt{14}}{2}$.

Câu 14.15: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;2)$, $D(2;2;2)$. Mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ có bán kính là

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. **D.** 3

Lời giải

Chọn B

Gọi $I(a;b;c)$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$. Phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ có dạng (S): $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$, $(a^2+b^2+c^2-d>0)$.

Vì A, B, C, $D\in(S)$ nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 4-4a+d=0 \\ 4-4b+d=0 \\ 4-4c+d=0 \\ 12-4a-4b-4c+d=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d=4a-4 \\ a=b=c \\ 12-12a+4a-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d=4a-4 \\ a=b=c \\ 12-12a+4a-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d=0 \\ a=b=c=1 \end{cases}.$$

Suy ra $I(1;1;1)$, do đó bán kính mặt cầu là $R=IA=\sqrt{3}$.

Câu 14.16: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $H(1;2;-2)$. Mặt phẳng (α) đi qua H và cắt các trục Ox, Oy, Oz tại A, B, C sao cho H là trực tâm tam giác ABC. Bán kính mặt cầu tâm O và tiếp xúc với mặt phẳng (α).

A. $R=1$. **B.** $R=5$. **C.** $R=3$. **D.** $R=7$.

Phân tích hướng dẫn giải

1. DẠNG TOÁN: Đây là dạng toán xác định tâm và bán kính của mặt cầu tiếp xúc với mặt phẳng (α) đi qua H và cắt các trục Ox, Oy, Oz tại A, B, C sao cho H là trực tâm tam giác ABC ..

2. HƯỚNG GIẢI:

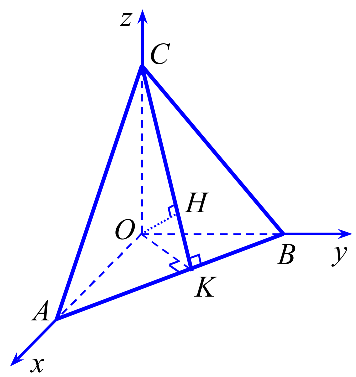
B1: Ta chứng minh $OH\perp(ABC)$.

B2: Khi đó mặt cầu tâm O tiếp xúc mặt phẳng (ABC) có bán kính $R=OH$.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn C



Ta có H là trực tâm tam giác ABC $\Rightarrow OH \perp (ABC)$.

Thật vậy :

$\begin{cases} OC \perp OA \\ OC \perp OB \end{cases} \Rightarrow OC \perp AB$ (1)

Mà $CH \perp AB$ (vì H là trực tâm tam giác ABC) (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AB \perp (OHC)$ $\Rightarrow AB \perp OH$ (*)

Tương tự $BC \perp (OAH)$ $\Rightarrow BC \perp OH$. (**)

Từ (*) và (**) suy ra $OH \perp (ABC)$.

Khi đó mặt cầu tâm O tiếp xúc mặt phẳng (ABC) có bán kính $R = OH = 3$.

Câu 14.17: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;0;-1)$, mặt phẳng $(P): x + y - z - 3 = 0$. Mặt cầu (S) có tâm I nằm trên mặt phẳng (P), đi qua điểm A và gốc tọa độ O sao cho chu vi tam giác OIA bằng $6 + \sqrt{2}$. Diện tích mặt cầu (S) là

A. $S = 16\pi$. **B.** $S = 26\pi$. **C.** $S = 49\pi$. **D.** $S = 36\pi$.

Phân tích hướng dẫn giải

1. DẠNG TOÁN: Đây là dạng toán tính diện tích của mặt cầu có tâm I nằm trên mặt phẳng (P), đi qua điểm A và gốc tọa độ O sao cho chu vi tam giác OIA bằng a.

2. HƯỚNG GIẢI:

B1: Giả sử $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ $(a^2 + b^2 + c^2 - d > 0)$.

B2: Thế tọa độ tâm $I(a;b;c)$ vào phương trình (P) ta được phương trình (1).

B3: Mặt cầu (S) qua A và O nên thế tọa độ điểm A và O vào phương trình (S) ta được phương trình $(2),(3)$.

B4: Chu vi tam giác OIA bằng a nên $OI+OA+AI=a$ (4).

B5: Giải hệ bốn phương trình $(1),(2),(3),(4)$ tìm $a,b,c,d \Rightarrow R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn D

Giả sử $(S): x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ $\left(a^2+b^2+c^2-d>0\right)$.

(S) có $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$ và tâm $I(a;b;c)\in(P)\Rightarrow a+b-c-3=0$ (1).

(S) qua A và O nên $\begin{cases}2-2a+2c+d=0\\ d=0\end{cases}$ $\Rightarrow 1-a+c=0$ (2) $\Rightarrow c=a-1$.

Cộng vế theo vế (1) và (2) ta suy ra $b=2$. Từ đó, suy ra $I(a;2;a-1)$.

Chu vi tam giác OIA bằng $6+\sqrt{2}$ nên $OI+OA+AI=6+\sqrt{2}$.

$\Leftrightarrow 2\sqrt{2a^2-2a+5}=6 \Leftrightarrow a^2-a-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=-1\\ a=2\end{array}\right.$.

+ Với $a=-1 \Rightarrow I(-1;2;-2) \Rightarrow R=3$. Do đó $S=4\pi R^2=36\pi$.

+ Với $a=2 \Rightarrow I(2;2;1) \Rightarrow R=3$. Do đó $S=4\pi R^2=36\pi$.

Câu 14.18: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=9$ tâm I và mặt phẳng $(P): 2x+2y-z+24=0$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của I trên (P). Điểm M thuộc (S) sao cho đoạn MH có độ dài lớn nhất. Tìm tọa độ điểm M.

A. $M(-1;0;4)$. **B.** $M(0;1;2)$. **C.** $M(3;4;2)$. **D.** $M(4;1;2)$.

Phân tích hướng dẫn giải

1. DẠNG TOÁN: Đây là dạng toán tìm điểm M thuộc (S) sao cho đoạn MH có độ dài lớn nhất, với H là hình chiếu vuông góc của I trên (P).

2. HƯỚNG GIẢI:

B1: Tìm tâm và bán kính mặt cầu (S).

B2: Nhận xét Do $d(I;(P))=9>R$ nên mặt phẳng (P) không cắt mặt cầu (S). Do H là hình chiếu của I lên (P) và MH lớn nhất nên M là giao điểm của đường thẳng IH với mặt cầu (P).

B3: Phương trình đường thẳng IH là $\begin{cases}x=1+2t\\ y=2+2t\\ z=3-t\end{cases}$.

B4: Giải hệ gồm phưng trình đường thẳng IH và mặt cầu (S) tìm tọa độ điểm M.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn C

Ta có tâm $I(1;2;3)$ và bán kính $R=3$. Do $d(I;(P))=9>R$ nên mặt phẳng (P) không cắt mặt cầu (S). Do H là hình chiếu của I lên (P) và MH lớn nhất nên M là giao điểm của đường thẳng IH với mặt cầu (P).

$\overrightarrow{IH}=\overrightarrow{n_{(P)}}=(2;2;-1)$.

Phương trình đường thẳng IH là $\begin{cases} x=1+2t \\ y=2+2t \\ z=3-t \end{cases}$.

Giao điểm của IH với (S): $9t^2=9 \Leftrightarrow t=\pm1 \Rightarrow M_1(3;4;2)$ và $M_2(-1;0;4)$.

$M_1H=d(M_1;(P))=12$; $M_2H=d(M_2;(P))=6$.

Vậy điểm cần tìm là $M_1(3;4;2)$.

Câu 14.19: Trong không gian Oxyz cho hai đường thẳng $\Delta_1:\begin{cases} x=1 \\ y=2+t \\ z=-t \end{cases}$, $\Delta_2:\begin{cases} x=4+t \\ y=3-2t \\ z=1-t \end{cases}$. Gọi (S) là mặt cầu có bán kính nhỏ nhất tiếp xúc với cả hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2. Bán kính mặt cầu (S).

A. $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{11}}{2}$. **C.** $\dfrac{3}{2}$. **D.** $\sqrt{2}$.

Phân tích hướng dẫn giải

1. DẠNG TOÁN: Đây là dạng toán tìm bán kính nhỏ nhất của mặt cầu tiếp xúc với cả hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2.

2. HƯỚNG GIẢI:

B1: Giả sử: $A\in\Delta_1 \Rightarrow A(1;2+t;-t)$, $B\in\Delta_2 \Rightarrow B(4+t';3-2t';1-t')$.

B2: Mặt cầu có bán kính nhỏ nhất tiếp xúc với cả hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 có đường kính bằng độ dài đoạn AB nên có bán kính $r=\dfrac{AB}{2}$, với AB là độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn B

Giả sử: $A\in\Delta_1 \Rightarrow A(1;2+t;-t)$, $B\in\Delta_2 \Rightarrow B(4+t';3-2t';1-t')$.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(3+t';1-2t'-t;1-t'+t)$.

VTCP của đường thẳng Δ_1 là $\overrightarrow{u_1}=(0;1;-1)$.

VTCP của đường thẳng Δ_2 là $\overrightarrow{u_2}=(1;-2;-1)$.

Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u_1}=0\\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u_2}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}1-2t'-t-(1-t'+t)=0\\ 3+t'-2(1-2t'-t)-(1-t'+t)=0\end{cases}$.

$\Leftrightarrow \begin{cases}-t'-2t=0\\ 6t'+t=0\end{cases} \Leftrightarrow t=t'=0$.

Suy ra $\overrightarrow{AB}=(3;1;1) \Rightarrow AB=\sqrt{11}$.

Mặt cầu có bán kính nhỏ nhất tiếp xúc với cả hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 có đường kính bằng độ dài đoạn AB nên có bán kính $r=\dfrac{AB}{2}=\dfrac{\sqrt{11}}{2}$.

Câu 14.20: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;0;-1)$, mặt phẳng $(P):x+y-z-3=0$. Mặt cầu (S) có tâm I nằm trên mặt phẳng (P), đi qua điểm A và gốc tọa độ O sao cho chu vi tam giác OIA bằng $6+\sqrt{2}$. Tọa độ tâm I và bán kính R mặt cầu (S) là

A. $I(-2;2;-1), R=3$ hoặc $I(-1;2;-2), R=3$.

B. $I(3;3;3), R=3$ hoặc $I(1;1;-1), R=3$.

C. $I(2;2;1), R=3$ hoặc $I(0;0;-3), R=3$.

D. $I(-1;2;-2), R=3$ hoặc $I(2;2;1), R=3$.

Phân tích hướng dẫn giải

1. DẠNG TOÁN: Đây là dạng toán tìm tâm và bán kính mặt cầu có tâm thuộc một mặt phẳng và đi qua hai điểm cho trước và thỏa mãn thêm điều kiện phụ về chu vi.

2. HƯỚNG GIẢI:

B1: Giả sử $(S): x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ $(a^2+b^2+c^2-d>0)$.

B2: Vì (S) đi qua điểm A và gốc tọa độ O nên thay tọa độ các điểm A, O vào phương trình mặt cầu ta được hệ điều kiện.

B3: Từ hệ điều kiện tìm cách rút b, c theo a và đưa về một ẩn a.

B4: Khai thác giả thiết chu vi tam giác OIA bằng $6+\sqrt{2}$ nên $OI+OA+AI=6+\sqrt{2}$.

B5: Giải phương trình ẩn a tìm được a, từ đó tìm được tọa độ tâm và bán kính của (S).

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn D

Giả sử $(S): x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ $(a^2+b^2+c^2-d>0)$.

(S) có $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$ và tâm $I(a;b;c)\in(P) \Rightarrow a+b-c-3=0$ (1)

(S) qua A và O nên $\begin{cases}2-2a+2c+d=0\\ d=0\end{cases} \Rightarrow 1-a+c=0$ (2) $\Rightarrow c=a-1$.

Cộng vế theo vế (1) và (2) ta suy ra $b=2$. Từ đó, suy ra $I(a;2;a-1)$.

Chu vi tam giác OIA bằng $6+\sqrt{2}$ nên $OI+OA+AI=6+\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{2a^2-2a+5}=6 \Leftrightarrow a^2-a-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-1 \\ a=2 \end{array}\right.$.

+ Với $a=-1 \Rightarrow I\left(-1;2;-2\right) \Rightarrow R=3$. Do đó $\left(S\right):\left(x+1\right)^2+\left(y-2\right)^2+\left(z+2\right)^2=9$.

+ Với $a=2 \Rightarrow I\left(2;2;1\right) \Rightarrow R=3$. Do đó $\left(S\right):\left(x-2\right)^2+\left(y-2\right)^2+\left(z-1\right)^2=9$.