

# MỤC LỤC

|                 |                                                                                               |          |
|-----------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------|----------|
| <b>CHƯƠNG 1</b> | <b>KHẢO SÁT HÀM SỐ VÀ CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN</b>                                              | <b>1</b> |
| 1.              | SỰ ĐỒNG BIẾN NGHỊCH BIẾN CỦA HÀM SỐ.....                                                      | 1        |
| A               | LÝ THUYẾT CẦN NHỚ.....                                                                        | 1        |
| B               | CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP.....                                                                 | 2        |
|                 | Dạng 1. Tìm khoảng đơn điệu của một hàm số cho trước.....                                     | 2        |
|                 | Dạng 2. Tìm khoảng đơn điệu của hàm số bằng hình ảnh đồ thị cho trước ..                      | 3        |
|                 | Dạng 3. Tìm $m$ để hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ đơn điệu trên $\mathbb{R}$ .....         | 4        |
|                 | Dạng 4. Tìm $m$ để hàm $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ đơn điệu trên từng khoảng xác định.....        | 4        |
|                 | Dạng 5. Biện luận đơn điệu của hàm đa thức trên khoảng, đoạn cho trước ..                     | 5        |
|                 | Dạng 6. Biện luận đơn điệu của hàm phân thức trên khoảng, đoạn cho trước                      | 6        |
|                 | Dạng 7. Một số bài toán liên quan đến hàm hợp.....                                            | 7        |
| C               | BÀI TẬP TỰ LUYỆN.....                                                                         | 9        |
| 2.              | CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ.....                                                                       | 15       |
| A               | LÝ THUYẾT CẦN NHỚ.....                                                                        | 15       |
| B               | CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP.....                                                                 | 15       |
|                 | Dạng 1. Ứng dụng đạo hàm (quy tắc 1) để tìm cực trị cực hàm số.....                           | 15       |
|                 | Dạng 2. Xác định cực trị khi biết bảng biến thiên hoặc đồ thị.....                            | 16       |
|                 | Dạng 3. Ứng dụng đạo hàm (quy tắc 2) để tìm cực trị cực hàm số.....                           | 17       |
|                 | Dạng 4. Tìm $m$ để hàm số đạt cực trị tại điểm $x_0$ cho trước.....                           | 17       |
|                 | Dạng 5. Biện luận cực trị hàm bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ .....                         | 18       |
|                 | Dạng 6. Biện luận cực trị hàm trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$ .....                        | 19       |
| C               | BÀI TẬP TỰ LUYỆN.....                                                                         | 20       |
| 3.              | GIÁ TRỊ LỚN NHẤT - NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ.....                                                   | 26       |
| A               | LÝ THUYẾT CẦN NHỚ.....                                                                        | 26       |
| B               | CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP.....                                                                 | 26       |
|                 | Dạng 1. Tìm max – min của hàm số cho trước.....                                               | 26       |
|                 | Dạng 2. Một số bài toán vận dụng.....                                                         | 28       |
| C               | BÀI TẬP TỰ LUYỆN.....                                                                         | 29       |
| 4.              | ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ.....                                                         | 32       |
| A               | LÝ THUYẾT CẦN NHỚ.....                                                                        | 32       |
| B               | CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP.....                                                                 | 33       |
|                 | Dạng 1. Cho hàm số $y = f(x)$ , tìm tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị tương ứng..... | 33       |
|                 | Dạng 2. Xác định TCN và TCD khi biết bảng biến thiên hàm số $y = f(x)$ ...                    | 34       |
|                 | Dạng 3. Một số bài toán biện luận theo tham số $m$ .....                                      | 35       |
| C               | BÀI TẬP TỰ LUYỆN.....                                                                         | 37       |

|    |                                                                                                                      |    |
|----|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 5. | ĐỒ THỊ CÁC HÀM SỐ THƯỜNG GẶP .....                                                                                   | 41 |
| A  | LÝ THUYẾT CẦN NHỚ .....                                                                                              | 41 |
| B  | CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP .....                                                                                       | 42 |
|    | Dạng 1. Nhận dạng đồ thị hàm bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ .....                                                 | 42 |
|    | Dạng 2. Nhận dạng đồ thị hàm bậc bốn trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$ ....                                         | 44 |
|    | Dạng 3. Nhận dạng đồ thị hàm nhất biến $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ .....                                                 | 46 |
| C  | BÀI TẬP TỰ LUYỆN .....                                                                                               | 48 |
| 6. | ỨNG DỤNG ĐỒ THỊ ĐỂ BIỆN LUẬN NGHIỆM PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH.....                                            | 53 |
| A  | LÝ THUYẾT CẦN NHỚ .....                                                                                              | 53 |
| B  | CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP .....                                                                                       | 54 |
|    | Dạng 1. Giải, biện luận nghiệm phương trình bằng phương pháp đồ thị .....                                            | 54 |
|    | Dạng 2. Giải, biện luận nghiệm bất phương trình bằng phương pháp đồ thị ..                                           | 55 |
|    | Dạng 3. Một số bài toán liên quan đến hàm hợp .....                                                                  | 56 |
| C  | BÀI TẬP TỰ LUYỆN .....                                                                                               | 59 |
| 7. | SỰ TƯƠNG GIAO CỦA HAI ĐỒ THỊ .....                                                                                   | 64 |
| A  | LÝ THUYẾT CẦN NHỚ .....                                                                                              | 64 |
| B  | CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP .....                                                                                       | 64 |
|    | Dạng 1. Xác định (biện luận) giao điểm của đường thẳng và đồ thị của hàm số bậc ba .....                             | 64 |
|    | Dạng 2. Xác định (biện luận) giao điểm của đường thẳng và đồ thị của hàm số bậc bốn trùng phương .....               | 66 |
|    | Dạng 3. Xác định (biện luận) giao của đường thẳng và đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ .....                     | 67 |
| C  | BÀI TẬP TỰ LUYỆN .....                                                                                               | 69 |
| 8. | TIẾP TUYẾN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ .....                                                                                   | 72 |
| A  | LÝ THUYẾT CẦN NHỚ .....                                                                                              | 72 |
| B  | CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP .....                                                                                       | 72 |
|    | Dạng 1. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $(x_0; y_0)$ cho trước .....              | 72 |
|    | Dạng 2. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ khi biết hệ số góc của tiếp tuyến bằng $k_0$ ..... | 73 |
|    | Dạng 3. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ , biết tiếp tuyến đi qua điểm $A(x_A; y_A)$ .....  | 75 |
|    | Dạng 4. Bài tập tổng hợp .....                                                                                       | 75 |
| C  | BÀI TẬP TỰ LUYỆN .....                                                                                               | 77 |

# KHẢO SÁT HÀM SỐ VÀ CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN

## § 1. SỰ ĐỒNG BIẾN NGHỊCH BIẾN CỦA HÀM SỐ

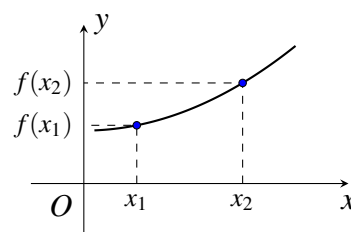
### A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định trên  $(a; b)$ . Khi đó

☑ Hàm số đồng biến trên  $(a; b)$  nếu

$$\forall x_1, x_2 \in (a; b): x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

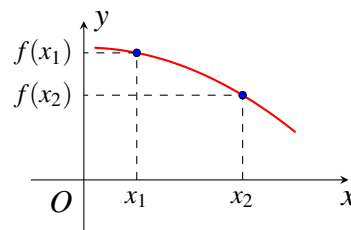
► Trên khoảng  $(a; b)$ , đồ thị là một "đường đi lên" khi xét từ trái sang phải.



☑ Hàm số nghịch biến trên  $(a; b)$  nếu

$$\forall x_1, x_2 \in (a; b): x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

► Trên khoảng  $(a; b)$ , đồ thị là một "đường đi xuống" khi xét từ trái sang phải.



### 2 Các tính chất thường dùng cho hàm đơn điệu

☑ Cho hàm số  $y = f(x)$  đồng biến trên khoảng  $(a; b)$ . Xét  $m, n \in (a; b)$ .

① Nếu  $f(m) = f(n)$  thì  $m = n$ .

② Nếu  $f(m) > f(n)$  thì  $m > n$ .

③ Nếu  $f(m) < f(n)$  thì  $m < n$ .

④ Với  $k$  là một số thực cho trước, phương trình  $f(x) = k$  có không quá 1 nghiệm thực trên  $(a; b)$ .

☑ Cho hàm số  $y = f(x)$  nghịch biến trên khoảng  $(a; b)$ . Xét  $m, n \in (a; b)$ .

① Nếu  $f(m) = f(n)$  thì  $m = n$ .

② Nếu  $f(m) > f(n)$  thì  $m < n$ .

③ Nếu  $f(m) < f(n)$  thì  $m > n$ .

④ Với  $k$  là một số thực cho trước, phương trình  $f(x) = k$  có không quá 1 nghiệm thực trên  $(a; b)$ .

### 3 Liên hệ giữa đạo hàm và tính đơn điệu

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm trên khoảng  $(a; b)$ .

① Nếu  $y' \geq 0, \forall x \in (a; b)$  thì  $y = f(x)$  đồng biến trên  $(a; b)$ .

② Nếu  $y' \leq 0, \forall x \in (a; b)$  thì  $y = f(x)$  nghịch biến trên  $(a; b)$ .

Chú ý: Dấu bằng xảy ra chỉ tại các điểm "rời nhau".

**DẠNG 1. Tìm khoảng đơn điệu của một hàm số cho trước***Phương pháp giải.*

1. Tìm tập xác định  $\mathcal{D}$  của hàm số.
2. Tính  $y'$ , giải phương trình  $y' = 0$  tìm các nghiệm  $x_i$  (nếu có).
3. Lập bảng xét dấu  $y'$  trên miền  $\mathcal{D}$ . Từ dấu  $y'$ , ta suy ra chiều biến thiên của hàm số.
  - Khoảng  $y'$  mang dấu  $-$ : Hàm nghịch biến.
  - Khoảng  $y'$  mang dấu  $+$ : Hàm đồng biến.

**Ví dụ 1.** Hàm số  $y = -x^3 + 3x - 4$  đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A.  $(-\infty; -1)$ . B.  $(-\infty; -1)$  và  $(1; +\infty)$ .  
C.  $(1; +\infty)$ . D.  $(-1; 1)$ .

**Ví dụ 2.** Cho hàm số  $y = x^3 + 3x^2 - 2$ . Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

- A. Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(1; 5)$ .  
B. Hàm số đồng biến trên khoảng  $(-\infty; 1)$  và  $(2; +\infty)$ .  
C. Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-\infty; -2)$  và  $(0; +\infty)$ .  
D. Hàm số đồng biến trên khoảng  $(-\infty; -2)$  và  $(0; +\infty)$ .

**Ví dụ 3.** Hàm số  $y = -x^4 + 2x^3 - 2x - 1$  nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

- A.  $(-\infty; -\frac{1}{2})$ . B.  $(-\frac{1}{2}; +\infty)$ . C.  $(-\infty; 1)$ . D.  $(-\infty; +\infty)$ .

**Ví dụ 4.** Hàm số  $y = x^4 + 8x^3 + 5$  nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A.  $(0; +\infty)$ . B.  $(-\infty; -6)$ . C.  $(-6; 0)$ . D.  $(-\infty; +\infty)$ .

**Ví dụ 5.** Hàm số  $f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = x^2(x + 2)$ . Phát biểu nào sau đây là đúng?

- A. Hàm số nghịch biến trên các khoảng  $(-\infty; -2)$  và  $(0; +\infty)$ .  
B. Hàm số đồng biến trên các khoảng  $(-\infty; -2)$  và  $(0; +\infty)$ .  
C. Hàm số đồng biến trên khoảng  $(-2; +\infty)$ .  
D. Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-2; 0)$ .

**Ví dụ 6.** Cho hàm số  $y = \frac{x+3}{x-3}$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Hàm số đồng biến trên các khoảng  $(-\infty; 3)$  và  $(3; +\infty)$ .  
B. Hàm số nghịch biến trên các khoảng  $(-\infty; 3)$  và  $(3; +\infty)$ .  
C. Hàm số nghịch biến trên  $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ .  
D. Hàm số đồng biến trên  $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ .

**Ví dụ 7.** Cho hàm số  $y = \frac{3-x}{x+1}$ . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng  $(-\infty; -1)$  và  $(-1; +\infty)$ .  
B. Hàm số nghịch biến với mọi  $x \neq 1$ .  
C. Hàm số nghịch biến trên tập  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ .  
D. Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng  $(-\infty; -1)$  và  $(-1; +\infty)$ .

**Ví dụ 8.** Hàm số nào sau đây nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó?

- A.  $y = \frac{x-1}{x+1}$ . B.  $y = \frac{2x+1}{x-3}$ . C.  $y = \frac{x-2}{2x-1}$ . D.  $y = \frac{x+5}{-x-1}$ .

**Ví dụ 9.** Hàm số  $y = \sqrt{2x-x^2}$  nghịch biến trên khoảng nào sau?

- A.  $(0; 1)$ . B.  $(0; 2)$ . C.  $(1; 2)$ . D.  $(1; +\infty)$ .

## ❏ DẠNG 2. Tìm khoảng đơn điệu của hàm số bằng hình ảnh đồ thị cho trước

*Phương pháp giải.*

☑ Nếu đề bài cho đồ thị  $y = f(x)$ , ta chỉ việc nhìn các khoảng mà đồ thị "đi lên" hoặc "đi xuống".

- ① Khoảng mà đồ thị "đi lên": hàm đồng biến;
- ② Khoảng mà đồ thị "đi xuống": hàm nghịch biến.

☑ Nếu đề bài cho đồ thị  $y = f'(x)$ . Ta tiến hành lập bảng biến thiên của hàm  $y = f(x)$  theo các bước:

- ① Tìm nghiệm của  $f'(x) = 0$  (hoành độ giao điểm với trục hoành);
- ② Xét dấu  $f'(x)$  (phần trên  $Ox$  mang dấu dương; phần dưới  $Ox$  mang dấu âm);
- ③ Lập bảng biến thiên của  $y = f(x)$ , suy ra kết quả tương ứng.

**Ví dụ 10.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng xét dấu đạo hàm như hình bên dưới

|      |           |      |     |           |     |     |
|------|-----------|------|-----|-----------|-----|-----|
| $x$  | $-\infty$ | $-2$ | $1$ | $+\infty$ |     |     |
| $y'$ |           | $+$  | $0$ | $-$       | $0$ | $+$ |

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào sau đây?

- A.  $(0; 1)$ . B.  $(3; 4)$ . C.  $(-2; 4)$ . D.  $(-4; 2)$ .

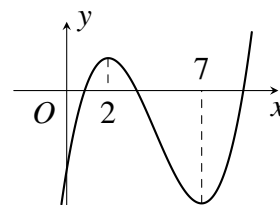
**Ví dụ 11.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên sau. Hàm số  $y = f(x)$  đồng biến trên khoảng nào sau đây?

- A.  $(-\infty; 5)$ . B.  $(0; 2)$ .  
C.  $(2; +\infty)$ . D.  $(0; +\infty)$ .

|         |           |     |     |           |     |     |           |
|---------|-----------|-----|-----|-----------|-----|-----|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $0$ | $2$ | $+\infty$ |     |     |           |
| $f'(x)$ |           | $+$ | $0$ | $-$       | $0$ | $+$ |           |
| $f(x)$  |           |     | $5$ |           | $3$ |     | $+\infty$ |
|         | $-\infty$ |     |     |           |     |     |           |

**Ví dụ 12.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đồ thị như hình bên. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Hàm số đồng biến trên khoảng  $(1; 3)$ .  
B. Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(6; +\infty)$ .  
C. Hàm số đồng biến trên khoảng  $(-\infty; 3)$ .  
D. Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(3; 6)$ .



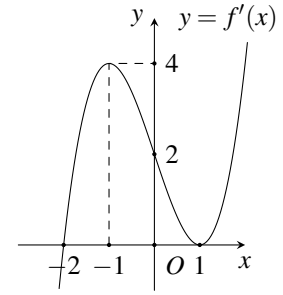
**Ví dụ 13.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên sau. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. Hàm số nghịch biến trên  $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ .  
B. Hàm số đồng biến trên  $(-\infty; 2)$  và  $(2; +\infty)$ .  
C. Hàm số nghịch biến trên  $(-\infty; 2)$  và  $(2; +\infty)$ .  
D. Hàm số nghịch biến trên  $\mathbb{R}$ .

|      |           |           |           |
|------|-----------|-----------|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $2$       | $+\infty$ |
| $y'$ | $-$       |           | $-$       |
| $y$  | $2$       | $-\infty$ | $2$       |

**Ví dụ 14.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$ , hàm số  $y = f'(x)$  có đồ thị như hình bên. Hàm số  $y = f(x)$  đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau

- A.  $(-\infty; -2); (1; +\infty)$ .  
 B.  $(-2; +\infty) \setminus \{1\}$ .  
 C.  $(-2; +\infty)$ .  
 D.  $(-5; -2)$ .



### **DẠNG 3. Tìm $m$ để hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ đơn điệu trên $\mathbb{R}$**

*Phương pháp giải.*

- Hàm số đồng biến trên  $\mathbb{R}$  thì  $y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta_{y'} \leq 0 \end{cases}$  hoặc suy biến  $\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c > 0. \end{cases}$
- Hàm số nghịch biến trên  $\mathbb{R}$  thì  $y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta_{y'} \leq 0 \end{cases}$  hoặc suy biến  $\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c < 0. \end{cases}$

**Ví dụ 15.** Số giá trị nguyên của tham số  $m$  để hàm số  $y = x^3 - 2mx^2 + 4x - 1$  đồng biến trên  $\mathbb{R}$  là

- A. 2.                      B. vô số.                      C. 3.                      D. 4.

**Ví dụ 16.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để hàm số  $y = -\frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (2m - 3)x - m + 2$  nghịch biến trên  $\mathbb{R}$ .

- A.  $m \leq -3, m \geq 1$ .      B.  $-3 < m < 1$ .      C.  $-3 \leq m \leq 1$ .      D.  $m \leq 1$ .

**Ví dụ 17.** Tìm tất cả các giá trị của  $m$  để hàm số  $y = (m - 1)x^3 - 3(m - 1)x^2 + 3x + 2$  đồng biến trên  $\mathbb{R}$

- A.  $1 < m \leq 2$ .                      B.  $1 < m < 2$ .                      C.  $1 \leq m \leq 2$ .                      D.  $1 \leq m < 2$ .

### **DẠNG 4. Tìm $m$ để hàm $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ đơn điệu trên từng khoảng xác định**

*Phương pháp giải.*

- Tính  $y' = \frac{ad - cb}{(cx + d)^2}$ .
- Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định của nó  $\Leftrightarrow y' > 0 \Leftrightarrow ad - cb > 0$ .
- Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó  $\Leftrightarrow y' < 0 \Leftrightarrow ad - cb < 0$ .

**Ví dụ 18.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để hàm số  $y = \frac{x+2-m}{x+1}$  nghịch biến trên các khoảng mà nó xác định.

- A.  $m \leq 1$ .                      B.  $m \leq -3$ .                      C.  $m < -3$ .                      D.  $m < 1$ .

**Ví dụ 19.** Tìm tất cả giá trị của tham số  $m$  để hàm số  $y = \frac{x+m^2}{x+1}$  luôn đồng biến trên từng khoảng xác định.

A.  $m \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$ .

B.  $m \in [-1; 1]$ .

C.  $m \in \mathbb{R}$ .

D.  $m \in (-1; 1)$ .

## BUỔI SỐ 2

### DẠNG 5. Biện luận đơn điệu của hàm đa thức trên khoảng, đoạn cho trước

Phương pháp giải.

**Loại 1:** Tìm điều kiện của tham số để hàm số  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  đơn điệu trên toàn miền xác định  $\mathbb{R}$ .

① Hàm số đồng biến trên  $\mathbb{R}$  thì  $y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta_{y'} \leq 0 \end{cases}$  hoặc suy biến  $\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c > 0 \end{cases}$ .

② Hàm số nghịch biến trên  $\mathbb{R}$  thì  $y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta_{y'} \leq 0 \end{cases}$  hoặc suy biến  $\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c < 0 \end{cases}$ .

**Loại 2:** Tìm điều kiện của tham số để hàm số  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  đơn điệu trên khoảng con của tập  $\mathbb{R}$ .

Ta thường gặp hai trường hợp:

① Nếu phương trình  $y' = 0$  giải được nghiệm "đẹp": Ta thiết lập bảng xét dấu  $y'$  theo các nghiệm vừa tìm (xét hết các khả năng nghiệm trùng, nghiệm phân biệt). Từ đó "ép" khoảng mà dấu  $y'$  không thỏa mãn ra khỏi khoảng đề bài yêu cầu.

② Nếu phương trình  $y' = 0$  nghiệm "xấu": Ta sử dụng 1 trong 2 cách sau

**Cách 1.** Dùng định lý về so sánh nghiệm (sẽ nói rõ hơn qua bài giải cụ thể).

**Cách 2.** Cô lập tham số  $m$ , dùng đồ thị (cách này xét sau).

**Loại 3:** Tìm điều kiện của tham số để hàm số  $y = ax^4 + bx^2 + c$  đơn điệu trên khoảng con của tập  $\mathbb{R}$ .

① Giải phương trình  $y' = 0$ , tìm nghiệm.

② Biện luận các trường hợp nghiệm (nghiệm trùng, nghiệm phân biệt). Từ đó "ép" khoảng mà dấu  $y'$  không thỏa mãn ra khỏi khoảng đề bài yêu cầu.

**Ví dụ 20.** Cho hàm số  $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + 4x + 2m$ , với  $m$  là tham số. Gọi  $S$  là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của  $m$  để hàm số đồng biến trên  $\mathbb{R}$ . Tìm tập  $S$ .

A.  $S = \{m \in \mathbb{Z} \mid |m| \geq 2\}$ .

B.  $S = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$ .

C.  $S = \{-1; 0; 1\}$ .

D.  $S = \{m \in \mathbb{Z} \mid |m| > 2\}$ .

**Ví dụ 21.** Giá trị  $m$  để hàm số  $y = -x^3 + mx^2 - m$  đồng biến trên khoảng  $(0; 2)$  là

A.  $0 < m < 3$ .

B.  $m \geq 3$ .

C.  $m \in [1; 3]$ .

D.  $m \leq 3$ .

**Ví dụ 22.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để hàm số  $y = x^3 - 3(m+2)x^2 + 3(m^2 + 4m)x + 1$  nghịch biến trên khoảng  $(0; 1)$ ?

A. 1.

B. 4.

C. 3.

D. 2.

**Ví dụ 23.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để hàm số  $y = x^4 - 2(m-1)x^2 + m - 2$  đồng biến trên khoảng  $(1; 3)$ .

A.  $m \in [-5; 2)$ .

B.  $m \in (-\infty; -5)$ .

C.  $m \in (2; +\infty)$ .

D.  $m \in (-\infty; 2]$ .

## **DẠNG 6. Biện luận đơn điệu của hàm phân thức trên khoảng, đoạn cho trước**

*Phương pháp giải.*

**Loại 1.** Tìm điều kiện của tham số để hàm  $y = \frac{ax+b}{cx+d}$  đơn điệu trên từng khoảng xác định.

① Tính  $y' = \frac{ad - cb}{(cx + d)^2}$ .

② Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định của nó  $\Leftrightarrow y' > 0 \Leftrightarrow ad - cb > 0$ .

③ Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó  $\Leftrightarrow y' < 0 \Leftrightarrow ad - cb < 0$ .

**Loại 2.** Tìm điều kiện để hàm  $y = \frac{ax+b}{cx+d}$  đơn điệu trên khoảng  $(m; n) \subset \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$ .

① Tính  $y' = \frac{ad - cb}{(cx + d)^2}$ .

② Hàm số đồng biến trên khoảng  $(m; n)$ :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y' > 0 \\ -\frac{d}{c} \notin (m; n) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ad - cb > 0 \\ -\frac{d}{c} \leq m \text{ hoặc } -\frac{d}{c} \geq n \end{cases}$$

③ Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(m; n)$ :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y' < 0 \\ -\frac{d}{c} \notin (m; n) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ad - cb < 0 \\ -\frac{d}{c} \leq m \text{ hoặc } -\frac{d}{c} \geq n \end{cases}$$

**Ví dụ 24.** Tìm các giá trị của tham số  $m$  để hàm số  $y = \frac{x+2}{x+m}$  nghịch biến trên tập xác định của nó.

A.  $m \leq 2$ .

B.  $m > 2$ .

C.  $m \geq 2$ .

D.  $m < 2$ .

**Ví dụ 25.** Cho hàm số  $y = \frac{mx - 2m - 3}{x - m}$  với  $m$  là tham số. Gọi  $S$  là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của  $m$  để hàm số đồng biến trên khoảng  $(2; +\infty)$ . Tìm số phần tử của  $S$ .

A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. 1.

**Ví dụ 26.** Cho hàm số  $y = \frac{2x-1}{x-m}$ . Tìm  $m$  để hàm số nghịch biến trên khoảng  $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$ .

A.  $\frac{1}{2} < m \leq 1$ .

B.  $m > \frac{1}{2}$ .

C.  $m \geq 1$ .

D.  $m \geq \frac{1}{2}$ .



## DẠNG 7. Một số bài toán liên quan đến hàm hợp

Phương pháp giải.

**Loại 1:** Cho đồ thị  $y = f'(x)$ , hỏi tính đơn điệu của hàm  $y = f(x)$ .

- ① Tìm nghiệm của  $f'(x) = 0$  (hoành độ giao điểm với trục hoành);
- ② Xét dấu  $f'(x)$  (phần trên  $Ox$  mang dấu dương; phần dưới  $Ox$  mang dấu âm);
- ③ Lập bảng biến thiên của  $y = f(x)$ , suy ra kết quả tương ứng.

**Loại 2:** Cho đồ thị  $y = f'(x)$ , hỏi tính đơn điệu của hàm hợp  $y = f(u)$ .

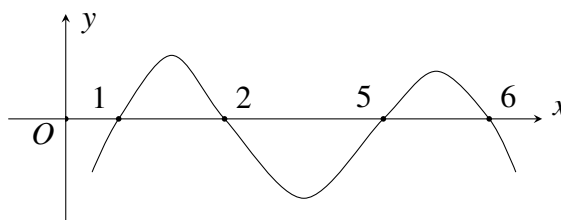
- ① Tính  $y' = u' \cdot f'(u)$ ;
- ② Giải phương trình  $f'(u) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u' = 0 \\ f'(u) = 0 \text{ (Nhìn đồ thị, suy ra nghiệm.)} \end{cases}$ ;
- ③ Lập bảng biến thiên của  $y = f(u)$ , suy ra kết quả tương ứng.

**Loại 3:** Cho đồ thị  $y = f'(x)$ , hỏi tính đơn điệu của hàm  $y = g(x)$ , trong đó  $g(x)$  có liên hệ với  $f(x)$ .

- ① Tính  $y' = g'(x)$ ;
- ② Giải phương trình  $g'(x) = 0$  (thường dẫn đến việc giải phương trình liên quan đến  $f'(x)$ . Loại này ta nhìn hình để suy ra nghiệm).
- ③ Lập bảng biến thiên của  $y = g(x)$ , suy ra kết quả tương ứng.

**Ví dụ 27.** Hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị  $y = f'(x)$  như hình vẽ (đồ thị  $f'(x)$  cắt  $Ox$  ở các điểm có hoành độ lần lượt là 1, 2, 5, 6). Chọn khẳng định đúng.

- A.  $f(x)$  nghịch biến trên khoảng (1; 2).
- B.  $f(x)$  đồng biến trên khoảng (5; 6).
- C.  $f(x)$  nghịch biến trên khoảng (1; 5).
- D.  $f(x)$  đồng biến trên khoảng (4; 5).



**Ví dụ 28.** (THPTQG–2019, Mã đề 101) Cho hàm số  $f(x)$  có bảng xét dấu  $f'(x)$  như hình bên dưới

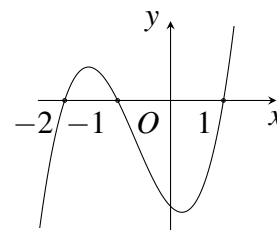
|         |           |      |      |     |           |
|---------|-----------|------|------|-----|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $-3$ | $-1$ | $1$ | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | $-$       | $0$  | $+$  | $0$ | $-$       |

Hàm số  $y = f(3 - 2x)$  nghịch biến trên khoảng

- A.  $(4; +\infty)$ .
- B.  $(-2; 1)$ .
- C.  $(2; 4)$ .
- D.  $(1; 2)$ .

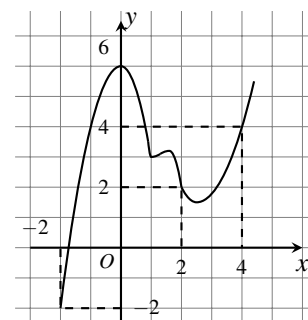
**Ví dụ 29.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$ . Biết đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  như hình vẽ bên. Hàm số  $f(x^2 - 2)$  đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

- A.  $(0; 1)$ .
- B.  $(1; \sqrt{3})$ .
- C.  $(-1; 0)$ .
- D.  $(-\sqrt{3}; 0)$ .



**Ví dụ 30.** Cho hàm số  $y = f(x)$ . Đồ thị của hàm số  $y = f'(x)$  như hình vẽ bên. Đặt  $h(x) = f(x) - \frac{x^2}{2}$ . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Hàm số  $y = h(x)$  đồng biến trên khoảng  $(2; 3)$ .
- B. Hàm số  $y = h(x)$  đồng biến trên khoảng  $(0; 4)$ .
- C. Hàm số  $y = h(x)$  nghịch biến trên khoảng  $(0; 1)$ .
- D. Hàm số  $y = h(x)$  nghịch biến trên khoảng  $(2; 4)$ .



**BẢNG TÔ ĐÁP ÁN TỰ LUYỆN – ĐỀ SỐ 1**

Học sinh làm BTTL xong, tô phương án đúng. Buổi học sau, cùng với GV kiểm tra kết quả.

|                    |                     |                     |                     |                     |
|--------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| 1. (A) (B) (C) (D) | 7. (A) (B) (C) (D)  | 13. (A) (B) (C) (D) | 19. (A) (B) (C) (D) | 25. (A) (B) (C) (D) |
| 2. (A) (B) (C) (D) | 8. (A) (B) (C) (D)  | 14. (A) (B) (C) (D) | 20. (A) (B) (C) (D) | 26. (A) (B) (C) (D) |
| 3. (A) (B) (C) (D) | 9. (A) (B) (C) (D)  | 15. (A) (B) (C) (D) | 21. (A) (B) (C) (D) | 27. (A) (B) (C) (D) |
| 4. (A) (B) (C) (D) | 10. (A) (B) (C) (D) | 16. (A) (B) (C) (D) | 22. (A) (B) (C) (D) | 28. (A) (B) (C) (D) |
| 5. (A) (B) (C) (D) | 11. (A) (B) (C) (D) | 17. (A) (B) (C) (D) | 23. (A) (B) (C) (D) | 29. (A) (B) (C) (D) |
| 6. (A) (B) (C) (D) | 12. (A) (B) (C) (D) | 18. (A) (B) (C) (D) | 24. (A) (B) (C) (D) | 30. (A) (B) (C) (D) |

**Câu 1.** Hàm số  $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$  đồng biến trên khoảng nào sau đây?

- A.  $(1; 3)$ . B.  $(2; +\infty)$ . C.  $(-\infty; 0)$ . D.  $(0; 3)$ .

**Câu 2.** Cho hàm số  $y = x^2(3 - x)$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng  $(2; +\infty)$ .  
 B. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng  $(+\infty; 3)$ .  
 C. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng  $(0; 2)$ .  
 D. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng  $(-\infty; 0)$ .

**Câu 3.** Hàm số  $y = 2x^4 + 3$  nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A.  $(0; +\infty)$ . B.  $(-\infty; 3)$ . C.  $(-\infty; 0)$ . D.  $(3; +\infty)$ .

**Câu 4.** Hàm số  $y = x^4 + 8x^3 + 5$  nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A.  $(0; +\infty)$ . B.  $(-\infty; -6)$ . C.  $(-6; 0)$ . D.  $(-\infty; +\infty)$ .

**Câu 5.** Hàm số  $y = x^4 - 2x^2 + 1$  đồng biến trên khoảng nào?

- A.  $(-1; 0)$ . B.  $(-1; +\infty)$ . C.  $(-3; 8)$ . D.  $(-\infty; -1)$ .

**Câu 6.** Tìm tất cả các khoảng nghịch biến của hàm số  $y = -x^4 + 8x^2 - 7$ .

- A.  $(-2; 0)$ ,  $(2; +\infty)$ . B.  $(-2; 0)$ . C.  $(-\infty; -2)$ ,  $(2; +\infty)$ . D.  $(2; +\infty)$ .

**Câu 7.** Hàm số nào dưới đây nghịch biến trên khoảng  $(-\infty; +\infty)$ ?

- A.  $y = -x^3 - x + 3$ . B.  $y = -x^4 + 4x^2 - 2$ . C.  $y = x^3 + 4x^2 - 1$ . D.  $y = x^4 - 5x + 7$ .

**Câu 8.** Cho hàm số  $y = x^3 - 5x^2 + 3x - 4$  nghịch biến trên khoảng  $(a; b)$  với  $a < b$ ;  $a, b \in \mathbb{R}$  và đồng biến trên các khoảng  $(-\infty; a)$ ,  $(b; +\infty)$ . Tính  $S = 3a + 3b$ .

- A.  $S = 6$ . B.  $S = 9$ . C.  $S = 10$ . D.  $S = 12$ .

**Câu 9.** Tìm tất cả các khoảng nghịch biến của hàm số  $y = -\frac{4}{3}x^3 - 2x^2 - x - 2017$ .

- A.  $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$ . B.  $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$  và  $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$ .  
 C.  $(-\infty; +\infty)$ . D.  $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$ .

**Câu 10.** Cho hàm số  $y = -x^3 + 1$ . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

- A. Hàm số đồng biến trên khoảng  $(0; 2)$ . B. Hàm số đồng biến trên  $\mathbb{R}$ .  
 C. Hàm số đồng biến trên  $(-\infty; 0)$ . D. Hàm số nghịch biến trên  $\mathbb{R}$ .

**Câu 11.** Cho hàm số  $y = \frac{x-2}{x+3}$ . Tìm khẳng định đúng?

- A. Hàm số xác định trên  $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ .  
 B. Hàm số đồng biến trên  $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$ .  
 C. Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng xác định.  
 D. Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng xác định.

**Câu 12.** Cho hàm số  $y = \frac{3x-1}{x-2}$ . Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

- A. Hàm số nghịch biến trên  $\mathbb{R}$ .
- B. Hàm số đồng biến trên các khoảng  $(-\infty; 2)$  và  $(2; +\infty)$ .
- C. Hàm số nghịch biến trên các khoảng  $(-\infty; 2)$  và  $(2; +\infty)$ .
- D. Hàm số đồng biến trên  $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ .

**Câu 13.** Hàm số nào sau đây nghịch biến trên tập xác định của nó?

- A.  $y = \frac{x-2}{x-1}$ .
- B.  $y = \frac{x-2}{x+1}$ .
- C.  $y = -x^4 + x^2$ .
- D.  $y = -x^3 + 1$ .

**Câu 14.** Hàm số  $y = x + \frac{4}{x}$  đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A.  $(2; +\infty)$ .
- B.  $(0; +\infty)$ .
- C.  $(-2; 0)$ .
- D.  $(-2; 2)$ .

**Câu 15.** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = x^4 - 4x^2 + 3$ . Hàm số  $f(x)$  đồng biến trên các khoảng nào sau đây?

- A.  $(-\infty; -\sqrt{3})$ ,  $(-1; 1)$  và  $(\sqrt{3}; +\infty)$ .
- B.  $(-\sqrt{3}; -1)$  và  $(1; \sqrt{3})$ .
- C.  $(-\infty; 1)$  và  $(3; +\infty)$ .
- D.  $(-\sqrt{2}; 0)$  và  $(\sqrt{2}; +\infty)$ .

**Câu 16.** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = (x+1)^2(x-1)^3(2-x)$ . Hàm số đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A.  $(2; +\infty)$ .
- B.  $(-1; 1)$ .
- C.  $(1; 2)$ .
- D.  $(-\infty; -1)$ .

**Câu 17.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng xét dấu đạo hàm như sau. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Hàm số đồng biến trên khoảng  $(-\infty; 1)$ .
- B. Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(0; 2)$ .
- C. Hàm số đồng biến trên khoảng  $(2; +\infty)$ .
- D. Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(1; +\infty)$ .

| $x$  | $-\infty$ | 0 | 1 | 2 | $+\infty$ |
|------|-----------|---|---|---|-----------|
| $y'$ |           | + | 0 | - |           |

**Câu 18.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình bên. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

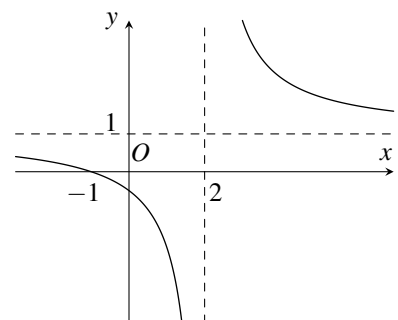
- A. Hàm số đồng biến trên khoảng  $(-2; 2)$ .
- B. Hàm số đồng biến trên khoảng  $(-\infty; 3)$ .
- C. Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-\infty; -2)$ .
- D. Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-2; 2)$ .

| $x$     | $-\infty$ | -2 | 2 | $+\infty$ |
|---------|-----------|----|---|-----------|
| $f'(x)$ |           | +  | 0 | -         |
| $f(x)$  | $-\infty$ | 3  | 0 | $+\infty$ |

**Câu 19.** Đường cong của hình vẽ bên là đồ thị của hàm số  $y = \frac{ax+b}{cx+d}$

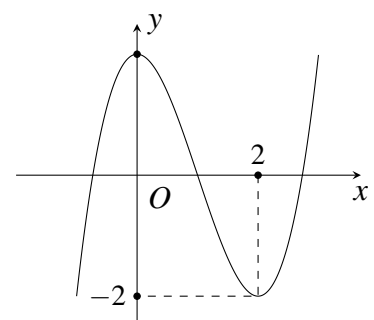
với  $a, b, c, d$  là các số thực. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.  $y' < 0, \forall x \neq 1$ .
- B.  $y' > 0, \forall x \neq 1$ .
- C.  $y' > 0, \forall x \neq 2$ .
- D.  $y' < 0, \forall x \neq 2$ .



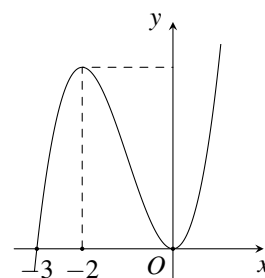
**Câu 20.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Hàm số nghịch biến trên  $(-\infty; +\infty)$ .
- B. Hàm số đồng biến trên  $(-\infty; 2)$ .
- C. Hàm số đồng biến trên  $(-\infty; -1)$ .
- D. Hàm số nghịch biến trên  $(1; +\infty)$ .



**Câu 21.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  như hình vẽ dưới. Hàm số  $y = f(x)$  đồng biến trên khoảng nào?

- A.  $(-\infty; 0)$ . B.  $(-3; +\infty)$ .  
C.  $(-\infty; 4)$ . D.  $(-4; 0)$ .



**Câu 22.** Cho hàm số  $y = \sqrt{x^2 - 6x + 5}$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Hàm số đồng biến trên khoảng  $(3; +\infty)$ . B. Hàm số đồng biến trên khoảng  $(-\infty; 1)$ .  
C. Hàm số đồng biến trên khoảng  $(5; +\infty)$ . D. Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-\infty; 3)$ .

**Câu 23.** Hàm số  $y = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$  nghịch biến trên khoảng nào?

- A.  $(1; +\infty)$ . B.  $(-1; 1)$ . C.  $(-\infty; -1)$ . D.  $(\frac{1}{3}; 3)$ .

**Câu 24.** Hàm số  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  đồng biến trên  $\mathbb{R}$  khi và chỉ khi

- A.  $\begin{cases} a = b = 0, c > 0 \\ a > 0; b^2 - 3ac \geq 0 \end{cases}$ . B.  $\begin{cases} a = b = 0, c > 0 \\ a < 0; b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases}$ .  
C.  $\begin{cases} a = b = 0, c > 0 \\ a > 0; b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases}$ . D.  $a > 0; b^2 - 3ac \leq 0$ .

**Câu 25.** Cho hàm số  $f(x)$  có tính chất  $f'(x) \geq 0, \forall x \in (0; 3)$  và  $f'(x) = 0 \forall x \in (1; 2)$ . Khẳng định nào sau đây là sai?

- A. Hàm số  $f(x)$  đồng biến trên khoảng  $(0; 3)$ .  
B. Hàm số  $f(x)$  đồng biến trên khoảng  $(0; 1)$ .  
C. Hàm số  $f(x)$  đồng biến trên khoảng  $(2; 3)$ .  
D. Hàm số  $f(x)$  là hàm hằng (tức không đổi) trên khoảng  $(1; 2)$ .

**Câu 26.** Nếu hàm số  $y = f(x)$  liên tục và đồng biến trên  $(0; 2)$  thì hàm số  $y = f(2x)$  luôn đồng biến trên khoảng nào?

- A.  $(0; 4)$ . B.  $(0; 2)$ . C.  $(-2; 0)$ . D.  $(0; 1)$ .

**Câu 27.** Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để hàm số  $y = \frac{1}{3}x^3 + (2m + 1)x - 3m - 1$  đồng biến trên  $\mathbb{R}$ .

- A.  $m \in (-\infty; +\infty)$ . B.  $m \leq 0$ . C.  $m \geq -\frac{1}{2}$ . D.  $m < -\frac{1}{2}$ .

**Câu 28.** Cho hàm số  $y = -x^3 - mx^2 + (4m + 9)x + 5$ , với  $m$  là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của  $m$  để hàm số nghịch biến trên  $(-\infty; +\infty)$ ?

- A. 5. B. 6. C. 7. D. 4.

**Câu 29.** Tìm các giá trị của tham số  $m$  để hàm số  $y = \frac{x+2}{x+m}$  nghịch biến trên các khoảng xác định của nó.

- A.  $m \leq 2$ . B.  $m > 2$ . C.  $m \geq 2$ . D.  $m < 2$ .

**Câu 30.** Cho hàm số  $y = \frac{mx-2}{x+m-3}$ . Các giá trị của  $m$  để hàm số nghịch biến trên các khoảng xác định của nó là

- A.  $1 < m < 2$ . B.  $\begin{cases} m > 2 \\ m < 1 \end{cases}$ . C.  $1 < m \leq 2$ . D.  $m = 1$ .

—HẾT—

## BẢNG TÔ ĐÁP ÁN TỰ LUYỆN – ĐỀ SỐ 2

*Học sinh làm BTTL xong, tô phương án đúng. Buổi học sau, cùng với GV kiểm tra kết quả.*

|                    |                     |                     |                     |                     |
|--------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| 1. (A) (B) (C) (D) | 7. (A) (B) (C) (D)  | 13. (A) (B) (C) (D) | 19. (A) (B) (C) (D) | 25. (A) (B) (C) (D) |
| 2. (A) (B) (C) (D) | 8. (A) (B) (C) (D)  | 14. (A) (B) (C) (D) | 20. (A) (B) (C) (D) | 26. (A) (B) (C) (D) |
| 3. (A) (B) (C) (D) | 9. (A) (B) (C) (D)  | 15. (A) (B) (C) (D) | 21. (A) (B) (C) (D) | 27. (A) (B) (C) (D) |
| 4. (A) (B) (C) (D) | 10. (A) (B) (C) (D) | 16. (A) (B) (C) (D) | 22. (A) (B) (C) (D) | 28. (A) (B) (C) (D) |
| 5. (A) (B) (C) (D) | 11. (A) (B) (C) (D) | 17. (A) (B) (C) (D) | 23. (A) (B) (C) (D) | 29. (A) (B) (C) (D) |
| 6. (A) (B) (C) (D) | 12. (A) (B) (C) (D) | 18. (A) (B) (C) (D) | 24. (A) (B) (C) (D) | 30. (A) (B) (C) (D) |

**Câu 1.** Cho hàm số  $y = x^4 - 2x^2 + 2$ . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Hàm số đồng biến trên khoảng  $(2; +\infty)$ .      B. Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(2; +\infty)$ .  
C. Hàm số đồng biến trên khoảng  $(-\infty; 0)$ .      D. Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-\infty; 0)$ .

**Câu 2.** Hàm số  $y = -\frac{x^4}{2} + 1$  đồng biến trên khoảng nào sau đây?

- A.  $(-\infty; 0)$ .      B.  $(1; +\infty)$ .      C.  $(-3; 4)$ .      D.  $(-\infty; 1)$ .

**Câu 3.** Hàm số nào sau đây **không** đồng biến trên  $(-\infty; +\infty)$ ?

- A.  $y = x^3 + 2$ .      B.  $y = x^5 + x^3 - 1$ .      C.  $y = \frac{x-1}{x+2}$ .      D.  $y = x + 1$ .

**Câu 4.** Cho hàm số  $y = \frac{x+1}{2-x}$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Hàm số đã cho đồng biến trên từng khoảng xác định của nó.  
B. Hàm số đã cho đồng biến trên  $\mathbb{R}$ .  
C. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng  $(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$ .  
D. Hàm số đã cho nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó.

**Câu 5.** Hàm số  $y = (x^2 - 4x)^2$  nghịch biến khoảng nào dưới đây?

- A.  $(2; 4)$ .      B.  $(-1; 2)$ .      C.  $(0; 2)$ .      D.  $(0; 4)$ .

**Câu 6.** Hàm số  $y = \sqrt{2x - x^2}$  nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A.  $(-\infty; 1)$ .      B.  $(1; +\infty)$ .      C.  $(0; 1)$ .      D.  $(1; 2)$ .

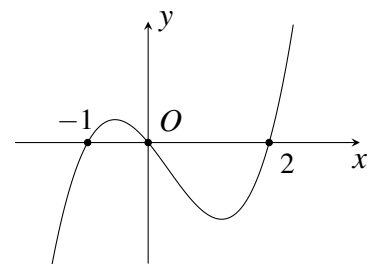
**Câu 7.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = -x^2 + 5x - 6$  với mọi  $x \in \mathbb{R}$ . Hàm số  $y = -5f(x)$  nghịch biến trên khoảng nào?

- A.  $(-\infty; 2)$  và  $(3; +\infty)$ .      B.  $(3; +\infty)$ .  
C.  $(-\infty; 2)$ .      D.  $(2; 3)$ .

**Câu 8.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  như hình vẽ bên.

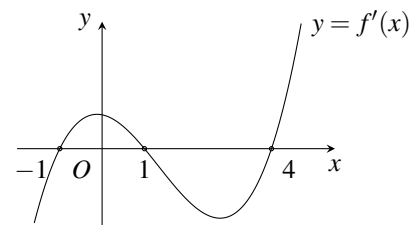
Hàm số  $y = f(x)$  đồng biến trên khoảng nào sau đây?

- A.  $(-\infty; -1)$ .      B.  $(-1; 0)$ .  
C.  $(0; 2)$ .      D.  $(1; +\infty)$ .



**Câu 9.** Cho hàm số  $y = f(x)$ . Hàm số  $y = f'(x)$  có đồ thị như hình bên. Hàm số  $y = f(2-x)$  đồng biến trên khoảng

- A.  $(1; 3)$ .      B.  $(2; +\infty)$ .  
C.  $(-2; 1)$ .      D.  $(-\infty; -2)$ .

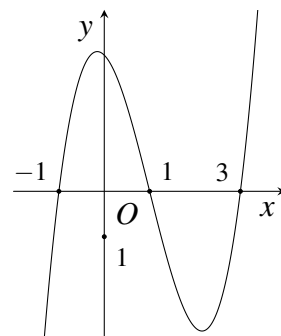


**Câu 10.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm trên  $\mathbb{R}$  và  $f'(x) > 0, \forall x > 0$ . Biết  $f(1) = 2$ , hỏi khẳng định nào sau đây có thể xảy ra?

- A.  $f(2) + f(3) = 4$ .  
 B.  $f(-1) = 2$ .  
 C.  $f(2) = 1$ .  
 D.  $f(2018) > f(2019)$ .

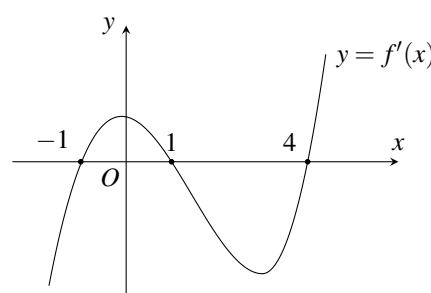
**Câu 11.** Cho hàm số  $y = f(x)$ . Hàm số  $f'(x)$  có đồ thị như hình bên. Hỏi hàm số  $y = f(1-x)$  đồng biến trên khoảng nào?

- A.  $(0; 2)$ .  
 B.  $(-\infty; 2)$ .  
 C.  $(-1; 1)$ .  
 D.  $(2; +\infty)$ .



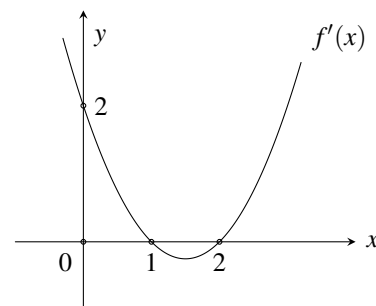
**Câu 12.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $[-1; 4]$  và có đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  như hình bên. Hỏi hàm số  $g(x) = f(x^2 + 1)$  nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

- A.  $(-1; 1)$ .  
 B.  $(0; 1)$ .  
 C.  $(1; 4)$ .  
 D.  $(\sqrt{3}; 4)$ .



**Câu 13.** Cho hàm số  $y = f(x)$ . Hàm số  $y = f'(x)$  có đồ thị như hình bên. Hàm số  $y = f(x - x^2)$  nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A.  $(\frac{-1}{2}; +\infty)$ .  
 B.  $(\frac{-3}{2}; +\infty)$ .  
 C.  $(-\infty; \frac{3}{2})$ .  
 D.  $(\frac{1}{2}; +\infty)$ .



**Câu 14.** Tìm mối liên hệ giữa các tham số  $a$  và  $b$  sao cho hàm số  $y = f(x) = 2x + a \sin x + b \cos x$  luôn tăng trên  $\mathbb{R}$ ?

- A.  $a + 2b \geq \frac{1 + \sqrt{2}}{3}$ .  
 B.  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$ .  
 C.  $a + 2b = 2\sqrt{3}$ .  
 D.  $a^2 + b^2 \leq 4$ .

**Câu 15.** Tìm giá trị lớn nhất của tham số  $m$  để hàm số  $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (8 + 2m)x + m + 3$  đồng biến trên  $\mathbb{R}$ .

- A.  $m = 2$ .  
 B.  $m = -2$ .  
 C.  $m = 4$ .  
 D.  $m = -4$ .

**Câu 16.** Có bao nhiêu giá trị nguyên  $m$  để hàm số  $y = -\frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m - 6)x + 3$  nghịch biến trên khoảng  $(-\infty; +\infty)$ ?

- A. 4.  
 B. 6.  
 C. Vô số.  
 D. 5.

**Câu 17.** Cho hàm số  $y = \frac{1}{3}(m^2 - 1)x^3 + (m + 1)x^2 + 3x - 1$ , với  $m$  là tham số. Số giá trị nguyên của tham số  $m$  thuộc  $[-2018; 2018]$  để hàm số đồng biến trên  $\mathbb{R}$  là

- A. 4035.  
 B. 4037.  
 C. 4036.  
 D. 4034.

**Câu 18.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để hàm số  $y = x^3 - 3mx^2 - 9m^2x$  nghịch biến trên khoảng  $(0; 1)$ .

- A.  $m \geq \frac{1}{3}$  hoặc  $m \leq -1$ .  
 B.  $m > \frac{1}{3}$ .

- C.  $m < -1$ . D.  $-1 < m < \frac{1}{3}$ .

**Câu 19.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để hàm số  $y = x^3 - 3mx^2 - 9m^2x$  đồng biến trên khoảng  $(1; +\infty)$ .

- A.  $m > \frac{1}{3}$ . B.  $m < -1$ .  
C.  $m \geq \frac{1}{3}$  hoặc  $m \leq -1$ . D.  $-1 \leq m \leq \frac{1}{3}$ .

**Câu 20.** Tìm  $m$  để hàm số  $y = x^3 - 6x^2 + mx + 1$  đồng biến trên  $(0; +\infty)$ .

- A.  $m \geq 12$ . B.  $m \leq 12$ . C.  $m \geq 0$ . D.  $m \leq 0$ .

**Câu 21.** Gọi  $T$  là tập hợp các giá trị nguyên dương của tham số  $m$  để hàm số  $y = x^4 - 2mx^2 + 1$  đồng biến trên khoảng  $(2; +\infty)$ . Tổng giá trị các phần tử của  $T$ .

- A. 4. B. 10. C. 6. D. 8.

**Câu 22.** Giá trị  $m$  để hàm số  $y = -x^3 + mx^2 - m$  đồng biến trên khoảng  $(0; 2)$  là

- A.  $0 < m < 3$ . B.  $m \geq 3$ . C.  $m \in [1; 3]$ . D.  $m \leq 3$ .

**Câu 23.** Gọi  $S$  là tập hợp các giá trị thực của  $m$  để hàm số  $y = 2x^3 + 3(m-1)x^2 + 6(m-2)x + 2017$  nghịch biến trên khoảng  $(a; b)$  sao cho  $b - a > 3$ . Giả sử  $S = (-\infty; m_1) \cup (m_2; +\infty)$ . Khi đó  $m_1 + m_2$  bằng

- A. 2. B. 6. C. 4. D. 8.

**Câu 24.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để hàm số  $y = \frac{mx+1}{4x+m}$  luôn nghịch biến trên từng khoảng xác định của hàm số.

- A. 1. B. 2. C. 3. D. Vô số.

**Câu 25.** Cho hàm số  $y = \frac{x+m}{x+2}$ . Tập hợp tất cả các giá trị của  $m$  để hàm số đồng biến trên khoảng  $(0; +\infty)$  là

- A.  $(2; +\infty)$ . B.  $(-\infty; 2)$ . C.  $[2; +\infty)$ . D.  $(-\infty; 2]$ .

**Câu 26.** Tồn tại bao nhiêu số nguyên  $m$  để hàm số  $y = \frac{x-2}{x-m}$  đồng biến trên khoảng  $(-\infty; -1)$ ?

- A. 3. B. 4. C. 2. D. Vô số.

**Câu 27.** Cho hàm số  $y = \frac{mx+2}{2x+m}$ , với  $m$  là tham số thực. Gọi  $S$  là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số  $m$  để hàm số nghịch biến trên khoảng  $(0; 1)$ . Tìm số phần tử của  $S$ .

- A. 1. B. 5. C. 2. D. 3.

**Câu 28.** Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để hàm số  $y = \frac{mx+16}{x+m}$  đồng biến trên khoảng  $(0; 10)$ .

- A.  $m \in (-\infty; -4) \cup (4; +\infty)$ . B.  $m \in (-\infty; -10] \cup (4; +\infty)$ .  
C.  $m \in (-\infty; -4] \cup [4; +\infty)$ . D.  $m \in (-\infty; -10] \cup [4; +\infty)$ .

**Câu 29.** Cho  $a, b$  là hai số nguyên dương sao cho cả hai hàm số  $y = \frac{ax+b}{4x+a}$  (1) và  $y = \frac{bx+a}{4x+b}$  (2) đồng biến trên từng khoảng xác định. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $S = 2a + 3b$  bằng

- A. 25. B. 30. C. 23. D. 27.

**Câu 30.** Cho hàm số  $f(x)$  có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

|         |           |   |   |   |   |           |   |   |
|---------|-----------|---|---|---|---|-----------|---|---|
| $x$     | $-\infty$ | 1 | 2 | 3 | 4 | $+\infty$ |   |   |
| $f'(x)$ |           | - | 0 | + | 0 | -         | 0 | + |

Hàm số  $y = 3f(x+2) - x^3 + 3x$  đồng biến trên khoảng nào dưới đây ?

- A.  $(1; +\infty)$ . B.  $(-\infty; -1)$ . C.  $(-1; 0)$ . D.  $(0; 2)$ .

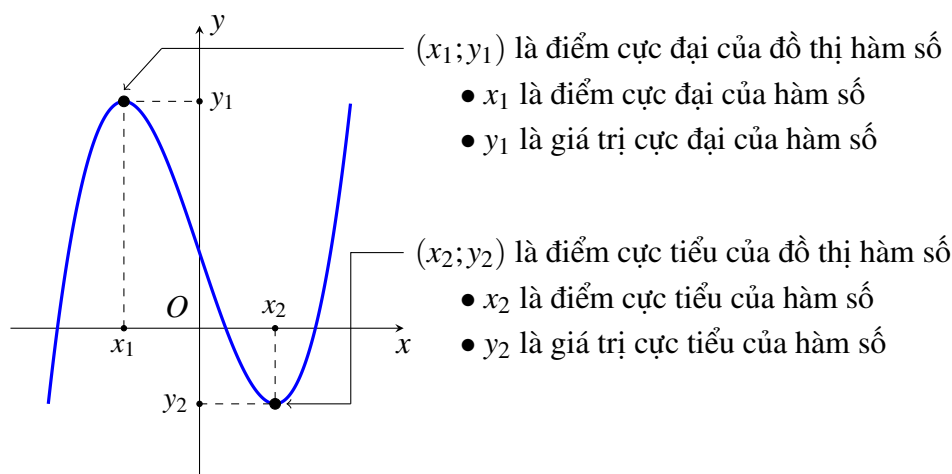
—HẾT—



## § 2. CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

### A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

- Hàm số đạt cực trị tại  $x_0$  thì  $x_0$  là nghiệm của phương trình  $y' = 0$  hoặc  $x_0$  là điểm mà tại đó đạo hàm không xác định (chỉ có một chiều nhé, đừng suy ngược lại).
- Bảng tổng kết tên gọi:



### B CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

#### BUỔI SỐ 1

#### ☐ DẠNG 1. Ứng dụng đạo hàm (quy tắc 1) để tìm cực trị cực hàm số

Phương pháp giải.

- Giải phương trình  $y' = 0$  tìm các nghiệm  $x_i$  và những điểm  $x_j$  mà đạo hàm không xác định;
- Đưa các nghiệm  $x_i$  và  $x_j$  lên bảng xét dấu và xét dấu  $y'$ ;
- Lập bảng biến thiên và nhìn "điểm dừng":
  - "Dừng" trên cao tại điểm  $(x_1; y_1)$  thì  $x_1$  là điểm cực đại của hàm số;  $y_1$  là giá trị cực đại (cực đại) của hàm số;  $(x_1; y_1)$  là tọa độ điểm **cực đại của đồ thị**.
  - "Dừng" dưới thấp tại điểm  $(x_2; y_2)$  thì  $x_2$  là điểm cực tiểu của hàm số;  $y_2$  là giá trị cực tiểu (cực tiểu) của hàm số;  $(x_2; y_2)$  là tọa độ điểm **cực tiểu của đồ thị**.

🧩 Ví dụ 1. Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số  $y = x^3 - x^2 + 2$  là

- A.  $\left(\frac{2}{3}; \frac{50}{27}\right)$ .      B.  $(0; 2)$ .      C.  $\left(\frac{50}{27}; \frac{2}{3}\right)$ .      D.  $(2; 0)$ .

🧩 Ví dụ 2. Hàm số  $y = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 - 3$  đạt cực đại tại

- A.  $x = 0$ .      B.  $x = -\sqrt{3}$ .      C.  $x = \sqrt{3}$ .      D.  $x = \pm\sqrt{3}$ .

🧩 Ví dụ 3. Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số  $y = x^4 - 1$  là

- A.  $(-1; -1)$ .      B.  $(0; -1)$ .      C.  $(-1; 0)$ .      D.  $(1; -1)$ .

**Ví dụ 4.** Hàm số  $y = x^3 - 3x^2 + 2$  có đồ thị là  $(C)$ . Gọi  $A, B$  là các điểm cực trị của  $(C)$ . Tính độ dài đoạn thẳng  $AB$ .

- A.  $AB = 2\sqrt{5}$ . B.  $AB = 5$ . C.  $AB = 4$ . D.  $AB = 5\sqrt{2}$ .

**Ví dụ 5.** Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số  $y = x^3 - 3x^2 + 1$  là

- A.  $y = -2x - 1$ . B.  $y = -2x + 1$ . C.  $y = 2x - 1$ . D.  $y = 2x + 1$ .

**Ví dụ 6.** Cho hàm số  $y = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{5}{4}$  có đồ thị  $(C)$ . Tính diện tích của tam giác tạo thành từ 3 điểm cực trị của đồ thị  $(C)$ .

- A.  $S = \frac{5\sqrt{3}}{4}$ . B.  $S = \frac{\sqrt{3}}{4}$ . C.  $S = \sqrt{3}$ . D.  $S = \frac{9\sqrt{3}}{4}$ .

**Ví dụ 7.** Cho hàm số  $y = 3x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 12x + 1$ . Gọi  $M(x_1; y_1)$  là điểm cực tiểu của đồ thị của hàm số đã cho. Tính tổng  $x_1 + y_1$ .

- A. 5. B. -11. C. 7. D. 6.

## DẠNG 2. Xác định cực trị khi biết bảng biến thiên hoặc đồ thị

Phương pháp giải.

**Loại 1:** Cho bảng biến thiên hoặc đồ thị hàm  $y = f(x)$ . Ta nhìn "điểm dừng":

- "Dừng" trên cao tại điểm  $(x_1; y_1)$  thì  $x_1$  là điểm cực đại của hàm số;  $y_1$  là giá trị cực đại (cực đại) của hàm số;  $(x_1; y_1)$  là tọa độ điểm **cực đại của đồ thị**
- "Dừng" dưới thấp tại điểm  $(x_2; y_2)$  thì  $x_2$  là điểm cực tiểu của hàm số;  $y_2$  là giá trị cực tiểu (cực tiểu) của hàm số;  $(x_2; y_2)$  là tọa độ điểm **cực tiểu của đồ thị**

**Loại 2:** Cho đồ thị hàm  $f'(x)$ . Ta thực hiện tương tự như ở phần đồng biến, nghịch biến.

**Ví dụ 8.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau. Cực tiểu (giá trị cực tiểu) của hàm số là

- A. 4. B. 2.  
C. -1. D. 3.

|      |           |      |     |           |     |     |           |
|------|-----------|------|-----|-----------|-----|-----|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $-1$ | $2$ | $+\infty$ |     |     |           |
| $y'$ |           | $+$  | $0$ | $-$       | $0$ | $+$ |           |
| $y$  |           |      | $4$ |           | $3$ |     | $+\infty$ |
|      | $-\infty$ |      |     |           |     |     |           |

**Ví dụ 9.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình vẽ. Khẳng định nào sau đây **sai**?

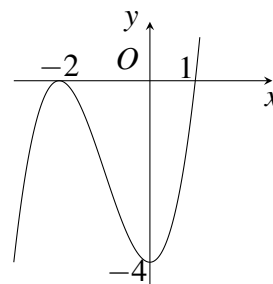
- A. Hàm số đạt cực đại tại  $x = 0$  và  $x = 1$ .  
B. Giá trị cực tiểu của hàm số bằng -1.  
C. Giá trị cực đại của hàm số bằng 2.  
D. Hàm số đạt cực tiểu tại  $x = -2$ .

|      |           |            |            |     |            |     |            |           |           |
|------|-----------|------------|------------|-----|------------|-----|------------|-----------|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $-2$       | $0$        | $1$ | $+\infty$  |     |            |           |           |
| $y'$ | $-$       | $0$        | $+$        | $+$ | $0$        | $-$ |            |           |           |
| $y$  | $+\infty$ | $\searrow$ | $\nearrow$ | $2$ | $\nearrow$ | $2$ | $\searrow$ | $-\infty$ | $-\infty$ |

**Ví dụ 10.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đạo hàm  $f'(x) = (x-1)(x-2)^2(x-3)^{2017}$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

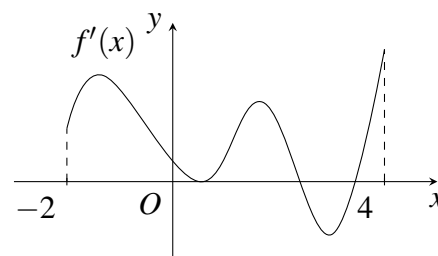
- A. Hàm số đồng biến trên các khoảng  $(1; 2)$  và  $(3; +\infty)$ .  
B. Hàm số có 3 điểm cực trị.  
C. Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(1; 3)$ .  
D. Hàm số đạt cực đại tại  $x = 2$ , đạt cực tiểu tại  $x = 1$  và  $x = 3$ .

**Ví dụ 11.** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định và có đạo hàm  $f'(x)$ . Biết rằng hình vẽ dưới đây là đồ thị của hàm số  $f'(x)$ . Khẳng định nào sau đây là đúng về cực trị của hàm số  $f(x)$ ?



- A. Hàm số  $f(x)$  đạt cực tiểu tại  $x = -2$ .
- B. Hàm số  $f(x)$  đạt cực tiểu tại  $x = 1$ .
- C. Hàm số  $f(x)$  đạt cực đại tại  $x = -1$ .
- D. Hàm số  $f(x)$  đạt cực đại tại  $x = -2$ .

**Ví dụ 12.** Tìm số điểm cực tiểu trên đoạn  $[-2; 4]$  của hàm số  $y = f(x)$  biết hàm số  $y = f'(x)$  có đồ thị như hình vẽ bên.



- A. 1.
- B. 0.
- C. 2.
- D. 3.

### ☐ DẠNG 3. Ứng dụng đạo hàm (quy tắc 2) để tìm cực trị cực hàm số

*Phương pháp giải.* Chỉ dùng khi hàm số có đạo hàm cấp 2 tại  $x_0$ . Ta thực hiện các bước:

1. Tính  $y'$ . Giải phương trình  $y' = 0$ , tìm nghiệm  $x_0$ .
2. Tính  $y''$ .
  - Nếu  $y''(x_0) < 0$  thì  $x_0$  là điểm cực đại của hàm số.
  - Nếu  $y''(x_0) > 0$  thì  $x_0$  là điểm cực tiểu của hàm số.

⚠ Ghi nhớ: "âm" lồi, "dương" lõm

**Ví dụ 13.** Hàm số  $y = x^4 - 4x^2 + 1$  đạt cực tiểu tại điểm có hoành độ

- A.  $x = \pm\sqrt{2}$ .
- B.  $x = \pm 1$ .
- C.  $x = 1$ .
- D.  $x = \pm 2$ .

**Ví dụ 14.** Tìm các điểm cực tiểu của hàm số  $y = \sin 2x - x$ .

- A.  $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ .
- B.  $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$ .
- C.  $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$ .
- D.  $x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi$ .

## BUỔI SỐ 2

### ☐ DẠNG 4. Tìm $m$ để hàm số đạt cực trị tại điểm $x_0$ cho trước

*Phương pháp giải.*

1. Giải điều kiện  $y'(x_0) = 0$ , tìm  $m$ .
2. Thử lại với  $m$  vừa tìm được bằng một trong hai cách sau:
  - Cách 1: Lập bảng biến thiên với  $m$  vừa tìm được. Xem giá trị  $m$  nào thỏa yêu cầu.
  - Cách 2. Tính  $y''$ . Thử  $y''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$  là điểm CĐ;  $y''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$  là điểm CT.

**Ví dụ 15.** Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để hàm số  $y = x^3 - 2mx^2 + m^2x + 2$  đạt cực tiểu tại  $x = 1$ .

- A.  $m = 1$ .
- B.  $m = 3$ .
- C.  $m = 1$  hoặc  $m = 3$ .
- D.  $m = -1$ .

**Ví dụ 16.** Cho hàm số  $y = \frac{x^2 + mx + 1}{x + m}$  với  $m$  là tham số. Với giá trị nào của tham số  $m$  thì hàm số đạt cực đại tại  $x = 2$ ?

- A.  $m = -3$ . B.  $m = 3$ . C.  $m = -1$ . D.  $m = 0$ .

### **DẠNG 5. Biện luận cực trị hàm bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$**

*Phương pháp giải.*

1. Biện luận nghiệm phương trình  $y' = 0$  (phương trình bậc hai).

- $\begin{cases} \Delta > 0 \\ a \neq 0 \end{cases}$ : Hàm số có hai điểm cực trị
- $\Delta \leq 0$  hoặc suy biến  $\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$ : Hàm số không có cực trị.

2. Định lý Vi-et:  $x_1 + x_2 = -\frac{2b}{3a}$  và  $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{3a}$  (nhìn trực tiếp từ hàm số).

- $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$ ; •  $(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2$
- $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2)$ .

3. Các công thức tính toán thường gặp

- Độ dài  $MN = \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2}$
- Khoảng cách từ  $M$  đến  $\Delta$ :  $d(M, \Delta) = \frac{|Ax_M + By_M + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ , với  $\Delta: Ax + By + C = 0$ .
- Tam giác  $ABC$  vuông tại  $A \Leftrightarrow \vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0$ .
- Diện tích tam giác  $ABC$  là  $S = \frac{1}{2}|a_1b_2 - a_2b_1|$ , với  $\vec{AB} = (a_1; b_1)$ ,  $\vec{AC} = (a_2; b_2)$ .

4. Phương trình đường thẳng qua hai điểm cực trị là  $y = -\frac{2}{9a}(b^2 - 3ac)x + d - \frac{bc}{9a}$ .

**Ví dụ 17.** Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để hàm số  $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + 5mx - 1$  không có cực trị?

- A. 6. B. 3. C. 5. D. 4.

**Ví dụ 18.** Tìm tất cả các giá trị thực của  $m$  để hàm số  $y = x^3 - 3x^2 + (m + 1)x + 2$  có hai điểm cực trị.

- A.  $m < 2$ . B.  $m \leq 2$ . C.  $m > 2$ . D.  $m < -4$ .

**Ví dụ 19.** Cho  $y = (m - 3)x^3 + 2(m^2 - m - 1)x^2 + (m + 4)x - 1$ . Gọi  $S$  là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số  $m$  để đồ thị hàm số đã cho có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục tung. Tìm số phần tử của  $S$ .

- A. 4. B. 5. C. 6. D. 7.

**Ví dụ 20.** Gọi  $S$  là tập các giá trị dương của tham số  $m$  sao cho hàm số  $y = x^3 - 3mx^2 + 9x - m$  đạt cực trị tại  $x_1, x_2$  thỏa mãn  $|x_1 - x_2| \leq 2$ . Biết  $S = (a; b]$ . Tính  $T = b - a$ .

- A.  $T = 2 + \sqrt{3}$ . B.  $T = 1 + \sqrt{3}$ . C.  $T = 2 - \sqrt{3}$ . D.  $T = 3 - \sqrt{3}$ .

**Ví dụ 21.** Cho hàm số  $y = -x^3 - 3mx^2 + m - 2$  với  $m$  là tham số. Tổng tất cả các giá trị của  $m$  để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị  $A, B$  sao cho  $AB = 2$  bằng

- A. 2. B. 3. C. 0. D. 1.

**Ví dụ 22.** Tìm  $m$  để đồ thị hàm số  $y = -x^3 + 3mx + 1$  có hai điểm cực trị  $A, B$  sao cho tam giác  $OAB$  vuông tại gốc tọa độ  $O$ .

A.  $m = \frac{1}{2}$ .

B.  $m = -1$ .

C.  $m = 1$ .

D.  $m = 0$ .

**DẠNG 6. Biện luận cực trị hàm trùng phương  $y = ax^4 + bx^2 + c$**

*Phương pháp giải.*

1. Tính  $y' = 4ax^3 + 2bx = 2x(2ax^2 + b)$ ;  $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$  hoặc  $2ax^2 + b = 0$  (1).

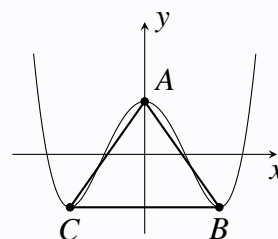
2. Nhận xét:

- Hàm số có ba điểm cực trị khi (1) có hai nghiệm khác 0. Suy ra  $ab < 0$
- Hàm số có đúng một điểm cực trị  $ab \geq 0$  và  $a, b$  không đồng thời bằng 0.

3. Các công thức tính nhanh:

•  $\cos A = \frac{b^3 + 8a}{b^3 - 8a}$

•  $S_{ABC}^2 = -\frac{b^5}{32a^3}$ .



**Ví dụ 23.** Cho hàm số  $y = (m+1)x^4 - mx^2 + 3$ . Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để hàm số có ba điểm cực trị.

A.  $m \in (-\infty; -1) \cup [0; +\infty)$ .

B.  $m \in (-1; 0)$ .

C.  $m \in (-\infty; -1] \cup [0; +\infty)$ .

D.  $m \in (-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$ .

**Ví dụ 24.** Tìm tất cả giá trị thực của tham số  $m$  để hàm số  $y = (m-2)x^4 + (m^2-4)x^2 + 2m-3$  có đúng 1 điểm cực trị.

A.  $m \in [-2; 2)$ .

B.  $m \in [-2; +\infty) \setminus \{2\}$ .

C.  $m \in [-2; 2]$ .

D.  $m \in [-2; +\infty)$ .

**Ví dụ 25.** Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để ba điểm cực trị của đồ thị hàm số  $y = x^4 + (6m-4)x^2 + 1 - m$  là ba đỉnh của một tam giác vuông.

A.  $m = \frac{2}{3}$ .

B.  $m = \frac{1}{3}$ .

C.  $m = -1$ .

D.  $m = \sqrt[3]{3}$ .

**Ví dụ 26.** Gọi  $m_0$  là giá trị của tham số  $m$  để đồ thị hàm số  $y = x^4 + 2mx^2 - 1$  có 3 điểm cực trị lập thành một tam giác có diện tích bằng  $4\sqrt{2}$ . Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A.  $m_0 \in (-1; 1]$ .

B.  $m_0 \in (-2; -1]$ .

C.  $m_0 \in (-\infty; -2]$ .

D.  $m_0 \in (-1; 0)$ .

**BẢNG TÔ ĐÁP ÁN TỰ LUYỆN – ĐỀ SỐ 1**

Học sinh làm BTTL xong, tô phương án đúng. Buổi học sau, cùng với GV kiểm tra kết quả.

|                    |                     |                     |                     |                     |
|--------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| 1. (A) (B) (C) (D) | 7. (A) (B) (C) (D)  | 13. (A) (B) (C) (D) | 19. (A) (B) (C) (D) | 25. (A) (B) (C) (D) |
| 2. (A) (B) (C) (D) | 8. (A) (B) (C) (D)  | 14. (A) (B) (C) (D) | 20. (A) (B) (C) (D) | 26. (A) (B) (C) (D) |
| 3. (A) (B) (C) (D) | 9. (A) (B) (C) (D)  | 15. (A) (B) (C) (D) | 21. (A) (B) (C) (D) | 27. (A) (B) (C) (D) |
| 4. (A) (B) (C) (D) | 10. (A) (B) (C) (D) | 16. (A) (B) (C) (D) | 22. (A) (B) (C) (D) | 28. (A) (B) (C) (D) |
| 5. (A) (B) (C) (D) | 11. (A) (B) (C) (D) | 17. (A) (B) (C) (D) | 23. (A) (B) (C) (D) | 29. (A) (B) (C) (D) |
| 6. (A) (B) (C) (D) | 12. (A) (B) (C) (D) | 18. (A) (B) (C) (D) | 24. (A) (B) (C) (D) | 30. (A) (B) (C) (D) |

**Câu 1.** Tọa độ điểm cực đại của đồ thị hàm số  $y = x^3 - 3x^2 + 1$  là

- A. (0; 1). B. (2; -3). C. (1; -1). D. (3; 1).

**Câu 2.** Gọi  $x_1$  là điểm cực đại  $x_2$  là điểm cực tiểu của hàm số  $y = -x^3 + 3x + 2$ . Tính  $x_1 + 2x_2$ .

- A. 2. B. 1. C. -1. D. 0.

**Câu 3.** Hiệu số giữa giá trị cực đại và giá trị cực tiểu của hàm số  $y = x^3 - 3x^2 + 4$  là

- A. 4. B. -4. C. -2. D. 2.

**Câu 4.** Điểm cực tiểu của hàm số  $y = -x^4 + 5x^2 - 2$  là

- A.  $y = 0$ . B.  $x = -2$ . C.  $x = 0$ . D.  $y = -2$ .

**Câu 5.** Cho hàm số  $y = x^4 - 8x^3 + 1$ . Chọn mệnh đề đúng.

- A. Nhận điểm  $x = 6$  làm điểm cực đại. B. Nhận điểm  $x = 6$  làm điểm cực tiểu.  
C. Nhận điểm  $x = 0$  làm điểm cực đại. D. Nhận điểm  $x = 0$  làm điểm cực tiểu.

**Câu 6.** Số điểm cực trị của đồ thị hàm số  $y = -x^4 + 2x^2 + 2$  là

- A. 2. B. 3. C. 0. D. 1.

**Câu 7.** Tiếp tuyến tại điểm cực tiểu của đồ thị hàm số  $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - 5$

- A. Có hệ số góc dương. B. Song song với trục hoành.  
C. Có hệ số góc bằng -1. D. Song song với đường thẳng  $x = 1$ .

**Câu 8.** Gọi A, B là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số  $y = x^3 - 3x^2 + 4$ . Tính diện tích S của tam giác OAB với O là gốc tọa độ.

- A.  $S = 8$ . B.  $S = \sqrt{3}$ . C.  $S = 2$ . D.  $S = 4$ .

**Câu 9.** Khoảng cách từ điểm cực tiểu của đồ thị hàm số  $y = x^3 - 3x^2 + 2$  đến trục tung bằng

- A. 1. B. 2. C. 4. D. 0.

**Câu 10.** Cho hàm số  $y = x^4 - 8x^2 + 10$  có đồ thị (C). Gọi A, B, C là ba điểm cực trị của đồ thị (C). Tính diện tích S của tam giác ABC.

- A.  $S = 64$ . B.  $S = 32$ . C.  $S = 24$ . D.  $S = 12$ .

**Câu 11.** Tìm hàm số có đồ thị (C) nhận điểm  $N(1; -2)$  là cực tiểu

- A.  $y = x^4 - x^2 - 2$ . B.  $y = x^4 + 2x^2 - 4$ . C.  $y = -x^4 + 2x^2 - 3$ . D.  $y = x^4 - 2x^2 - 1$ .

**Câu 12.** Cho hàm số  $y = -x^4 + 2x^2 - 4$ . Diện tích tam giác tạo bởi ba điểm cực trị của đồ thị hàm số là

- A. 4. B.  $\frac{1}{2}$ . C. 1. D. 2.

**Câu 13.** Hàm số  $y = \frac{x-1}{x+1}$  có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 1. B. 2. C. 0. D. 3.

**Câu 14.** Số điểm cực trị của hàm số  $y = x^{2017}(x+1)$  là

- A. 2017.      B. 2.      C. 1.      D. 0.

**Câu 15.** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định trên  $\mathbb{R}$  và có đạo hàm  $y' = f'(x) = 3x^3 - 3x^2$ . Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- A. Trên khoảng  $(1; +\infty)$  hàm số đồng biến.      B. Trên khoảng  $(-1; 1)$  hàm số nghịch biến.  
C. Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị.      D. Đồ thị hàm số có một điểm cực tiểu.

**Câu 16.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đạo hàm  $f'(x) = x(x-1)^2(x-2)^3$ . Số điểm cực trị của hàm số  $y = f(x)$  là

- A. 1.      B. 2.      C. 0.      D. 3.

**Câu 17.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình vẽ bên.

|         |           |      |     |     |           |           |
|---------|-----------|------|-----|-----|-----------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $+\infty$ |           |
| $f'(x)$ |           | $-$  | $0$ | $+$ | $0$       | $+$       |
| $f(x)$  | $+\infty$ |      | $0$ | $1$ | $0$       | $+\infty$ |

Giá trị cực đại của hàm số là

- A.  $y = 1$ .      B.  $y = 0$ .      C.  $x = 1$ .      D.  $x = 0$ .

**Câu 18.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình bên dưới.

|      |           |      |     |     |           |
|------|-----------|------|-----|-----|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $+\infty$ |
| $y'$ |           | $+$  | $0$ | $-$ |           |
| $y$  |           |      |     |     |           |

$-\infty$

$2$

$-1$

$-\infty$

$2$

$-1$

$-1$

$3$

$2$

$-1$

$3$

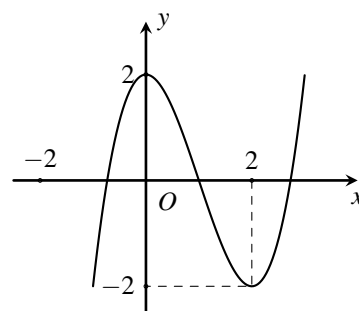
$2$

Hàm số  $y = f(x)$  có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 1.      B. 2.      C. 3.      D. 4.

**Câu 19.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như hình bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 2.  
B. Hàm số có giá trị cực đại bằng 0.  
C. Hàm số đạt cực đại tại  $x = 0$  và cực tiểu tại  $x = 2$ .  
D. Hàm số có ba điểm cực trị.



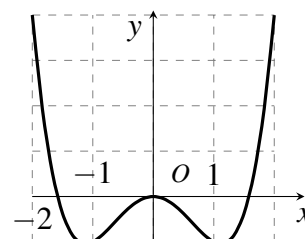
**Câu 20.** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định trên  $\mathbb{R}$  và có bảng xét dấu của đạo hàm như hình vẽ bên. Hàm số đã cho đạt cực tiểu tại

- A.  $x = 0$ .      B.  $x = 2$ .      C.  $y = 0$ .      D.  $y = 2$ .

|      |           |     |     |           |     |
|------|-----------|-----|-----|-----------|-----|
| $x$  | $-\infty$ | $0$ | $2$ | $+\infty$ |     |
| $y'$ | $-$       | $0$ | $+$ | $0$       | $-$ |

**Câu 21.** Hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên khoảng  $K$ , biết đồ thị của hàm số  $y' = f'(x)$  trên  $K$  như hình vẽ bên. Tìm số cực trị của hàm số  $y = f(x)$  trên  $K$ .

- A. 1.      B. 2.  
C. 3.      D. 4.



**Câu 22.** Hàm số  $y = x - 3\sqrt[3]{x^2}$  có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 2.                      B. 0.                      C. 1.                      D. 8.

**Câu 23.** Hàm số  $y = x^3 - 2mx^2 + m^2x - 2$  đạt cực tiểu tại  $x = 1$  khi

- A.  $m = 3$ .                      B.  $m = 1$ .                      C.  $m = -1$ .                      D.  $m = -3$ .

**Câu 24.** Với giá trị nào của  $m$  thì hàm số  $y = mx^3 - 3mx + 2$  đạt cực đại tại  $x = 1$ ?

- A.  $m = 3$ .                      B.  $m < 0$ .                      C.  $m = 1$ .                      D.  $m \neq 0$ .

**Câu 25.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  sao cho hàm số  $y = x^3 - 3mx^2 + 3m + 1$  có hai điểm cực trị.

- A.  $m \geq 0$ .                      B.  $\forall m \in \mathbb{R}$ .                      C.  $m \leq 0$ .                      D.  $m \neq 0$ .

**Câu 26.** Gọi  $S$  là tập hợp tất cả các giá trị của tham số  $m$  để hàm số  $f(x) = x^3 - mx^2 + \left(m + \frac{4}{3}\right)x + 10$  có hai điểm cực trị. Hỏi có bao nhiêu số nguyên  $m \in S$  và thỏa  $|m| \leq 2018$ ?

- A. 4031.                      B. 4036.                      C. 4029.                      D. 4033.

**Câu 27.** Cho hàm số  $y = 2x^3 + 3(m - 1)x^2 + 6(m - 2)x - 18$ . Tập hợp tất cả các giá trị của tham số  $m$  để hàm số có hai điểm cực trị thuộc khoảng  $(-5; 5)$  là

- A.  $(-\infty; -3) \cup (7; +\infty)$ .                      B.  $(-3; +\infty) \setminus \{3\}$ .  
C.  $(-\infty; 7) \setminus \{3\}$ .                      D.  $(-3; 7) \setminus \{3\}$ .

**Câu 28.** Biết đồ thị hàm số  $y = x^4 + bx^2 + c$  chỉ có một điểm cực trị là điểm có tọa độ  $(0; -1)$ , khi đó  $b$  và  $c$  thỏa mãn những điều kiện nào dưới đây?

- A.  $b < 0$  và  $c = -1$ .                      B.  $b \geq 0$  và  $c > 0$ .                      C.  $b < 0$  và  $c < 0$ .                      D.  $b \geq 0$  và  $c = -1$ .

**Câu 29.** Cho hàm số  $y = (m + 1)x^4 - mx^2 + 3$ . Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để hàm số có ba điểm cực trị.

- A.  $m \in (-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$ .                      B.  $m \in (-1; 0)$ .  
C.  $m \in (-\infty; -1) \cup [0; +\infty)$ .                      D.  $m \in (-\infty; -1] \cup [0; +\infty)$ .

**Câu 30.** Cho hàm số  $f(x) = x^4 + 4mx^3 + 3(m + 1)x^2 + 1$ . Gọi  $S$  là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của  $m$  để hàm số có cực tiểu mà không có cực đại. Tính tổng các phần tử của tập  $S$ .

- A. 1.                      B. 2.                      C. 6.                      D. 0.

—HẾT—



## BẢNG TÔ ĐÁP ÁN TỰ LUYỆN – ĐỀ SỐ 2

*Học sinh làm BTTL xong, tô phương án đúng. Buổi học sau, cùng với GV kiểm tra kết quả.*

|                    |                     |                     |                     |                     |
|--------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| 1. (A) (B) (C) (D) | 7. (A) (B) (C) (D)  | 13. (A) (B) (C) (D) | 19. (A) (B) (C) (D) | 25. (A) (B) (C) (D) |
| 2. (A) (B) (C) (D) | 8. (A) (B) (C) (D)  | 14. (A) (B) (C) (D) | 20. (A) (B) (C) (D) | 26. (A) (B) (C) (D) |
| 3. (A) (B) (C) (D) | 9. (A) (B) (C) (D)  | 15. (A) (B) (C) (D) | 21. (A) (B) (C) (D) | 27. (A) (B) (C) (D) |
| 4. (A) (B) (C) (D) | 10. (A) (B) (C) (D) | 16. (A) (B) (C) (D) | 22. (A) (B) (C) (D) | 28. (A) (B) (C) (D) |
| 5. (A) (B) (C) (D) | 11. (A) (B) (C) (D) | 17. (A) (B) (C) (D) | 23. (A) (B) (C) (D) | 29. (A) (B) (C) (D) |
| 6. (A) (B) (C) (D) | 12. (A) (B) (C) (D) | 18. (A) (B) (C) (D) | 24. (A) (B) (C) (D) | 30. (A) (B) (C) (D) |

**Câu 1.** Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số  $y = -2x^3 + 3x^2 + 1$ .

- A.  $y = x + 1$ .      B.  $y = -x + 1$ .      C.  $y = x - 1$ .      D.  $y = -x - 1$ .

**Câu 2.** Gọi  $d$  là đường thẳng qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số  $y = x^3 - 3x + 1$ . Điểm nào sau đây thuộc  $d$ ?

- A.  $M(-2; 1)$ .      B.  $N(3; -5)$ .      C.  $P(2; 3)$ .      D.  $Q(3; -1)$ .

**Câu 3.** Khoảng cách giữa hai điểm cực đại và cực tiểu của đồ thị hàm số  $y = (x + 1)(x - 2)^2$

- A.  $5\sqrt{2}$ .      B. 2.      C.  $2\sqrt{5}$ .      D. 4.

**Câu 4.** Cho hàm số  $y = x^4 - 2x^2 + 2$ . Diện tích  $S$  của tam giác tạo bởi ba đỉnh cực trị của đồ thị hàm số đã cho là

- A. 3.      B. 4.      C. 1.      D. 2.

**Câu 5.** Hàm số  $f(x) = C_{2019}^0 + C_{2019}^1 x + C_{2019}^2 x^2 + \dots + C_{2019}^{2019} x^{2019}$  có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 1.      B. 2019.      C. 2018.      D. 0.

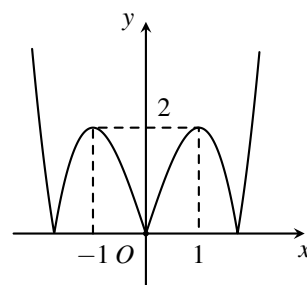
**Câu 6.** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = (x^2 - 1)x^2(x - 2)^{2019}$  với  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

- A. 4.      B. 3.      C. 2.      D. 1.

**Câu 7.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đồ thị như hình bên.

Hỏi hàm số có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 4.      B. 5.  
C. 2.      D. 3.



**Câu 8.** Cho hàm số  $y = x - \sin 2x + 3$ . Chọn kết luận đúng.

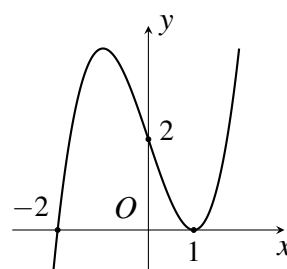
- A. Hàm số đạt cực tiểu tại  $x = \frac{\pi}{3}$ .      B. Hàm số đạt cực tiểu tại  $x = -\frac{\pi}{6}$ .  
C. Hàm số đạt cực đại tại  $x = \frac{\pi}{6}$ .      D. Hàm số đạt cực đại tại  $x = -\frac{\pi}{6}$ .

**Câu 9.** Cho hàm số  $y = f(x) = \sin 2x$ . Hỏi trong khoảng  $(0; 2018)$  có bao nhiêu điểm cực tiểu?

- A. 1285.      B. 2017.      C. 643.      D. 642.

**Câu 10.** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định và có đạo hàm trên  $\mathbb{R}$ . Biết hàm số  $y = f'(x)$  liên tục và có đồ thị trên  $\mathbb{R}$  như trong hình vẽ bên. Hỏi hàm số  $y = f(x^2)$  có bao nhiêu điểm cực đại?

- A. 2.      B. 3.  
C. 1.      D. 0.



**Câu 11.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm trên  $\mathbb{R}$  và có bảng xét dấu của  $y = f'(x)$  như sau. Hỏi hàm số  $g(x) = f(x^2 - 2x)$  có bao nhiêu điểm cực tiểu?

|      |           |      |     |     |           |     |     |     |
|------|-----------|------|-----|-----|-----------|-----|-----|-----|
| $x$  | $-\infty$ | $-2$ | $1$ | $3$ | $+\infty$ |     |     |     |
| $f'$ |           | $-$  | $0$ | $+$ | $0$       | $+$ | $0$ | $-$ |

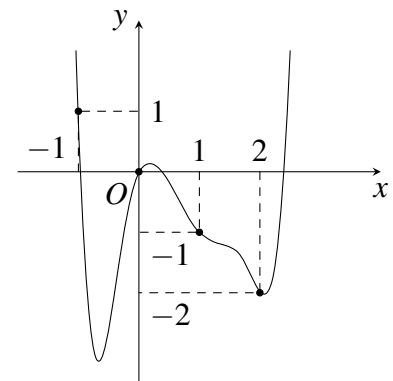
- A. 1.      B. 2.      C. 3.      D. 4.

**Câu 12.** Cho hàm số  $f(x)$  có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Hỏi hàm số  $y = f(x^2 + 1)$  có bao nhiêu điểm cực trị.

|      |           |      |           |           |     |
|------|-----------|------|-----------|-----------|-----|
| $x$  | $-\infty$ | $-2$ | $1$       | $+\infty$ |     |
| $y'$ | $-$       | $0$  | $+$       | $0$       | $+$ |
| $y$  | $+\infty$ | $-2$ | $+\infty$ |           |     |

- A. 0.      B. 2.  
C. 3.      D. 1.

**Câu 13.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm trên  $\mathbb{R}$ . Đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  như hình vẽ bên. Hàm số  $g(x) = 2f(x) + x^2$  đạt cực tiểu tại điểm nào sau đây?



- A.  $x = -1$   
B.  $x = 0$ .  
C.  $x = 1$ .  
D.  $x = 2$ .

**Câu 14.** Tìm giá trị thực của tham số  $m$  để hàm số  $y = x^3 - 3x^2 + mx$  đạt cực tiểu tại  $x = 2$ .

- A.  $m = 0$ .      B.  $m = -2$ .      C.  $m = 1$ .      D.  $m = 2$ .

**Câu 15.** Biết với  $m = m_0$  thì hàm số  $y = x^3 - mx + 1$  đạt cực đại tại  $x = -2$ . Tìm khẳng định đúng.

- A.  $m_0 \in (0; 3)$ .      B.  $m_0 \in (10; 14)$ .      C.  $m_0 \in (7; 10)$ .      D.  $m_0 \in (4; 6)$ .

**Câu 16.** Hàm số  $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (3m - 2)x + 1$  có 2 cực trị khi và chỉ khi

- A.  $m > 1$ .      B.  $1 < m < 2$ .      C.  $m < 1$  hoặc  $m > 2$ .      D.  $m = 1$ .

**Câu 17.** Hàm số  $y = x^3 - 3x + 1 - m$  với  $m$  là tham số. Hàm số có giá trị cực đại và giá trị cực tiểu trái dấu khi

- A.  $m = -1$  hoặc  $m = 3$ .      B.  $-1 < m < 3$ .  
C.  $m < -1$  hoặc  $m > 3$ .      D.  $-1 < m \leq 3$ .

**Câu 18.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để hàm số  $y = -x^4 + 2(m - 1)x^2 - m + 7$  có ba điểm cực trị.

- A.  $m < 1$ .      B.  $m > 1$ .      C.  $m \geq 1$ .      D.  $m \leq 1$ .

**Câu 19.** Tập hợp các số thực  $m$  thỏa mãn hàm số  $y = mx^4 - x^2 + 1$  có đúng một điểm cực trị là

- A.  $(-\infty; 0)$ .      B.  $(-\infty; 0]$ .      C.  $(0; +\infty)$ .      D.  $[0; +\infty)$ .

**Câu 20.** Tìm tất cả các giá trị thực của  $m$  sao cho điểm cực tiểu của đồ thị hàm số  $y = x^3 + x^2 + mx - 1$  nằm bên phải trục tung.

- A.  $m < 0$ .      B.  $0 < m < \frac{1}{3}$ .      C.  $m < \frac{1}{3}$ .      D. Không tồn tại.

**Câu 21.** Biết  $m_0$  là giá trị của tham số  $m$  để hàm số  $y = x^3 - 3x^2 + mx - 1$  có hai điểm cực trị  $x_1, x_2$  sao cho  $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 13$ . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A.  $m_0 \in (-1; 7)$ .      B.  $m_0 \in (-15; -7)$ .      C.  $m_0 \in (7; 10)$ .      D.  $m_0 \in (-7; -1)$ .

**Câu 22.** Cho hàm số  $y = 2x^3 + 3(m - 1)x^2 + 6(m - 2)x - 18$ . Tập hợp tất cả các giá trị của tham số  $m$  để hàm số có hai điểm cực trị thuộc khoảng  $(-5; 5)$  là

- A.  $(-\infty; -3) \cup (7; +\infty)$ .      B.  $(-3; +\infty) \setminus \{3\}$ .  
C.  $(-\infty; 7) \setminus \{3\}$ .      D.  $(-3; 7) \setminus \{3\}$ .

**Câu 23.** Cho điểm  $A(-1;3)$ . Gọi  $m_1$  và  $m_2$  là các giá trị của tham số  $m$  để đồ thị hàm số  $y = x^3 - 3mx^2 + m$  có hai điểm cực trị  $B$  và  $C$  thỏa ba điểm  $A, B, C$  thẳng hàng. Tính  $m_1 + m_2$ .

- A.  $m_1 + m_2 = \frac{5}{2}$ .      B.  $m_1 + m_2 = -\frac{1}{2}$ .      C.  $m_1 + m_2 = 0$ .      D.  $m_1 + m_2 = -1$ .

**Câu 24.** Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để đồ thị hàm số  $y = x^3 + 2x^2 + (m-3)x + m$  có hai điểm cực trị và điểm  $M(9;-5)$  nằm trên đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị.

- A.  $m = 3$ .      B.  $m = 2$ .      C.  $m = -5$ .      D.  $m = -1$ .

**Câu 25.** Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của  $m$  để hàm số  $y = x^8 + (m-2)x^5 - (m^2-4)x^4 + 1$  đạt cực tiểu tại  $x = 0$ ?

- A. 3.      B. 5.      C. 4.      D. Vô số.

**Câu 26.** Cho hàm số  $y = f(x)$  biết  $f'(x) = x^2(x-1)^3(x^2 - 2mx + m + 6)$ . Số giá trị nguyên của tham số  $m$  để hàm số đã cho có đúng một điểm cực trị là

- A. 7.      B. 5.      C. 6.      D. 4.

**Câu 27.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  sao cho đồ thị của hàm số  $y = x^4 + 2mx^2 + 1$  có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông cân.

- A.  $m = -\frac{1}{\sqrt[3]{9}}$ .      B.  $m = -1$ .      C.  $m = \frac{1}{\sqrt[3]{9}}$ .      D.  $m = 1$ .

**Câu 28.** Với giá trị nào của  $m$  thì đồ thị hàm số  $y = x^4 - 2(m-1)x^2 + m^4 - 3m^2 + 2017$  có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích bằng 32?

- A. 2.      B. 3.      C. 5.      D. 4.

**Câu 29.** Đồ thị hàm số  $y = -\frac{1}{3}x^4 - mx^2 + m^2 - 1$  có 3 điểm cực trị tạo thành 3 đỉnh của một tam giác đều khi và chỉ khi

- A.  $m = 2$ .      B.  $m = -2$ .      C.  $m = 1$ .      D.  $m = \sqrt[3]{\frac{8}{3}}$ .

**Câu 30.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  sao cho đồ thị hàm số  $y = x^4 - 2mx^2 + 2m^4 - m$  có ba điểm cực trị đều thuộc các trục tọa độ.

- A.  $m = 2$ .      B.  $m = 3$ .      C.  $m = 1$ .      D.  $m = \frac{1}{2}$ .

—HẾT—

## § 3. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT - NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

### A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

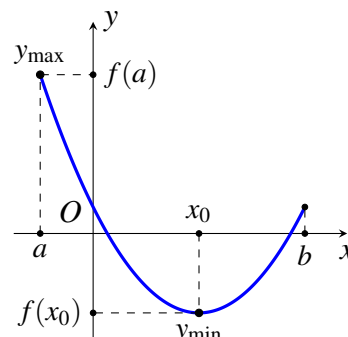
1 Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định trên tập  $\mathcal{D}$ . Ta có

- $M$  là giá trị lớn nhất của hàm số nếu  $\begin{cases} f(x) \leq M, \forall x \in \mathcal{D} \\ \exists x_0 \in \mathcal{D} : f(x_0) = M \end{cases}$

Kí hiệu  $\max_{x \in \mathcal{D}} f(x) = M$

- $n$  là giá trị nhỏ nhất của hàm số nếu  $\begin{cases} f(x) \geq n, \forall x \in \mathcal{D} \\ \exists x_0 \in \mathcal{D} : f(x_0) = n \end{cases}$

Kí hiệu  $\min_{x \in \mathcal{D}} f(x) = n$



### 2 Các phương pháp thường dùng để tìm max - min

- Dùng đạo hàm (đối với hàm một biến), lập bảng biến thiên.
- Dùng bất đẳng thức đánh giá và kiểm tra dấu bằng

① Bất đẳng thức Cauchy: Với  $a_1; a_2; \dots; a_n$  là các số thực không âm, ta luôn có

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq n \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$$

Dấu "=" xảy ra khi  $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ .

Trường hợp thường gặp Cauchy cho 2 số hoặc 3 số:

- $a_1 + a_2 \geq 2\sqrt{a_1 a_2}$ .
- $a_1 + a_2 + a_3 \geq 3\sqrt[3]{a_1 a_2 a_3}$ .

② Bất đẳng thức Bu-nhia-cốp-xki: Với hai bộ số  $a_1; a_2; \dots; a_n$  và  $b_1; b_2; \dots; b_n$ , ta luôn có

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) (b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)$$

Dấu "=" xảy ra khi  $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$ .

- Dùng điều kiện có nghiệm của phương trình.

Giả sử  $y_0$  thuộc miền giá trị của hàm số  $y = f(x)$ . Khi đó, tồn tại  $x \in \mathcal{D}$  để phương trình  $f(x) = y_0$  có nghiệm. Biện luận điều kiện này, ta sẽ tìm được "khoảng dao động" của  $y_0$ . Từ đó suy ra max, min.

### B CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

#### 📁 DẠNG 1. Tìm max - min của hàm số cho trước

Phương pháp giải.

🌸 Ví dụ 1. Gọi  $M, m$  lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = x^3 + 3x^2 - 9x + 1$  trên  $[-4; 4]$ . Tính tổng  $M + m$ .

A. 12.

B. 98.

C. 17.

D. 73.

**Ví dụ 2.** Giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = \frac{x-1}{x+1}$  trên đoạn  $[0;3]$  là

- A.  $\min_{[0;3]} y = \frac{1}{2}$ .      B.  $\min_{[0;3]} y = -3$ .      C.  $\min_{[0;3]} y = 1$ .      D.  $\min_{[0;3]} y = -1$ .

**Ví dụ 3.** Giá trị lớn nhất của hàm số  $y = \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 1}$  trên đoạn  $\left[-2; \frac{1}{2}\right]$  bằng

- A. 4.      B. -3.      C.  $-\frac{7}{2}$ .      D.  $-\frac{13}{3}$ .

**Ví dụ 4.** Tìm giá trị lớn nhất  $M$  của hàm số  $y = \sqrt{7 + 6x - x^2}$ .

- A.  $M = 4$ .      B.  $M = \sqrt{7}$ .      C.  $M = 7$ .      D.  $M = 3$ .

**Ví dụ 5.** Giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = 3x + \frac{4}{x^2}$  trên khoảng  $(0; +\infty)$  bằng

- A.  $3\sqrt[3]{9}$ .      B.  $2\sqrt[3]{9}$ .      C.  $\frac{33}{5}$ .      D.  $\frac{25}{4}$ .

**Ví dụ 6.** Giá trị lớn nhất của hàm số  $f(x) = \frac{mx+1}{x-m}$  trên đoạn  $[1;2]$  bằng 3. Khi đó giá trị  $m$  thuộc khoảng nào dưới đây?

- A.  $\left(-\frac{3}{4}; 0\right)$ .      B.  $\left(1; \frac{3}{2}\right)$ .      C.  $\left(0; \frac{3}{4}\right)$ .      D.  $\left(\frac{3}{4}; 11\right)$ .

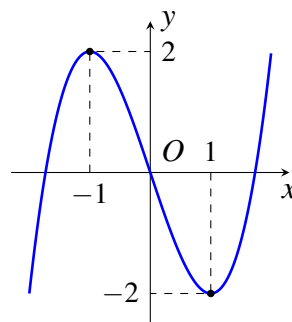
**Ví dụ 7.** Cho hàm số  $y = f(x)$  là hàm số liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?

- A. Cực đại của hàm số là 4.  
B. Cực tiểu của hàm số là 3.  
C.  $\max_{\mathbb{R}} y = 4$ .  
D.  $\min_{\mathbb{R}} y = 3$ .

|         |           |            |     |            |           |            |     |            |           |
|---------|-----------|------------|-----|------------|-----------|------------|-----|------------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $-1$       | $0$ | $1$        | $+\infty$ |            |     |            |           |
| $f'(x)$ |           | $+$        | $0$ | $-$        | $0$       | $-$        |     |            |           |
| $f(x)$  |           |            | $4$ |            | $4$       |            |     |            |           |
|         | $-\infty$ | $\nearrow$ |     | $\searrow$ | $3$       | $\nearrow$ | $4$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

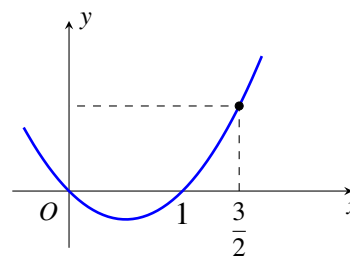
**Ví dụ 8.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị là đường cong ở hình bên. Tìm giá trị nhỏ nhất  $m$  của hàm số  $y = f(x)$  trên đoạn  $[-1;1]$ .

- A.  $m = 2$ .      B.  $m = -2$ .  
C.  $m = 1$ .      D.  $m = -1$ .



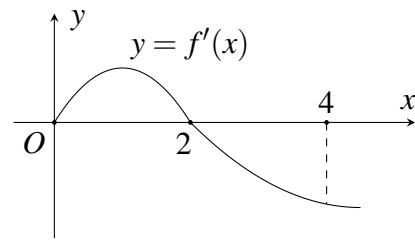
**Ví dụ 9.** Cho hàm số  $y = f(x)$ , biết hàm số  $y = f'(x)$  có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Hàm số  $y = f(x)$  đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn  $\left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$  tại điểm nào sau đây?

- A.  $x = \frac{3}{2}$ .      B.  $x = \frac{1}{2}$ .  
C.  $x = 1$ .      D.  $x = 0$ .



**Ví dụ 10.** Cho hàm số  $f(x)$  có đồ thị của hàm số  $y = f'(x)$  như hình vẽ. Biết  $f(0) + f(1) - 2f(2) = f(4) - f(3)$ . Giá trị nhỏ nhất  $m$ , giá trị lớn nhất  $M$  của hàm số  $f(x)$  trên đoạn  $[0; 4]$  là

- A.  $m = f(4), M = f(1)$ .      B.  $m = f(4), M = f(2)$ .  
C.  $m = f(1), M = f(2)$ .      D.  $m = f(0), M = f(2)$ .



## DẠNG 2. Một số bài toán vận dụng

Phương pháp giải.

1. Bài toán chuyển động:

- Gọi  $s(t)$  là hàm quãng đường;  $v(t)$  là hàm vận tốc;  $a(t)$  là hàm gia tốc;
- Khi đó  $s'(t) = v(t)$ ;  $v'(t) = a(t)$ .

2. Bài toán thực tế – tối ưu.

- Biểu diễn dữ kiện cần đạt max – min qua một hàm  $f(t)$ .
- Khảo sát hàm  $f(t)$  trên miền điều kiện "đúng" và suy ra kết quả.

**Ví dụ 11.** Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = \cos^3 x + 9\cos x + 6\sin^2 x - 1$  là

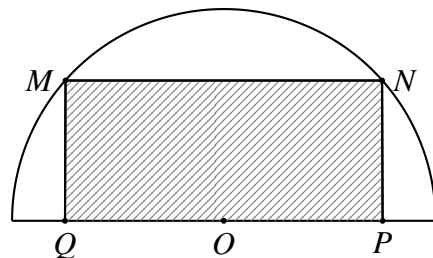
- A.  $-2$ .      B.  $-1$ .      C.  $1$ .      D.  $2$ .

**Ví dụ 12.** Một chất điểm chuyển động với quãng đường  $s(t)$  cho bởi công thức  $s(t) = 6t^2 - t^3$ ,  $t$  (giây) là thời gian. Hỏi trong khoảng thời gian từ 0 đến 6 giây, vận tốc  $v$  (m/s) của chất điểm đạt giá trị lớn nhất tại thời điểm  $t$  (giây) bằng bao nhiêu?

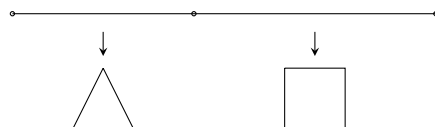
- A.  $t = 3$  s.      B.  $t = 4$  s.      C.  $t = 2$  s.      D.  $t = 6$  s.

**Ví dụ 13.** Từ một tấm tôn có hình dạng là nửa hình tròn bán kính  $R = 3$ , người ta muốn cắt ra một hình chữ nhật (hình vẽ bên). Diện tích lớn nhất có thể của tấm tôn hình chữ nhật là

- A.  $\frac{9}{2}$ .      B.  $6\sqrt{2}$ .      C.  $9$ .      D.  $9\sqrt{2}$ .



**Ví dụ 14.** Một sợi dây có chiều dài là 6 m, được chia thành 2 phần. Phần thứ nhất được uốn thành hình tam giác đều, phần thứ hai uốn thành hình vuông. Hỏi độ dài của cạnh hình tam giác đều bằng bao nhiêu để tổng diện tích 2 hình thu được là nhỏ nhất?



- A.  $\frac{12}{4 + \sqrt{3}}$  m.      B.  $\frac{18\sqrt{3}}{4 + \sqrt{3}}$  m.      C.  $\frac{36\sqrt{3}}{4 + \sqrt{3}}$  m.      D.  $\frac{18}{9 + 4\sqrt{3}}$  m.

**BẢNG TÔ ĐÁP ÁN TỰ LUYỆN**

Học sinh làm BTTL xong, tô phương án đúng. Buổi học sau, cùng với GV kiểm tra kết quả.

|                    |                     |                     |                     |                     |
|--------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| 1. (A) (B) (C) (D) | 7. (A) (B) (C) (D)  | 13. (A) (B) (C) (D) | 19. (A) (B) (C) (D) | 25. (A) (B) (C) (D) |
| 2. (A) (B) (C) (D) | 8. (A) (B) (C) (D)  | 14. (A) (B) (C) (D) | 20. (A) (B) (C) (D) | 26. (A) (B) (C) (D) |
| 3. (A) (B) (C) (D) | 9. (A) (B) (C) (D)  | 15. (A) (B) (C) (D) | 21. (A) (B) (C) (D) | 27. (A) (B) (C) (D) |
| 4. (A) (B) (C) (D) | 10. (A) (B) (C) (D) | 16. (A) (B) (C) (D) | 22. (A) (B) (C) (D) | 28. (A) (B) (C) (D) |
| 5. (A) (B) (C) (D) | 11. (A) (B) (C) (D) | 17. (A) (B) (C) (D) | 23. (A) (B) (C) (D) | 29. (A) (B) (C) (D) |
| 6. (A) (B) (C) (D) | 12. (A) (B) (C) (D) | 18. (A) (B) (C) (D) | 24. (A) (B) (C) (D) | 30. (A) (B) (C) (D) |

**Câu 1.** Gọi  $M$  và  $m$  lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 35$  trên đoạn  $[-4; 4]$ . Tính  $T = M + 2m$ .

- A.  $T = -41$ . B.  $T = -44$ . C.  $T = -43$ . D.  $T = -42$ .

**Câu 2.** Giá trị lớn nhất của hàm số  $y = -x^4 + 4x^2$  trên đoạn  $[-1; 2]$  bằng

- A. 1. B. 4. C. 5. D. 3.

**Câu 3.** Giá trị lớn nhất của hàm số  $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$  trên đoạn  $[1; 3]$  bằng

- A.  $\frac{6}{7}$ . B.  $\frac{5}{6}$ . C.  $\frac{4}{5}$ . D.  $\frac{2}{3}$ .

**Câu 4.** Giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = \frac{x^2+3}{x+1}$  trên đoạn  $[-4; -2]$  là

- A.  $\min_{[-4; -2]} y = -7$ . B.  $\min_{[-4; -2]} y = -\frac{19}{3}$ . C.  $\min_{[-4; -2]} y = -8$ . D.  $\min_{[-4; -2]} y = -6$ .

**Câu 5.** Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = x + \sqrt{12 - 3x^2}$ .

- A.  $\max y = 4, \min y = 2$ . B.  $\max y = 4, \min y = -2$ .  
C.  $\max y = 2, \min y = -2$ . D.  $\max y = 2, \min y = -4$ .

**Câu 6.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình bên. Xét ba khẳng định sau:

|      |           |            |     |            |           |            |     |            |
|------|-----------|------------|-----|------------|-----------|------------|-----|------------|
| $x$  | $-\infty$ | $-2$       | $0$ | $2$        | $+\infty$ |            |     |            |
| $y'$ |           | $+$        | $0$ | $-$        | $0$       | $+$        | $0$ | $-$        |
| $y$  |           |            | $3$ |            | $3$       |            |     |            |
|      | $-\infty$ | $\nearrow$ |     | $\searrow$ | $-1$      | $\nearrow$ |     | $\searrow$ |
|      |           |            |     |            |           |            |     | $-\infty$  |

(1) Hàm số đồng biến trên khoảng  $(0; 2)$ .

(2) Hàm số có một cực đại.

(3) Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 3.

Số khẳng định đúng trong ba khẳng định trên là

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 0.

**Câu 7.** Tổng giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của hàm số  $y = \sqrt{2 - x^2} - x$  bằng bao nhiêu?

- A.  $2 - \sqrt{2}$ . B. 2. C.  $2 + \sqrt{2}$ . D. 1.

**Câu 8.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

|      |           |      |     |     |           |     |
|------|-----------|------|-----|-----|-----------|-----|
| $x$  | $-\infty$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $+\infty$ |     |
| $y'$ | $-$       | $-$  | $0$ | $+$ | $0$       | $-$ |

Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.  $\min_{(-1; +\infty)} f(x) = f(0)$ . B.  $\max_{(0; +\infty)} f(x) = f(1)$ .  
C.  $\max_{(-1; 1]} f(x) = f(0)$ . D.  $\min_{(-\infty; -1)} f(x) = f(-1)$ .

**Câu 9.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có bảng biến thiên như hình bên dưới. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. Hàm số có hai điểm cực trị.  
 B. Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng 0 và giá trị lớn nhất bằng 1.  
 C. Hàm số có giá trị cực đại bằng 0.  
 D. Hàm số có đạt cực tiểu tại  $x = 0$  và đạt cực đại tại  $x = 1$ .

|      |           |      |     |           |
|------|-----------|------|-----|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $-1$ | $0$ | $+\infty$ |
| $y'$ |           | $-$  | $0$ | $+$       |
| $y$  | $+\infty$ |      | $0$ | $-\infty$ |

**Câu 10.** Trên khoảng  $(0; 1)$ , hàm số  $y = x^3 + \frac{1}{x}$  đạt giá trị nhỏ nhất tại  $x_0$  bằng

- A.  $\frac{1}{2}$ .      B.  $\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$ .      C.  $\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ .      D.  $\frac{1}{\sqrt{3}}$ .

**Câu 11.** Hàm số  $y = 4 \sin x - 3 \cos x$  có giá trị lớn nhất  $M$ , giá trị nhỏ nhất  $m$  là

- A.  $M = 7, m = 1$ .      B.  $M = 5, m = -5$ .      C.  $M = 1, m = -7$ .      D.  $M = 7, m = -7$ .

**Câu 12.** Cho hàm số  $y = \frac{x - m^2 + m}{x + 1}$ . Tổng các giá trị của tham số  $m$  sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn  $[0; 1]$  bằng  $-2$  là

- A. 2.      B.  $-2$ .      C. 0.      D. 1.

**Câu 13.** Gọi  $T$  là tập hợp tất cả giá trị của tham số  $m$  để hàm số  $y = \frac{mx + 1}{x + m^2}$  có giá trị lớn nhất trên đoạn  $[2; 3]$  bằng  $\frac{5}{6}$ . Tính tổng  $S$  của các phần tử trong  $T$ .

- A.  $S = \frac{18}{5}$ .      B.  $S = \frac{17}{5}$ .      C.  $S = 6$ .      D.  $S = 2$ .

**Câu 14.** Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = \frac{\cos^2 x - 5 \cos x + 3}{\cos x - 6}$  là

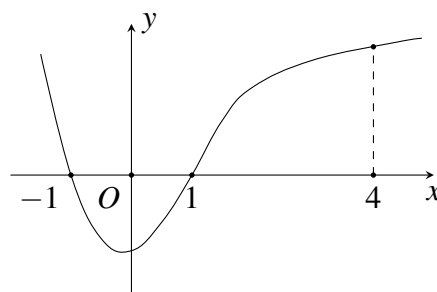
- A.  $y_{\max} = \frac{1}{5}; y_{\min} = -\frac{9}{7}$ .      B.  $y_{\max} = 13; y_{\min} = 4$ .  
 C.  $y_{\max} = 1; y_{\min} = -\frac{9}{7}$ .      D.  $y_{\max} = \frac{1}{5}; y_{\min} = -1$ .

**Câu 15.** Tìm giá trị nhỏ nhất  $m$  của hàm số  $y = \sqrt{1+x} + \sqrt{3-x} - \sqrt{1+x} \cdot \sqrt{3-x}$  trên tập xác định của nó.

- A.  $m = 2\sqrt{2} - 1$ .      B.  $m = \frac{4}{5}$ .      C.  $m = 2\sqrt{2} - 2$ .      D.  $m = \frac{9}{10}$ .

**Câu 16.** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm trên  $\mathbb{R}$  và có đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  như hình vẽ. Biết rằng  $f(-1) + f(2) = f(1) + f(4)$ , các điểm  $A(1; 0), B(-1; 0)$  thuộc đồ thị. Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của  $f(x)$  trên đoạn  $[-1; 4]$  lần lượt là

- A.  $f(1), f(-1)$ .      B.  $f(0), f(2)$ .  
 C.  $f(-1), f(4)$ .      D.  $f(1), f(4)$ .



**Câu 17.** Tìm  $m$  để bất phương trình  $x^4 - 4x^2 - m + 1 \leq 0$  có nghiệm thực.

- A.  $m \geq -3$ .      B.  $m \leq 1$ .      C.  $m \geq 1$ .      D.  $m \leq -3$ .

**Câu 18.** Cho hàm số  $f(x) = \frac{x - m}{x + 1}$ , với  $m$  là tham số. Biết  $\min_{[0;3]} f(x) + \max_{[0;3]} f(x) = -2$ . Hãy chọn kết luận đúng?

- A.  $m = 2$ .      B.  $m > 2$ .      C.  $m = -2$ .      D.  $m < -2$ .



**Câu 19.** Tìm giá trị của tham số  $m$  để bất phương trình  $\frac{x^2 + 3x + 3}{x + 1} \geq m$  nghiệm đúng với mọi  $x \in [0; 1]$ .

- A.  $m \leq 3$ .                      B.  $m \leq \frac{7}{2}$ .                      C.  $m \geq \frac{7}{2}$ .                      D.  $m \geq 3$ .

**Câu 20.** Cho  $a > 0$ . Giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = \frac{7(a^2 + 9)}{a} + \frac{a}{a^2 + 9}$  bằng

- A.  $\frac{251}{3}$ .                      B.  $2\sqrt{7}$ .                      C.  $\frac{253}{3}$ .                      D.  $\frac{253}{6}$ .

**Câu 21.** Cho hai số thực  $x, y$  thay đổi thỏa mãn điều kiện  $x^2 + y^2 = 2$ . Gọi  $M, m$  lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = 2(x^3 + y^3) - 3xy$ . Giá trị của  $M + m$  bằng

- A.  $-4$ .                      B.  $-\frac{1}{2}$ .                      C.  $-6$ .                      D.  $1 - 4\sqrt{2}$ .

**Câu 22.**  $M, m$  lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = \cos x(1 + 2\cos 2x)$ . Tìm  $2M - m$ .

- A.  $9$ .                      B.  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ .                      C.  $6 + \frac{\sqrt{3}}{9}$ .                      D.  $\frac{2\sqrt{3}}{9} + 3$ .

**Câu 23.** Cho biểu thức  $P = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$  với  $x, y$  khác 0. Giá trị nhỏ nhất của  $P$  bằng

- A.  $-2$ .                      B.  $0$ .                      C.  $-1$ .                      D.  $1$ .

**Câu 24.** Tìm giá trị nhỏ nhất  $m$  của hàm số  $f(x) = 4x^2 + \frac{1}{x} - 4$  trên khoảng  $(0; +\infty)$ .

- A.  $m = -1$ .                      B.  $m = -4$ .                      C.  $m = 7$ .                      D.  $m = -3$ .

**Câu 25.** Gọi  $m$  và  $M$  lần lượt là giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số  $y = \frac{2x + 19}{x^2 + 16x + 68}$ . Tính tích  $mM$ .

- A.  $mM = -0.20$ .                      B.  $mM = -0.25$ .                      C.  $mM = -0.15$ .                      D.  $mM = -0.30$ .

**Câu 26.** Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số  $f(x) = \cos^2 2x - \sin x \cos x + 4$  trên  $\mathbb{R}$ .

- A.  $\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \frac{7}{2}$ .                      B.  $\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 3$ .                      C.  $\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \frac{10}{3}$ .                      D.  $\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \frac{16}{5}$ .

**Câu 27.** Cho  $x, y$  là hai số thực không âm thỏa mãn  $x + y = 2$ . Gọi  $a, b$  lần lượt là giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức  $P = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + y^2 - x + 1$ . Khi đó kết luận nào sau đây là đúng?

- A.  $a + b = \frac{22}{3}$ .                      B.  $a + b = \frac{10}{3}$ .                      C.  $a + b = 8$ .                      D.  $a + b = \frac{32}{3}$ .

**Câu 28.** Cho các số thực  $x, y$  thỏa mãn  $x^2 + 2xy + 3y^2 = 4$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức  $P = (x - y)^2$ .

- A.  $\max P = 8$ .                      B.  $\max P = 16$ .                      C.  $\max P = 12$ .                      D.  $\max P = 4$ .

**Câu 29.** Một người thợ muốn làm một chiếc thùng hình hộp chữ nhật có đáy là hình vuông và không có nắp, biết thể tích của khối hộp là  $V = 2,16 \text{ m}^3$ . Giá nguyên liệu để làm bốn mặt bên là 36000 đồng/m<sup>2</sup> và giá nguyên liệu để làm đáy là 90000 đồng/m<sup>2</sup>. Tính các kích thước của hình hộp để chi phí làm chiếc thùng đó là nhỏ nhất.

- A. Cạnh đáy là 1,2 m, chiều cao là 1,8 m.                      B. Cạnh đáy là 1,5 m, chiều cao là 1,2 m.  
C. Cạnh đáy là 1,7 m, chiều cao là 1 m.                      D. Cạnh đáy là 1 m, chiều cao là 1,7 m.

**Câu 30.** Cho ba số dương  $x, y, z$  theo thứ tự lập thành cấp số cộng. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{\sqrt{x^2 + 8yz} + 3}{\sqrt{(2y + z)^2 + 6}}$$

- A.  $\frac{5}{2\sqrt{2}}$ .                      B.  $\frac{5}{\sqrt{10}}$ .                      C.  $\frac{6}{\sqrt{10}}$ .                      D.  $\frac{6}{\sqrt{15}}$ .

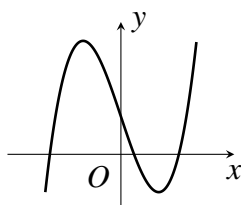
—HẾT—

## § 4. ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

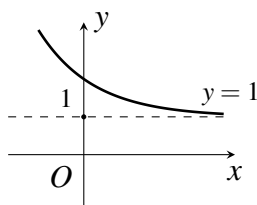
### A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

#### 1 Đường tiệm cận ngang (TCN)

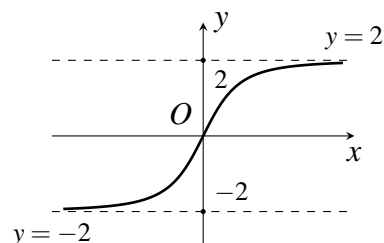
☑ Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định trên một khoảng vô hạn  $(a; +\infty)$ ,  $(-\infty; b)$  hoặc  $(-\infty; +\infty)$ . Đường thẳng  $y = y_0$  là TCN của đồ thị hàm số  $y = f(x)$  nếu  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y_0$  hoặc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = y_0$ .



Không có TCN



Có TCN  $y = 1$



Có TCN  $y = 2, y = -2$

☑ Các bước tìm TCN:

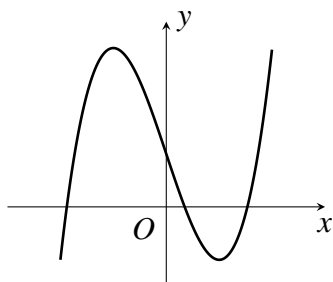
- ① Tính  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  và  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .
- ② Xem ở "vị trí" nào ra kết quả hữu hạn thì ta kết luận có tiệm cận ngang ở "vị trí" đó.

☑ Sử dụng máy tính cầm tay: Nhập biểu thức  $f(x)$ .

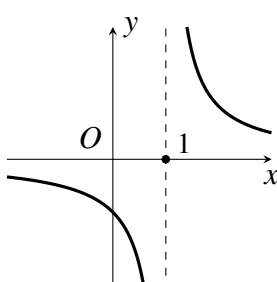
- ① Bấm **CACI**  $X = 10^8$  để kiểm tra khi  $x \rightarrow +\infty$ .
- ② Bấm **CACI**  $X = -10^8$  để kiểm tra khi  $x \rightarrow -\infty$ .

#### 2 Đường tiệm cận đứng (TCD)

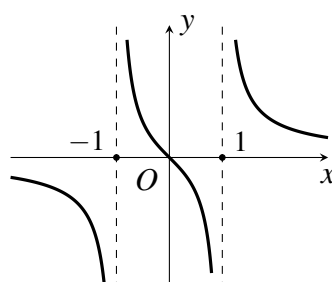
☑ Đường thẳng  $x = x_0$  là TCD của đồ thị hàm số  $y = f(x)$  nếu  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty$  hoặc  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty$ .



Không có TCD



Có TCD  $x = 1$



Có TCD  $x = -1$  và  $x = 1$

☑ Các bước tìm TCD

- ① Tìm nghiệm của mẫu, giả sử nghiệm đó là  $x = x_0$ .
- ② Tính giới hạn một bên tại  $x_0$ . Nếu xảy ra  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty$  hoặc  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty$  thì ta kết luận  $x = x_0$  là đường tiệm cận đứng.

☑ Sử dụng máy tính cầm tay: Nhập biểu thức  $f(x)$ .

- ① Bấm **CACI**  $X = x_0 - 0.000001$  để kiểm tra khi  $x \rightarrow x_0^-$ .
- ② Bấm **CACI**  $X = x_0 + 0.000001$  để kiểm tra khi  $x \rightarrow x_0^+$ .

## B CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

**DẠNG 1.** Cho hàm số  $y = f(x)$ , tìm tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị tương ứng.

*Phương pháp giải.* Thực hiện theo lý thuyết đã nêu trên. Chú ý các vấn đề thường gặp sau:

☑ Tính giới hạn của hàm số dạng phân thức  $\frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots}{b_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots}$  khi  $x \rightarrow \pm\infty$  để xác định TCN, ta thường gặp:

- ① bậc tử < bậc mẫu thì kết quả bằng 0.
- ② bậc tử = bậc mẫu thì kết quả bằng  $\frac{a_n}{b_m}$ .
- ③ bậc tử > bậc mẫu thì kết quả bằng  $\infty$ . Lúc này đồ thị không có đường TCN.

☑ Khi tìm TCD, trước tiên ta tìm **nghiệm  $x_0$  của mẫu**. Chú ý:

- ① Nếu  $x_0$  không là nghiệm của tử số thì  $x = x_0$  là một TCD.
- ② Nếu  $x_0$  là nghiệm của tử số thì ta kiểm tra lại bằng máy tính.
- ③ Nếu  $x = x_0$  không xác định đối với tử số thì  $x = x_0$  bị loại.

☑ Đồ thị hàm số  $y = \frac{ax+b}{cx+d}$  luôn có TCD  $x = -\frac{d}{c}$  và TCN:  $y = \frac{a}{c}$ .

**Ví dụ 1.** Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số  $y = \frac{2x-4}{x+2}$  là

- A.  $y = 2$ .                      B.  $x = 2$ .                      C.  $x = -2$ .                      D.  $y = -2$ .

**Ví dụ 2.** Tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số  $y = \frac{2x+1}{1-x}$ .

- A.  $y = -2$ .                      B.  $x = -2$ .                      C.  $y = 2$ .                      D.  $x = 1$ .

**Ví dụ 3.** Hàm số nào có đồ thị nhận đường thẳng  $x = 2$  làm đường tiệm cận đứng?

- A.  $y = x - 2 + \frac{1}{x+1}$ .      B.  $y = \frac{1}{x+1}$ .                      C.  $y = \frac{2}{x+2}$ .                      D.  $y = \frac{5x}{2-x}$ .

**Ví dụ 4.** Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số  $y = \frac{3x+1}{x-2}$  là đường thẳng

- A.  $x = -2$ .                      B.  $x = 2$ .                      C.  $y = 3$ .                      D.  $y = -\frac{1}{2}$ .

**Ví dụ 5.** Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số  $y = \frac{x+1}{x^2+4x-5}$  có phương trình là

- A.  $x = -1$ .                      B.  $y = 1; y = -5$ .                      C.  $x = 1; x = -5$ .                      D.  $x = \pm 5$ .

**Ví dụ 6.** Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số  $y = \frac{3}{x-2}$  là

- A. 1.                      B. 2.                      C. 0.                      D. 3.

**Ví dụ 7.** Tìm số đường tiệm cận của đồ thị hàm số  $y = \frac{x^2-3x+2}{x^2-4}$ .

- A. 1.                      B. 0.                      C. 2.                      D. 3.

**Ví dụ 8.** Tìm tọa độ giao điểm  $I$  của hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số  $y = \frac{2x-1}{2-3x}$ .

A.  $I\left(\frac{2}{3}; 1\right)$ .      B.  $I\left(\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}\right)$ .      C.  $I\left(\frac{3}{2}; -\frac{2}{3}\right)$ .      D.  $I\left(-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$ .

**Ví dụ 9.** Cho hàm số  $y = \frac{1-2x}{x+3}$  có đồ thị  $(C)$ . Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. Tâm đối xứng của đồ thị  $(C)$  là điểm  $I(3; 2)$ .  
 B. Điểm  $P(-3; 2017)$  thuộc đường tiệm cận đứng của đồ thị  $(C)$ .  
 C. Đường thẳng  $y = -2$  là tiệm cận ngang của  $(C)$ .  
 D. Đường thẳng  $x = -3$  là tiệm cận đứng của  $(C)$ .

**Ví dụ 10.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị là đường cong  $(C)$  và các giới hạn  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$ . Hỏi mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Đường thẳng  $y = 2$  là tiệm cận ngang của  $(C)$ .  
 B. Đường thẳng  $y = 1$  là tiệm cận ngang của  $(C)$ .  
 C. Đường thẳng  $x = 2$  là tiệm cận ngang của  $(C)$ .  
 D. Đường thẳng  $x = 2$  là tiệm cận đứng của  $(C)$ .

**Ví dụ 11. (Quốc Gia - 2018)** Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số  $y = \frac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x}$  là

A. 3.      B. 2.      C. 0.      D. 1.

**Ví dụ 12.** Đồ thị hàm số  $y = \sqrt{4x^2+4x+3} - \sqrt{4x^2+1}$  có bao nhiêu đường tiệm cận ngang?

A. 2.      B. 0.      C. 1.      D. 3.

**Ví dụ 13.** Hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số  $y = \frac{3x+1}{x-4}$  cắt hai trục tọa độ tại các điểm  $A, B$ . Bán kính  $R$  của đường tròn ngoại tiếp tam giác  $OAB$  là

A.  $R = 4$ .      B.  $R = 5$ .      C.  $R = \frac{5}{2}$ .      D.  $R = 3$ .

## DẠNG 2. Xác định TCN và TCD khi biết bảng biến thiên hàm số $y = f(x)$

Phương pháp giải.

☒ Nhìn "vị trí"  $\pm\infty$  để xác định đường TCN.

- ① Nếu "vị trí" nào ra kết quả hữu hạn thì vị trí đó có TCN.
- ② Nếu "vị trí" nào không tồn tại hoặc ra kết quả  $\infty$  thì "vị trí" đó không có TCN.

☒ Nhìn "vị trí có hai gạch sọc" để xác định TCD.

- ① Nếu "vị trí" nào xuất hiện  $\infty$  thì vị trí đó là TCD.
- ② Nếu "vị trí" nào không xuất hiện  $\infty$  ở cả hai bên (giới hạn trái và giới hạn phải) thì vị trí đó không là TCD.

**Ví dụ 14.** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định trên  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình bên. Chọn khẳng định đúng.

|      |                      |   |                                       |           |
|------|----------------------|---|---------------------------------------|-----------|
| $x$  | $-\infty$            | 0 | 1                                     | $+\infty$ |
| $y'$ | -                    | + | 0                                     | -         |
| $y$  | $+\infty$<br>↘<br>-1 |   | $-\infty$<br>↗<br>2<br>↘<br>$-\infty$ |           |

- A. Đồ thị hàm số có đúng một tiệm cận ngang.  
 B. Đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang.  
 C. Đồ thị hàm số có đúng một tiệm cận đứng.  
 D. Đồ thị hàm số không có tiệm đứng và tiệm cận ngang.

**Ví dụ 15.** Cho bảng biến thiên của hàm số  $y = f(x)$  như sau. Đồ thị của hàm số đã cho có tổng số bao nhiêu đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang?

|     |                             |                |                     |
|-----|-----------------------------|----------------|---------------------|
| $x$ | $-\infty$                   | $-\frac{1}{2}$ | $+\infty$           |
| $y$ | $-\infty$<br>↗<br>$+\infty$ |                | $+\infty$<br>↘<br>3 |

- A. 3.      B. 1.      C. 0.      D. 2.

**Ví dụ 16.** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định trên  $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$  liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình vẽ. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số là

|      |                      |    |                                       |   |                      |
|------|----------------------|----|---------------------------------------|---|----------------------|
| $x$  | $-\infty$            | -1 | 0                                     | 1 | $+\infty$            |
| $y'$ | -                    | -  | 0                                     | + | +                    |
| $y$  | -2<br>↘<br>$-\infty$ |    | $+\infty$<br>↘<br>1<br>↗<br>$+\infty$ |   | $-\infty$<br>↗<br>-2 |

- A. 1.      B. 2.      C. 3.      D. 4.

**Ví dụ 17.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây. Đồ thị hàm số  $y = f(x)$  có bao nhiêu đường tiệm cận?

|      |              |    |                                        |   |           |
|------|--------------|----|----------------------------------------|---|-----------|
| $x$  | $-\infty$    | -2 | 0                                      | 2 | $+\infty$ |
| $y'$ |              | +  | -                                      | 0 | +         |
| $y$  | -2<br>↗<br>3 |    | $+\infty$<br>↘<br>-2<br>↗<br>$+\infty$ |   |           |

- A. 4.      B. 2.      C. 3.      D. 1.

### **DẠNG 3. Một số bài toán biện luận theo tham số $m$**

*Phương pháp giải.*

**Ví dụ 18.** Tìm tất cả các giá trị của  $m$  để đồ thị hàm số  $y = \frac{mx+2}{x-5}$  có đường tiệm cận ngang đi qua điểm  $A(1;3)$ .

- A.  $m = -3$ .      B.  $m = 1$ .      C.  $m = -1$ .      D.  $m = 3$ .

**Ví dụ 19.** Cho hàm số  $y = \frac{ax+1}{bx-2}$ , xác định  $a$  và  $b$  để đồ thị của hàm số trên nhận đường thẳng  $x = 1$  làm tiệm cận đứng và đường thẳng  $y = \frac{1}{2}$  làm tiệm cận ngang.

- A.  $\begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \end{cases}$       B.  $\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$       C.  $\begin{cases} a = 2 \\ b = 2 \end{cases}$       D.  $\begin{cases} a = 2 \\ b = -2 \end{cases}$ .

**Ví dụ 20.** Tìm giá trị của  $m$  để đồ thị hàm số  $y = \frac{2x^2 - 5x + m}{x - m}$  có tiệm cận đứng.

- A.  $\begin{cases} m = 0 \\ m = 2 \end{cases}$       B.  $m \neq 0$ .      C.  $m \neq 2$ .      D.  $\begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq 2 \end{cases}$ .

**Ví dụ 21.** Biết rằng hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số  $y = \frac{2x+1}{x-m}$  (với  $m$  là tham số) tạo với hai trục tọa độ một hình chữ nhật có diện tích bằng 2. Giá trị của  $m$  là

- A.  $m = \pm 2$ .      B.  $m = -1$ .      C.  $m = 2$ .      D.  $m = \pm 1$ .

**Ví dụ 22.** Tìm tất cả các điểm trên đồ thị hàm số  $y = \frac{x+1}{x-2}$  sao cho tổng khoảng cách từ điểm đó đến hai đường tiệm cận là nhỏ nhất.

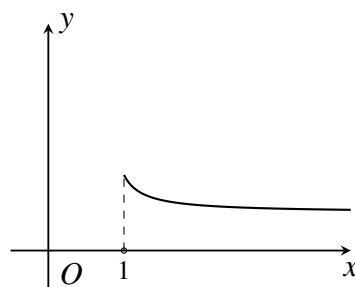
- A.  $(2 + \sqrt{3}; 1 + \sqrt{3})$  và  $(2 - \sqrt{3}; 1 - \sqrt{3})$ .      B.  $(1 + \sqrt{3}; 2 - \sqrt{3})$  và  $(1 - \sqrt{3}; 2 + \sqrt{3})$ .  
C.  $(1 + \sqrt{3}; 2 + \sqrt{3})$  và  $(1 - \sqrt{3}; 2 - \sqrt{3})$ .      D.  $(2 + \sqrt{3}; 1 - \sqrt{3})$  và  $(2 - \sqrt{3}; 1 + \sqrt{3})$ .

**Ví dụ 23.** Tìm tất cả các giá trị của tham số thực  $m$  để đồ thị hàm số  $y = \frac{x-2}{x^2 - mx + 1}$  có đúng 3 đường tiệm cận.

- A.  $\begin{cases} m > 2 \\ m \neq \frac{5}{2} \\ m < -2 \end{cases}$       B.  $\begin{cases} m > 2 \\ m < -2 \\ m \neq -\frac{5}{2} \end{cases}$       C.  $\begin{cases} m > 2 \\ m < -2 \end{cases}$       D.  $-2 < m < 2$ .

**Ví dụ 24.** Hỏi có bao nhiêu cặp số nguyên dương  $(a; b)$  để hàm số  $y = \frac{2x-a}{4x-b}$  có đồ thị trên  $(1; +\infty)$  như hình vẽ bên?

- A. 1.      B. 4.      C. 2.      D. 3.



**BẢNG TÔ ĐÁP ÁN TỰ LUYỆN**

Học sinh làm BTTL xong, tô phương án đúng. Buổi học sau, cùng với GV kiểm tra kết quả.

|                    |                     |                     |                     |                     |
|--------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| 1. (A) (B) (C) (D) | 7. (A) (B) (C) (D)  | 13. (A) (B) (C) (D) | 19. (A) (B) (C) (D) | 25. (A) (B) (C) (D) |
| 2. (A) (B) (C) (D) | 8. (A) (B) (C) (D)  | 14. (A) (B) (C) (D) | 20. (A) (B) (C) (D) | 26. (A) (B) (C) (D) |
| 3. (A) (B) (C) (D) | 9. (A) (B) (C) (D)  | 15. (A) (B) (C) (D) | 21. (A) (B) (C) (D) | 27. (A) (B) (C) (D) |
| 4. (A) (B) (C) (D) | 10. (A) (B) (C) (D) | 16. (A) (B) (C) (D) | 22. (A) (B) (C) (D) | 28. (A) (B) (C) (D) |
| 5. (A) (B) (C) (D) | 11. (A) (B) (C) (D) | 17. (A) (B) (C) (D) | 23. (A) (B) (C) (D) | 29. (A) (B) (C) (D) |
| 6. (A) (B) (C) (D) | 12. (A) (B) (C) (D) | 18. (A) (B) (C) (D) | 24. (A) (B) (C) (D) | 30. (A) (B) (C) (D) |

**Câu 1.** Phương trình đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số  $y = \frac{x-3}{x-1}$  là

- A.  $y = 5$ . B.  $y = 0$ . C.  $x = 1$ . D.  $y = 1$ .

**Câu 2.** Cho hàm số  $y = \frac{x+1}{2x-2}$ . Khẳng định nào sau đây **đúng**?

- A. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là  $x = \frac{1}{2}$ . B. Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là  $y = -\frac{1}{2}$ .  
C. Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là  $y = \frac{1}{2}$ . D. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là  $x = 2$ .

**Câu 3.** Số đường tiệm cận đứng và ngang của đồ thị hàm số  $y = \frac{3x+1}{x^2-4}$  là

- A. 2. B. 1. C. 4. D. 3.

**Câu 4.** Đường thẳng  $y = 2$  là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số nào sau đây?

- A.  $y = \frac{2x^2+1}{2-x}$ . B.  $y = \frac{x^2+2x+1}{1+x}$ . C.  $y = \frac{x+1}{1-2x}$ . D.  $y = \frac{2x-2}{x+2}$ .

**Câu 5.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2$  và  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận ngang.  
B. Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang.  
C. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là hai đường thẳng  $x = -2$  và  $x = 2$ .  
D. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là hai đường thẳng  $y = -2$  và  $y = 2$ .

**Câu 6.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có tập xác định là  $\mathbb{R}$  và  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y_0$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ . Tìm kết luận đúng trong các kết luận sau.

- A. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng  $x = y_0$ .  
B. Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là đường thẳng  $y = y_0$ .  
C. Đồ thị hàm số không có tiệm cận.  
D. Đồ thị hàm số có cả tiệm cận đứng, tiệm cận ngang.

**Câu 7.** Cho hàm số  $y = \frac{2017}{x-2}$  có đồ thị  $(H)$ . Số đường tiệm cận của  $(H)$  là

- A. 0. B. 2. C. 3. D. 4.

**Câu 8.** Cho đồ thị  $(C): y = \frac{x-3}{x+2}$  có hai đường tiệm cận cắt nhau tại  $I$ . Tính độ dài đoạn thẳng  $OI$  (với  $O$  là gốc tọa độ).

- A.  $OI = \sqrt{3}$ . B.  $OI = \sqrt{2}$ . C.  $OI = 1$ . D.  $OI = \sqrt{5}$ .

**Câu 9.** Số đường tiệm cận (đứng và ngang) của đồ thị hàm số  $y = \frac{1}{x^2}$  là bao nhiêu?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

**Câu 10.** Tìm số tiệm cận đứng và ngang của đồ thị hàm số  $y = \frac{x+1}{x^2-3x+2}$ .

- A. 3. B. 2. C. 1. D. 0.

**Câu 11.** Đồ thị hàm số  $y = \frac{x^2+2x-3}{x^2-1}$  có đường tiệm cận ngang là

- A.  $y = 2$ . B.  $y = \pm 2$ . C.  $y = 1$ . D.  $y = \pm 1$ .

**Câu 12.** Đồ thị hàm số  $y = \frac{x-1}{|x|+1}$  có bao nhiêu đường tiệm cận (đứng và ngang)?

- A. 1. B. 2. C. 0. D. 3.

**Câu 13.** Đồ thị hàm số  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-4x}-\sqrt{x^2-3x}}$  có bao nhiêu đường tiệm cận ngang?

- A. 3. B. 1. C. 4. D. 2.

**Câu 14.** Cho hàm số  $y = \frac{x+2}{x}$  có đồ thị (C). Gọi d là tích khoảng cách từ một điểm bất kì trên (C) đến các đường tiệm cận của (C). Tính d.

- A.  $d = 1$ . B.  $d = \sqrt{2}$ . C.  $d = 2$ . D.  $d = 2\sqrt{2}$ .

**Câu 15.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau. Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

- A. 4. B. 1.  
C. 3. D. 2.

|    |           |           |           |
|----|-----------|-----------|-----------|
| x  | $-\infty$ | 1         | $+\infty$ |
| y' | +         |           | +         |
| y  | 2         | $+\infty$ | 5         |

**Câu 16.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình bên. Hỏi đồ thị hàm số  $y = f(x)$  có tổng số bao nhiêu tiệm cận (tiệm cận đứng và tiệm cận ngang)?

- A. 0. B. 2.  
C. 3. D. 1.

|    |           |           |   |           |
|----|-----------|-----------|---|-----------|
| x  | $-\infty$ | 1         | 3 | $+\infty$ |
| y' | +         | +         | 0 | -         |
| y  | -1        | $+\infty$ | 2 | $-\infty$ |

**Câu 17.** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định trên  $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ , liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau

|       |           |           |    |           |           |
|-------|-----------|-----------|----|-----------|-----------|
| x     | $-\infty$ | -1        | 0  | 1         | $+\infty$ |
| f'(x) | -         |           | -  | -         | -         |
| f(x)  | -2        | $+\infty$ | -1 | $+\infty$ | 2         |

Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. Đồ thị hàm số  $y = f(x)$  có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng  $y = -2$ ,  $y = 2$ .  
B. Đồ thị hàm số  $y = f(x)$  có hai tiệm cận đứng là các đường thẳng  $x = 1$ ,  $x = -1$ .  
C. Hàm số  $y = f(x)$  không có đạo hàm tại điểm  $x = 0$ .  
D. Hàm số  $y = f(x)$  đạt cực trị tại điểm  $x = 0$ .

**Câu 18.** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định trên  $(-2; 0) \cup (0; +\infty)$  và có bảng biến thiên như hình vẽ. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số  $f(x)$  là

- A. 4. B. 2.  
C. 1. D. 3.

|       |           |           |           |
|-------|-----------|-----------|-----------|
| x     | -2        | 0         | $+\infty$ |
| f'(x) | +         |           | -         |
| f(x)  | $-\infty$ | $+\infty$ | 0         |



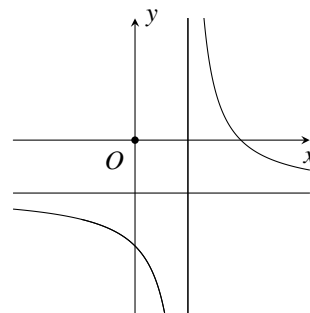
**Câu 19.** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định trên  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình bên. Hỏi đồ thị hàm số có bao nhiêu đường tiệm cận?

- A. 1.                      B. 2.  
C. 3.                      D. 4.

|      |                     |           |                          |           |
|------|---------------------|-----------|--------------------------|-----------|
| $x$  | $-\infty$           | 0         | 1                        | $+\infty$ |
| $y'$ | +                   | -         | 0                        | +         |
| $y$  | 2<br>↘<br>$-\infty$ | $-\infty$ | ↗<br>1<br>↘<br>$-\infty$ |           |

**Câu 20.** Cho hàm số  $y = \frac{ax-b}{x-1}$  có đồ thị như hình bên. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

- A.  $b < 0 < a$ .                      B.  $0 < b < a$ .  
C.  $b < a < 0$ .                      D.  $a < b < 0$ .



**Câu 21.** Cho hàm số  $y = \frac{2x^2 - 3x + m}{x - m}$  có đồ thị (C). Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để (C) không có tiệm cận đứng.

- A.  $m = 0$  hoặc  $m = 1$ .    B.  $m = 2$ .                      C.  $m = 1$ .                      D.  $m = 0$ .

**Câu 22.** Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số  $y = \frac{2x+1}{x-m}$  đi qua điểm  $M(2;5)$  khi  $m$  bằng bao nhiêu?

- A.  $m = -2$ .                      B.  $m = -5$ .                      C.  $m = 5$ .                      D.  $m = 2$ .

**Câu 23.** Cho hàm số  $y = f(x)$  là hàm đa thức có bảng biến thiên

|      |           |      |      |           |     |
|------|-----------|------|------|-----------|-----|
| $x$  | $-\infty$ | $-1$ | $3$  | $+\infty$ |     |
| $y'$ | $+$       | $0$  | $-$  | $0$       | $+$ |
| $y$  | $-\infty$ | $4$  | $-2$ | $+\infty$ |     |

Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số  $y = \frac{2018}{f(x)}$  là

- A. 4.                      B. 1.                      C. 3.                      D. 2.

**Câu 24.** Tập hợp tất cả các giá trị của tham số  $m$  để đồ thị hàm số  $y = \frac{x-2}{x^2+2mx+1}$  có hai tiệm cận đứng là

- A.  $(-1; 1)$ .                      B.  $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$ .  
C.  $\left\{-\frac{5}{4}\right\}$ .                      D.  $\left(-\infty; -\frac{5}{4}\right) \cup \left(-\frac{5}{4}; -1\right) \cup (1; +\infty)$ .

**Câu 25.** Cho hàm số  $y = \frac{x-1}{mx^2-2x+3}$ . Có tất cả bao nhiêu giá trị thực của tham số  $m$  để đồ thị hàm số đã cho có đúng hai đường tiệm cận.

- A. 2.                      B. 3.                      C. 0.                      D. 1.

**Câu 26.** Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để đồ thị hàm số  $y = \frac{4x-5}{x-m}$  có tiệm cận đứng nằm bên phải trục tung.

- A.  $m < 0$ .                      B.  $m > 0$  và  $m \neq \frac{5}{4}$ .    C.  $m > 0$ .                      D.  $m > 0$  và  $m \neq -\frac{5}{4}$ .

**Câu 27.** Biết rằng đồ thị của hàm số  $y = \frac{(a-3)x+a+2018}{x-(b+3)}$  nhận trục hoành làm tiệm cận ngang và trục tung làm tiệm cận đứng. Khi đó giá trị của  $a+b$  là

A. 3.                      B. -3.                      C. 6.                      D. 0.

**Câu 28.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$  và có bảng biến thiên sau:

|      |           |      |           |     |           |
|------|-----------|------|-----------|-----|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $-2$ | $1$       | $2$ | $+\infty$ |
| $y'$ |           | $-$  | $0$       | $+$ | $-$       |
| $y$  | $+\infty$ |      | $+\infty$ | $3$ | $-\infty$ |

Đồ thị hàm số  $y = \frac{1}{2f(x)-5}$  có bao nhiêu tiệm cận đứng?

- A. 0.                      B. 2.                      C. 1.                      D. 4.

**Câu 29.** Tập hợp các giá trị  $m$  để đồ thị hàm số  $y = \frac{mx^2+6x-2}{x+2}$  có tiệm cận đứng là

- A.  $\left\{\frac{7}{2}\right\}$ .                      B.  $\mathbb{R}$ .                      C.  $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{7}{2}\right\}$ .                      D.  $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{7}{2}\right\}$ .

**Câu 30.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để đồ thị hàm số  $y = \frac{x^2-1}{x^2-2mx+2m}$  có đúng 3 đường tiệm cận.

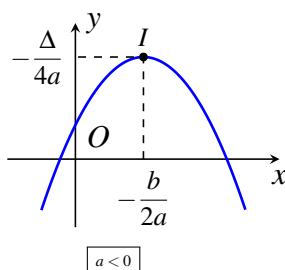
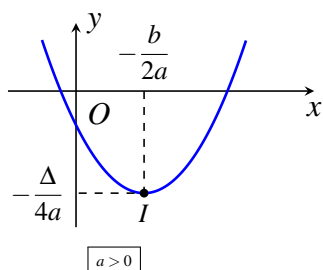
- A.  $m \neq -\frac{1}{4}$ .                      B.  $\begin{cases} m < 0 \\ m > 2 \end{cases}$ .                      C.  $\begin{cases} m > 2 \\ m < 0 \\ m \neq -\frac{1}{4} \end{cases}$ .                      D.  $0 < m < 2$ .

—HẾT—

## § 5. ĐỒ THỊ CÁC HÀM SỐ THƯỜNG GẶP

### A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

#### 1 Hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$



#### GHI NHỚ

① Tọa độ đỉnh:

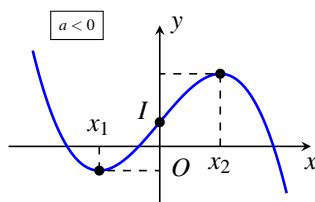
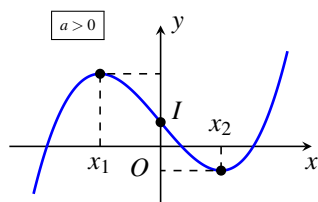
$$I(x_0; y_0) = \left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right).$$

② (P) viết theo tọa độ đỉnh:

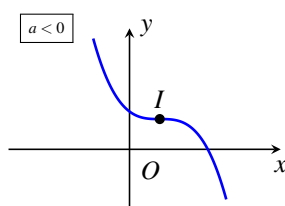
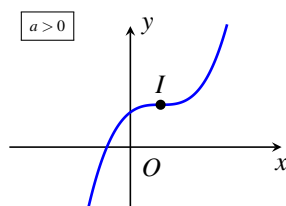
$$y = a(x - x_0)^2 + y_0$$

#### 2 Hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

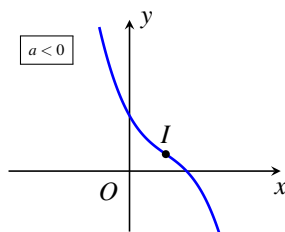
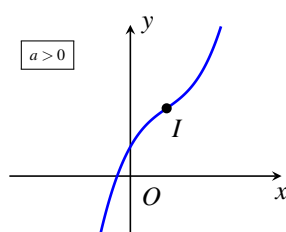
☑ **TH1.**  $y' = 0$  có hai nghiệm phân biệt  $x_1$  và  $x_2$ . Khi đó, hàm số có hai điểm cực trị  $x = x_1$  và  $x = x_2$ .



☑ **TH2.**  $y' = 0$  có nghiệm kép  $x_0$ . Khi đó, hàm số không có cực trị.



☑ **TH3.**  $y' = 0$  vô nghiệm. Khi đó, hàm số không có cực trị.



#### GHI NHỚ

① Hàm số có hai điểm cực trị

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ b^2 - 3ac > 0. \end{cases}$$

② Liên hệ tổng tích hai nghiệm

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{2b}{3a} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{3a} \end{cases}$$

③ Hàm số không có điểm cực trị

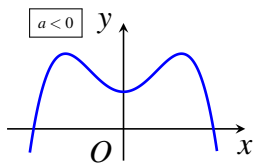
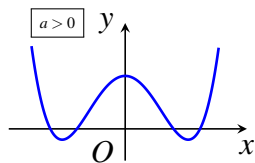
$$b^2 - 3ac \leq 0 \text{ hoặc } \begin{cases} a = 0 \\ b = 0. \end{cases}$$

④ Hoành độ điểm uốn là nghiệm phương trình  $y'' = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{3a}$ . Tọa độ điểm uốn là tâm đối xứng của đồ thị.

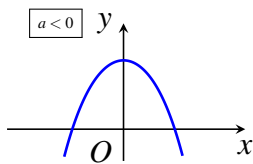
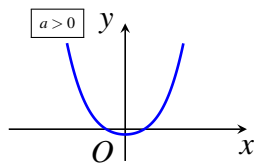
⑤ Tiếp tuyến tại điểm uốn  $I(x_0; y_0)$  sẽ có hệ số góc nhỏ nhất nếu  $a > 0$  và lớn nhất nếu  $a < 0$ .

### 3 Hàm số bậc bốn trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$

- ✓  $y' = 0$  có ba nghiệm phân biệt. Khi đó, hàm số có ba điểm cực trị  $x = 0$  và  $x = \pm \sqrt{-\frac{b}{2a}}$ .



- ✓  $y' = 0$  có đúng 1 nghiệm  $x = 0$ . Khi đó, hàm số có đúng 1 điểm cực trị.



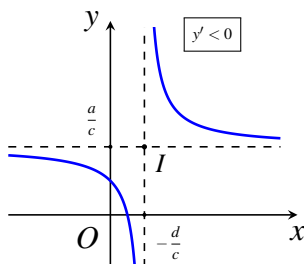
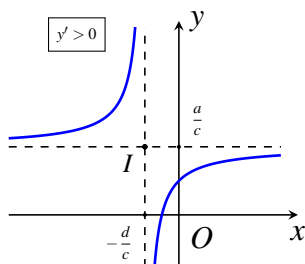
#### GHI NHỚ

- Hàm số có ba điểm cực trị  
 $ab < 0$
- Hàm số có đúng một điểm cực trị  
 $\begin{cases} ab \geq 0 \\ a, b \text{ không đồng thời bằng } 0 \end{cases}$
- Hàm số chẵn, đối xứng nhau qua  $Oy$ .

### 4 Hàm nhất biến $y = \frac{ax+b}{cx+d}$

- ✓ Tập xác định  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$

- ✓ Hình dạng đồ thị:



#### GHI NHỚ

- Tiệm cận đứng  $x = -\frac{d}{c}$ .
- Tiệm cận ngang  $y = \frac{a}{c}$ .
- Giao với  $Ox$ :  $y = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$ .
- Giao với  $Oy$ :  $x = 0 \Rightarrow y = \frac{b}{d}$ .
- Giao hai đường tiệm cận (điểm  $I$ ) là tâm đối xứng của đồ thị.

## B CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

### DẠNG 1. Nhận dạng đồ thị hàm bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Phương pháp giải.

- ✓ Nhìn "dáng điệu" của đồ thị:

① Bên phải đi lên thì  $a > 0$ .

② Bên phải đi xuống thì  $a < 0$ .

- ✓ Nhìn điểm thuộc đồ thị: Thay tọa độ đó vào hàm số phải thỏa mãn. Đồ thị qua điểm  $(0; d)$ .

- ✓ Nhìn cực trị:

① Đồ thị hàm số có điểm cực đại (cực tiểu) là  $(x_0; y_0)$  thì  $\begin{cases} y'(x_0) = 0 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ .

② Mối liên hệ giữa hai điểm cực trị  $x_1$  và  $x_2$  của hàm số:  $x_1 + x_2 = -\frac{2b}{3a}$  và  $x_1 x_2 = \frac{c}{3a}$ .

**Ví dụ 1.** Bảng biến thiên ở hình bên là của một trong bốn hàm số sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?

- A.  $y = -x^3 - 2x^2 + 5$ .      B.  $y = x^3 - 3x^2 + 5$ .  
C.  $y = -x^3 - 3x + 5$ .      D.  $y = x^3 + 3x^2 + 5$ .

|         |           |   |   |           |   |           |
|---------|-----------|---|---|-----------|---|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | 0 | 2 | $+\infty$ |   |           |
| $f'(x)$ |           | + | 0 | -         | 0 | +         |
| $f(x)$  |           |   | 5 |           | 1 | $+\infty$ |
|         | $-\infty$ |   |   |           |   |           |

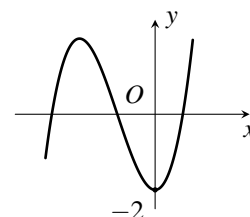
**Ví dụ 2.** Bảng biến thiên ở hình bên là của một trong bốn hàm số sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?

- A.  $y = x^3 - 3x^2 + x + 3$ .      B.  $y = x^3 - 3x + 4$ .  
C.  $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$ .      D.  $y = x^3 + 3x^2 + 5$ .

|      |           |     |           |
|------|-----------|-----|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $1$ | $+\infty$ |
| $y'$ | $+$       | $0$ | $+$       |
| $y$  | $-\infty$ | $2$ | $+\infty$ |

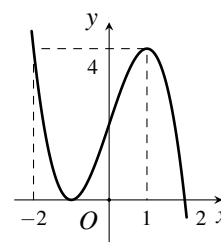
**Ví dụ 3.** Đường cong bên là đồ thị của một trong bốn hàm số đã cho sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?

- A.  $y = -x^3 + x^2 - 2$ .      B.  $y = x^3 + 3x^2 - 2$ .  
C.  $y = x^3 - 3x + 2$ .      D.  $y = x^2 - 3x - 2$ .



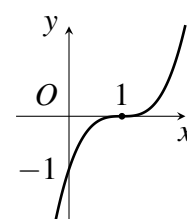
**Ví dụ 4.** Đường cong bên là đồ thị của một trong bốn hàm số đã cho sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?

- A.  $y = x^3 + 3x - 2$ .      B.  $y = x^3 - 3x + 2$ .  
C.  $y = -x^3 + 3x + 2$ .      D.  $y = -x^3 - 3x - 2$ .



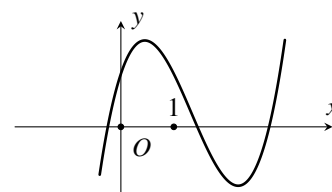
**Ví dụ 5.** Cho hàm số đa thức bậc ba  $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  có đồ thị (C) như hình vẽ. Hỏi (C) là đồ thị của hàm số nào?

- A.  $y = x^3 - 1$ .      B.  $y = (x + 1)^3$ .  
C.  $y = (x - 1)^3$ .      D.  $y = x^3 + 1$ .



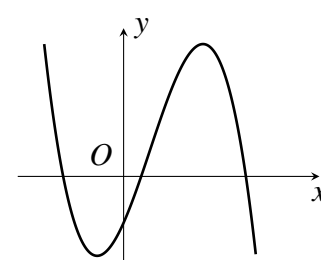
**Ví dụ 6.** Cho hàm số  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  có đồ thị như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A.  $a > 0, b > 0, c > 0, d > 0$ .      B.  $a < 0, b < 0, c > 0, d > 0$ .  
C.  $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$ .      D.  $a > 0, b < 0, c > 0, d > 0$ .



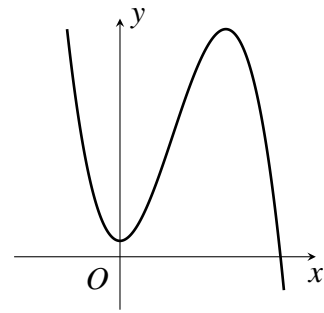
**Ví dụ 7.** Hàm số  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.  $a < 0, b < 0, c < 0, d > 0$ .      B.  $a < 0, b > 0, c < 0, d > 0$ .  
C.  $a < 0, b > 0, c > 0, d < 0$ .      D.  $a < 0, b < 0, c > 0, d < 0$ .

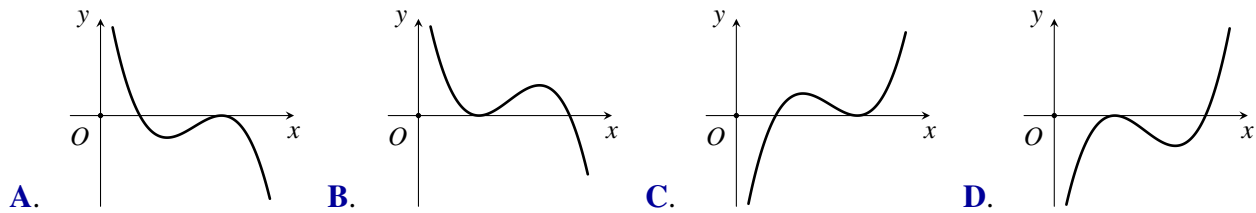


**Ví dụ 8.** Cho hàm số  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A.  $a < 0, b > 0, c > 0, d > 0$ .      B.  $a < 0, b < 0, c = 0, d > 0$ .  
C.  $a < 0, b > 0, c = 0, d > 0$ .      D.  $a > 0, b < 0, c > 0, d > 0$ .



**Ví dụ 9.** Tìm đồ thị hàm số  $y = f(x)$  được cho bởi một trong các phương án dưới đây, biết  $f(x) = (a-x)(b-x)^2$  với  $a < b$ .



## ▢ DẠNG 2. Nhận dạng đồ thị hàm bậc bốn trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$

Phương pháp giải.

☑ Nhìn "dáng điệu" của đồ thị:

① Bên phải đi lên thì  $a > 0$ .

② Bên phải đi xuống thì  $a < 0$ .

☑ Nhìn điểm thuộc đồ thị: Thay tọa độ đó vào hàm số phải thỏa mãn. Đồ thị qua điểm  $(0; c)$ .

☑ Nhìn điểm cực trị

① Đồ thị có 3 điểm cực trị  $ab < 0$

② Đồ thị có một điểm cực trị  $ab > 0$ .

**Ví dụ 10.** Bảng biến thiên ở hình bên là của một trong bốn hàm số sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?

- A.  $y = x^4 - 8x^2 + 2$ .  
B.  $y = x^4 + 6x^2 + 2$ .  
C.  $y = x^4 - 6x^2 + 2$ .  
D.  $y = -x^4 + 8x^2 + 2$ .

|      |           |             |     |            |           |     |
|------|-----------|-------------|-----|------------|-----------|-----|
| $x$  | $-\infty$ | $-\sqrt{3}$ | $0$ | $\sqrt{3}$ | $+\infty$ |     |
| $y'$ |           | $-$         | $0$ | $+$        | $0$       | $+$ |
| $y$  | $-\infty$ |             | $2$ |            | $-\infty$ |     |
|      |           | $-7$        |     | $-7$       |           |     |

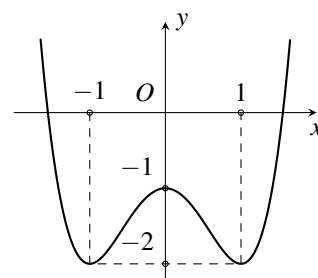
**Ví dụ 11.** Bảng biến thiên ở hình bên là của một trong bốn hàm số sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?

- A.  $y = -x^4 + 3x^2 + 2$ .      B.  $y = -x^4 - 2x^2 + 1$ .  
C.  $y = -x^4 - 3x^2 + 2$ .      D.  $y = -x^4 + x^2 + 2$ .

|      |           |     |           |
|------|-----------|-----|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
| $y'$ | $+$       | $0$ | $-$       |
| $y$  | $-\infty$ | $2$ | $-\infty$ |

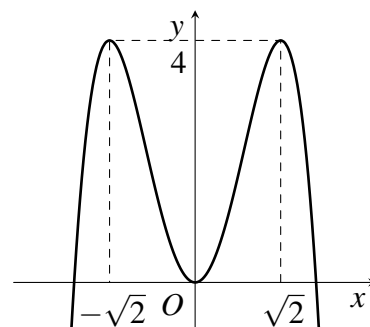
**Ví dụ 12.** Đồ thị ở hình bên là của một trong bốn hàm số sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?

- A.  $y = x^4 - 2x^2 - 1$ . B.  $y = 2x^4 - 4x^2 - 1$ .  
C.  $y = -x^4 + 2x^2 - 1$ . D.  $y = -2x^4 + 4x^2 - 1$ .



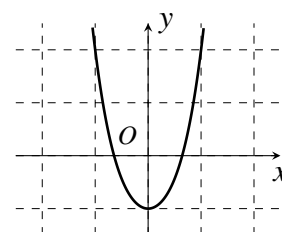
**Ví dụ 13.** Đồ thị ở hình bên là của một trong bốn hàm số sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?

- A.  $y = -x^4 + 4x^2$ . B.  $y = x^4 - 3x^2$ .  
C.  $y = -x^4 - 2x^2$ . D.  $y = -\frac{1}{4}x^4 + 3x^2$ .



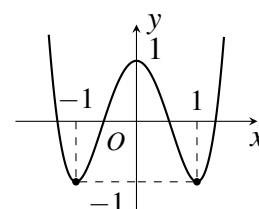
**Ví dụ 14.** Đồ thị ở hình bên là của một trong bốn hàm số sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?

- A.  $y = x^2 - 1$ . B.  $y = x^4 - 2x^2 - 1$ .  
C.  $y = x^4 + 2x^2 - 1$ . D.  $y = \frac{1}{4}x^4 - 3x^2 - 1$ .



**Ví dụ 15.** Biết rằng hàm số  $y = f(x) = ax^4 + bx^2 + c$  có đồ thị là đường cong hình vẽ bên. Tính giá trị  $f(a+b+c)$ .

- A.  $f(a+b+c) = -1$ . B.  $f(a+b+c) = 2$ .  
C.  $f(a+b+c) = -2$ . D.  $f(a+b+c) = 1$ .

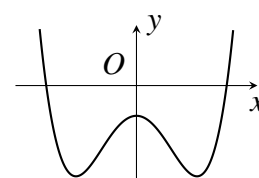


**Ví dụ 16.** Biết đồ thị hàm số  $y = x^4 + bx^2 + c$  chỉ có một điểm cực trị là điểm có tọa độ  $(0; -1)$ , khi đó  $b$  và  $c$  thỏa mãn những điều kiện nào dưới đây?

- A.  $b < 0$  và  $c = -1$ . B.  $b \geq 0$  và  $c > 0$ . C.  $b < 0$  và  $c < 0$ . D.  $b \geq 0$  và  $c = -1$ .

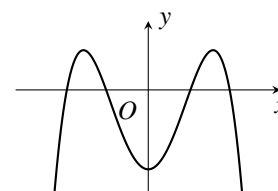
**Ví dụ 17.** Đường cong trong hình bên là đồ thị hàm số  $y = ax^4 + bx^2 + c$  với  $a, b, c$  là các tham số thực. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

- A.  $a < 0, b > 0, c < 0$ . B.  $a < 0, b < 0, c < 0$ .  
C.  $a > 0, b < 0, c < 0$ . D.  $a > 0, b < 0, c > 0$ .



**Ví dụ 18.** Hàm số  $y = ax^4 + bx^2 + c$  có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây là **đúng**?

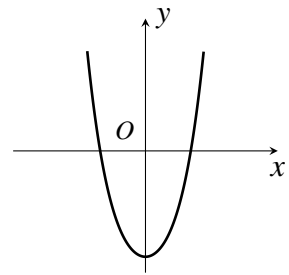
- A.  $a < 0, b > 0, c > 0$ . B.  $a < 0, b < 0, c < 0$ .  
C.  $a < 0, b > 0, c < 0$ . D.  $a < 0, b < 0, c > 0$ .



**Ví dụ 19.** Hàm số  $y = ax^4 + bx^2 + c$  ( $a, b \neq 0$ ) có đồ thị như hình vẽ bên.

Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A.  $a < 0, b > 0, c > 0$ .  
 B.  $a > 0, b > 0, c > 0$ .  
 C.  $a > 0, b < 0, c > 0$ .  
 D.  $a > 0, b > 0, c < 0$ .



**DẠNG 3. Nhận dạng đồ thị hàm nhất biến  $y = \frac{ax+b}{cx+d}$**

Phương pháp giải. Chú ý bốn thông số

- ① Tiệm cận đứng  $x = -\frac{d}{c}$ .  
 ② Tiệm cận ngang  $y = \frac{a}{c}$ .  
 ③ Giao với  $Ox$ :  $y = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$ .  
 ④ Giao với  $Oy$ :  $x = 0 \Rightarrow y = \frac{b}{d}$ .

**Ví dụ 20.** Bảng biến thiên ở hình bên là của hàm số nào?

- A.  $y = \frac{2x-1}{x+3}$ .  
 B.  $y = \frac{4x-6}{x-2}$ .  
 C.  $y = \frac{3-x}{2-x}$ .  
 D.  $y = \frac{x+5}{x-2}$ .

|      |              |           |              |
|------|--------------|-----------|--------------|
| $x$  | $-\infty$    | 2         | $+\infty$    |
| $y'$ | —            |           | —            |
| $y$  | 1 $\searrow$ | $+\infty$ | $\searrow$ 1 |
|      |              | $-\infty$ |              |

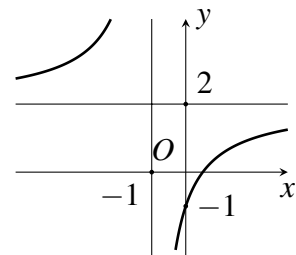
**Ví dụ 21.** Bảng biến thiên sau là của hàm số nào trong các hàm số bên dưới?

- A.  $y = \frac{x-1}{x-3}$ .  
 B.  $y = \frac{x-1}{-x-3}$ .  
 C.  $y = \frac{x+5}{-x+3}$ .  
 D.  $y = \frac{1}{x-3}$ .

|      |               |           |               |
|------|---------------|-----------|---------------|
| $x$  | $-\infty$     | 3         | $+\infty$     |
| $y'$ | +             |           | +             |
| $y$  | $-1 \nearrow$ | $+\infty$ | $-1 \nearrow$ |
|      |               | $-\infty$ |               |

**Ví dụ 22.** Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào trong các hàm số sau?

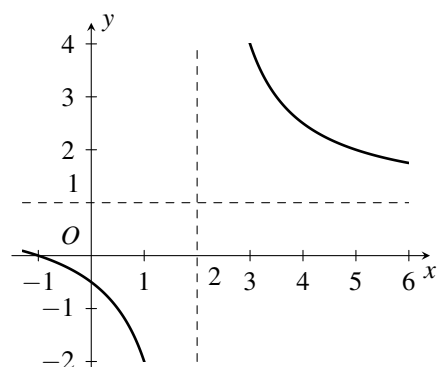
- A.  $y = \frac{2x-1}{x+1}$ .  
 B.  $y = \frac{1-2x}{x+1}$ .  
 C.  $y = \frac{2x+1}{x-1}$ .  
 D.  $y = \frac{2x+1}{x+1}$ .



**Ví dụ 23.** Cho hàm số  $y = \frac{ax+1}{bx-2}$  có đồ thị như hình vẽ.

Tính  $T = a + b$

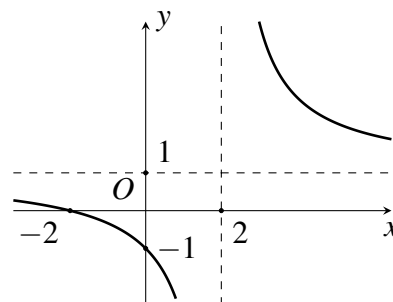
- A.  $T = 2$ .  
 B.  $T = 0$ .  
 C.  $T = -1$ .  
 D.  $T = 3$ .





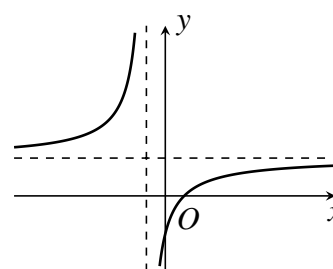
**Ví dụ 24.** Hãy xác định  $a, b$  để hàm số  $y = \frac{2-ax}{x+b}$  có đồ thị như hình vẽ?

- A.  $a = 1; b = -2$ .  
 B.  $a = b = 2$ .  
 C.  $a = -1; b = -2$ .  
 D.  $a = b = -2$ .



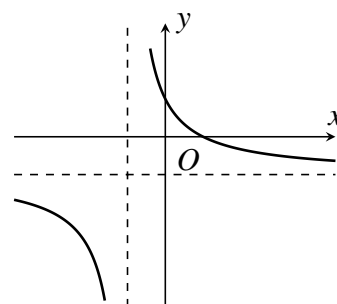
**Ví dụ 25.** Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số  $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ . Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A.  $ab > 0, bd < 0$ .  
 B.  $ab < 0, ad > 0$ .  
 C.  $ab < 0, ad < 0$ .  
 D.  $bd > 0, ad > 0$ .



**Ví dụ 26.** Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số  $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ . Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A.  $bd < 0, ab > 0$ .  
 B.  $ad > 0, ab < 0$ .  
 C.  $ad < 0, ab < 0$ .  
 D.  $bd > 0, ad > 0$ .



**BẢNG TÔ ĐÁP ÁN TỰ LUYỆN**

Học sinh làm BTTL xong, tô phương án đúng. Buổi học sau, cùng với GV kiểm tra kết quả.

|                    |                     |                     |                     |                     |
|--------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| 1. (A) (B) (C) (D) | 7. (A) (B) (C) (D)  | 13. (A) (B) (C) (D) | 19. (A) (B) (C) (D) | 25. (A) (B) (C) (D) |
| 2. (A) (B) (C) (D) | 8. (A) (B) (C) (D)  | 14. (A) (B) (C) (D) | 20. (A) (B) (C) (D) | 26. (A) (B) (C) (D) |
| 3. (A) (B) (C) (D) | 9. (A) (B) (C) (D)  | 15. (A) (B) (C) (D) | 21. (A) (B) (C) (D) | 27. (A) (B) (C) (D) |
| 4. (A) (B) (C) (D) | 10. (A) (B) (C) (D) | 16. (A) (B) (C) (D) | 22. (A) (B) (C) (D) | 28. (A) (B) (C) (D) |
| 5. (A) (B) (C) (D) | 11. (A) (B) (C) (D) | 17. (A) (B) (C) (D) | 23. (A) (B) (C) (D) | 29. (A) (B) (C) (D) |
| 6. (A) (B) (C) (D) | 12. (A) (B) (C) (D) | 18. (A) (B) (C) (D) | 24. (A) (B) (C) (D) | 30. (A) (B) (C) (D) |

**Câu 1.** Đồ thị hàm số nào dưới đây **không** đi qua điểm  $A(1;1)$ ?

- A.  $y = x$ . B.  $y = 2x^2 - 1$ . C.  $y = 2x^3 - x - 1$ . D.  $y = -x^4 + 2$ .

**Câu 2.** Cho hàm số  $y = \frac{2x-1}{x-2}$  có đồ thị (C). Đồ thị (C) đi qua điểm nào?

- A.  $M(1;3)$ . B.  $M(0;-2)$ . C.  $M(-1;\frac{1}{3})$ . D.  $M(3;5)$ .

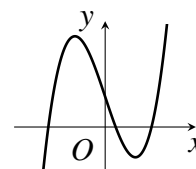
**Câu 3.** Bảng biến thiên ở hình bên là của một trong bốn hàm số sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?

- A.  $y = -x^3 - 3x - 2$ .  
B.  $y = x^3 - 3x^2 - 1$ .  
C.  $y = x^3 + 3x^2 - 1$ .  
D.  $y = -x^3 + 3x^2 - 1$ .

|      |           |     |      |           |      |     |           |
|------|-----------|-----|------|-----------|------|-----|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $0$ | $2$  | $+\infty$ |      |     |           |
| $y'$ |           | $+$ | $0$  | $-$       | $0$  | $+$ |           |
| $y$  |           |     | $-1$ |           | $-5$ |     | $+\infty$ |
|      | $-\infty$ |     |      |           |      |     |           |

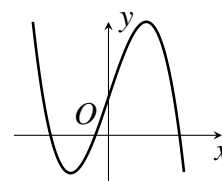
**Câu 4.** Đường cong bên là đồ thị của một trong bốn hàm số sau. Hỏi đó là hàm số nào dưới đây?

- A.  $y = -x^3 + 3x + 1$ . B.  $y = x^3 + 3x + 1$ .  
C.  $y = -x^3 - 3x + 1$ . D.  $y = x^3 - 3x + 1$ .



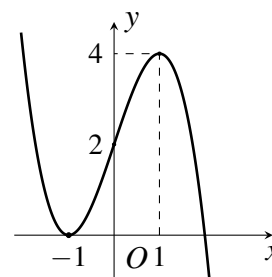
**Câu 5.** Đường cong bên là đồ thị của một trong bốn hàm số sau. Hỏi đó là hàm số nào dưới đây?

- A.  $y = x^3 + 3x^2 - 3x + 1$ . B.  $y = -x^3 - 2x^2 + x - 2$ .  
C.  $y = -x^3 + 3x + 1$ . D.  $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ .



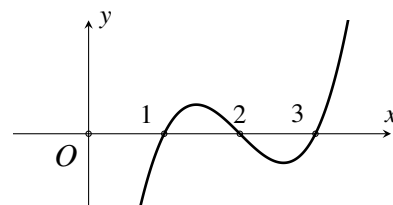
**Câu 6.** Đường cong bên là đồ thị của một trong bốn hàm số sau. Hỏi đó là hàm số nào dưới đây?

- A.  $y = (x+1)^2(1+x)$ . B.  $y = (x+1)^2(1-x)$ .  
C.  $y = (x+1)^2(2-x)$ . D.  $y = (x+1)^2(2+x)$ .



**Câu 7.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A.  $f(1,5) < 0, f(2,5) < 0$ . B.  $f(1,5) > 0 > f(2,5)$ .  
C.  $f(1,5) > 0, f(2,5) > 0$ . D.  $f(1,5) < 0 < f(2,5)$ .



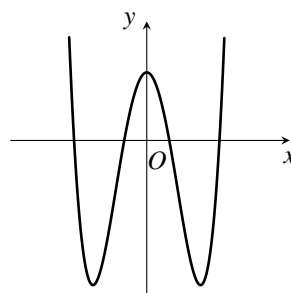
**Câu 8.** Đường cong ở hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?

A.  $y = x^4 + 5x^2 + 2$ .

B.  $y = x^3 - 3x^2 + 2$ .

C.  $y = x^4 - 5x^2 + 2$ .

D.  $y = -x^4 + 5x^2 + 2$ .



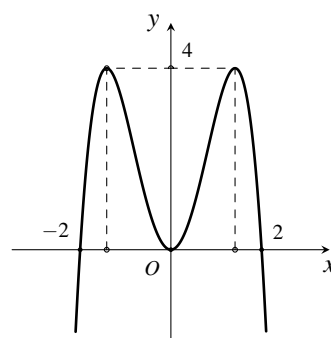
**Câu 9.** Đường cong ở hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?

A.  $y = x^4 - 3x^2$ .

B.  $y = -\frac{1}{4}x^4 + 3x^2$ .

C.  $y = -x^4 - 2x^2$ .

D.  $y = -x^4 + 4x^2$ .



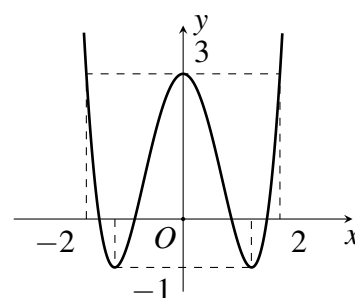
**Câu 10.** Đường cong ở hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?

A.  $y = -x^4 + 4x^2 + 3$ .

B.  $y = -x^4 + 2x^2 + 3$ .

C.  $y = (x^2 - 2)^2 - 1$ .

D.  $y = (x^2 + 2)^2 - 1$ .



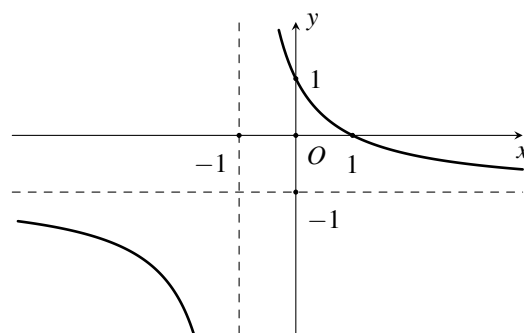
**Câu 11.** Đường cong ở hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?

A.  $y = \frac{-2x+1}{2x+1}$ .

B.  $y = \frac{-x+1}{x+1}$ .

C.  $y = \frac{-x+2}{x+1}$ .

D.  $y = \frac{-x}{x+1}$ .



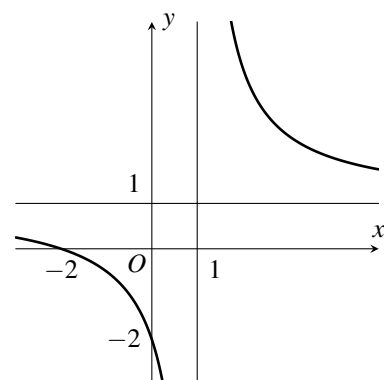
**Câu 12.** Đường cong ở hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?

A.  $y = \frac{2x+1}{x-1}$ .

B.  $y = \frac{x+2}{1-x}$ .

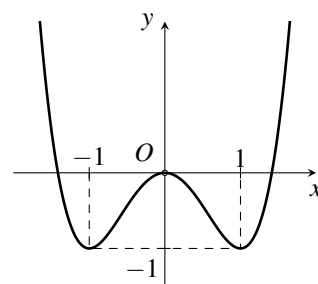
C.  $y = \frac{x+2}{x-1}$ .

D.  $y = \frac{x+1}{x-1}$ .



**Câu 13.** Đường cong ở hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?

- A.  $y = x^4 - 2x^2$ .  
 B.  $y = x^4 - 2x^2 - 3$ .  
 C.  $y = -x^4 + 2x^2$ .  
 D.  $y = -x^4 + 2x^2 - 3$ .



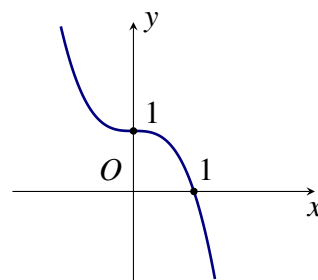
**Câu 14.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có bảng biến thiên như hình bên. Khẳng định nào sau đây sai?

- A. Hàm số không có giá trị lớn nhất và có giá trị nhỏ nhất bằng  $-2$ .  
 B. Hàm số có hai điểm cực trị.  
 C. Đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang.  
 D. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 5 và giá trị nhỏ nhất bằng  $-2$ .

|      |           |      |     |           |
|------|-----------|------|-----|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $-1$ | $2$ | $+\infty$ |
| $y'$ | $-$       | $+$  | $0$ | $-$       |
| $y$  | $5$       | $-2$ | $4$ | $-1$      |

**Câu 15.** Đường cong ở hình bên là đồ thị một trong bốn hàm số cho ở phương án A, B, C, D. Hỏi đó là hàm số nào?

- A.  $y = -x^3 + 1$ .  
 B.  $y = -2x^3 + x^2$ .  
 C.  $y = 3x^2 + 1$ .  
 D.  $y = -4x^3 + 1$ .



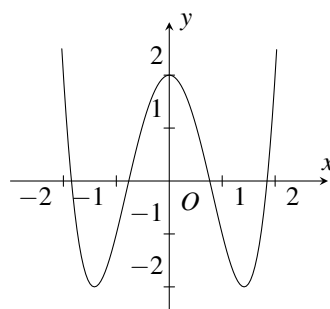
**Câu 16.** Hàm số nào trong bốn hàm số dưới đây có bảng biến thiên như hình bên?

- A.  $y = \frac{2x-3}{x+2}$ .  
 B.  $y = \frac{x+4}{x-2}$ .  
 C.  $y = \frac{2x+3}{x-2}$ .  
 D.  $y = \frac{2x-7}{x-2}$ .

|      |           |           |           |
|------|-----------|-----------|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $2$       | $+\infty$ |
| $y'$ | $-$       | $-$       |           |
| $y$  | $2$       | $+\infty$ | $2$       |

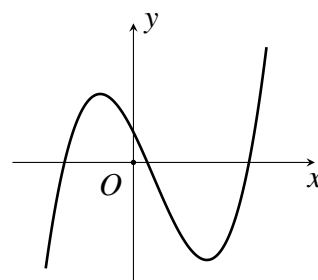
**Câu 17.** Cho hàm số  $y = ax^4 + bx^2 + c$  có đồ thị như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

- A.  $a > 0, b < 0, c > 0$ .  
 B.  $a > 0, b < 0, c < 0$ .  
 C.  $a > 0, b > 0, c > 0$ .  
 D.  $a < 0, b > 0, c > 0$ .



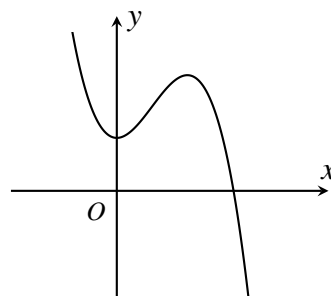
**Câu 18.** Cho hàm số  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  có đồ thị như hình bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.  $a > 0, b < 0, c > 0, d < 0$ .  
 B.  $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$ .  
 C.  $a < 0, b < 0, c < 0, d > 0$ .  
 D.  $a > 0, b > 0, c < 0, d > 0$ .



**Câu 19.** Cho hàm số  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  có đồ thị như hình vẽ dưới đây, điểm cực tiểu của đồ thị nằm trên trục tung. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A.  $a < 0, b < 0, c = 0, d > 0$ .      B.  $a > 0, b < 0, c > 0, d > 0$ .  
C.  $a < 0, b > 0, c > 0, d > 0$ .      D.  $a < 0, b > 0, c = 0, d > 0$ .



**Câu 20.** Cho hàm số  $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  với  $a \neq 0$ . Biết đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là  $A(1; -1), B(-1; 3)$ . Tính  $f(4)$ .

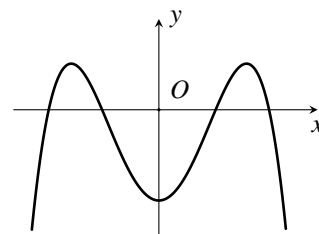
- A.  $f(4) = 53$ .      B.  $f(4) = -17$ .      C.  $f(4) = -53$ .      D.  $f(4) = 17$ .

**Câu 21.** Cho  $A(0; -3)$  là điểm cực đại và  $B(-1; -5)$  là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số trùng phương  $y = ax^4 + bx^2 + c$ . Tính giá trị của hàm số tại  $x = -2$ .

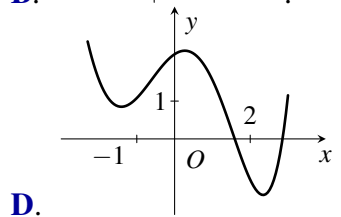
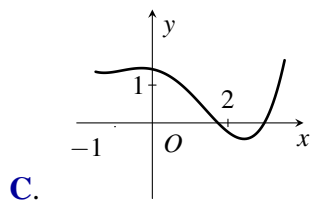
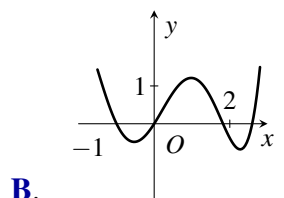
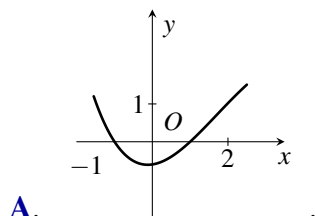
- A.  $y(-2) = 43$ .      B.  $y(-2) = 23$ .      C.  $y(-2) = 19$ .      D.  $y(-2) = 13$ .

**Câu 22.** Cho hàm số  $y = ax^4 + bx^2 + c$  có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A.  $a > 0, b < 0, c < 0$ .      B.  $a < 0, b < 0, c < 0$ .  
C.  $a < 0, b > 0, c < 0$ .      D.  $a > 0, b < 0, c > 0$ .

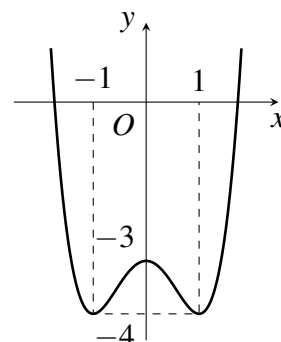


**Câu 23.** Cho hàm số  $g(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn  $g'(0) = 0, g''(x) > 0 \quad \forall x \in (-1; 2)$ . Hỏi đồ thị nào dưới đây có thể là đồ thị của hàm số  $g(x)$ ?



**Câu 24.** Xác định các hệ số  $a, b, c$  để hàm số  $y = ax^4 + bx^2 + c$  có đồ thị như hình vẽ bên.

- A.  $a = -\frac{1}{4}, b = 3, c = -3$ .      B.  $a = 1, b = -2, c = -3$ .  
C.  $a = 1, b = -3, c = 3$ .      D.  $a = 1, b = 3, c = -3$ .



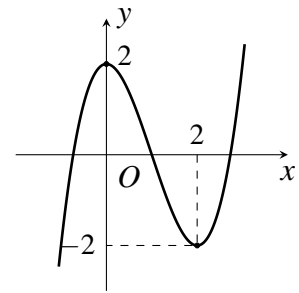
**Câu 25.** Cho hàm số  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  có đồ thị là đường cong như hình bên. Tính tổng  $S = a + b + c + d$ .

A.  $S = 0$ .

B.  $S = 6$ .

C.  $S = -4$ .

D.  $S = 2$ .



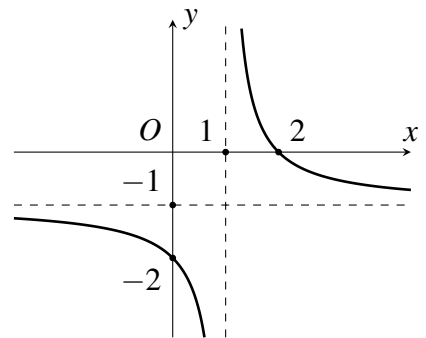
**Câu 26.** Cho hàm số  $y = \frac{ax+b}{x+c}$  có đồ thị như hình vẽ, với  $a, b, c$  là các số nguyên. Tính giá trị của biểu thức  $T = a - 3b + 2c$ .

A.  $T = 12$ .

B.  $T = -7$ .

C.  $T = 10$ .

D.  $T = -9$ .



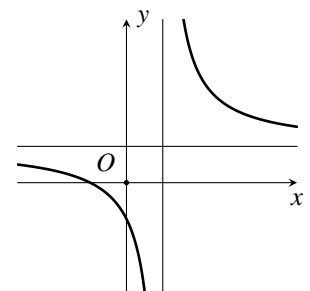
**Câu 27.** Cho hàm số  $y = \frac{ax+b}{cx+d}$  có đồ thị như hình bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A.  $ac > 0, bd > 0, cd > 0$ .

B.  $ad < 0, bc > 0, cd > 0$ .

C.  $ab > 0, bc > 0, bd < 0$ .

D.  $bc > 0, ad < 0, ac < 0$ .



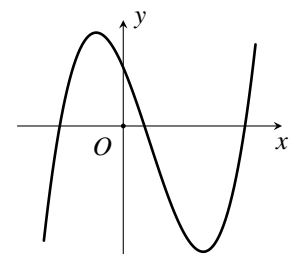
**Câu 28.** Cho hàm số  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  có đồ thị như hình bên. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A.  $ab < 0, bc > 0, cd < 0$ .

B.  $ab > 0, bc > 0, cd < 0$ .

C.  $ab < 0, bc < 0, cd > 0$ .

D.  $ab < 0, bc > 0, cd > 0$ .



**Câu 29.** Cho hàm số  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  đạt cực trị tại các điểm  $x_1, x_2$  thỏa mãn  $x_1 \in (-1; 0)$ ,  $x_2 \in (1; 2)$ . Biết hàm số đồng biến trên khoảng  $(x_1; x_2)$ . Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ âm. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A.  $a < 0, b > 0, c > 0, d < 0$ .

B.  $a < 0, b < 0, c > 0, d < 0$ .

C.  $a > 0, b > 0, c > 0, d < 0$ .

D.  $a < 0, b > 0, c < 0, d < 0$ .

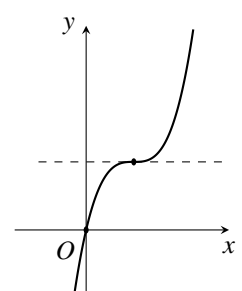
**Câu 30.** Cho hàm số bậc ba  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  có đồ thị như hình vẽ. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = a^2 + c^2 + b + 2d + 1$ .

A.  $\frac{1}{5}$ .

B. 1.

C.  $\frac{5}{8}$ .

D.  $\frac{1}{3}$ .



—HẾT—

## § 6. ỨNG DỤNG ĐỒ THỊ ĐỂ BIỆN LUẬN NGHIỆM PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH.

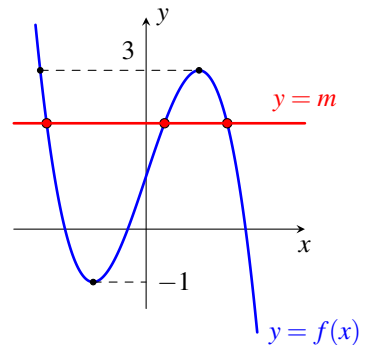
### A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

#### 1 Ứng dụng đồ thị để biện luận nghiệm phương trình.

☑ Xét phương trình  $f(x) = m$ , với  $m$  là tham số. Nghiệm của phương trình này có thể coi là hoành độ giao điểm của đồ thị  $y = f(x)$  (cố định) với đường thẳng  $y = m$  (nằm ngang).

☑ Từ đó, để biện luận nghiệm phương trình  $f(x) = m$ , ta có thể thực hiện các bước như sau:

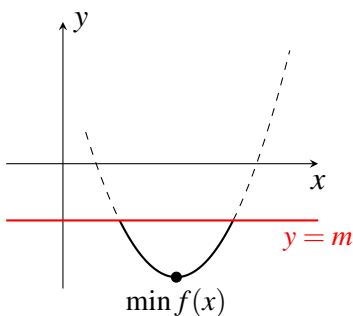
- ① Lập bảng biến thiên của hàm số  $y = f(x)$  trên miền xác định mà đề bài yêu cầu.
- ② Tịnh tiến đường thẳng  $y = m$  theo hướng "lên, xuống". Quan sát số giao điểm để quy ra số nghiệm tương ứng.



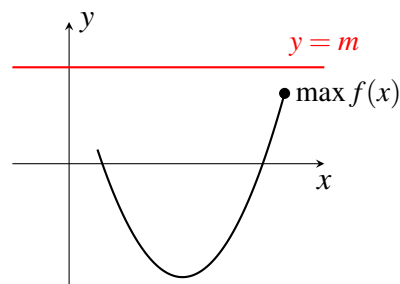
#### 2 Ứng dụng đồ thị để biện luận nghiệm bất phương trình.

☑ Xét bất phương trình ở dạng  $f(x) < m$  (1), với  $m$  là tham số.

- ① **Bài toán 1.** Tìm điều kiện của tham số  $m$  để (1) có nghiệm trên miền  $\mathcal{D}$ : Khi đó, ta tìm điều kiện để đồ thị  $y = f(x)$  có phần nằm dưới đường thẳng  $y = m$ .
- ② **Bài toán 2.** Tìm điều kiện của tham số  $m$  để (1) nghiệm đúng với mọi  $x$  thuộc miền  $\mathcal{D}$ : Khi đó, ta tìm điều kiện để đồ thị  $y = f(x)$  nằm hoàn toàn phía dưới đường thẳng  $y = m$ .



Mình họa Bài toán 1



Mình họa Bài toán 2

☑ Các bài toán tương tự:

- |                                                           |                                                     |
|-----------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------|
| ① $f(x) > m$ nghiệm đúng $\forall x \in \mathcal{D}$ .    | ② $f(x) > m$ có nghiệm trên miền $\mathcal{D}$ .    |
| ③ $f(x) \leq m$ nghiệm đúng $\forall x \in \mathcal{D}$ . | ④ $f(x) \leq m$ có nghiệm trên miền $\mathcal{D}$ . |
| ⑤ $f(x) \geq m$ nghiệm đúng $\forall x \in \mathcal{D}$ . | ⑥ $f(x) \geq m$ có nghiệm trên miền $\mathcal{D}$ . |

Khi muốn sử dụng phương pháp đồ thị để biện luận nghiệm của phương trình  $f(x, m) = 0$  hoặc bất phương trình  $f(x, m) > 0$ ,  $f(x, m) < 0$ , ta phải thực hiện "cô lập" tham số  $m$ .

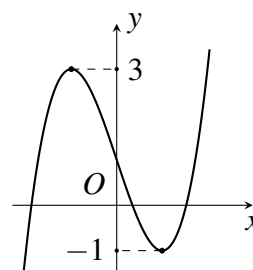
## 📁 DANG 1. Giải, biện luận nghiệm phương trình bằng phương pháp đồ thị

*Phương pháp giải.*

- Chuyển phương trình đã cho về dạng  $f(x) = m$ ;
- Tịnh tiến đường thẳng  $y = m$  lên xuống theo phương ngang. Nhìn giao điểm với đồ thị  $y = f(x)$  để quy ra số nghiệm tương ứng.

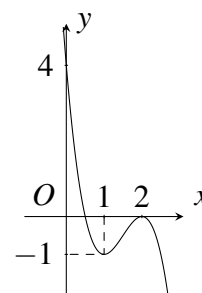
**Ví dụ 1.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ. Số nghiệm của phương trình  $2f(x) - 3 = 0$  là

- A.** 2. **B.** 1.  
**C.** 0. **D.** 3.



**Ví dụ 2.** Cho hàm số  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  ( $d \neq 0$ ) có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm của phương trình  $3f(x) - 1 = 0$  bằng

- A.** 0. **B.** 1.  
**C.** 2. **D.** 3.



 **Ví dụ 3.** Cho hàm số  $f(x)$  có bảng biến thiên như hình bên. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để phương trình  $f(x) = m + 1$  có ba nghiệm thực phân biệt.

- A.**  $-3 \leq m \leq 3$ .      **B.**  $-2 \leq m \leq 4$ .  
**C.**  $-2 < m < 4$ .      **D.**  $-3 < m < 3$ .

|      |           |      |     |           |      |     |           |
|------|-----------|------|-----|-----------|------|-----|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $-1$ | $3$ | $+\infty$ |      |     |           |
| $y'$ |           | $+$  | $0$ | $-$       | $0$  | $+$ |           |
| $y$  |           |      | $4$ |           | $-2$ |     | $+\infty$ |
|      | $-\infty$ |      |     |           |      |     |           |

**Ví dụ 4.** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định trên  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên sau. Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  sao cho phương trình  $f(x) = m$  có ba nghiệm thực phân biệt.

- A.**  $(-\infty; 4]$ .                      **B.**  $[-2; 4]$ .  
**C.**  $(-2; 4)$ .                         **D.**  $(-2; 4]$ .

|      |                                 |                                |                                |           |
|------|---------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|-----------|
| $x$  | $-\infty$                       | $0$                            | $2$                            | $+\infty$ |
| $y'$ | $-$                             | $+$                            | $0$                            | $-$       |
| $y$  | $+\infty$<br>$\searrow$<br>$-2$ | $-\infty$<br>$\nearrow$<br>$4$ | $4$<br>$\searrow$<br>$-\infty$ |           |



**Ví dụ 5.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  và có bảng biến thiên như hình bên. Hỏi phương trình  $3|f(x)| - 10 = 0$  có bao nhiêu nghiệm?

- A. 2 nghiệm.                      B. 4 nghiệm.  
C. 3 nghiệm.                      D. 1 nghiệm.

|         |                     |                     |                |           |
|---------|---------------------|---------------------|----------------|-----------|
| $x$     | $-\infty$           | 0                   | 1              | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | —                   | —                   | 0              | +         |
| $f(x)$  | 2<br>↘<br>$-\infty$ | $+\infty$<br>↘<br>3 | ↗<br>$+\infty$ |           |

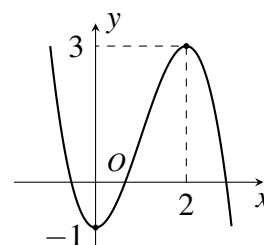
**Ví dụ 6.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có bảng biến thiên như sau. Hỏi phương trình  $f(|x|) = 1$  có mấy nghiệm?

- A. 6 nghiệm.                      B. 2 nghiệm.  
C. 3 nghiệm.                      D. 4 nghiệm.

|      |           |     |     |           |           |
|------|-----------|-----|-----|-----------|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $0$ | $2$ | $+\infty$ |           |
| $y'$ | $+$       | $0$ | $-$ | $0$       | $+$       |
| $y$  |           |     | $2$ |           | $+\infty$ |
|      | $-\infty$ |     |     | $-2$      |           |

**Ví dụ 7.** Cho hàm số  $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  ( $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ) có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để phương trình  $2f(|x|) - m = 0$  có đúng 4 nghiệm phân biệt.

- A.  $1 < m < 3$ .                      B.  $-1 < m < 3$ .  
C.  $-2 < m < 6$ .                      D.  $2 < m < 6$ .



**Ví dụ 8.** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định và liên tục trên  $\mathbb{R}$ , có bảng biến thiên như sau. Số nghiệm của phương trình  $2[f(x)]^2 - 3f(x) + 1 = 0$  là

- A. 2.                                      B. 3.  
C. 6.                                      D. 0.

|      |           |            |               |            |     |
|------|-----------|------------|---------------|------------|-----|
| $x$  | $-\infty$ | $-1$       | $1$           | $+\infty$  |     |
| $y'$ | $+$       | $0$        | $-$           | $0$        | $+$ |
| $y$  |           | $3$        | $\frac{1}{3}$ | $1$        |     |
|      | $1$       | $\nearrow$ | $\searrow$    | $\nearrow$ |     |

**Ví dụ 9.** Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để phương trình  $-x^4 + 2x^2 + 3 + 2m = 0$  có 4 nghiệm phân biệt.

- A.  $-2 \leq m \leq \frac{-3}{2}$ .                      B.  $\frac{-3}{2} < m < 2$ .                      C.  $-2 < m < \frac{-3}{2}$ .                      D.  $3 < m < 4$ .

**Ví dụ 10.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để hàm số  $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + mx + 1$  có hai điểm cực trị đều thuộc khoảng  $(-1; 4)$ ?

- A. 4.                                      B. 9.                                      C. 8.                                      D. 3.

**Ví dụ 11.** Cho phương trình  $\sin^3 x - 3\sin^2 x + 2 - m = 0$ . Có bao nhiêu giá trị nguyên của  $m$  để phương trình có nghiệm?

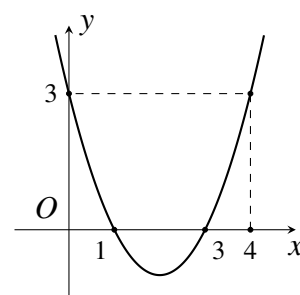
- A. 3.                                      B. 1.                                      C. 5.                                      D. 4.

## DẠNG 2. Giải, biện luận nghiệm bất phương trình bằng phương pháp đồ thị

Phương pháp giải.

**Ví dụ 12.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như hình bên. Số nghiệm nguyên của bất phương trình  $f(x) \leq 3$  là

- A. 3.                      B. 5.                      C. 6.                      D. 2.



**Ví dụ 13.** Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để hàm số  $y = x^3 - 3x^2 + (2m - 1)x + 2019$  đồng biến trên  $(2; +\infty)$ .

- A.  $m < \frac{1}{2}$ .                      B.  $m = \frac{1}{2}$ .                      C.  $m \geq 0$ .                      D.  $m \geq \frac{1}{2}$ .

**Ví dụ 14.** Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số  $m$  để hàm số  $y = x^3 + mx - \frac{1}{5x^5}$  đồng biến trên khoảng  $(0; +\infty)$ ?

- A. 5.                      B. 3.                      C. 0.                      D. 4.

**Ví dụ 15.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  sao cho bất phương trình  $m\sqrt{x^2 - 2x + 2} + m + 2x - x^2 \leq 0$  có nghiệm  $x \in [0; 1 + \sqrt{3}]$ .

- A.  $m \leq \frac{2}{3}$ .                      B.  $m \leq 0$ .                      C.  $m \geq \frac{2}{3}$ .                      D.  $m \leq -1$ .

**Ví dụ 16.** Gọi  $S$  là tập hợp các giá trị nguyên của tham số  $m$  thuộc  $[0; 2019]$  để bất phương trình  $x^2 - m + \sqrt{(1 - x^2)^3} \leq 0$  đúng với mọi  $x \in [-1; 1]$ . Số phần tử của tập  $S$  bằng

- A. 1.                      B. 2020.                      C. 2019.                      D. 2.

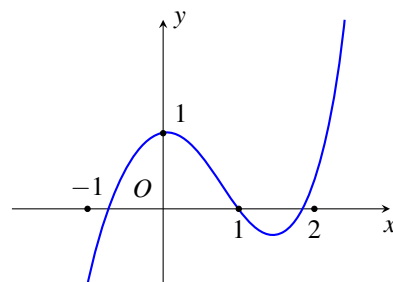
## BUỔI SỐ 2

### DẠNG 3. Một số bài toán liên quan đến hàm hợp

Phương pháp giải.

**Ví dụ 17.** Cho hàm số bậc ba  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ bên. Khi đó phương trình  $4f(3x^4) - 3 = 0$  có bao nhiêu nghiệm dương?

- A. 2.                      B. 4.  
C. 5.                      D. 1.



**Ví dụ 18.** Cho hàm số  $f(x)$  có bảng biến thiên như sau. Số nghiệm của phương trình  $f(3x^4 - 6x^2 + 1) = 1$  là

- A. 4.                      B. 5.  
C. 6.                      D. 3.

|      |           |      |      |           |     |
|------|-----------|------|------|-----------|-----|
| $x$  | $-\infty$ | $-2$ | $1$  | $+\infty$ |     |
| $y'$ | $+$       | $0$  | $-$  | $0$       | $+$ |
| $y$  | $-\infty$ | $2$  | $-1$ | $+\infty$ |     |

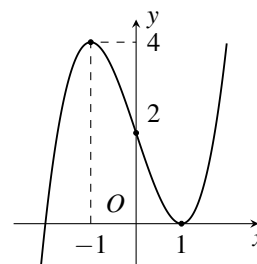
**Ví dụ 19.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình bên. Phương trình  $f(4x - x^2) - 2 = 0$  có bao nhiêu nghiệm thực?

- A. 2.      B. 6.      C. 0.      D. 4.

|      |           |            |            |           |            |           |
|------|-----------|------------|------------|-----------|------------|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $0$        | $4$        | $+\infty$ |            |           |
| $y'$ | $-$       | $0$        | $+$        | $0$       | $-$        |           |
| $y$  | $+\infty$ | $\searrow$ | $\nearrow$ | $3$       | $\searrow$ | $-\infty$ |
|      |           | $-1$       |            |           |            |           |

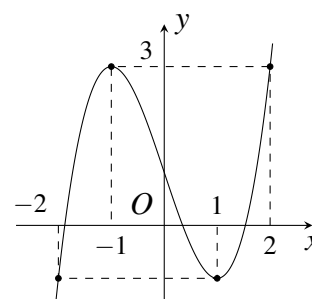
**Ví dụ 20.** Cho hàm số bậc ba  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ. Số nghiệm thuộc đoạn  $[0; 5\pi]$  của phương trình  $f(\cos x) = 1$

- A. 3.      B. 4.      C. 5.      D. 6.



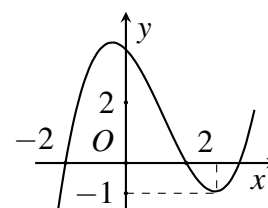
**Ví dụ 21.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ bên. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để phương trình  $f(1 - \cos 2x) = m$  có nghiệm thuộc khoảng  $(0; \pi)$  là

- A.  $[-1; 3]$ .      B.  $(-1; 1)$ .      C.  $(-1; 3)$ .      D.  $(-1; 1]$ .



**Ví dụ 22.** Cho hàm số bậc ba  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình  $|f(x^3 - 3x)| = \frac{2}{3}$  là

- A. 6.      B. 10.      C. 3.      D. 9.



**Ví dụ 23.** Cho hàm số  $f(x)$ , bảng biến thiên của hàm số  $f'(x)$  như sau:

|         |           |            |            |            |           |
|---------|-----------|------------|------------|------------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | -1         | 0          | 1          | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $\nearrow$ | $\searrow$ | $+\infty$ |
|         |           | -3         | 2          | -1         |           |

Số điểm cực trị của hàm số  $y = f(4x^2 + 4x)$  là

- A. 5.      B. 9.      C. 7.      D. 3.



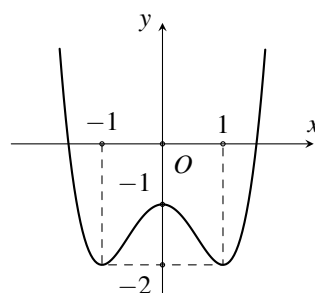
## BẢNG TÔ ĐÁP ÁN TỰ LUYỆN

*Học sinh làm BTTL xong, tô phương án đúng. Buổi học sau, cùng với GV kiểm tra kết quả.*

|                                                                                                    |                                                                                                     |                                                                                                     |                                                                                                     |                                                                                                     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. <input type="radio"/> A <input type="radio"/> B <input type="radio"/> C <input type="radio"/> D | 7. <input type="radio"/> A <input type="radio"/> B <input type="radio"/> C <input type="radio"/> D  | 13. <input type="radio"/> A <input type="radio"/> B <input type="radio"/> C <input type="radio"/> D | 19. <input type="radio"/> A <input type="radio"/> B <input type="radio"/> C <input type="radio"/> D | 25. <input type="radio"/> A <input type="radio"/> B <input type="radio"/> C <input type="radio"/> D |
| 2. <input type="radio"/> A <input type="radio"/> B <input type="radio"/> C <input type="radio"/> D | 8. <input type="radio"/> A <input type="radio"/> B <input type="radio"/> C <input type="radio"/> D  | 14. <input type="radio"/> A <input type="radio"/> B <input type="radio"/> C <input type="radio"/> D | 20. <input type="radio"/> A <input type="radio"/> B <input type="radio"/> C <input type="radio"/> D | 26. <input type="radio"/> A <input type="radio"/> B <input type="radio"/> C <input type="radio"/> D |
| 3. <input type="radio"/> A <input type="radio"/> B <input type="radio"/> C <input type="radio"/> D | 9. <input type="radio"/> A <input type="radio"/> B <input type="radio"/> C <input type="radio"/> D  | 15. <input type="radio"/> A <input type="radio"/> B <input type="radio"/> C <input type="radio"/> D | 21. <input type="radio"/> A <input type="radio"/> B <input type="radio"/> C <input type="radio"/> D | 27. <input type="radio"/> A <input type="radio"/> B <input type="radio"/> C <input type="radio"/> D |
| 4. <input type="radio"/> A <input type="radio"/> B <input type="radio"/> C <input type="radio"/> D | 10. <input type="radio"/> A <input type="radio"/> B <input type="radio"/> C <input type="radio"/> D | 16. <input type="radio"/> A <input type="radio"/> B <input type="radio"/> C <input type="radio"/> D | 22. <input type="radio"/> A <input type="radio"/> B <input type="radio"/> C <input type="radio"/> D | 28. <input type="radio"/> A <input type="radio"/> B <input type="radio"/> C <input type="radio"/> D |
| 5. <input type="radio"/> A <input type="radio"/> B <input type="radio"/> C <input type="radio"/> D | 11. <input type="radio"/> A <input type="radio"/> B <input type="radio"/> C <input type="radio"/> D | 17. <input type="radio"/> A <input type="radio"/> B <input type="radio"/> C <input type="radio"/> D | 23. <input type="radio"/> A <input type="radio"/> B <input type="radio"/> C <input type="radio"/> D | 29. <input type="radio"/> A <input type="radio"/> B <input type="radio"/> C <input type="radio"/> D |
| 6. <input type="radio"/> A <input type="radio"/> B <input type="radio"/> C <input type="radio"/> D | 12. <input type="radio"/> A <input type="radio"/> B <input type="radio"/> C <input type="radio"/> D | 18. <input type="radio"/> A <input type="radio"/> B <input type="radio"/> C <input type="radio"/> D | 24. <input type="radio"/> A <input type="radio"/> B <input type="radio"/> C <input type="radio"/> D | 30. <input type="radio"/> A <input type="radio"/> B <input type="radio"/> C <input type="radio"/> D |

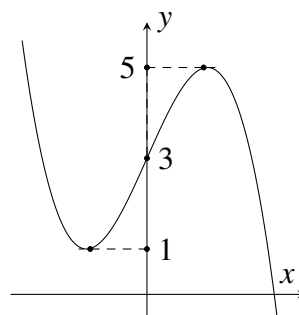
**Câu 1.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đồ thị ở hình bên. Số nghiệm dương phân biệt của phương trình  $f(x) = -\sqrt{3}$  là

- A.** 1. **B.** 3.  
**C.** 2. **D.** 4.



**Câu 2.** Hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ bên. Phương trình  $2f(x) - 5 = 0$  có bao nhiêu nghiệm âm?

- A.** 0.                                           **B.** 2.  
**C.** 1.                                           **D.** 3.



**Câu 3.** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định trên  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình bên. Số phần tử tập nghiệm của phương trình  $|f(x)| = 2$  là

- A.** 4.                      **B.** 3.                      **C.** 5.                      **D.** 6.

|      |                                 |     |                                               |           |
|------|---------------------------------|-----|-----------------------------------------------|-----------|
| $x$  | $-\infty$                       | $0$ | $1$                                           | $+\infty$ |
| $y'$ | $-$                             |     | $+$ $0$ $-$                                   |           |
| $y$  | $+\infty$<br>$\searrow$<br>$-1$ |     | $-\infty$ $\nearrow$ $2$ $\searrow$ $-\infty$ |           |

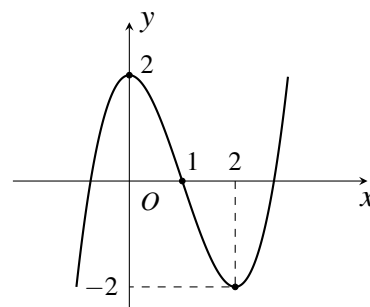
**Câu 4.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau. Số nghiệm của phương trình  $f(x+5) - 4 = 0$  là

- A.** 0.                      **B.** 2.  
**C.** 3.                      **D.** 1.

|      |           |      |     |           |      |     |           |
|------|-----------|------|-----|-----------|------|-----|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $-1$ | $3$ | $+\infty$ |      |     |           |
| $y'$ |           | $+$  | $0$ | $-$       | $0$  | $+$ |           |
| $y$  |           |      | $4$ |           | $-2$ |     | $+\infty$ |
|      | $-\infty$ |      |     |           |      |     |           |

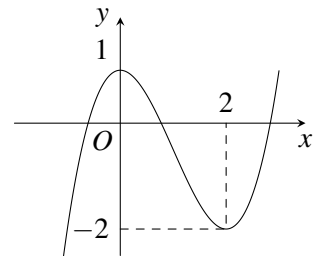
**Câu 5.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm số nghiệm của phương trình  $f(x) = -x + 1$ .

- A.** 2. **B.** 4.  
**C.** 1. **D.** 3.



**Câu 6.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đồ thị như hình vẽ. Tìm số nghiệm của phương trình  $2f(x^2) + 3 = 0$ .

- A. 4. B. 2.  
C. 3. D. 6.



**Câu 7.** Số nghiệm thực của phương trình  $2|x|^3 - 9x^2 + 12|x| - \frac{9}{2} = 0$  là

- A. 2. B. 6. C. 4. D. 3.

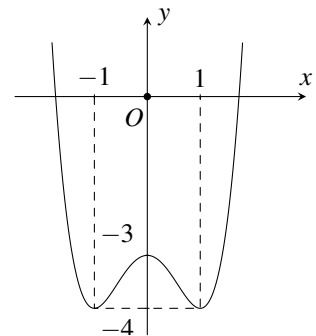
**Câu 8.** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định, liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có bảng biến thiên sau. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để phương trình  $f(x) - 1 = m$  có đúng hai nghiệm.

- A.  $\begin{cases} m = -2 \\ m > -1 \end{cases}$  B.  $-2 < m < -1$ .  
C.  $\begin{cases} m > 0 \\ m = -1 \end{cases}$  D.  $\begin{cases} m = -2 \\ m \geq -1 \end{cases}$ .

|      |           |      |     |      |           |
|------|-----------|------|-----|------|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $-1$ | $0$ | $1$  | $+\infty$ |
| $y'$ | $-$       | $0$  | $+$ | $0$  | $+$       |
| $y$  | $+\infty$ | $-1$ | $0$ | $-1$ | $+\infty$ |

**Câu 9.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ bên. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của  $m$  để phương trình  $4f(x) + m = 0$  có đúng 4 nghiệm thực phân biệt?

- A. 4. B. 3.  
C. 2. D. 0.



**Câu 10.** Tìm các giá trị thực của tham số  $m$  để phương trình  $x^3 - 3x^2 - m - 4 = 0$  có ba nghiệm phân biệt.

- A.  $4 < m < 8$ . B.  $m < 0$ . C.  $-8 < m < -4$ . D.  $0 \leq m \leq 4$ .

**Câu 11.** Gọi  $S$  là tập hợp tất cả các giá trị của tham số  $m$  để phương trình  $2x^3 - 3x^2 = 2m + 1$  có đúng hai nghiệm phân biệt. Tổng các phần tử của  $S$  bằng

- A.  $-\frac{1}{2}$ . B.  $-\frac{3}{2}$ . C.  $-\frac{5}{2}$ . D.  $\frac{1}{2}$ .

**Câu 12.** Tập tất cả các giá trị của tham số  $m$  để phương trình  $x^4 - 4x^2 + 3 + m = 0$  có 4 nghiệm phân biệt là

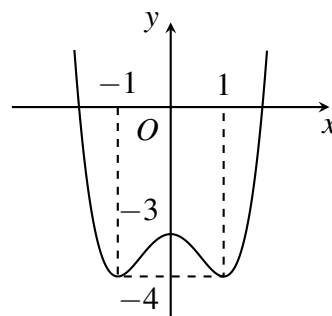
- A.  $(-1; 3)$ . B.  $(-3; 1)$ . C.  $(2; 4)$ . D.  $(-3; 0)$ .

**Câu 13.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để đường thẳng  $y = m$  cắt đồ thị hàm số  $y = 2x^2|x^2 - 2|$  tại 6 điểm phân biệt?

- A. 1. B. 0. C. 2. D. 3.

**Câu 14.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để phương trình  $|f(x)| = m$  có 6 nghiệm phân biệt.

- A.  $-4 < m < -3$ . B.  $0 < m < 3$ .  
C.  $m > 4$ . D.  $3 < m < 4$ .



**Câu 15.**

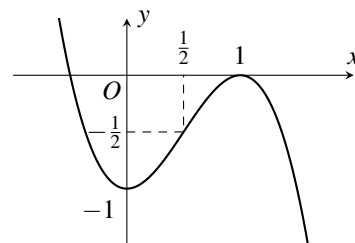
Cho hàm số  $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  có bảng biến thiên như hình bên. Khi đó, phương trình  $|f(x)| = m$  có bốn nghiệm phân biệt  $x_1 < x_2 < x_3 < \frac{1}{2} < x_4$  khi và chỉ khi

- A.  $\frac{1}{2} < m < 1$ . B.  $\frac{1}{2} \leq m < 1$ .  
C.  $0 < m < 1$ . D.  $0 < m \leq 1$ .

|      |           |   |   |           |   |           |
|------|-----------|---|---|-----------|---|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | 0 | 1 | $+\infty$ |   |           |
| $y'$ |           | + | 0 | -         | 0 | +         |
| $y$  |           |   | 1 |           |   | $+\infty$ |
|      | $-\infty$ |   |   | 0         |   |           |

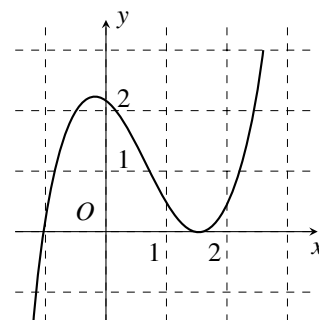
**Câu 16.** Cho hàm số  $y = -2x^3 + 3x^2 - 1$  có đồ thị như hình vẽ. Bằng cách sử dụng đồ thị hàm số, xác định  $m$  để phương trình  $2x^3 - 3x^2 + 2m = 0$  có đúng ba nghiệm phân biệt, trong đó có hai nghiệm lớn hơn  $\frac{1}{2}$ .

- A.  $m \in \left(-\frac{1}{2}; 0\right)$ . B.  $m \in (-1; 0)$ .  
C.  $m \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$ . D.  $m \in \left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right)$ .



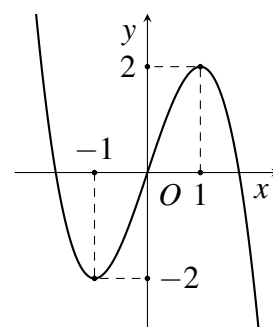
**Câu 17.** Cho hàm số bậc ba  $y = f(x)$  có đồ thị như hình bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để phương trình  $f(x) - x = m$  có ba nghiệm phân biệt?

- A. 3. B. 4. C. 1. D. 5.



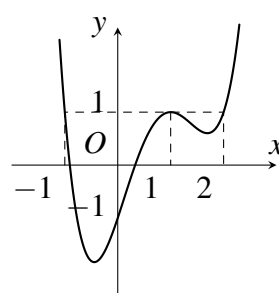
**Câu 18.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để bất phương trình  $f(x) \leq 2^m$  có nghiệm đúng với mọi  $x \in [0; 1]$ .

- A.  $0 \leq m \leq 2$ . B.  $m \geq 2$ .  
C.  $0 \leq m \leq 1$ . D.  $m \geq 1$ .



**Câu 19.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  có đồ thị như hình vẽ. Số nghiệm thực của phương trình  $f(x^2 + x) = 1$  là

- A. 2. B. 3.  
C. 4. D. 5.



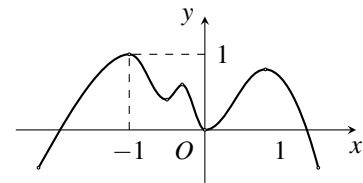
**Câu 20.** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định trên  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ , liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau. Số nghiệm của phương trình  $f(\sqrt{2x-3}) + 4 = 0$  là

- A. 4.      B. 3.      C. 2.      D. 1.

| $x$  | $-\infty$ | $-1$ | $3$       | $+\infty$ |
|------|-----------|------|-----------|-----------|
| $y'$ | +         | -    | 0         | +         |
| $y$  | $-\infty$ | $2$  | $+\infty$ | $+\infty$ |

**Câu 21.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ. Số nghiệm thực của phương trình  $f(f(\sin 2x)) = 0$  trong khoảng  $(0; \pi)$  là

- A. 4.      B. 3.      C. 2.      D. 1.



**Câu 22.** Tìm tất cả các giá trị của  $m$  để hàm số  $y = x^3 + 3x^2 - mx - 4$  luôn đồng biến trên khoảng  $(-\infty; 0)$ .

- A.  $m \leq -3$ .      B.  $m < -3$ .      C.  $m \geq 3$ .      D.  $m > 3$ .

**Câu 23.** Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để hàm số  $y = x^3 + 3x^2 + (m-1)x + 4m$  đồng biến trên khoảng  $(-1; 1)$  là

- A.  $m > 4$ .      B.  $m \geq 4$ .      C.  $m \leq -8$ .      D.  $m < 8$ .

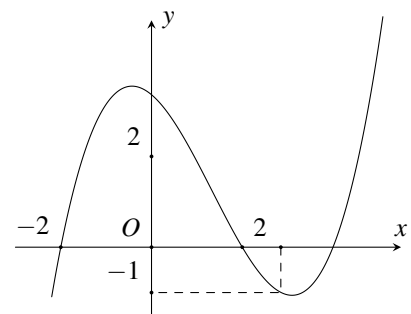
**Câu 24.** Cho hàm số  $f(x)$ , bảng biến thiên của hàm số  $f'(x)$  như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số  $y = f(x^2 + 2x)$  là

- A. 3.      B. 9.  
C. 5.      D. 7.

| $x$     | $-\infty$ | $-1$ | $0$ | $1$  | $+\infty$ |
|---------|-----------|------|-----|------|-----------|
| $f'(x)$ | $+\infty$ | $-3$ | $2$ | $-1$ | $+\infty$ |

**Câu 25.** Cho hàm số bậc ba  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình  $|f(x^3 - 3x)| = \frac{1}{2}$  là

- A. 6.      B. 10.      C. 12.      D. 3.

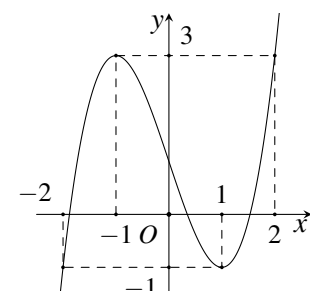


**Câu 26.** Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để phương trình  $\frac{1}{3}|\cos^3 x| - 3\cos^2 x + 5|\cos x| - 3 + 2m = 0$  có đúng bốn nghiệm phân biệt thuộc đoạn  $[0; 2\pi]$ .

- A.  $-\frac{3}{2} < m < -\frac{1}{3}$ .      B.  $\frac{1}{3} \leq m < \frac{3}{2}$ .      C.  $\frac{1}{3} < m < \frac{3}{2}$ .      D.  $-\frac{3}{2} \leq m \leq -\frac{1}{3}$ .

**Câu 27.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đồ thị như hình vẽ bên. Số tất cả các giá trị nguyên của tham số  $m$  để phương trình  $f(x) = f(m)$  có ba nghiệm phân biệt là

- A. 5.      B. 3.      C. 0.      D. 1.



**Câu 28.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để hàm số  $y = \sqrt{\sin^2 x - 4\cos x + 2m}$  có tập xác định là  $\mathbb{R}$ .



A. Không có  $m$  thỏa mãn.

B.  $m \leq -\frac{5}{2}$ .

C.  $m \geq 2$ .

D.  $m \geq -\frac{5}{2}$ .

**Câu 29.** Tìm tất cả các giá trị thực của  $m$  để phương trình  $x + 1 = m\sqrt{2x^2 + 1}$  có hai nghiệm phân biệt.

A.  $-\frac{\sqrt{2}}{2} < m < \frac{\sqrt{6}}{6}$ .

B.  $m < \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

C.  $m > \frac{\sqrt{6}}{6}$ .

D.  $\frac{\sqrt{2}}{2} < m < \frac{\sqrt{6}}{2}$ .

**Câu 30.** Gọi  $S$  là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để bất phương trình  $x^4 + 1 - x^2 + x\sqrt{2mx^4 + 2m} \geq 0$  đúng với mọi  $x \in \mathbb{R}$ . Biết rằng  $S = [a; b]$ . Giá trị của  $a\sqrt{8} + 12b$  bằng

A. 3.

B. 2.

C. 6.

D. 5.

**Câu 31.** Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số  $m$  để hàm số  $y = \frac{3}{4}x^4 - (m-1)x^2 - \frac{1}{4x^4}$  đồng biến trên khoảng  $(0; +\infty)$ .

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

—HẾT—

## § 7. SỰ TƯƠNG GIAO CỦA HAI ĐỒ THỊ

### A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

#### 1 Phương pháp đại số

Xác định tọa độ giao điểm của hai đồ thị  $y = f(x)$  và  $y = g(x)$ , ta thực hiện các bước:

- ① Giải phương trình hoành độ giao điểm  $f(x) = g(x)$ . Tìm các nghiệm  $x_0 \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$ .
- ② Với  $x_0$  vừa tìm, thay vào 1 trong 2 hàm số ban đầu để tìm  $y_0$ .
- ③ Kết luận giao điểm  $(x_0; y_0)$ .

#### 2 Phương pháp đồ thị

- ① Nếu đề bài cho hình ảnh đồ thị  $y = f(x)$  và  $y = g(x)$ , ta có thể dùng hình vẽ để xác định tọa độ giao điểm giữa chúng.
- ② Số nghiệm phương trình  $f(x) = m$  chính bằng số giao điểm của đồ thị  $y = f(x)$  với đường thẳng  $y = m$  (nằm ngang).

### B CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

#### □ DẠNG 1. Xác định (biện luận) giao điểm của đường thẳng và đồ thị của hàm số bậc ba

*Phương pháp giải.* Xét hàm số bậc ba  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  ( $a \neq 0$ ) có đồ thị  $(C)$  và đường thẳng  $d$  có phương trình  $y = kx + n$ .

Lập phương trình hoành độ giao điểm của  $(C)$  và  $d$ :

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = kx + n \quad (1)$$

Ta có hai trường hợp xảy ra:

- ☑ Trường hợp 1: Phương trình (1) có “nghiệm đẹp”  $x_0$ . Khi đó, ta phân tích (1) về dạng

$$(1) \Leftrightarrow (x - x_0)(Ax^2 + Bx + C) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 \\ Ax^2 + Bx + C = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Các bài toán thường gặp:

- ①  $(C)$  và  $d$  có đúng ba điểm chung  $\Leftrightarrow (2)$  có hai nghiệm phân biệt khác  $x_0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ Ax_0^2 + Bx_0 + C \neq 0 \end{cases}$$

- ②  $(C)$  và  $d$  có đúng hai điểm chung  $\Leftrightarrow (2)$  có đúng 1 nghiệm khác  $x_0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 0 \\ -\frac{B}{2A} \neq x_0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} \Delta > 0 \\ -\frac{B}{2A} = x_0 \end{cases}$$

- ③  $(C)$  và  $d$  có đúng một điểm chung  $\Leftrightarrow (2)$  vô nghiệm hoặc có nghiệm duy nhất và nghiệm đó bằng  $x_0$ .

$$\Leftrightarrow \Delta < 0 \text{ hoặc } \begin{cases} \Delta = 0 \\ -\frac{B}{2A} = x_0 \end{cases}$$

☑ Trường hợp 2: Phương trình (1) không có “nghiệm đẹp”. Khi đó ta tiến hành các bước:

- ① Cô lập tham số  $m$ , chuyển phương trình (1) về dạng  $f(x) = m$ . Số nghiệm phương trình này chính bằng hoành độ giao điểm của đồ thị  $y = f(x)$  với đường thẳng  $y = m$  (nằm ngang).
- ② Lập bảng biến thiên của hàm  $y = f(x)$  trên miền đề bài yêu cầu.
- ③ Tịnh tiến đường thẳng  $y = m$  theo phương song song với  $Ox$ , nhìn giao điểm suy ra kết quả.

**Ví dụ 1.** Đường thẳng  $y = -3x + 1$  cắt đồ thị hàm số  $y = x^3 - 2x^2 - 1$  tại điểm duy nhất có tọa độ  $(x_0; y_0)$ . Chọn câu trả lời **sai** trong các câu trả lời sau đây.

A.  $x_0^3 - 2x_0^2 - 1 - y_0 = 0$ .

B.  $y_0 + 3x_0 - 1 = 0$ .

C.  $x_0 + y_0 + 2 = 0$ .

D.  $x_0^3 - 2 = 2x_0^3 - 3x_0$ .

**Ví dụ 2.** Số giao điểm của đồ thị hàm số  $y = (x - 1)(x^2 - 3x + 2)$  và trục hoành là

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

**Ví dụ 3.** Đường thẳng  $y = x - 1$  cắt đồ thị hàm số  $y = x^3 - x^2 + x - 1$  tại hai điểm. Tìm tổng tung độ các giao điểm đó.

A. -3.

B. 2.

C. 0.

D. -1.

**Ví dụ 4.** Đồ thị hàm số  $y = x^3 - 3x^2 + 2x - 1$  cắt đồ thị hàm số  $y = x^2 - 3x + 1$  tại hai điểm phân biệt  $A, B$ . Tính độ dài  $AB$ .

A.  $AB = 3$ .

B.  $AB = 2\sqrt{2}$ .

C.  $AB = 2$ .

D.  $AB = 1$ .

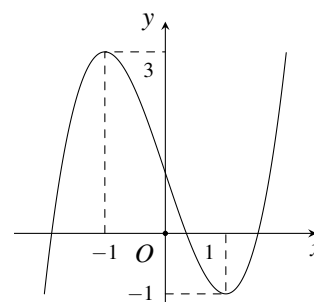
**Ví dụ 5.** Đồ thị sau đây là của hàm số  $y = x^3 - 3x + 1$ . Với giá trị nào của  $m$  thì phương trình  $x^3 - 3x - m = 0$  có 3 nghiệm phân biệt?

A.  $-2 < m < 2$ .

B.  $-1 < m < 3$ .

C.  $-2 \leq m < 2$ .

D.  $-2 < m < 3$ .



**Ví dụ 6.** Cho hàm số  $y = (x - 2)(x^2 + mx + m^2 - 3)$ . Tìm tập hợp các giá trị thực của tham số  $m$  để đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt.

A.  $-1 < m < 2$ .

B.  $\begin{cases} -2 < m < 2 \\ m \neq -1 \end{cases}$ .

C.  $\begin{cases} -1 < m < 2 \\ m \neq 1 \end{cases}$ .

D.  $-2 < m < -1$ .

**Ví dụ 7.** Cho hàm số  $y = x^3 - 3x + 2$  có đồ thị  $(C)$ . Gọi  $d$  là đường thẳng đi qua điểm  $A(3; 20)$  và có hệ số góc là  $m$ . Với giá trị nào của  $m$  thì  $d$  cắt  $(C)$  tại ba điểm phân biệt?

A.  $\begin{cases} m < \frac{15}{4} \\ m \neq 4 \end{cases}$ .

B.  $\begin{cases} m < \frac{1}{5} \\ m \neq 0 \end{cases}$ .

C.  $\begin{cases} m > \frac{15}{4} \\ m \neq 24 \end{cases}$ .

D.  $\begin{cases} m > \frac{1}{5} \\ m \neq 1 \end{cases}$ .

**Ví dụ 8.** Biết có hai số  $m_1, m_2$  là hai giá trị của tham số  $m$  sao cho đồ thị  $(C)$  của hàm số  $y = x^3 - 3mx^2 - 3x + 3m + 2$  cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ  $x_1, x_2, x_3$  thỏa mãn  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 15$ . Tính  $m_1 + m_2$ .

- A. 0.                      B. 3.                      C. 2.                      D. 1.

**Ví dụ 9.** Cho hàm số  $y = x^3 + mx^2 - x - m$  ( $C_m$ ). Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị của tham số  $m$  để đồ thị hàm số ( $C_m$ ) cắt trục  $Ox$  tại ba điểm phân biệt có hoành độ lập thành một cấp số cộng ?

- A. 2.                      B. 3.                      C. 1.                      D. 0.

**Ví dụ 10.** Tìm tất cả các giá trị của  $m$  để đường thẳng  $\Delta : y = x + 4$  cắt đồ thị hàm số  $y = x^3 + 2mx^2 + (m+3)x + 4$  tại ba điểm phân biệt  $A(0;4)$ ,  $B$  và  $C$  sao cho diện tích tam giác  $MBC$  bằng 4, với  $M(1;3)$ .

- A.  $m = 2$  hoặc  $m = 3$ .                      B.  $m = -2$  hoặc  $m = 3$ .  
C.  $m = 3$ .                      D.  $m = -2$  hoặc  $m = -3$ .

## □ DẠNG 2. Xác định (biện luận) giao điểm của đường thẳng và đồ thị của hàm số bậc bốn trùng phương

**Phương pháp giải.** Cho hàm số  $y = ax^4 + bx^2 + c$  ( $a \neq 0$ ) có đồ thị  $(C)$  và đường thẳng  $y = k$  có đồ thị  $d$ .

Lập phương trình hoành độ giao điểm của  $(C)$  và  $d$ :

$$ax^4 + bx^2 + c = k \quad (1)$$

Đặt  $t = x^2$  ( $t \geq 0$ ) ta có phương trình  $at^2 + bt + c - k = 0$  (2).

Các bài toán thường gặp:

①  $(C)$  và  $d$  có bốn điểm chung  $\Leftrightarrow$  (2) có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases}$$

②  $(C)$  và  $d$  có ba điểm chung  $\Leftrightarrow$  (2) có hai nghiệm phân biệt, trong đó có một nghiệm dương và một nghiệm  $t = 0$ .

③  $(C)$  và  $d$  có hai điểm chung  $\Leftrightarrow$  (2) có nghiệm kép dương hoặc có hai nghiệm trái dấu.

④  $(C)$  và  $d$  có một điểm chung  $\Leftrightarrow$  (2) có nghiệm  $t = 0$  và một nghiệm âm.

⑤  $(C)$  và  $d$  không có điểm chung  $\Leftrightarrow$  (2) vô nghiệm hoặc chỉ có nghiệm âm.



Có thể chuyển bài toán về biện luận giao điểm của đồ thị cô định với một đường thẳng nằm ngang.

**Ví dụ 11.** Tìm số giao điểm của đồ thị hàm số  $y = x^4 - 2x^2 + 1$  với trục  $Ox$ .

- A. 1.                      B. 2.                      C. 3.                      D. 4.

**Ví dụ 12.** Đồ thị hàm số  $y = 2x^4 - 3x^2$  và đồ thị hàm số  $y = -x^2 + 2$  có bao nhiêu điểm chung?

- A. 2.                      B. 1.                      C. 3.                      D. 4.

**Ví dụ 13.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để đường thẳng  $y = m$  cắt đồ thị của hàm số  $y = x^4 - 2x^2 - 3$  tại bốn điểm phân biệt.

- A.  $m > -1$ . B.  $-1 < m < 1$ . C.  $m < -4$ . D.  $-4 < m < -3$ .

**Ví dụ 14.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để đồ thị hàm số  $y = x^4 - 3x^2 - m - 1$  cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt.

- A.  $\begin{cases} m > -1 \\ m = -\frac{13}{4} \end{cases}$ . B.  $m > -1$ . C.  $\begin{cases} m \geq -1 \\ m = -\frac{13}{4} \end{cases}$ . D.  $m \geq -1$ .

**Ví dụ 15.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để đường thẳng  $y = m$  cắt đồ thị hàm số  $y = 2x^2|x^2 - 2|$  tại 6 điểm phân biệt?

- A. 1. B. 0. C. 2. D. 3.

**Ví dụ 16.** Có bao nhiêu giá trị thực của tham số  $m$  trong khoảng  $(-3; 5)$  để đồ thị hàm số  $y = x^4 + (m-5)x^2 - mx + 4 - 2m$  tiếp xúc với trục hoành?

- A. 2. B. 3. C. 1. D. 4.

**Ví dụ 17.** Cho hàm số:  $y = x^4 - (2m-1)x^2 + 2m$  có đồ thị  $(C)$ . Tất cả có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số  $m$  để đường thẳng  $d: y = 2$  cắt đồ thị  $(C)$  tại bốn điểm phân biệt đều có hoành độ bé hơn 3?

- A. 3. B. 1. C. 2. D. 4.

### **DẠNG 3. Xác định (biện luận) giao của đường thẳng và đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$**

**Phương pháp giải.** Cho hàm số  $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ,  $(ad-bc \neq 0)$  có đồ thị  $(C)$  và đường thẳng  $d$  có phương trình  $y = kx + n$ .

Lập phương trình hoành độ giao điểm của  $(C)$  và  $d$ :

$$\frac{ax+b}{cx+d} = kx+n \Leftrightarrow \begin{cases} Ax^2 + Bx + C = 0 \quad (1) \\ x \neq -\frac{d}{c} = x_0 \end{cases}$$

Các bài toán thường gặp

①  $(C)$  và  $d$  có hai điểm chung  $\Leftrightarrow (1)$  có hai nghiệm phân biệt khác  $x_0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ Ax_0^2 + Bx_0 + C \neq 0 \end{cases}$

② Giả sử hai đồ thị trên cắt nhau tại hai điểm phân biệt  $M(x_1; kx_1 + n)$  và  $N(x_2; kx_2 + n)$ .  
Khi đó

$$MN = \sqrt{k^2 + 1} \sqrt{\frac{\Delta}{A^2}}$$

**Ví dụ 18.** Đồ thị của hàm số  $y = \frac{x-1}{x+1}$  cắt hai trục  $Ox$  và  $Oy$  tại  $A$  và  $B$ . Khi đó diện tích của tam giác  $OAB$  (với  $O$  là gốc tọa độ) bằng

- A. 1. B.  $\frac{1}{4}$ . C. 2. D.  $\frac{1}{2}$ .

**Ví dụ 19.** Biết đường thẳng  $y = x - 2$  cắt đồ thị hàm số  $y = \frac{x}{x-1}$  tại 2 điểm phân biệt  $A, B$ . Tìm hoành độ trọng tâm tam giác  $OAB$  với  $O$  là gốc tọa độ.

A.  $\frac{2}{3}$ .                      B. 2.                      C.  $\frac{4}{3}$ .                      D. 4.

**Ví dụ 20.** Gọi  $M, N$  là giao điểm của đường thẳng  $y = x + 1$  và đường cong  $y = \frac{2x+4}{x-1}$ . Tìm hoành độ trung điểm của đoạn thẳng  $MN$ .

A.  $x = -1$ .                      B.  $x = 1$ .                      C.  $x = -2$ .                      D.  $x = 2$ .

**Ví dụ 21.** Cho hàm số  $y = \frac{2x}{x+1}$  có đồ thị  $(C)$ . Gọi  $A, B$  là giao điểm của đường thẳng  $d: y = x$  với đồ thị  $(C)$ . Tính độ dài đoạn  $AB$ .

A.  $AB = \sqrt{2}$ .                      B.  $AB = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .                      C.  $AB = 1$ .                      D.  $AB = 2$ .

**Ví dụ 22.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của  $m$  thuộc đoạn  $[-14; 15]$  sao cho đường thẳng  $y = mx + 3$  cắt đồ thị của hàm số  $y = \frac{2x+1}{x-1}$  tại hai điểm phân biệt.

A. 17.                      B. 16.                      C. 20.                      D. 15.

**Ví dụ 23.** Cho hàm số  $y = \frac{2x+1}{x+1}$  có đồ thị  $(C)$ . Tìm các giá trị của tham số  $m$  để đường thẳng  $d: y = x + m - 1$  cắt đồ thị  $(C)$  tại hai điểm phân biệt  $A, B$  sao cho  $AB = 2\sqrt{3}$ .

A.  $m = 4 \pm \sqrt{3}$ .                      B.  $m = 2 \pm \sqrt{3}$ .                      C.  $m = 4 \pm \sqrt{10}$ .                      D.  $m = 2 \pm \sqrt{10}$ .

**Ví dụ 24.** Biết rằng có hai giá trị thực của tham số  $m$  để đồ thị hàm số  $y = \frac{2x+1}{x-1}$   $(C)$  và đường thẳng  $d: y = mx + 3$  cắt nhau tại hai điểm phân biệt  $A, B$  sao cho tam giác  $OAB$  vuông tại  $O$  (với  $O$  là gốc tọa độ). Tổng của hai giá trị đó bằng

A. 0.                      B. 4.                      C. 8.                      D. 6.

**Ví dụ 25.** Cho hàm số  $y = \frac{3x-2}{x+1}$  có đồ thị  $(C)$  và điểm  $A(-5; 5)$ . Tìm tất cả giá trị thực của tham số  $m$  để đường thẳng  $d: y = -x + m$  cắt  $(C)$  tại hai điểm phân biệt  $M, N$  sao cho tứ giác  $OAMN$  là hình bình hành ( $O$  là gốc tọa độ).

A.  $m = 3$ .                      B.  $m = 2 + \sqrt{5}$ .  
C.  $m = 2 + \sqrt{5}, m = 2 - \sqrt{5}$ .                      D.  $m = 2 - \sqrt{5}$ .

**BẢNG TÔ ĐÁP ÁN TỰ LUYỆN**

Học sinh làm BTTL xong, tô phương án đúng. Buổi học sau, cùng với GV kiểm tra kết quả.

|                    |                     |                     |                     |                     |
|--------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| 1. (A) (B) (C) (D) | 7. (A) (B) (C) (D)  | 13. (A) (B) (C) (D) | 19. (A) (B) (C) (D) | 25. (A) (B) (C) (D) |
| 2. (A) (B) (C) (D) | 8. (A) (B) (C) (D)  | 14. (A) (B) (C) (D) | 20. (A) (B) (C) (D) | 26. (A) (B) (C) (D) |
| 3. (A) (B) (C) (D) | 9. (A) (B) (C) (D)  | 15. (A) (B) (C) (D) | 21. (A) (B) (C) (D) | 27. (A) (B) (C) (D) |
| 4. (A) (B) (C) (D) | 10. (A) (B) (C) (D) | 16. (A) (B) (C) (D) | 22. (A) (B) (C) (D) | 28. (A) (B) (C) (D) |
| 5. (A) (B) (C) (D) | 11. (A) (B) (C) (D) | 17. (A) (B) (C) (D) | 23. (A) (B) (C) (D) | 29. (A) (B) (C) (D) |
| 6. (A) (B) (C) (D) | 12. (A) (B) (C) (D) | 18. (A) (B) (C) (D) | 24. (A) (B) (C) (D) | 30. (A) (B) (C) (D) |

**Câu 1.** Tìm số giao điểm của đồ thị hàm số  $y = x^3 + 2x^2 - 4x + 1$  và đường thẳng  $y = 2$ .

- A. 1. B. 3. C. 2. D. 0.

**Câu 2.** Đồ thị hàm số  $y = x^4 - x^3 - 3$  cắt trục tung tại mấy điểm?

- A. 1 điểm. B. 2 điểm. C. 4 điểm. D. 3 điểm.

**Câu 3.** Đồ thị hàm số  $y = x^4 - 5x^2 + 4$  cắt trục hoành tại bao nhiêu điểm?

- A. 0. B. 4. C. 2. D. 3.

**Câu 4.** Tìm số giao điểm  $n$  của hai đồ thị  $(C_1): y = x^4 - 3x^2 + 2$  và  $(C_2): y = x^2 - 2$ .

- A.  $n = 1$ . B.  $n = 4$ . C.  $n = 2$ . D.  $n = 0$ .

**Câu 5.** Đồ thị hàm số  $y = \frac{4x+4}{x-1}$  và  $y = x^2 - 1$  cắt nhau tại bao nhiêu điểm?

- A. 1. B. 3. C. 2. D. 0.

**Câu 6.** Biết rằng đồ thị hàm số  $y = x^3 + x^2 - x + 2$  và đồ thị hàm số  $y = -x^2 - x + 5$  cắt nhau tại điểm duy nhất có tọa độ  $(x_0; y_0)$ . Tìm  $y_0$ .

- A. 0. B. 4. C. 1. D. 3.

**Câu 7.** Đồ thị hàm số nào sau đây cắt trục tung tại điểm có tung độ âm?

- A.  $y = \frac{4x+1}{x+2}$ . B.  $y = \frac{-2x+3}{x+1}$ . C.  $y = \frac{3x+4}{x-1}$ . D.  $y = \frac{2x-3}{x-1}$ .

**Câu 8.** Biết đường thẳng  $y = x - 2$  cắt đồ thị hàm số  $y = \frac{2x+1}{x-1}$  tại hai điểm phân biệt  $A, B$  có hoành độ lần lượt là  $x_A, x_B$ . Khi đó

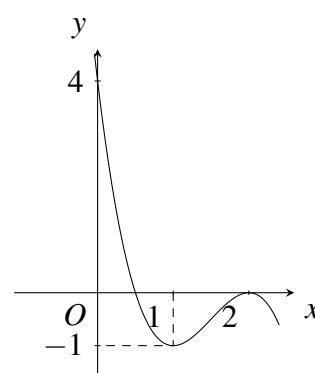
- A.  $x_A + x_B = 5$ . B.  $x_A + x_B = 2$ . C.  $x_A + x_B = 1$ . D.  $x_A + x_B = 3$ .

**Câu 9.** Biết rằng đồ thị hàm số  $y = x^3 - 4x^2 + 5x - 1$  cắt đồ thị hàm số  $y = 1$  tại hai điểm phân biệt  $A$  và  $B$ . Tính độ dài đoạn thẳng  $AB$ .

- A.  $AB = 2$ . B.  $AB = 3$ . C.  $AB = 2\sqrt{2}$ . D.  $AB = 1$ .

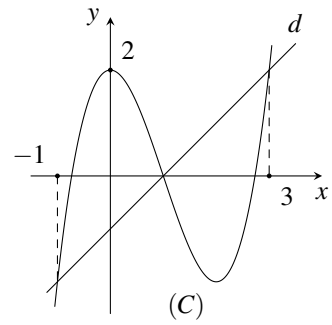
**Câu 10.** Cho hàm số  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  ( $d \neq 0$ ) có đồ thị như hình vẽ. Số nghiệm của phương trình  $3f(x) - 1 = 0$  bằng

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.



**Câu 11.** Cho hàm số bậc ba  $y = f(x)$  có đồ thị  $(C)$  như hình vẽ, đường thẳng  $d$  có phương trình  $y = x - 1$ . Biết phương trình  $f(x) = 0$  có ba nghiệm  $x_1 < x_2 < x_3$ . Giá trị của  $x_1 x_3$  bằng

- A.  $-2$ . B.  $-\frac{5}{2}$ . C.  $-\frac{7}{3}$ . D.  $-3$ .



**Câu 12.** Cho hàm số  $y = \frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + 1$  có đồ thị  $(C)$  và đường thẳng  $d: y = -m$ . Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số  $m$  để  $d$  cắt  $(C)$  tại ba điểm phân biệt.

- A.  $\left[\frac{1}{3}; 1\right]$ . B.  $\left[-1; -\frac{1}{3}\right]$ . C.  $\left(\frac{1}{3}; 1\right)$ . D.  $\left(-1; -\frac{1}{3}\right)$ .

**Câu 13.** Tìm  $m$  để đồ thị hàm số  $y = x^4 - 2x^2 + m$  cắt trục hoành bốn điểm phân biệt.

- A.  $m > 0$ . B.  $0 < m < 1$ . C.  $m > 1$ . D.  $m < 1$ .

**Câu 14.** Có bao nhiêu số  $m$  nguyên âm để đồ thị hàm số  $y = x^3 - 3x^2 + (1 - m)x + m + 1$  cắt trục  $Ox$  tại 3 điểm phân biệt.

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

**Câu 15.** Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để đồ thị  $(C)$  của hàm số  $y = x^3 - 3x + m$  cắt trục hoành tại đúng 3 điểm phân biệt.

- A.  $m \in (2; +\infty)$ . B.  $m \in (-2; 2)$ . C.  $m \in \mathbb{R}$ . D.  $m \in (-\infty; -2)$ .

**Câu 16.** Cho hàm số  $y = x^3 - 3mx^2 + (3m - 1)x + 6m$  có đồ thị là  $(C)$ . Gọi  $S$  là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để  $(C)$  cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ  $x_1, x_2, x_3$  thỏa mãn điều kiện  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1 x_2 x_3 = 20$ . Tính tổng các phần tử của tập  $S$ .

- A.  $\frac{4}{3}$ . B.  $\frac{2}{3}$ . C.  $\frac{5}{3}$ . D.  $\frac{1}{3}$ .

**Câu 17.** Tìm tất cả giá trị thực của tham số  $m$  để đồ thị hàm số  $y = x^3 - 3mx^2 + 9x - 7$  cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số cộng.

- A.  $\begin{cases} m = 1 \\ m = \frac{-1 \pm \sqrt{15}}{2} \end{cases}$ . B.  $m = \frac{-1 + \sqrt{15}}{2}$ . C.  $m = \frac{-1 - \sqrt{15}}{2}$ . D.  $m = 1$ .

**Câu 18.** Giá trị của tham số  $m$  để đồ thị hàm số  $y = x^3 - 3x^2 - mx$  cắt trục hoành tại ba điểm  $A, B, C$  phân biệt và cách đều nhau là

- A. 2. B. 1. C.  $-2$ . D. 0.

**Câu 19.** Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để phương trình  $-x^4 + 2x^2 + 3 + 2m = 0$  có 4 nghiệm phân biệt.

- A.  $-2 \leq m \leq \frac{-3}{2}$ . B.  $\frac{-3}{2} < m < 2$ . C.  $-2 < m < \frac{-3}{2}$ . D.  $3 < m < 4$ .

**Câu 20.** Tìm tất cả các giá trị  $m$  nguyên để phương trình  $x^4 - 2x^2 + 3 - m = 0$  có bốn nghiệm thực.

- A. 1. B. 2. C. 3. D. Không có giá trị  $m$ .

**Câu 21.** Tìm số giao điểm của đồ thị hàm số  $y = x^2|x^2 - 3|$  và đường thẳng  $y = 2$ .

- A. 8. B. 2. C. 6. D. 4.

**Câu 22.** Có bao nhiêu đường thẳng cắt đồ thị  $(C)$  của hàm số  $y = \frac{5x - 3}{x - 1}$  tại hai điểm phân biệt mà hai giao điểm đó có hoành độ và tung độ là các số nguyên?

- A. 15. B. 4. C. 2. D. 6.



**Câu 23.** Đồ thị hàm số  $y = \frac{x-3}{x+1}$  cắt đường thẳng  $y = x + m$  tại hai điểm phân biệt khi

- A.  $m > -2$ .      B.  $m > 6$ .      C.  $\begin{cases} m < -2 \\ m > 6 \end{cases}$ .      D.  $m < -2$ .

**Câu 24.** Cho hàm số  $y = x^3 + ax^2 + bx + c$  ( $b < 0, a \neq 0$ ). Biết rằng đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt trong đó có hai giao điểm đối xứng nhau qua gốc tọa độ. Tính giá trị của biểu thức  $T = 2(ab - c) + 3$ .

- A.  $T = 5$ .      B.  $T = 2$ .      C.  $T = 3$ .      D.  $T = 1$ .

**Câu 25.** Cho hàm số  $y = \frac{3x+2}{x+2}$  có đồ thị (C) và đường thẳng  $d: y = ax + 2b - 4$ . Đường thẳng  $d$  cắt (C) tại hai điểm A và B đối xứng nhau qua gốc tọa độ O. Tính  $a + b$ .

- A.  $T = 2$ .      B.  $T = \frac{5}{2}$ .      C.  $T = 4$ .      D.  $T = \frac{7}{2}$ .

**Câu 26.** Đường thẳng  $d$  đi qua  $A(2; 1)$  với hệ số góc  $k$  cắt đồ thị (C) của hàm số  $y = \frac{x-8}{x-4}$  tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi

- A.  $k > 0$ .      B.  $-1 < k < 1$ .      C.  $k < 1$  hoặc  $k > 3$ .      D.  $k < 0$  hoặc  $k > 4$ .

**Câu 27.** Cho hàm số  $y = \frac{2x+1}{x+1}$  có đồ thị (C). Tìm các giá trị của tham số  $m$  để đường thẳng  $d: y = x + m - 1$  cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho  $AB = 2\sqrt{3}$ .

- A.  $m = 4 \pm \sqrt{3}$ .      B.  $m = 4 \pm \sqrt{10}$ .      C.  $m = 2 \pm \sqrt{10}$ .      D.  $m = 2 \pm \sqrt{3}$ .

**Câu 28.** Tìm giá trị của tham số  $m$  để đường thẳng  $d: y = 2x + m$  cắt đồ thị hàm số  $y = \frac{x+1}{x-1}$  (C) tại hai điểm A, B phân biệt sao cho đoạn AB ngắn nhất.

- A.  $m = 0$ .      B.  $m = -1$ .      C.  $m = -2$ .      D.  $m = 1$ .

**Câu 29.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để đường thẳng (d):  $y = mx - m - 1$  cắt đồ thị (C):  $y = x^3 - 3x^2 + 1$  tại 3 điểm A, B, C phân biệt (B thuộc đoạn AC), sao cho tam giác AOC cân tại O (với O là gốc tọa độ).

- A.  $m = -1$ .      B.  $m = 1$ .      C.  $m = 2$ .      D.  $m = -2$ .

**Câu 30.** Cho các số thực  $a, b, c$  thỏa mãn  $\begin{cases} a+c > b+1 \\ a+b+c+1 < 0 \end{cases}$ . Tìm số giao điểm của đồ thị hàm số  $y = x^3 + ax^2 + bx + c$  và trục Ox.

- A. 2.      B. 3.      C. 0.      D. 1.

—HẾT—

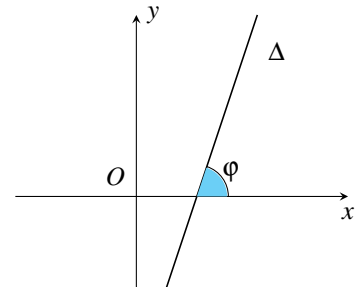
## § 8. TIẾP TUYẾN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

### A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

☑ Đường thẳng đi qua điểm  $M(x_0; y_0)$  có hệ số góc  $k$  có phương trình là  $y = k(x - x_0) + y_0$ .

**Lưu ý:**

- ①  $k = \tan \varphi$ , với  $\varphi$  là góc hợp bởi đường thẳng  $\Delta$  với chiều dương của trục  $Ox$  và  $\varphi \neq 90^\circ$ .
- ② Cho hai đường thẳng  $\Delta_1: y = k_1x + m_1$  và  $\Delta_2: y = k_2x + m_2$ .
  - $\Delta_1 \parallel \Delta_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2$  và  $m_1 \neq m_2$ .
  - $\Delta_1 \perp \Delta_2 \Leftrightarrow k_1 \cdot k_2 = -1$ .

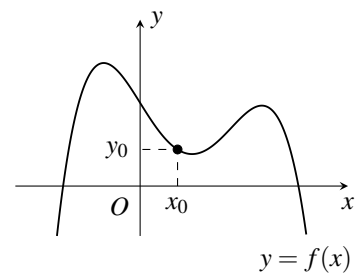


☑ Tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm  $M(x_0; y_0)$ :

- ① Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị  $(C)$ . Tiếp tuyến  $d$  của đồ thị hàm số tại điểm  $M(x_0; y_0)$  có phương trình là  $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$  (lúc này  $k = f'(x_0)$ ).

Trong đó

- $x_0$  gọi là hoành độ tiếp điểm;
- $y_0$  là tung độ tiếp điểm, với  $y_0 = f(x_0)$ ;
- $f'(x_0)$  gọi là hệ số góc của tiếp tuyến.



### B CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

☐ **DẠNG 1. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số  $y = f(x)$  tại điểm  $(x_0; y_0)$  cho trước**

*Phương pháp giải.*

- Tính  $f'(x)$ . Từ đây tính  $f'(x_0)$  hoặc bấm máy  $\left. \frac{d}{dx}(f(x)) \right|_{x=x_0}$ .
- Thay vào công thức  $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$ , thu gọn kết quả về dạng  $y = Ax + B$ .

Trong nhiều trường hợp, đề bài chưa cho đầy đủ  $(x_0; y_0)$ , ta thường gặp các loại sau:

- ① Cho biết trước  $x_0$  hoặc  $y_0$ . Ta chỉ việc thay giá trị đó vào hàm số  $y = f(x)$ , sẽ tính được đại lượng còn lại.
- ② Cho trước 1 điều kiện giải. Ta chỉ việc giải điều kiện đó, tìm  $x_0$ .

**Ví dụ 1.** Cho hàm số  $y = x^4 - 4x^2 + 4$  có đồ thị  $(C)$ . Viết phương trình tiếp tuyến với  $(C)$  tại điểm  $M(1; 1)$ .

- A.  $y = -x + 2$ .      B.  $y = -2x + 3$ .      C.  $y = -3x + 4$ .      D.  $y = -4x + 5$ .

**Ví dụ 2.** Tiếp tuyến với đồ thị của hàm số  $f(x) = \frac{3}{2x-1}$  tại điểm có hoành độ  $x_0 = 2$  có hệ số góc là

- A.  $-\frac{2}{3}$ .      B.  $\frac{2}{3}$ .      C. 2.      D. -2.

**Ví dụ 3.** Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số  $y = x^2 - 3x + 1$  tại điểm có hoành độ bằng 3 là

- A.  $y = 3x - 8$ .      B.  $y = 3x - 10$ .      C.  $y = -3x + 10$ .      D.  $y = -3x - 8$ .

**Ví dụ 4.** Tìm hệ số góc tiếp tuyến của đồ thị hàm số  $y = \frac{3-4x}{x-2}$  tại điểm có tung độ  $y = -\frac{7}{3}$ .

- A.  $\frac{9}{5}$ .      B.  $-\frac{5}{9}$ .      C.  $\frac{5}{9}$ .      D. -10.

**Ví dụ 5.** Tiếp tuyến của đường cong  $(C): y = \frac{2x+1}{x-1}$  tại điểm  $M(2; 5)$  cắt các trục tọa độ  $Ox, Oy$  lần lượt tại  $A$  và  $B$ . Tính diện tích tam giác  $OAB$ .

- A.  $\frac{121}{6}$ .      B.  $-\frac{121}{6}$ .      C.  $\frac{121}{3}$ .      D.  $-\frac{121}{3}$ .

**Ví dụ 6.** Tiếp tuyến của đồ thị hàm số  $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 4$  tại giao điểm của đồ thị hàm số với trục  $Ox$  là

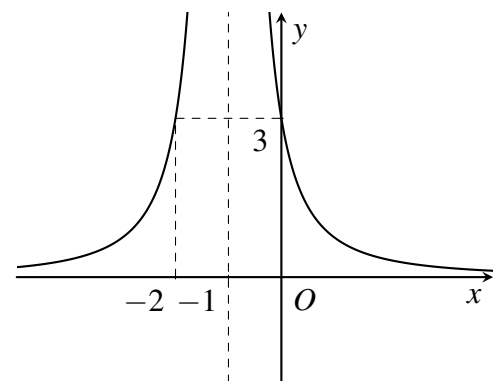
- A.  $y = 9x + 9$ .      B.  $y = -9x + 9$  và  $y = 0$ .  
C.  $y = 9x - 9$  và  $y = 0$ .      D.  $y = -9x - 9$ .

**Ví dụ 7.** Cho hàm số  $y = \frac{x+1}{x+2}$  có đồ thị  $(C)$  và đường thẳng  $(d): y = -2x + m - 1$  ( $m$  là tham số thực). Gọi  $k_1, k_2$  là hệ số góc của tiếp tuyến tại giao điểm của  $(d)$  và  $(C)$ . Khi đó  $k_1 \cdot k_2$  bằng

- A. 3.      B. 4.      C.  $\frac{1}{4}$ .      D. 2.

**Ví dụ 8.** Cho hàm số  $y = f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ , ( $a, b, c, d \in \mathbb{R}; c \neq 0, d \neq 0$ ) có đồ thị  $(C)$ . Đồ thị của hàm số  $y = f'(x)$  như hình vẽ dưới đây. Biết  $(C)$  cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -2. Viết phương trình tiếp tuyến của  $(C)$  tại giao điểm của  $(C)$  với trục hoành.

- A.  $x - 3y + 2 = 0$ .      B.  $x + 3y - 2 = 0$ .  
C.  $x + 3y + 2 = 0$ .      D.  $x - 3y - 2 = 0$ .



## **DẠNG 2. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ khi biết hệ số góc của tiếp tuyến bằng $k_0$**

*Phương pháp giải.*

- Tính  $f'(x)$ . Giải phương trình  $f'(x) = k_0$ , tìm nghiệm  $x_0$ .
- Thay  $x_0$  vào  $y = f(x)$ , tìm  $y_0$ .

- Viết phương trình tiếp tuyến tại  $(x_0; y_0)$  theo công thức  $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$ .

Trong nhiều trường hợp, ta gặp các dạng sau:

- ① Biết tiếp tuyến song song với  $\Delta: y = ax + b$ . Khi đó  $k_0 = a$  hay  $f'(x_0) = a$ .
- ② Biết tiếp tuyến vuông góc với  $\Delta: y = ax + b$ . Khi đó  $k_0 \cdot a = -1$  hay  $f'(x_0) = -\frac{1}{a}$ .
- ③ Biết tiếp tuyến tạo với  $Ox$  một góc  $\varphi$  thì  $k_0 = \pm \tan \varphi$ .
- ④ Biết tiếp tuyến cắt  $Ox, Oy$  lần lượt tại hai điểm  $A, B$  thỏa  $OA = m \cdot OB$  thì  $k_0 = \pm \frac{OB}{OA}$ .
- ⑤ Biết tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất (hoặc lớn nhất) thì  $k_0 = \min f'(x)$  (hoặc  $\max f'(x)$ ).  
Đối với hàm bậc ba thì  $k_{\max}$  hoặc  $k_{\min}$  đạt được tại  $x_0$  thỏa  $f''(x) = 0$ .

**Ví dụ 9.** Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số  $y = -x^4 - x^2 + 6$ , biết tiếp tuyến có hệ số góc  $k = 6$ .

- A.  $y = 6x + 6$ .      B.  $y = -6x + 1$ .      C.  $y = -6x + 10$ .      D.  $y = 6x + 10$ .

**Ví dụ 10.** Tiếp tuyến của đồ thị hàm số  $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 9x + 5$  có hệ số góc lớn nhất là

- A.  $y = 12x + 18$ .      B.  $y = 9x - 9$ .      C.  $y = 12x + 6$ .      D.  $y = 4x + 4$ .

**Ví dụ 11.** Cho hàm số  $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 5$ . Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số có hệ số góc nhỏ nhất là

- A.  $y = -x + \frac{17}{3}$ .      B.  $y = -x + \frac{23}{3}$ .      C.  $y = 5$ .      D.  $y = \frac{19}{3}$ .

**Ví dụ 12.** Cho hàm số  $y = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 3x + 1$  có đồ thị  $(C)$ . Tiếp tuyến với đồ thị  $(C)$  của hàm số song song với đường thẳng  $y = -2x - 1$ . Phương trình tiếp tuyến với đồ thị  $(C)$  là

- A.  $y = -2x + \frac{10}{3}; y = -2x - 22$ .      B.  $y = -2x - 10; y = -2x - \frac{22}{3}$ .  
C.  $y = -2x + \frac{10}{3}; y = -2x + \frac{22}{3}$ .      D.  $y = -2x + \frac{10}{3}; y = -2x - \frac{22}{3}$ .

**Ví dụ 13.** Cho  $(C_m): y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3m+4}{2}x^2 + 3m + 3$ . Gọi  $A \in (C_m)$  có hoành độ 1. Tìm  $m$  để tiếp tuyến tại  $A$  song song với đường thẳng  $d: y = 6x + 2017$ ?

- A.  $m = -3$ .      B.  $m = 3$ .      C.  $m = 5$ .      D.  $m = 0$ .

**Ví dụ 14.** Tìm điểm  $M$  có hoành độ âm trên đồ thị  $(C): y = \frac{1}{3}x^3 - x + \frac{2}{3}$  sao cho tiếp tuyến tại  $M$  vuông góc với đường thẳng  $y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$ .

- A.  $M(-2; -4)$ .      B.  $M\left(-1; \frac{4}{3}\right)$ .      C.  $M\left(2; \frac{4}{3}\right)$ .      D.  $M(-2; 0)$ .

**Ví dụ 15.** Cho hàm số  $y = -x^3 + 3x^2 - 3$  có đồ thị  $(C)$ . Số tiếp tuyến của  $(C)$  vuông góc với đường thẳng  $y = \frac{1}{9}x + 2017$  là

- A. 2.      B. 1.      C. 0.      D. 3.

- Ví dụ 16.** Cho hàm số  $y = \frac{2x-1}{x-1}$  có đồ thị  $(C)$ . Có bao nhiêu tiếp tuyến của  $(C)$  cắt trục  $Ox, Oy$  lần lượt tại hai điểm  $A$  và  $B$  thỏa mãn điều kiện  $OA = 4OB$ .
- A. 2.                      B. 3.                      C. 1.                      D. 4.

**DẠNG 3. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số  $y = f(x)$ , biết tiếp tuyến đi qua điểm  $A(x_A; y_A)$**

*Phương pháp giải.*

- Gọi  $d: y = k(x - x_A) + y_A$  (1) là đường thẳng đi qua điểm  $A$  và có hệ số góc  $k$ .
- $d$  là tiếp tuyến khi hệ  $\begin{cases} f(x) = k(x - x_A) + y_A \\ f'(x) = k \end{cases}$  (2) có nghiệm  $x$ .
- Giải hệ (2), tìm  $x$  và  $k$ .
- Thay  $k$  vào (1), ta được kết quả.

- Ví dụ 17.** Cho hàm số  $y = x^3 - 9x^2 + 17x + 2$  có đồ thị  $(C)$ . Qua điểm  $M(-2; 5)$  kẻ được tất cả bao nhiêu tiếp tuyến đến  $(C)$ ?
- A. 0.                      B. 1.                      C. 2.                      D. 3.

- Ví dụ 18.** Cho đường cong  $(C): y = x^4 - 4x^2 + 2$  và điểm  $A(0; a)$ . Nếu qua  $A$  kẻ được 4 tiếp tuyến với  $(C)$  thì  $a$  phải thỏa mãn điều kiện
- A.  $a \in \left(2; \frac{10}{3}\right)$ .                      B.  $a \in (2; +\infty)$ .
- C.  $a \in (-\infty; 2) \cup \left(\frac{10}{3}; +\infty\right)$ .                      D.  $a \in \left(-\infty; \frac{10}{3}\right)$ .

- Ví dụ 19.** Đường thẳng  $x + y = 2m$  là tiếp tuyến của đường cong  $y = -x^3 + 2x + 4$  khi  $m$  bằng
- A.  $-3$  hoặc  $1$ .                      B.  $1$  hoặc  $3$ .                      C.  $-1$  hoặc  $3$ .                      D.  $-3$  hoặc  $-1$ .

- Ví dụ 20.** Cho hàm số  $y = \frac{2x}{x+1}$  có đồ thị  $(C)$  và điểm  $A(0; a)$ . Gọi  $S$  là tập hợp tất cả các giá trị thực của  $a$  để từ  $A$  kẻ được hai tiếp tuyến  $AM, AN$  đến  $(C)$  với  $M, N$  là các tiếp điểm và  $MN = 4$ . Tổng các phần tử của  $S$  bằng bao nhiêu?
- A. 4.                      B. 3.                      C. 6.                      D. 1.

- Ví dụ 21.** Cho hàm số  $y = \frac{x+1}{x-1}$  (1). Biết trên trục tung có đúng hai điểm  $M, N$  mà từ đó chỉ kẻ được tới đồ thị của hàm số (1) đúng một tiếp tuyến. Độ dài đoạn  $MN$  là
- A.  $\sqrt{5}$ .                      B. 2.                      C.  $\frac{2}{3}$ .                      D.  $\frac{\sqrt{5}}{2}$ .

**DẠNG 4. Bài tập tổng hợp**

*Phương pháp giải.*

- Ví dụ 22.** Cho hàm số  $y = \frac{x+2}{2x+3}$  có đồ thị  $(C)$ . Đường thẳng  $d$  có phương trình  $y = ax + b$  là tiếp tuyến của  $(C)$ , biết  $d$  cắt trục hoành tại  $A$  và cắt trục tung tại  $B$  sao cho tam giác  $OAB$  cân tại  $O$ , với  $O$  là gốc tọa độ. Tính  $a + b$ .
- A.  $-1$ .                      B.  $-2$ .                      C. 0.                      D.  $-3$ .

**Ví dụ 23.** Cho các hàm số  $y = f(x)$ ,  $y = g(x)$ ,  $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ . Nếu hệ số góc tiếp tuyến của các đồ thị hàm số đã cho tại điểm có hoành độ  $x_0$  bằng nhau và khác không thì

A.  $f(x_0) > \frac{1}{4}$ .      B.  $f(x_0) \leq \frac{1}{4}$ .      C.  $f(x_0) \leq \frac{1}{2}$ .      D.  $f(x_0) < \frac{1}{4}$ .

**Ví dụ 24.** Cho hàm số  $y = \frac{x+1}{2x-1}$ , có đồ thị  $(H)$ . Biết  $A(x_1; y_1)$ ,  $B(x_2; y_2)$  là hai điểm phân biệt thuộc  $(H)$  sao cho tiếp tuyến của  $(H)$  tại  $A, B$  song song với nhau. Tìm độ dài nhỏ nhất của đoạn thẳng  $AB$ .

A.  $2\sqrt{6}$ .      B.  $\sqrt{3}$ .      C.  $\sqrt{6}$ .      D.  $3\sqrt{2}$ .

**Ví dụ 25.** Cho hàm số  $y = \frac{-x+1}{2x-1}$  có đồ thị  $(C)$  và đường thẳng  $(d): y = x + m$ . Với mọi giá trị của  $m$  đường thẳng  $(d)$  luôn cắt đồ thị  $(C)$  tại hai điểm phân biệt  $A$  và  $B$ . Gọi  $k_1, k_2$  lần lượt là hệ số góc của các tiếp tuyến với  $(C)$  tại  $A$  và  $B$ . Giá trị nhỏ nhất của  $T = k_1^{2020} + k_2^{2020}$  bằng

A. 1.      B. 2.      C.  $\frac{1}{2}$ .      D.  $\frac{2}{3}$ .

**BẢNG TÔ ĐÁP ÁN TỰ LUYỆN**

Học sinh làm BTTL xong, tô phương án đúng. Buổi học sau, cùng với GV kiểm tra kết quả.

|                    |                     |                     |                     |                     |
|--------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| 1. (A) (B) (C) (D) | 7. (A) (B) (C) (D)  | 13. (A) (B) (C) (D) | 19. (A) (B) (C) (D) | 25. (A) (B) (C) (D) |
| 2. (A) (B) (C) (D) | 8. (A) (B) (C) (D)  | 14. (A) (B) (C) (D) | 20. (A) (B) (C) (D) | 26. (A) (B) (C) (D) |
| 3. (A) (B) (C) (D) | 9. (A) (B) (C) (D)  | 15. (A) (B) (C) (D) | 21. (A) (B) (C) (D) | 27. (A) (B) (C) (D) |
| 4. (A) (B) (C) (D) | 10. (A) (B) (C) (D) | 16. (A) (B) (C) (D) | 22. (A) (B) (C) (D) | 28. (A) (B) (C) (D) |
| 5. (A) (B) (C) (D) | 11. (A) (B) (C) (D) | 17. (A) (B) (C) (D) | 23. (A) (B) (C) (D) | 29. (A) (B) (C) (D) |
| 6. (A) (B) (C) (D) | 12. (A) (B) (C) (D) | 18. (A) (B) (C) (D) | 24. (A) (B) (C) (D) | 30. (A) (B) (C) (D) |

**Câu 1.** Tiếp tuyến của đồ thị hàm số  $y = -x^2 + 4x + 7$  tại điểm  $A(-1; 2)$  có hệ số góc là

- A. 2. B. 4. C. -2. D. 6.

**Câu 2.** Hệ số góc tiếp tuyến của đồ thị hàm số  $y = \frac{3x-2}{2x-1}$  tại điểm có hoành độ 2 là

- A.  $\frac{3}{2}$ . B. -1. C.  $\frac{1}{9}$ . D.  $\frac{1}{3}$ .

**Câu 3.** Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số  $y = -2x^4 + x^2 + 3$  tại điểm  $M(1; 2)$  là

- A.  $y = -6x + 8$ . B.  $y = -6x + 6$ . C.  $y = -6x - 6$ . D.  $y = -6x - 8$ .

**Câu 4.** Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số  $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 1$  tại điểm có hoành độ  $x_0 = 2$ .

- A.  $y = -x - 7$ . B.  $y = 7x - 14$ . C.  $y = 7x - 7$ . D.  $y = -x + 9$ .

**Câu 5.** Số tiếp tuyến của đồ thị hàm số  $y = x^4 + 2x^2 + 2$  tại điểm có tung độ bằng 2 là

- A. 3. B. 2. C. 4. D. 1.

**Câu 6.** Cho hàm số  $y = -x^3 + 3x - 2$  có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với trục tung.

- A.  $y = -2x + 1$ . B.  $y = 2x + 1$ . C.  $y = 3x - 2$ . D.  $y = -3x - 2$ .

**Câu 7.** Cho hàm số  $y = -x^3 + 3x - 2$  có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm M, biết M là giao điểm của (C) với đường thẳng có phương trình  $y = -x - 2$  và  $x_M > 0$ .

- A.  $y = -9x - 12$ . B.  $y = -9x + 12$ . C.  $y = -9x + 14$ . D.  $y = -9x - 14$ .

**Câu 8.** Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số  $y = \frac{x^3}{3} + 3x^2 - 2$  có hệ số góc  $k = -9$  là đường thẳng

- A. (d) :  $y - 16 = -9(x + 3)$ . B. (d) :  $y = -9(x + 3)$ .  
C. (d) :  $y + 16 = -9(x + 3)$ . D. (d) :  $y - 16 = -9(x - 3)$ .

**Câu 9.** Số tiếp tuyến của đồ thị hàm số  $y = x^3 + 3x^2 - 8x + 1$  song song với đường thẳng (d) :  $y = x + 28$  là

- A. 2. B. 1. C. 0. D. 3.

**Câu 10.** Tiếp tuyến của đồ thị hàm số  $y = \frac{2x-3}{x+1}$  song song với đường thẳng  $y = 5x + 17$  có phương trình là

- A.  $y = 5x + 17$ ;  $y = 5x + 3$ . B.  $y = 5x + 3$ .  
C.  $y = 5x - 3$ . D.  $y = 5x + 17$ ;  $y = 5x - 3$ .

**Câu 11.** Có bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị hàm số  $y = -x^3 + 2x^2$  song song với đường thẳng  $y = x$ ?

- A. 3. B. 2. C. 0. D. 1.

**Câu 12.** Cho đường cong  $(C)$  có phương trình  $y = \frac{2x+1}{x+1}$ . Tìm phương trình tiếp tuyến của đường cong  $(C)$  biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng  $d: y = -4x + 3$ .

- A.  $y = \frac{1}{4}x - \frac{7}{4}$ .  
 B.  $y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$  và  $y = \frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$ .  
 C.  $y = \frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$  và  $y = \frac{1}{4}x + \frac{13}{4}$ .  
 D.  $y = \frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$ .

**Câu 13.** Tiếp tuyến với đồ thị hàm số  $y = x^3 - 3x^2 + 2$  vuông góc với đường thẳng  $x - 3y + 1 = 0$  có phương trình là

- A.  $x - 3y + 3 = 0$ .  
 B.  $3x - y - 3 = 0$ .  
 C.  $3x + y - 3 = 0$ .  
 D.  $3x + y - 1 = 0$ .

**Câu 14.** Cho hàm số  $y = \frac{x^2+x}{x-2}$  có đồ thị  $(C)$  và đường thẳng  $d: y = -2x$ . Biết  $d$  cắt  $(C)$  tại hai điểm phân biệt  $A, B$ . Tích các hệ số góc của các tiếp tuyến của  $(C)$  tại  $A, B$  bằng

- A. 0.  
 B. 4.  
 C.  $-\frac{1}{6}$ .  
 D.  $\frac{5}{2}$ .

**Câu 15.** Cho hàm số  $y = 4x + 2\cos 2x$  có đồ thị là  $(C)$ . Hoành độ của các điểm trên  $(C)$  mà tại đó tiếp tuyến của  $(C)$  song song hoặc trùng với trục hoành là

- A.  $x = \frac{\pi}{4} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$ .  
 B.  $x = \pi + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$ .  
 C.  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$ .  
 D.  $x = k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$ .

**Câu 16.** Ký hiệu  $d$  là tiếp tuyến của đồ thị hàm số  $y = x^4 - 4x^2 + 2m^2 + 1$  ( $C$ ) tại giao điểm của  $(C)$  với trục hoành đồng thời  $(C)$  đi qua điểm  $A(1; 0)$ . Hỏi có bao nhiêu đường thẳng  $d$  thỏa mãn bài toán?

- A. 3.  
 B. 2.  
 C. 5.  
 D. 4.

**Câu 17.** Đồ thị hàm số  $y = \frac{ax+b}{x-1}$  cắt trục tung tại điểm  $A(0; -1)$ , tiếp tuyến của đồ thị tại điểm  $A$  có hệ số góc  $k = -3$ . Giá trị của  $a$  và  $b$  là

- A.  $a = 1; b = 1$ .  
 B.  $a = 2; b = 2$ .  
 C.  $a = 2; b = 1$ .  
 D.  $a = 1; b = 2$ .

**Câu 18.** Cho hàm số  $y = x^3 - 3mx^2 + (m+1)x - m$ . Gọi  $A$  là giao điểm của đồ thị hàm số với trục  $Oy$ . Tìm giá trị của  $m$  để tiếp tuyến của đồ thị tại  $A$  vuông góc với đường thẳng  $y = 2x - 3$ .

- A.  $m = -\frac{3}{2}$ .  
 B.  $m = -\frac{1}{2}$ .  
 C.  $m = -3$ .  
 D.  $m = 1$ .

**Câu 19.** Cho parabol  $(P): y = x^2 - 3x$ . Tiếp tuyến của  $(P)$  đi qua điểm  $A(5; 10)$  có phương trình là

- A.  $y = 5x - 15$ .  
 B.  $y = 7x - 25$ .  
 C.  $y = x + 5$ .  
 D.  $y = 3x - 5$ .

**Câu 20.** Cho đồ thị  $(C): y = \frac{x-1}{2x}$  và  $d_1, d_2$  là hai tiếp tuyến của  $(C)$  song song với nhau. Khoảng cách lớn nhất giữa  $d_1$  và  $d_2$  là

- A. 3.  
 B.  $2\sqrt{3}$ .  
 C. 2.  
 D.  $2\sqrt{2}$ .

**Câu 21.** Biết đồ thị hàm số  $(C): y = x^3 - 3x + 2$  tiếp xúc với đồ thị hàm số  $(C'): y = ax^2 + b$  tại điểm có hoành độ  $x \in (0; 2)$ . Giá trị lớn nhất của  $S = a + b$  là

- A. -1.  
 B. 0.  
 C. 1.  
 D. -3.

**Câu 22.** Cho các hàm số  $y = f(x), y = g(x), y = \frac{f(x)+3}{g(x)+1}$ . Hệ số góc tiếp tuyến của các đồ thị hàm số đã cho tại điểm có hoành độ  $x = 1$  bằng nhau và khác 0. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A.  $f(1) \leq -\frac{11}{4}$ .  
 B.  $f(1) < -\frac{11}{4}$ .  
 C.  $f(1) > -\frac{11}{4}$ .  
 D.  $f(1) \geq -\frac{11}{4}$ .

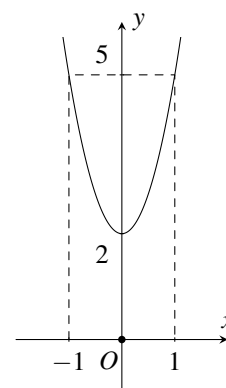
**Câu 23.** Cho hàm số  $y = -x^3 + 3x^2 + 2$  có đồ thị  $(C)$ . Phương trình tiếp tuyến của  $(C)$  mà có hệ số góc lớn nhất là

- A.  $y = 3x + 1$ .  
 B.  $y = -3x + 1$ .  
 C.  $y = 3x - 1$ .  
 D.  $y = -3x - 1$ .



**Câu 24.** Cho hàm số  $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  ( $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$ ) có đồ thị là  $(C)$ . Biết đồ thị  $(C)$  đi qua gốc tọa độ và đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  cho bởi hình vẽ bên. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ bằng  $x = 1$ .

- A.  $y = x + 2$ .      B.  $y = x + 4$ .      C.  $y = 5x + 2$ .      D.  $y = 5x - 2$ .



**Câu 25.** Cho hàm số  $y = x^3 - 2x^2 + (m - 1)x + 2m$  có đồ thị là  $(C_m)$ . Gọi  $S$  là tập hợp tất cả các giá trị của  $m$  để từ  $M(1; 2)$  kẻ được đúng hai tiếp tuyến với  $(C_m)$ . Tính tổng các phần tử của  $S$ .

- A.  $\frac{4}{3}$ .      B.  $\frac{81}{109}$ .      C.  $\frac{3}{4}$ .      D.  $\frac{217}{81}$ .

**Câu 26.** Cho hàm số  $y = \frac{2x + 1}{x - 1}$  có đồ thị là  $(C)$ . Tiếp tuyến của đồ thị  $(C)$  tại điểm thuộc đồ thị  $(C)$  với hoành độ  $x_0 = 0$  cắt hai đường tiệm cận của đồ thị  $(C)$  tại hai điểm  $A, B$ . Tính diện tích tam giác  $IAB$ , với  $I$  là giao điểm hai đường tiệm cận của đồ thị  $(C)$ .

- A.  $S_{\triangle IAB} = 6$ .      B.  $S_{\triangle IAB} = 3$ .      C.  $S_{\triangle IAB} = 12$ .      D.  $S_{\triangle IAB} = 6\sqrt[3]{2}$ .

**Câu 27.** Đồ thị hàm số  $y = x^4 - 2x^2$  có bao nhiêu tiếp tuyến song song với trục  $Ox$ .

- A. 3.      B. 2.      C. 1.      D. 0.

**Câu 28.** Cho hàm số  $y = x^3 - 3x^2$  có đồ thị  $(C)$  và điểm  $A(0; a)$ . Gọi  $S$  là tập hợp tất cả các giá trị thực của  $a$  để có đúng hai tiếp tuyến của  $(C)$  đi qua  $A$ . Tích các giá trị các phần tử của  $S$  là

- A. 1.      B. -1.      C. 0.      D. 3.

**Câu 29.** Cho hàm số  $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{7}{2}x^2$  có đồ thị  $(C)$ . Có bao nhiêu điểm  $A$  thuộc  $(C)$  sao cho tiếp tuyến của  $(C)$  tại  $A$  cắt  $(C)$  tại hai điểm phân biệt  $M(x_1; y_1), N(x_2; y_2)$  ( $M, N$  khác  $A$ ) thỏa mãn  $y_1 - y_2 = 6(x_1 - x_2)$ ?

- A. 2.      B. 3.      C. 1.      D. 0.

**Câu 30.** Cho hàm số  $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x + 3$  có đồ thị  $(C)$ . Tồn tại hai tiếp tuyến của  $(C)$  phân biệt và có cùng hệ số góc  $k$ , đồng thời đường thẳng đi qua các tiếp điểm của hai tiếp tuyến đó cắt các trục  $Ox, Oy$  tương ứng tại  $A$  và  $B$  sao cho  $OA = 2017 \cdot OB$ . Hỏi có bao nhiêu giá trị của  $k$  thỏa mãn yêu cầu bài toán?

- A. 0.      B. 1.      C. 2.      D. 3.

—HẾT—

## § 9. ĐỀ TỔNG ÔN

### A ĐỀ SỐ 1

**Câu 1.** Xét các khẳng định sau

1. Nếu hàm số  $y = f(x)$  có giá trị cực đại là  $M$  và giá trị cực tiểu là  $m$  thì  $M > m$ .
2. Đồ thị hàm số  $y = ax^4 + bx^2 + c$ , ( $a \neq 0$ ) luôn có ít nhất một điểm cực trị.
3. Tiếp tuyến (nếu có) tại điểm cực trị của đồ thị hàm số luôn song song với trục hoành.

Số khẳng định **đúng** là

- A. 1.                      B. 2.                      C. 0.                      D. 3.

**Câu 2.** Tìm giá trị lớn nhất của hàm số  $y = \frac{2x-5}{x-3}$  trên đoạn  $[0; 2]$ .

- A.  $\max_{x \in [0; 2]} y = 3$ .                      B.  $\max_{x \in [0; 2]} y = 2$ .                      C.  $\max_{x \in [0; 2]} y = \frac{5}{3}$ .                      D.  $\max_{x \in [0; 2]} y = 1$ .

**Câu 3.** Số giao điểm của đồ thị hàm số  $y = x^3 + 4x$  với trục hoành là

- A. 0.                      B. 1.                      C. 2.                      D. 3.

**Câu 4.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có tập xác định  $\mathcal{D}$  ( $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$ ) đạt cực tiểu tại  $x_0$ . Hãy chọn khẳng định đúng

- A. Hàm số đã cho có giá trị bé nhất bằng  $f(x_0)$ .  
B. Nếu hàm số có đạo hàm tại  $x_0$  thì tiếp tuyến với đồ thị tại điểm  $M(x_0; f(x_0))$  song song với trục hoành.  
C. Nếu hàm số có đạo hàm tại  $x_0$  thì tiếp tuyến với đồ thị tại điểm  $M(x_0; f(x_0))$  song song với trục tung.  
D. Hàm số có đạo hàm cấp một tại  $x_0$  và  $f'(x_0) = 0$ .

**Câu 5.** Biết rằng hàm số  $y = f(x)$  đạt cực đại tại điểm  $x_0$ . Hãy chọn khẳng định đúng?

- A. Đạo hàm  $f'(x)$  đổi dấu từ âm sang dương khi  $x$  đi qua  $x_0$ .  
B. Đạo hàm  $f'(x)$  đổi dấu từ dương sang âm khi  $x$  đi qua  $x_0$ .  
C.  $f'(x_0) = 0$ .  
D.  $f''(x_0) = 0$ .

**Câu 6.** Giá trị bé nhất của hàm số  $y = \frac{x-2}{x+3}$  trên đoạn  $[-8; -4]$  bằng

- A. 2.                      B. 6.                      C. -2.                      D. -6.

**Câu 7.** Hàm số  $y = x^3 + 3x^2 - 2016x + 2017$  có 2 điểm cực trị là  $x_1, x_2$  thì tích  $x_1 \cdot x_2$  có giá trị bằng

- A. 2016.                      B. 672.                      C. -672.                      D. -2016.

**Câu 8.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$  các đường tiệm cận của đồ thị hàm số  $y = \frac{x+1}{x-2}$  tạo với các trục tọa độ một đa giác có diện tích bằng (đơn vị diện tích)

- A. 1.                      B. 3.                      C. 2.                      D. 4.

**Câu 9.** Phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số  $y = \frac{2x-1}{x+1}$  tại giao điểm của đồ thị với trục tung có phương trình là

- A.  $y = 3x + 1$ .                      B.  $y = 3x - 2$ .                      C.  $y = 3x = 2$ .                      D.  $y = 3x - 1$ .

**Câu 10.** Hàm số  $y = \sqrt{x^3 + x - 2} + x$  là hàm số đồng biến trên khoảng

- A.  $(-1; 0)$ .                      B.  $(-1; +\infty)$ .                      C.  $(0; 1)$ .                      D.  $(1; +\infty)$ .

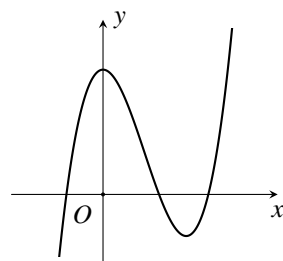
**Câu 11.** Cho hàm số có bảng biến thiên như hình bên. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A.  $(-2; 0)$ . B.  $(2; +\infty)$ .  
C.  $(0; 2)$ . D.  $(0; +\infty)$ .

|      |           |      |     |     |           |
|------|-----------|------|-----|-----|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $-2$ | $0$ | $2$ | $+\infty$ |
| $y'$ | $-$       | $0$  | $+$ | $0$ | $+$       |
| $y$  | $+\infty$ | $1$  | $3$ | $1$ | $+\infty$ |

**Câu 12.** Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình vẽ bên?

- A.  $y = x^3 - 3x^2 + 3$ . B.  $y = -x^3 + 3x^2 + 3$ .  
C.  $y = x^4 - 2x^2 + 3$ . D.  $y = -x^4 + 2x^2 + 3$ .



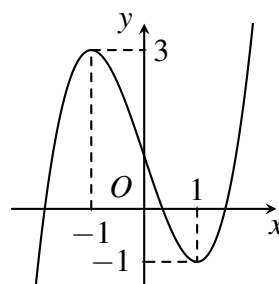
**Câu 13.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình bên. Hàm số đã cho đạt cực tiểu tại

- A.  $x = 2$ . B.  $x = 1$ . C.  $x = -1$ . D.  $x = -3$ .

|         |           |      |     |           |           |
|---------|-----------|------|-----|-----------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $-1$ | $2$ | $+\infty$ |           |
| $f'(x)$ | $-$       | $0$  | $+$ | $0$       | $-$       |
| $f(x)$  | $+\infty$ |      | $1$ |           | $-\infty$ |
|         |           | $-3$ |     |           |           |

**Câu 14.** Đồ thị trong hình bên dưới là đồ thị của hàm số nào?

- A.  $y = x^3 - 6x + 1$ .  
B.  $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$ .  
C.  $y = -x^3 + 3x + 1$ .  
D.  $y = x^3 - 3x + 1$ .



**Câu 15.** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định và liên tục trên  $\mathcal{D}$  có bảng biến thiên như hình bên dưới. Hãy chọn khẳng định đúng?

- A. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 1.  
B. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 0 và giá trị bé nhất bằng  $-1$ .  
C. Hàm số có đúng một cực trị.  
D. Hàm số đạt cực đại tại  $x = 0$  và đạt cực tiểu tại  $x = 1$ .

|      |           |     |      |           |     |
|------|-----------|-----|------|-----------|-----|
| $x$  | $-\infty$ | $0$ | $1$  | $+\infty$ |     |
| $y'$ | $+$       | $0$ | $-$  | $0$       | $+$ |
| $y$  | $-\infty$ | $0$ | $-1$ | $+\infty$ |     |

**Câu 16.** Hệ số góc tiếp tuyến của đồ thị hàm số  $y = \frac{2x+1}{x+1}$  tại giao điểm của đồ thị với trục tung bằng

- A. 1. B.  $-1$ . C. 2. D.  $-1$ .

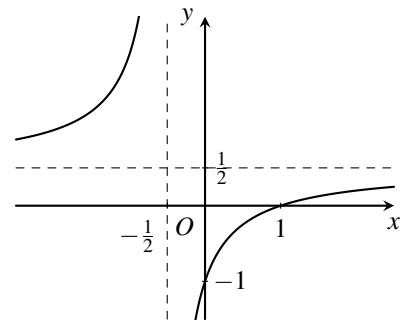
**Câu 17.** Đường thẳng có phương trình  $y = 2$  là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số nào bên dưới?

- A.  $y = \frac{1-2x^2}{1-x-x^2}$ . B.  $y = \frac{2x^2+1}{1-x-x^2}$ . C.  $y = \frac{x-1}{2x-1}$ . D.  $y = \frac{2x-1}{1-x}$ .

**Câu 18.** Đồ thị trong hình bên là đồ thị của hàm số nào sau đây?

A.  $y = \frac{x+1}{1-2x}$ .  
C.  $y = \frac{x+1}{2x-1}$ .

B.  $y = \frac{x+1}{2x+1}$ .  
D.  $y = \frac{x-1}{2x+1}$ .



**Câu 19.** Số điểm cực tiểu của hàm số  $y = \sqrt{16 - x^{2016}}$  là

- A. 0.                      B. 1.                      C. 2016.                      D. 2015.

**Câu 20.** Biết rằng đồ thị hàm số  $y = x^3 - 3x^2 + 4$  cắt đường thẳng có phương trình  $y = 7 - x$  tại một điểm duy nhất. Tung độ giao điểm  $y_0$  đó là

- A.  $y_0 = 3$ .                      B.  $y_0 = 4$ .                      C.  $y_0 = 5$ .                      D.  $y_0 = 6$ .

**Câu 21.** Cho hàm số  $f(x)$  có bảng biến thiên như sau. Số nghiệm thực của phương trình  $2f(x) - 3 = 0$  là

- A. 2.                      B. 1.                      C. 4.                      D. 3.

|      |           |      |      |     |           |
|------|-----------|------|------|-----|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $-2$ | $0$  | $2$ | $+\infty$ |
| $y'$ | $+$       | $0$  | $-$  | $0$ | $-$       |
| $y$  | $-\infty$ | $3$  | $-1$ | $3$ | $-\infty$ |

**Câu 22.** Giá trị lớn nhất của hàm số  $f(x) = x^3 - 3x + 2$  trên đoạn  $[-3; 3]$  là

- A.  $-16$ .                      B. 20.                      C. 0.                      D. 4.

**Câu 23.** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = x(x+2)^2, \forall x \in \mathbb{R}$ . Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

- A. 0.                      B. 3.                      C. 2.                      D. 1.

**Câu 24.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau:

|      |           |      |      |           |
|------|-----------|------|------|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $0$  | $1$  | $+\infty$ |
| $y'$ | $-$       | $-$  | $0$  | $+$       |
| $y$  | $2$       | $-4$ | $-2$ | $+\infty$ |

Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là

- A. 4.                      B. 1.                      C. 3.                      D. 2.

**Câu 25.** Giá trị lớn nhất của hàm số  $y = x + \sqrt{1 - x^2}$  bằng

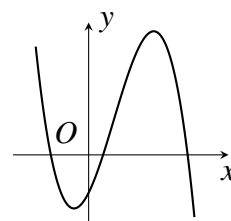
- A.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .                      B.  $\sqrt{2}$ .                      C. 1.                      D. 2.

**Câu 26.** Số điểm cực trị của hàm số  $y = \sin^2 x - \cos x$  trên đoạn  $[0; \pi]$  là

- A. 3.                      B. 2.                      C. 1.                      D. 0.

**Câu 27.** Cho hàm số  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  có đồ thị như hình bên dưới. Hãy chọn khẳng định đúng

- A.  $a > 0; b > 0; c > 0; d < 0$ .  
 B.  $a < 0; b < 0; c > 0; d < 0$ .  
 C.  $a > 0; b > 0; c > 0; d > 0$ .  
 D.  $a < 0; b > 0; c > 0; d < 0$ .



**Câu 28.** Tìm tất cả các tiệm cận đứng của đồ thị hàm số  $y = \frac{2x - 1 - \sqrt{x^2 + x + 3}}{x^2 - 5x + 6}$ .

- A.  $x = -3$  và  $x = -2$ . B.  $x = 3$ . C.  $x = 2$ . D.  $x = 3$  và  $x = 2$ .

**Câu 29.** Hàm số  $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - m - 1)x + m^3$  đạt cực đại tại điểm  $x = 1$  thì giá trị của tham số  $m$  bằng

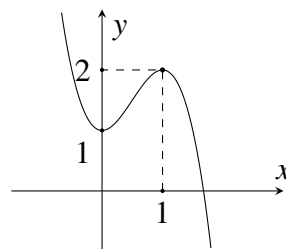
- A.  $m = 0$ . B.  $\begin{cases} m = 0 \\ m = 3 \end{cases}$ . C.  $m = 3$ . D.  $m = -3$ .

**Câu 30.** Cho hàm số  $y = f(x) = x^3 + ax + b$  ( $a \neq b$ ). Biết rằng tiếp tuyến với đồ thị tại các điểm có hoành độ  $x = a$  và  $x = b$  song song với nhau. Khi đó giá trị  $f(1)$  bằng

- A.  $f(1) = 1$ . B.  $f(1) = a + b$ . C.  $f(1) = -1$ . D.  $f(1) = a - b$ .

**Câu 31.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ sau. Điều kiện của tham số  $m$  để đồ thị hàm số  $y = |2f(x) - m|$  có 5 điểm cực trị là

- A.  $1 \leq m \leq 2$ . B.  $2 \leq m \leq 4$ .  
 C.  $1 < m < 2$ . D.  $2 < m < 4$ .



**Câu 32.** Giá trị của tham số  $m$  để hàm số  $y = \frac{mx + 4}{x + m}$  nghịch biến trong khoảng  $(-\infty; 1)$  là

- A.  $-2 < m \leq -1$ . B.  $-2 \leq m \leq 2$ . C.  $-1 \leq m < 2$ . D.  $-2 < m < 2$ .

**Câu 33.** Hàm số  $y = 2x^3 - 3(m + 2)x^2 + 6(m + 1)x + m^{2016} + 2017$  đồng biến trong khoảng  $(5; +\infty)$  thì tham số  $m$  thỏa điều kiện

- A.  $m > 4$ . B.  $m < 4$ . C.  $m \leq 4$ . D.  $m \geq 4$ .

**Câu 34.** Với giá trị nào của tham số  $m$  thì đồ thị hàm số  $y = x^3 - (m^2 - m - 2)x^2 + (m^{2016} - 2017)x + 2018$  có 2 điểm cực trị cách đều trục tung?

- A.  $m = 1$ . B.  $\begin{cases} m = -1 \\ m = 2 \end{cases}$ . C.  $m = 2$ . D.  $m = -1$ .

**Câu 35.** Đồ thị hàm số  $y = x^3 - 3x^2 + ax + b$  có điểm cực tiểu  $A(2; -2)$  thì tổng  $(a + b)$  có giá trị bằng

- A.  $-2$ . B.  $2$ . C.  $-3$ . D.  $3$ .

**Câu 36.** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định và liên tục trên mỗi nửa khoảng  $(-\infty; -2]$  và  $[2; +\infty)$ , có bảng biến thiên như hình bên. Tìm tập hợp các giá trị  $m$  để phương trình  $f(x) = m$  có hai nghiệm phân biệt.

|         |           |      |      |               |               |           |
|---------|-----------|------|------|---------------|---------------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $-2$ | $2$  | $\frac{5}{2}$ | $+\infty$     |           |
| $f'(x)$ |           | $-$  |      | $-$           | $0$           | $+$       |
| $f(x)$  | $+\infty$ |      | $22$ | $2$           | $\frac{7}{4}$ | $+\infty$ |

- A.  $\left(\frac{7}{4}; 2\right] \cup [22; +\infty)$ . B.  $\left(\frac{7}{4}; +\infty\right)$ . C.  $[22; +\infty)$ . D.  $\left[\frac{7}{4}; 2\right] \cup [22; +\infty)$ .

**Câu 37.** Biết  $A(x_A; y_A)$ ,  $B(x_B; y_B)$  là hai điểm thuộc hai nhánh khác nhau của đồ thị hàm số  $y = \frac{x+1}{x-1}$  sao cho đoạn thẳng  $AB$  có độ dài nhỏ nhất. Tính  $P = x_A^2 + x_B^2 + y_A \cdot y_B$ .

- A.  $P = 5$ . B.  $P = 6$ . C.  $P = 6 + \sqrt{2}$ . D.  $P = 5 + \sqrt{2}$ .

**Câu 38.** Cho hàm số  $f(x)$  có bảng xét dấu của đạo hàm như sau.

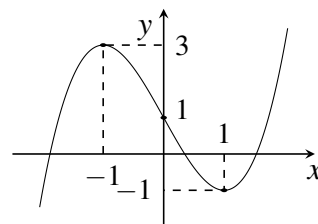
|         |           |   |   |   |   |           |   |   |
|---------|-----------|---|---|---|---|-----------|---|---|
| $x$     | $-\infty$ | 1 | 2 | 3 | 4 | $+\infty$ |   |   |
| $f'(x)$ |           | - | 0 | + | 0 | -         | 0 | + |

Hàm số  $y = 3f(x+2) - x^3 + 3x$  đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A.  $(-1; +\infty)$ . B.  $(-\infty; -1)$ . C.  $(-1; 0)$ . D.  $(0; 2)$ .

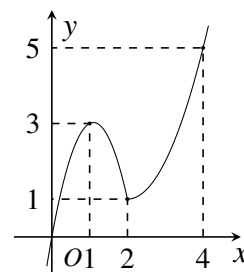
**Câu 39.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để phương trình  $f(\sin x) = m$  có nghiệm thuộc khoảng  $(0; \pi)$  là

- A.  $[-1; 3]$ . B.  $(-1; 1)$ . C.  $(-1; 3)$ . D.  $[-1; 1)$ .



**Câu 40.** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định trên  $\mathbb{R}$  và có đồ thị như hình bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để phương trình  $f[4(\sin^4 x + \cos^4 x)] = m$  có nghiệm.

- A. 2. B. 4. C. 3. D. 5.



**Câu 41.** Cho hàm số  $f(x)$ , bảng xét dấu của  $f'(x)$  như sau

|         |           |      |      |     |           |     |     |     |
|---------|-----------|------|------|-----|-----------|-----|-----|-----|
| $x$     | $-\infty$ | $-3$ | $-1$ | $1$ | $+\infty$ |     |     |     |
| $f'(x)$ |           | $-$  | $0$  | $+$ | $0$       | $-$ | $0$ | $+$ |

Hàm số  $y = f(3 - 2x)$  nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

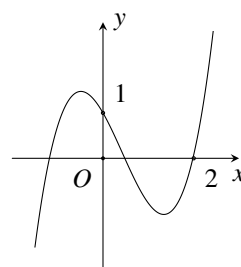
- A.  $(4; +\infty)$ . B.  $(-2; 1)$ . C.  $(2; 4)$ . D.  $(1; 2)$ .

**Câu 42.** Cho hàm số  $y = x^3 + ax^2 - 3x + b$  có đồ thị  $(C)$ . Hỏi có bao nhiêu cặp  $(a, b)$  nguyên dương để  $(C)$  cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt?

- A. vô số. B. 1. C. 0. D. 4.

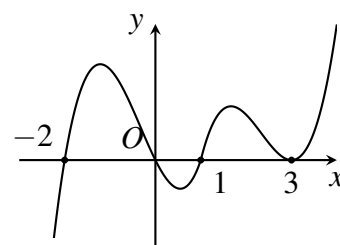
**Câu 43.** Cho hàm số  $y = f(x)$ , hàm số  $y = f'(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đồ thị như hình vẽ bên. Bất phương trình  $f(x) < x + m$  ( $m$  là tham số thực) nghiệm đúng với mọi  $x \in (0; 2)$  khi và chỉ khi

- A.  $m \geq f(2) - 2$ . B.  $m \geq f(0)$ . C.  $m > f(2) - 2$ . D.  $m > f(0)$ .



**Câu 44.** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định trên  $\mathbb{R}$  có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$  và  $y = f'(x)$  có đồ thị như hình vẽ dưới. Số nghiệm nhiều nhất của phương trình  $f(x^2) = m$  (với  $m$  là số thực) là

- A. 3. B. 4. C. 5. D. 2.



**Câu 45.** Cho hàm số  $y = mx^3 - 3mx^2 + (2m+1)x - m + 3$  có đồ thị  $(C)$  và điểm  $M\left(\frac{1}{2}; 4\right)$ . Giả sử đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là  $A, B$ . Khi đó khoảng cách lớn nhất từ  $M$  đến đường thẳng  $AB$  là

A.  $\sqrt{2}$ .                      B.  $2\sqrt{2}$ .                      C. 1.                      D.  $2\sqrt{3}$ .

**Câu 46.** (THPTQG 2020 - mã đề 102). Cho hàm số bậc bốn  $f(x)$  có bảng biến thiên như sau:

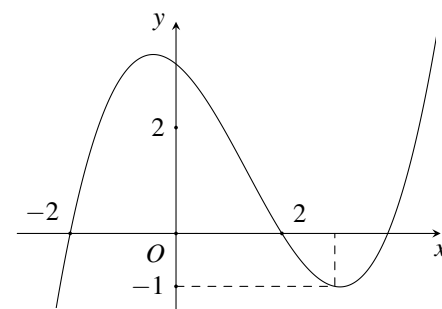
|         |           |      |     |     |           |     |      |           |
|---------|-----------|------|-----|-----|-----------|-----|------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $+\infty$ |     |      |           |
| $f'(x)$ |           | $+$  | $0$ | $-$ | $0$       | $+$ | $0$  | $-$       |
| $f(x)$  |           |      | $3$ |     | $3$       |     | $-1$ |           |
|         | $-\infty$ |      |     |     |           |     |      | $-\infty$ |

Số điểm cực trị của hàm số  $g(x) = x^2[f(x-1)]^4$  là

A. 7.                      B. 8.                      C. 5.                      D. 9.

**Câu 47.** Cho hàm số bậc ba  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình  $|f(x^3 - 3x)| = \frac{4}{3}$  là

A. 3.                      B. 8.                      C. 7.                      D. 4.



**Câu 48.** Cho hàm số  $y = f(x)$ , bảng biến thiên của hàm số  $f'(x)$  như sau:

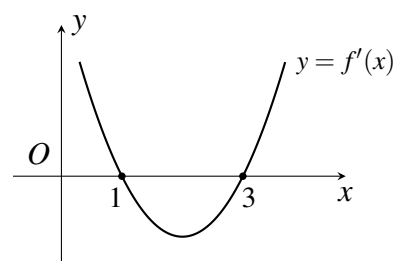
| $x$     | $-\infty$ | $-1$ | $0$ | $1$  | $+\infty$ |
|---------|-----------|------|-----|------|-----------|
| $f'(x)$ | $+\infty$ |      | $2$ | $-1$ | $+\infty$ |
|         |           | $-3$ |     |      |           |

Số điểm cực trị của hàm số  $y = f(x^2 - 2x)$  là

A. 9.                      B. 3.                      C. 7.                      D. 5.

**Câu 49.** Cho hàm số  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  có đồ thị như hình bên, với  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ . Tìm tất cả giá trị thực của tham số  $m$  để phương trình  $f(x) = f(m)$  có ba nghiệm thực phân biệt.

A.  $f(3) < m < f(1)$ .                      B.  $0 < m < 4$  và  $m \neq 1, m \neq 3$ .  
C.  $1 < m < 3$ .                      D.  $0 < m < 4$ .



**Câu 50.** Cho hai hàm số  $y = \frac{x-3}{x-2} + \frac{x-2}{x-1} + \frac{x-1}{x} + \frac{x}{x+1}$  và  $y = |x+2| - x + m$  ( $m$  là tham số thực) có đồ thị lần lượt là  $(C_1)$  và  $(C_2)$ . Tập hợp tất cả các giá trị của  $m$  để  $(C_1)$  và  $(C_2)$  cắt nhau tại đúng bốn điểm phân biệt là

A.  $(-\infty; 2]$ .                      B.  $[2; +\infty)$ .                      C.  $(-\infty; 2)$ .                      D.  $(2; +\infty)$ .

—HẾT—

## B. ĐỀ SỐ 2

**Câu 1.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  và có bảng biến thiên như hình bên. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng 2.  
 B. Hàm số đồng biến trên  $(0; +\infty)$ .  
 C.  $f(-5) > f(-4)$ .  
 D. Đường thẳng  $x = 2$  là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

|         |                     |                     |                             |           |
|---------|---------------------|---------------------|-----------------------------|-----------|
| $x$     | $-\infty$           | 0                   | 2                           | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | —                   | —                   | 0                           | +         |
| $f(x)$  | 2<br>↘<br>$-\infty$ | $+\infty$<br>↘<br>2 | $+\infty$<br>↗<br>$+\infty$ |           |

**Câu 2.** Hàm số  $y = x^3 - 3x^2 + 2$  nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

- A.  $(-2; 1)$ . B.  $(-2; 0)$ . C.  $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$ . D.  $(0; 2)$ .

**Câu 3.** Hàm số nào sau đây không có điểm cực trị?

- A.  $y = -x^4 + 2x^2 - 5$ . B.  $y = x^3 + 6x - 2019$ . C.  $y = x^4 + 2x^2 - 5$ . D.  $y = -\frac{1}{4}x^4 + 6$ .

**Câu 4.** Giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = x^3 - 3x + 1$  trên đoạn  $[-2; 0]$  bằng

- A.  $-2$ . B.  $1$ . C.  $-1$ . D.  $3$ .

**Câu 5.** Cho hàm số  $y = f(x)$ , khẳng định nào sau đây là **đúng**?

- A. Hàm số  $y = f(x)$  đạt cực trị tại  $x_0$  thì nó không có đạo hàm tại  $x_0$ .  
 B. Hàm số  $y = f(x)$  đạt cực trị tại  $x_0$  thì  $f'(x_0) = 0$ .  
 C. Hàm số  $y = f(x)$  đạt cực trị tại  $x_0$  thì  $f''(x_0) > 0$  hoặc  $f''(x_0) < 0$ .  
 D. Nếu hàm số đạt cực trị tại  $x_0$  thì hàm số không có đạo hàm tại  $x_0$  hoặc  $f'(x_0) = 0$ .

**Câu 6.** Cho hàm số  $y = \frac{x+3}{x-2}$  có đồ thị ( $\mathcal{C}$ ). Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có tung độ  $y_0 = -4$  là

- A.  $x + 5y - 1 = 0$ . B.  $5x - y + 1 = 0$ . C.  $5x + y - 1 = 0$ . D.  $5x + y + 1 = 0$ .

**Câu 7.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau.

|      |           |      |      |           |     |
|------|-----------|------|------|-----------|-----|
| $x$  | $-\infty$ | $-1$ | $3$  | $+\infty$ |     |
| $y'$ | $+$       | $0$  | $-$  | $0$       | $+$ |
| $y$  | $-\infty$ | $4$  | $-2$ | $+\infty$ |     |

Số nghiệm của phương trình  $f(x+5) - 4 = 0$  là

- A. 2. B. 3. C. 1. D. 0.

**Câu 8.** Cho hàm số  $y = x + \frac{1}{x+2}$ . Giá trị nhỏ nhất  $m$  của hàm số trên  $[-1; 2]$  là

- A.  $m = 2$ . B.  $m = 0$ . C.  $m = \frac{1}{2}$ . D.  $m = \frac{9}{4}$ .

**Câu 9.** Giá trị của  $m$  để hàm số  $y = x^3 + 2(m-1)x^2 + (m-1)x + 5$  đồng biến trên  $\mathbb{R}$  là

- A.  $m \in \left(1; \frac{7}{4}\right)$ . B.  $m \in \left[1; \frac{7}{4}\right]$ .  
 C.  $m \in (-\infty; 1] \cup \left[\frac{7}{4}; +\infty\right)$ . D.  $m \in (-\infty; 1) \cup \left(\frac{7}{4}; +\infty\right)$ .

**Câu 10.** Biết  $A(0; a); B(b; 1)$  thuộc đồ thị hàm số  $y = x^3 + x^2 - 1$ , khi đó giá trị  $a + b$  là

- A.  $-1$ . B.  $0$ . C.  $1$ . D.  $2$ .



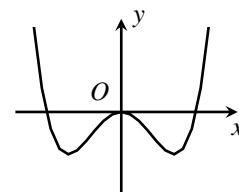
**Câu 11.** Đồ thị hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau. Điểm cực đại của đồ thị hàm số là

- A.  $(-1; 2)$ . B.  $(1; -2)$ .  
C.  $(-1; 0)$ . D.  $(1; 0)$ .

|      |           |      |      |           |     |
|------|-----------|------|------|-----------|-----|
| $x$  | $-\infty$ | $-1$ | $1$  | $+\infty$ |     |
| $y'$ | $+$       | $0$  | $-$  | $0$       | $+$ |
| $y$  | $-\infty$ | $2$  | $-2$ | $+\infty$ |     |

**Câu 12.** Đường cong bên là đồ thị hàm số nào?

- A.  $y = x^4 - 2x^2$ . B.  $y = x^4 - 2x^2 + 1$ .  
C.  $y = -x^4 + 2x^2 - 1$ . D.  $y = -x^4 + 2x^2$ .



**Câu 13.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$ , dấu của đạo hàm được cho bởi bảng dưới đây

|         |           |     |     |           |     |
|---------|-----------|-----|-----|-----------|-----|
| $x$     | $-\infty$ | $0$ | $2$ | $+\infty$ |     |
| $f'(x)$ | $+$       | $0$ | $-$ | $0$       | $+$ |

Hàm số  $y = f(2x - 2)$  nghịch biến trong khoảng nào?

- A.  $(-1; 1)$ . B.  $(1; 2)$ . C.  $(2; +\infty)$ . D.  $(-\infty; -1)$ .

**Câu 14.** Gọi  $A, B$  lần lượt là giao điểm của đồ thị hàm số  $y = \frac{2x-3}{x+1}$  với các trục  $Ox, Oy$ . Diện tích tam giác  $OAB$  bằng

- A.  $\frac{9}{2}$ . B.  $\frac{9}{4}$ . C.  $2$ . D.  $\frac{3}{2}$ .

**Câu 15.** Đồ thị hàm số  $y = \frac{x-3}{x+1}$  cắt đường thẳng  $y = x + m$  tại hai điểm phân biệt khi

- A.  $\begin{cases} m < -2 \\ m > 6 \end{cases}$ . B.  $m > 6$ . C.  $m < -2$ . D.  $m > -2$ .

**Câu 16.** Đồ thị hàm số nào dưới đây có tiệm cận ngang?

- A.  $y = \frac{3x+1}{x-1}$ . B.  $y = \frac{x^2+x+1}{x-1}$ .  
C.  $y = -x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ . D.  $y = x^4 + x^2$ .

**Câu 17.** Số giao điểm của đồ thị hàm số  $y = (2x-1)(x^2+x+2)$  với trục hoành là

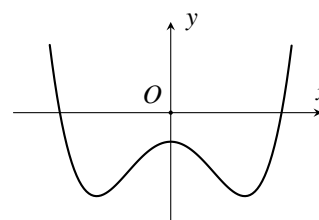
- A.  $0$ . B.  $2$ . C.  $3$ . D.  $1$ .

**Câu 18.** Đường thẳng  $y = x - 1$  cắt đồ thị hàm số  $y = x^3 - x^2 + x - 1$  tại hai điểm. Tìm tổng tung độ các giao điểm đó.

- A.  $0$ . B.  $-1$ . C.  $-3$ . D.  $2$ .

**Câu 19.** Cho hàm số  $y = ax^4 + bx^2 + c$  có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm khẳng định đúng.

- A.  $ac > 0$ . B.  $a - b < 0$ . C.  $ab > 0$ . D.  $bc > 0$ .



**Câu 20.** Biết trên đồ thị  $(C): y = \frac{x-1}{x+2}$  có hai điểm mà tiếp tuyến tại các điểm đó đều song song với đường thẳng  $(d): 3x - y + 15 = 0$ . Tìm tổng  $S$  các tung độ của các tiếp điểm.

- A.  $S = 3$ . B.  $S = 6$ . C.  $S = 2$ . D.  $S = -4$ .

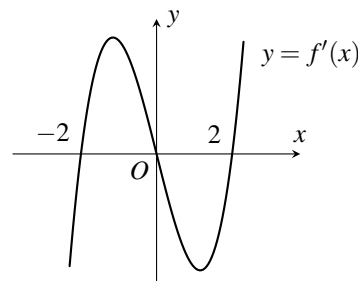
**Câu 21.** Bảng biến thiên sau là của hàm số nào?

- A.  $y = x^3 - 3x^2 - 1$ .  
 B.  $y = x^3 + 3x^2 - 1$ .  
 C.  $y = -x^3 + 3x^2 - 1$ .  
 D.  $y = -x^3 - 3x^2 - 1$ .

|      |           |            |            |            |
|------|-----------|------------|------------|------------|
| $x$  | $-\infty$ | 0          | 2          | $+\infty$  |
| $y'$ |           | -          | +          | -          |
| $y$  | $+\infty$ | $\searrow$ | $\nearrow$ | $\searrow$ |
|      |           | -1         | 3          | $-\infty$  |

**Câu 22.** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định và liên tục trên  $\mathbb{R}$  và hàm số  $y = f'(x)$  có đồ thị như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A.  $f(x)$  đạt cực đại tại  $x = 0$ .  
 B.  $f(x)$  đạt cực đại tại  $x = 1$ .  
 C.  $f(x)$  đạt cực đại tại  $x = -1$ .  
 D.  $f(x)$  đạt cực đại tại  $x = \pm 2$ .



**Câu 23.** Tìm quỹ tích điểm uốn của đồ thị hàm số  $y = x^3 - mx^2 + x - 1$  ( $m$  là tham số).

- A.  $y = x^3 - x^2 + x - 1$ .  
 B.  $y = x^3 - x + 1$ .  
 C.  $y = 2x^3 + x^2 - 1$ .  
 D.  $y = -2x^3 + x - 1$ .

**Câu 24.** Giá trị lớn nhất của hàm số  $y = 2x + \frac{1}{x}$  trên miền  $(-\infty; 0)$  là

- A.  $2\sqrt{2}$ .  
 B.  $-2\sqrt{2}$ .  
 C. 4.  
 D. Không tồn tại.

**Câu 25.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  đồng thời có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây

|      |           |            |     |            |           |            |     |            |           |
|------|-----------|------------|-----|------------|-----------|------------|-----|------------|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $-2$       | $0$ | $2$        | $+\infty$ |            |     |            |           |
| $y'$ |           | $+$        | $0$ | $-$        | $0$       | $+$        | $0$ | $-$        |           |
| $y$  | $-\infty$ | $\nearrow$ | $3$ | $\searrow$ | $-2$      | $\nearrow$ | $3$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

Phát biểu nào sau đây là **sai**?

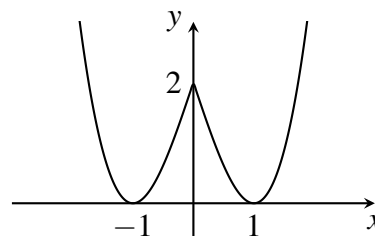
- A. Phương trình  $f(x) + 2 = 0$  có 3 nghiệm phân biệt.  
 B. Phương trình  $f(x) - 1 = 0$  có 4 nghiệm phân biệt.  
 C. Phương trình  $f(x) - 5 = 0$  có 2 nghiệm phân biệt.  
 D. Phương trình  $f(x) = -3$  có 2 nghiệm phân biệt.

**Câu 26.** Hàm số  $y = mx^4 + (m-1)x^2 + 1 - 2m$  có một điểm cực trị khi

- A.  $m < 0 \vee m > 1$ .  
 B.  $0 \leq m \leq 1$ .  
 C.  $m \leq 0 \vee m \geq 1$ .  
 D.  $m = 0$ .

**Câu 27.** Đồ thị hình dưới là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

- A.  $y = x^2 - 2|x|^2 + 2$ .  
 B.  $y = |x^3| - 3|x| + 2$ .  
 C.  $y = x^4 - 2x^2 + 2$ .  
 D.  $y = 2(x^2 - 1)^2$ .



**Câu 28.** Cho hàm số  $y = \frac{x+1}{x^2-2mx+4}$ . Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để đồ thị hàm số có ba đường tiệm cận.

- A.  $\begin{cases} m < -2 \\ m > 2 \end{cases}$ .  
 B.  $m > 2$ .  
 C. Không tồn tại  $m$ .  
 D.  $\begin{cases} m > 2 \\ m < -2 \\ m \neq -\frac{5}{2} \end{cases}$ .

**Câu 29.** Trên nửa khoảng  $(0; 3]$ , kết luận nào đúng cho hàm số  $y = x + \frac{1}{x}$ ?

- A. Cả  $\max_{(0;3]} y$  và  $\min_{(0;3]} y$  đều không tồn tại.      B.  $\max_{(0;3]} y = \frac{10}{3}$  và  $\min_{(0;3]} y = 2$ .  
C.  $\max_{(0;3]} y = +\infty$ ,  $\min_{(0;3]} y = 2$ .      D.  $\max_{(0;3]} y$  không tồn tại và  $\min_{(0;3]} y = 2$ .

**Câu 30.**  $S$  là tập tất cả các số nguyên  $m$  để phương trình  $\cos^2 x = m + \sin x$  có nghiệm. Tìm tổng các phần tử của  $S$ .

- A. 0.      B. 1.      C. 3.      D. 2.

**Câu 31.** Cho hàm số  $y = \frac{2x+1}{x-1}$  có đồ thị  $(C)$ . Có bao nhiêu điểm  $M$  thuộc  $(C)$  có tung độ là số nguyên dương sao cho khoảng cách từ  $M$  đến tiệm cận đứng bằng 3 lần khoảng cách từ  $M$  đến tiệm cận ngang của đồ thị  $(C)$ .

- A. 0.      B. 3.      C. 1.      D. 2.

**Câu 32.** Có tất cả bao nhiêu giá trị thực của tham số  $m$  để đường thẳng  $d: y = mx + 1$  cắt đồ thị  $(C): y = x^3 - x^2 + 1$  tại 3 điểm  $A, B(0; 1), C$  phân biệt sao cho tam giác  $AOC$  vuông tại  $O(0; 0)$ ?

- A. 1.      B. 0.      C. 3.      D. 2.

**Câu 33.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để hàm số  $y = x^3 - 3mx^2 + 3(2m-1)x + 1$  đồng biến trên tập xác định?

- A.  $m = 1$ .      B.  $m \in \mathbb{R}$ .      C. Không tồn tại  $m$ .      D.  $m \neq 1$ .

**Câu 34.** Tồn tại bao nhiêu số nguyên  $m$  để hàm số  $y = \frac{x-2}{x-m}$  đồng biến trên khoảng  $(-\infty; -1)$ ?

- A. 3.      B. 4.      C. 2.      D. Vô số.

**Câu 35.** Cho hàm số  $y = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$  có đồ thị  $(C)$ . Từ một điểm bất kì trên đường thẳng nào dưới đây luôn kẻ được đúng một tiếp tuyến đến đồ thị  $(C)$ .

- A.  $x = 1$ .      B.  $x = 2$ .      C.  $x = 0$ .      D.  $x = -1$ .

**Câu 36.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để phương trình  $\sqrt[3]{m+3}\sqrt[3]{m+3}\cos x = \cos x$  có nghiệm thực?

- A. 3.      B. 7.      C. 2.      D. 5.

**Câu 37.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau.

|         |           |        |         |           |     |
|---------|-----------|--------|---------|-----------|-----|
| $x$     | $-\infty$ | $-1$   | $3$     | $+\infty$ |     |
| $f'(x)$ | $+$       | $0$    | $-$     | $0$       | $+$ |
| $f(x)$  | $-\infty$ | $2019$ | $-2019$ | $+\infty$ |     |

Hỏi đồ thị hàm số  $y = |f(x-2018) + 2019|$  có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 3.      B. 4.      C. 2.      D. 5.

**Câu 38.** Cho hàm số  $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2-1)x - m^3 - m$ , ( $m$  là tham số) và điểm  $I(2; -2)$ . Gọi  $A, B$  là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số. Biết có hai giá trị  $m_1$  và  $m_2$  để ba điểm  $I, A, B$  tạo thành tam giác nội tiếp đường tròn có bán kính bằng  $\sqrt{5}$ . Tính  $m_1 + m_2$ .

- A.  $\frac{14}{17}$ .      B.  $\frac{20}{17}$ .      C.  $\frac{4}{17}$ .      D.  $-\frac{2}{17}$ .

**Câu 39.** Tổng các giá trị nguyên của tham số  $m$  để hàm số  $y = \left| x^3 - 3x^2 - 9x - 5 + \frac{m}{2} \right|$  có 5 điểm cực trị bằng

- A.  $-2016$ .      B.  $-496$ .      C.  $1952$ .      D.  $2016$ .

**Câu 40.** Cho hàm số  $f(x) = mx^3 - 3mx^2 + (3m - 2)x + 2 - m$  với  $m$  là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m \in [-10; 10]$  để hàm số  $g(x) = |f(x)|$  có 5 điểm cực trị?

A. 7.

B. 9.

C. 10.

D. 11.

**Câu 41.** (THPTQG 2020 - mã đề 102).

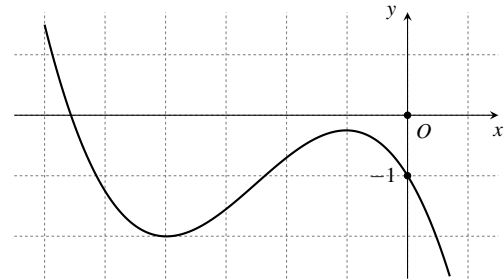
Cho hàm số bậc ba  $y = f(x)$  có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình  $f(x^3 f(x)) + 1 = 0$  là

A. 6.

B. 4.

C. 5.

D. 8.



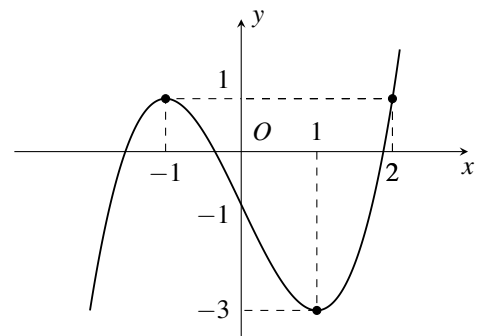
**Câu 42.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đồ thị  $f'(x)$  như hình bên. Đặt  $g(x) = f(x) - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x - 2019$ . Biết  $g(-1) + g(1) > g(0) + g(2)$ . Giá trị nhỏ nhất của hàm số  $g(x)$  trên đoạn  $[-1; 2]$  là

A.  $g(2)$ .

B.  $g(1)$ .

C.  $g(-1)$ .

D.  $g(0)$ .



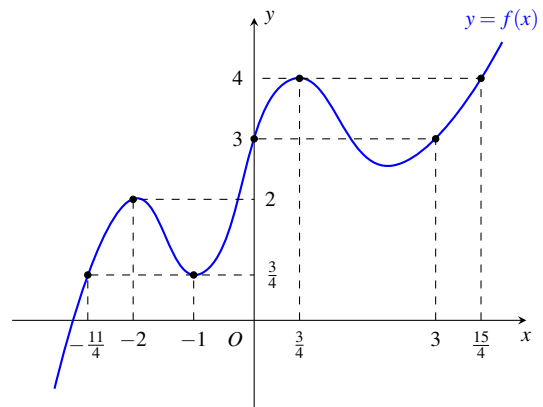
**Câu 43.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để phương trình  $f\left(\sin x + \frac{\sqrt{21}}{2} \cos x + \frac{1}{2}\right) = f(m^3 + 3m)$  có nghiệm?

A. 0.

B. 1.

C. 4.

D. 3.



**Câu 44.** Cho đồ thị  $(C): y = \frac{x-1}{2x}$  và  $d_1, d_2$  là hai tiếp tuyến của  $(C)$  song song với nhau. Khoảng cách lớn nhất giữa  $d_1$  và  $d_2$  là

A. 3.

B.  $2\sqrt{3}$ .

C. 2.

D.  $2\sqrt{2}$ .

**Câu 45.** Cho hàm số  $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{7}{2}x^2$  có đồ thị  $(C)$ . Có bao nhiêu điểm  $A$  thuộc  $(C)$  sao cho tiếp tuyến của  $(C)$  tại  $A$  cắt  $(C)$  tại hai điểm phân biệt  $M(x_1; y_1), N(x_2; y_2)$  ( $M, N$  khác  $A$ ) thỏa mãn  $y_1 - y_2 = 6(x_1 - x_2)$ ?

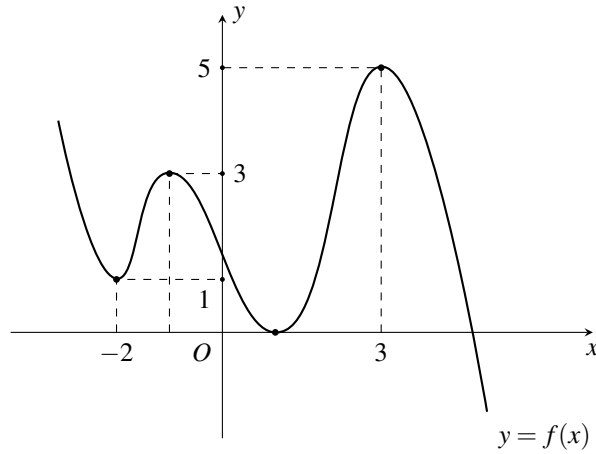
A. 2.

B. 3.

C. 1.

D. 0.

**Câu 46.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đồ thị như hình vẽ bên (giảm trên  $(-\infty; -2)$  và  $(3; +\infty)$ )

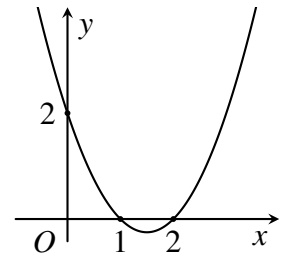


Gọi  $m_0$  là giá trị dương của tham số  $m$  để phương trình  $\frac{m^3 + m}{\sqrt{f^2(x) + 1}} = f^2(x) + 2$  có ba nghiệm thực phân biệt. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.  $m_0 \in (1; 2)$ . B.  $m_0 \in (0; 1)$ . C.  $m_0 \in (2; 3)$ . D.  $m_0 \in (3; 4)$ .

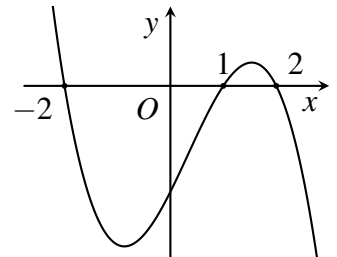
**Câu 47.** Cho hàm số  $y = f(x)$ . Đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  như hình bên. Hỏi hàm số  $g(x) = f(x - x^2)$  nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau đây?

- A.  $(1; 2)$ . B.  $(-\infty; 0)$ . C.  $(-\infty; 2)$ . D.  $(\frac{1}{2}; +\infty)$ .



**Câu 48.** Cho hàm số  $y = f(x)$ . Đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  như hình bên dưới và  $f(-2) = f(2) = 0$ . Hàm số  $g(x) = [f(3 - x)]^2$  nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

- A.  $(-2; -1)$ . B.  $(1; 2)$ . C.  $(2; 5)$ . D.  $(5; +\infty)$ .

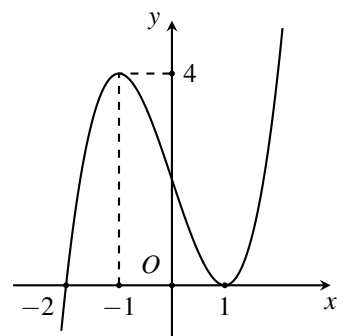


**Câu 49.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = x(x - 1)^2(3x^4 + mx^3 + 1)$  với mọi  $x \in \mathbb{R}$ . Có bao nhiêu số nguyên âm  $m$  để hàm số  $g(x) = f(x^2)$  đồng biến trên khoảng  $(0; +\infty)$ ?

- A. 3. B. 4. C. 5. D. 6.

**Câu 50.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$  và  $f(0) < 0$ , đồng thời đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số  $g(x) = f^2(x)$  là

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

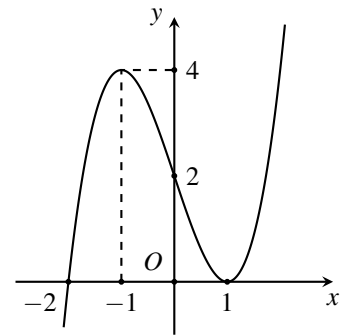


**Câu 51.** Cho hàm số  $y = \frac{-2x - 2}{x + 3}$  có đồ thị hàm số  $(C)$ . Xét điểm  $M(x_0; y_0)$  thuộc đồ thị  $(C)$  có  $x_0 > -3$ . Tiếp tuyến  $\Delta$  của  $(C)$  tại điểm  $M$  lần lượt cắt các đường tiệm cận đứng, tiệm cận ngang của  $(C)$  tại  $E$  và  $F$ . Tính  $2x_0 - y_0$  khi độ dài  $EF$  đạt giá trị nhỏ nhất.

- A.  $2x_0 - y_0 = 0$ . B.  $2x_0 - y_0 = 2$ . C.  $2x_0 - y_0 = -3$ . D.  $2x_0 - y_0 = -2$ .

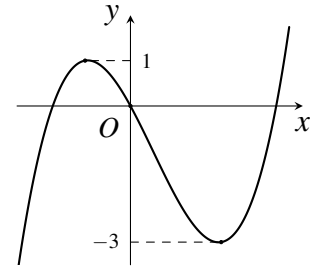
**Câu 52.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm trên  $\mathbb{R}$ . Đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số  $g(x) = f(x - 2017) - 2018x + 2019$  là

- A. 1.                      B. 2.                      C. 3.                      D. 4.



**Câu 53.** Cho hàm bậc ba  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ bên. Tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để hàm số  $g(x) = |f(x) + m|$  có 3 điểm cực trị là

- A.  $m \leq -1$  hoặc  $m \geq 3$   
 B.  $m \leq -3$  hoặc  $m \geq 1$ .  
 C.  $m = -1$  hoặc  $m = 3$ .  
 D.  $1 \leq m \leq 3$ .



**Câu 54.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình vẽ bên dưới

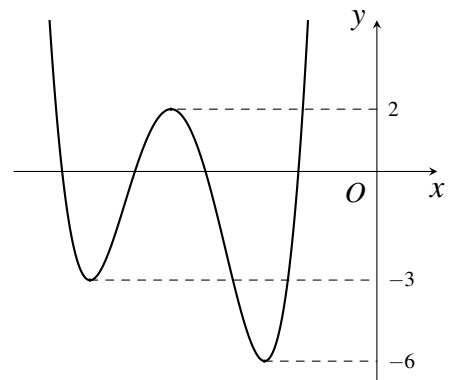
|      |           |    |   |           |   |
|------|-----------|----|---|-----------|---|
| $x$  | $-\infty$ | 1  | 2 | $+\infty$ |   |
| $y'$ | +         | 0  | - | 0         | + |
| $y$  | $-\infty$ | 11 | 4 | $+\infty$ |   |

Đồ thị hàm số  $g(x) = |f(x) - 2m|$  có 5 điểm cực trị khi

- A.  $m \in (4; 11)$ .                      B.  $m \in \left[2; \frac{11}{2}\right]$ .                      C.  $m \in \left(2; \frac{11}{2}\right)$ .                      D.  $m = 3$ .

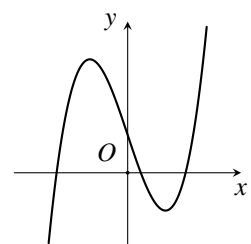
**Câu 55.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ bên. Có bao nhiêu số nguyên dương của tham số  $m$  để hàm số  $g(x) = |f(x + 2018) + m|$  có 7 điểm cực trị ?

- A. 2.                      B. 3.                      C. 4.                      D. 6.



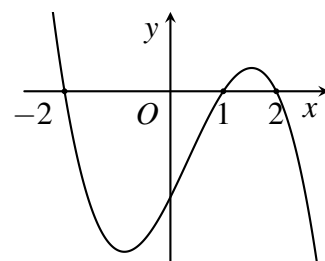
**Câu 56.** Cho hàm số  $y = f(x)$ . Đồ thị của hàm số  $y = f'(x)$  như hình vẽ bên. Hỏi hàm số  $g(x) = f(|x|) + 2018$  có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 2.                      B. 3.                      C. 5.                      D. 7.



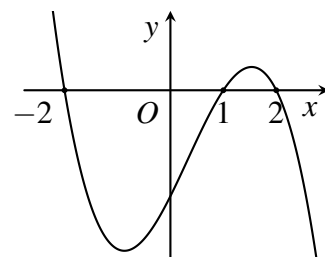
**Câu 57.** Cho hàm số  $y = f(x)$ . Đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  như hình vẽ bên dưới. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để hàm số  $g(x) = f(|x+m|)$  có 5 điểm cực trị?

- A. 3.                      B. 4.                      C. 5.                      D. Vô số.



**Câu 58.** Cho hàm số  $y = f(x)$ . Đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  như hình vẽ bên dưới. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để hàm số  $g(x) = f(|x|+m)$  có 5 điểm cực trị?

- A. 2.                      B. 3.                      C. 4.                      D. Vô số.



**Câu 59.** Cho hàm số  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$  với  $a, b, c \in \mathbb{R}$  và  $\begin{cases} -8 + 4a - 2b + c > 0 \\ 8 + 4a + 2b + c < 0 \end{cases}$ . Hàm số  $g(x) = |f(x)|$  có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 1.                      B. 2.                      C. 3.                      D. 5.

**Câu 60.** Cho hàm số  $y = mx^3 + x^2 + (1 - 4m)x - 6$  ( $C_m$ ). Giao điểm của đồ thị ( $C_m$ ) với các trục tọa độ  $Ox, Oy$  lần lượt là  $A, B$ . Gọi  $C$  là điểm thuộc ( $C_m$ ) sao cho diện tích tam giác  $ABC$  không đổi với mọi giá trị  $m \in \mathbb{R}$ . Khi đó diện tích tam giác  $ABC$  bằng

- A. 10.                      B. 8.                      C. 9.                      D. 7.

—HẾT—