

Câu 1 (3,0 điểm)

Tính các giới hạn sau đây:

a) $\lim_{x \rightarrow 3} (x^3 - 2x + 1)$.

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 10x + 16}{x - 2}$.

c) $\lim \frac{2n^2 + n - 1}{5 - n}$.

Câu 2 (2,5 điểm)

Cho hàm số $y = 2x^2 - 3x + 1$ có đồ thị là parabol (P) .

a) Tính đạo hàm y' của hàm số đã cho và giải phương trình $y' = 0$.

b) Viết phương trình tiếp tuyến của parabol (P) tại điểm có hoành độ $x_0 = -1$.

Câu 3 (3,5 điểm)

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = a\sqrt{2}$, đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, $SA = a\sqrt{3}$ (với $a > 0$). Gọi M, N lần lượt là các điểm thuộc đường thẳng SB, SD sao cho AM vuông góc với SB và AN vuông góc với SD . Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng MN và H là trung điểm của đoạn thẳng SC .

a) Chứng minh rằng đường thẳng CD vuông góc với mặt phẳng (SAD) và đường thẳng AN vuông góc với mặt phẳng (SCD) .

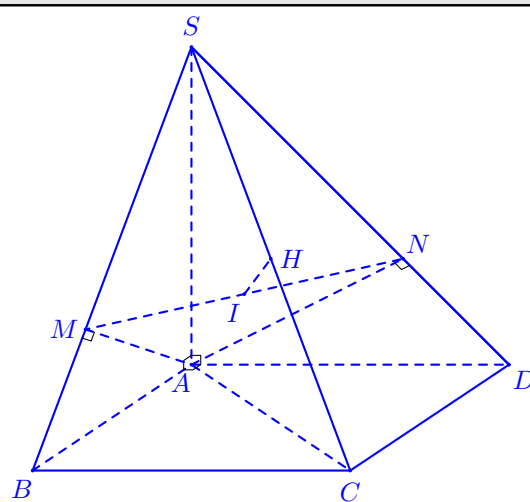
b) Gọi góc giữa đường thẳng AC và mặt phẳng (SCD) là φ . Tính $\sin \varphi$.

c) Tính độ dài đoạn thẳng IH theo a .

Câu 4 (1,0 điểm)

Cho các số thực a, b, c thỏa mãn điều kiện $7a + b + 3c = 0$. Chứng minh rằng phương trình $ax^2 + bx + c = 2020 \cdot \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ có ít nhất một nghiệm trên $\mathbb{R}$.

----- Hết -----

Câu	Lời giải	Điểm
1.a		1,0
	$\lim_{x \rightarrow 3} (x^3 - 2x + 1) = 3^3 - 2 \cdot 3 + 1 = 22$	1,0
1.b		1,0
	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 10x + 16}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x - 8)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x - 8) = -6$	1,0
1.c		1,0
	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + n - 1}{5 - n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left(2 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right)}{n \left(\frac{5}{n} - 1\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \cdot \frac{2 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}}{\frac{5}{n} - 1}\right) = -\infty$	1,0
2.a		1,5
	Ta có $y' = 4x - 3, \forall x \in \mathbb{R}$.	1,0
	Vậy $y' = 0 \Leftrightarrow 4x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}$.	0,5
2.b		1,0
	Tung độ tiếp điểm là $y_0 = y(-1) = 6$. Hệ số góc của tiếp tuyến là $k = y'(-1) = -7$.	0,5
	Tiếp tuyến của (P) tại điểm $M_0(-1; 6)$ có phương trình là $y = -7(x + 1) + 6 \Leftrightarrow y = -7x - 1$.	0,5
3.a		1,5
	 Vì $SA \perp (ABCD)$ nên $SA \perp CD$. Mà $ABCD$ là hình chữ nhật nên $AD \perp CD$. Suy ra $CD \perp (SAD)$.	1,0
	Vì $CD \perp (SAD)$ nên $CD \perp AN$. Mặt khác $SD \perp AN$ và hai đường thẳng cắt nhau CD, SD cùng nằm trong mặt phẳng (SCD) . Do vậy $AN \perp (SCD)$.	0,5

3.b		1,0
	Hình chiếu vuông góc của AC trên (SCD) là NC nên $(\widehat{AC}, (\widehat{SCD})) = (\widehat{AC}, \widehat{NC}) = \widehat{NCA} = \varphi$.	0,5
	Ta có $AC = \sqrt{a^2 + (a\sqrt{2})^2} = a\sqrt{3}$. Trong tam giác SAD vuông tại A $\frac{1}{AN^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{3a^2} + \frac{1}{2a^2} = \frac{5}{6a^2} \Rightarrow AN = \frac{a\sqrt{30}}{5}$. Tam giác NCA vuông tại N nên $\sin \varphi = \sin \widehat{NCA} = \frac{AN}{AC} = \frac{\sqrt{10}}{5}$.	0,5
3.c		1,0
	Vì hai tam giác SAB, SAD vuông tại A nên M, N lần lượt là các điểm trong của các đoạn thẳng SB, SD. Ta có $\frac{SM}{SB} = \frac{SM \cdot SB}{SB^2} = \frac{SA^2}{SB^2} = \frac{SA^2}{SA^2 + AB^2} = \frac{3a^2}{3a^2 + a^2} = \frac{3}{4} \Rightarrow \overrightarrow{SM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{SB}$ Tương tự $\frac{SN}{SD} = \frac{3}{5} \Rightarrow \overrightarrow{SN} = \frac{3}{5}\overrightarrow{SD}$ Do đó $\begin{aligned} \overrightarrow{IH} &= -\overrightarrow{SI} + \overrightarrow{SH} = -\frac{1}{2}(\overrightarrow{SM} + \overrightarrow{SN}) + \frac{1}{2}\overrightarrow{SC} \\ &= -\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\overrightarrow{SB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{SD}\right) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AC}) \\ &= -\frac{3}{8}\overrightarrow{SB} - \frac{3}{10}\overrightarrow{SD} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AC}) \\ &= -\frac{3}{8}(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AB}) - \frac{3}{10}(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AD}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \\ &= -\frac{7}{40}\overrightarrow{SA} + \frac{1}{8}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{5}\overrightarrow{AD} \end{aligned}$	0,5
	Do SA, AB, AD đôi một vuông góc nên $IH^2 = \overrightarrow{IH}^2 = \left(-\frac{7}{40}\overrightarrow{SA} + \frac{1}{8}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{5}\overrightarrow{AD}\right)^2 = \left(-\frac{7}{40}\overrightarrow{SA}\right)^2 + \left(\frac{1}{8}\overrightarrow{AB}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\overrightarrow{AD}\right)^2$ $= \frac{49}{1600}SA^2 + \frac{1}{64}AB^2 + \frac{1}{25}AD^2 = \frac{3a^2}{16}$ Vậy $IH = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.	0,5
4		1,0
	Hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c - 2020 \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Ta có $f(-1) = a - b + c, f(1) = a + b + c, f(3) = 9a + 3b + c$. Từ đó và $7a + b + 3c = 0$ suy ra $3f(-1) + 2f(1) + f(3) = 2(7a + b + 3c) = 0$.	0,5
	+ Nếu trong ba số $f(-1), f(1), f(3)$ có một số bằng 0 thì ta có ngay điều phải chứng minh. + Nếu cả ba số $f(-1), f(1), f(3)$ đều khác 0 thì từ $3f(-1) + 2f(1) + f(3) = 0$ suy ra trong ba số $f(-1), f(1), f(3)$ có hai số trái dấu, tích của hai số đó âm. Dẫn tới phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm. Vậy với $7a + b + 3c = 0$ thì phương trình $ax^2 + bx + c = 2020 \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ có ít nhất một nghiệm trên $[-1; 3] \subset \mathbb{R}$.	0,5