SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
QUẢNG NAM

KỲ THI HỌC SINH GIỎI LỚP 12 THPT CẤP TỈNH
NĂM HỌC: 2019 - 2020
Môn thi: TOÁN
Thời gian làm bài: 90 phút (không kể thời gian phát đề)
Ngày thi: 10 tháng 06 năm 2020

Họ và tên: .... **SBD:** ....

Câu 1. Hàm số $y=\dfrac{x^2+3}{x-1}$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(1;3)$. **B.** $(-\infty;-1)$. **C.** $(-3;1)$. **D.** $(1;+\infty)$.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$ cho $\vec{u}=(2;-1;1)$, $\vec{v}=(-3;4;-5)$. Số đo góc giữa hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ bằng

A. 150^0. **B.** 120^0. **C.** 60^0. **D.** 30^0.

Câu 3. Cho khối chóp có chiều cao bằng $2a$, đáy là hình thoi cạnh a và có một góc bằng $60°$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

A. $a^3\sqrt{3}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Câu 4. Điểm cực đại của hàm số $y=-x^3+3x+2$ là

A. $x=-1$. **B.** $x=4$. **C.** $x=0$. **D.** $x=1$.

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, giao tuyến của hai mặt phẳng $P: x-2y+3z=0$, $Q: x+4z-1=0$ có một véc tơ chỉ phương là.

A. $\vec{u}_1=(5;-2;-3)$. **B.** $\vec{u}_2=(5;2;-3)$. **C.** $\vec{u}_3=(8;1;-2)$. **D.** $\vec{u}_4=(4;-1;-2)$.

Câu 6. Nếu tích phân $\int\limits_1^3 f\ \ x\ \ dx=6$ thì $\int\limits_0^1 f\ \ 2x+1\ \ dx$ bằng

A. 3. **B.** 12. **C.** 6. **D.** 4.

Câu 7. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\sqrt{2-x}-\sqrt{x+1}$ bằng

A. $\sqrt{3}$. **B.** $-\sqrt{3}$. **C.** 0. **D.** 2.

Câu 8. Cho hình nón có bán kính đáy bằng 1, góc giữa đường sinh và trục của hình nón bằng 30^0. Diện tích xung quanh của hình nón đã cho bằng

A. $\dfrac{4\sqrt{3}\pi}{3}$. **B.** $\sqrt{3}\pi$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{3}\pi}{3}$. **D.** 2π.

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, điểm đối xứng với điểm $M(4;-5;3)$ qua trục Oz có tọa độ là

A. $(4;-5;-3)$. **B.** $(-4;5;3)$. **C.** $(-4;5;-3)$. **D.** $(0;0;3)$.

Câu 10. Tổng số đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{x^3+x^2-2x}$ là

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 11. Bất phương trình $\log_2(x-1)<\log_4(6x+5)$ có bao nhiêu nghiệm nguyên?

A. 6. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 9.

Câu 12. Họ tất cả nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{4x^2-4x+1}$ là

A. $\dfrac{1}{2(2x-1)}+C$. **B.** $\dfrac{1}{2x-1}+C$. **C.** $-\dfrac{1}{2x-1}+C$. **D.** $-\dfrac{1}{2(2x-1)}+C$.

Câu 13. Số điểm cực trị của hàm số $y=x-\sin^2 x$ trong khoảng $(-\pi;2\pi)$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 14. Tích các nghiệm của phương trình $\left(2+\sqrt{3}\right)^{x^2-5x}-7+4\sqrt{3}=0$ bằng

A. 2. **B.** -2. **C.** 5. **D.** -5.

Câu 15. Cho khối trụ có chiều cao bằng bán kính đáy và có diện tích thiết diện qua trục của khối trụ bằng 16. Thể tích khối trụ đã cho bằng.

A. 64π. **B.** $\dfrac{64\pi}{3}$. **C.** $16\sqrt{2}\pi$. **D.** $\dfrac{16\sqrt{2}\pi}{3}$.

Câu 16. Biết $\int (x-1).e^{2x}dx=a(x+b).e^{2x}+C$, với a,b là các số hữu tỉ. Giá trị của $a-b$ bằng.

A. $\dfrac{5}{2}$. **B.** 4. **C.** -1. **D.** 2.

Câu 17. Biết phương trình $\log_9^2 x+\log_3\dfrac{x}{27}=0$ có hai nghiệm x_1, x_2 với $x_1<x_2$. Hiệu x_2-x_1 bằng

A. $\dfrac{80}{3}$. **B.** $\dfrac{80}{27}$. **C.** $\dfrac{6560}{27}$. **D.** $\dfrac{6560}{729}$.

Câu 18. Biết rằng tập nghiệm của bất phương trình $4^x-8.6^x+12.9^x<0$ là khoảng $(a;b)$. Giá trị của $b-a$ bằng

A. $-\log_{\frac{2}{3}}4$. **B.** $\log_{\frac{2}{3}}4$. **C.** $-\log_{\frac{2}{3}}3$. **D.** $\log_{\frac{2}{3}}3$.

Câu 19. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Thể tích khối cầu có tâm A và tiếp xúc với đường thẳng $A'C$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{2}\pi a^3}{3}$. **B.** $\dfrac{8\sqrt{6}\pi a^3}{27}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}\pi a^3}{2}$. **D.** $\sqrt{6}\pi a^3$.

NHÓM TOÁN VD – VDC

Câu 20. Biết $\int_3^4 |x-\pi|dx = a\pi^2 + b\pi + c$ với a,b,c là các số hữu tỉ. Giá trị của $a+b+c$ bằng

A. $\frac{41}{2}$. **B.** $\frac{25}{2}$. **C.** $\frac{13}{2}$. **D.** $\frac{5}{2}$.

Câu 21. Biết nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình $2\left(1-\sqrt{3}.\cos x\right)\sin x = \cos 2x$ là $x_0 = \frac{a\pi}{b}$, với a,b là các số nguyên dương và $a<10$. Giá trị của a+b bằng

A. 23 **B.** 7 **C.** 11 **D.** 17

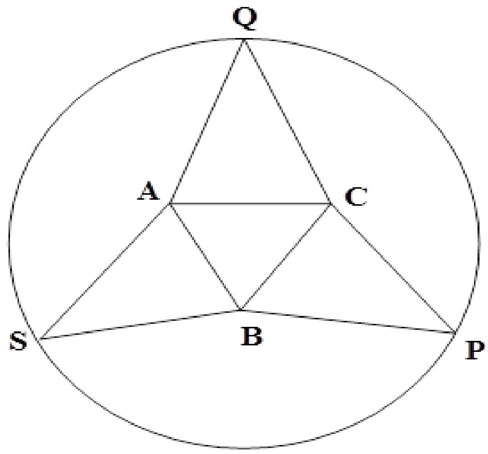
Câu 22. Tiếp tuyến đi qua điểm $A(-1;0)$ của đồ thị hàm số $y=\frac{2x-1}{x+1}$ (C) có phương trình là

A. $y=\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$. **B.** $y=x+1$. **C.** $y=3x+3$. **D.** $y=-x-1$.

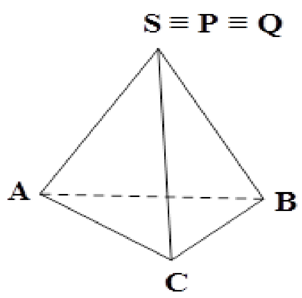
Câu 23. Cho phương trình $9^x+2(m+1).3^x+m+7=0$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có 2 nghiệm thực phân biệt?

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** Vô số.

Câu 24. Cắt tấm bìa hình tròn có bán kính bằng 1 (độ dày không đáng kể) theo đường gấp khúc $SAQCPBS$ như hình 1, sau đó gấp phần đa giác còn lại theo các đoạn AB, BC, CA sao cho các điểm S,P,Q trùng nhau để được hình chóp đều có đáy là tam giác ABC như hình 2.



Hình 1



Hình 2

Giá trị lớn nhất của thể tích khối chóp SABC bằng

A. $\frac{1}{9}$. **B.** $\frac{4\sqrt{15}}{125}$. **C.** $\frac{\sqrt{15}}{125}$. **D.** $\frac{4}{9}$

Câu 25. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng $3a$. Một hình trụ T có hai đáy nội tiếp tam giác $ABC, A'B'C'$. Gọi M là trung điểm cạnh BC. Đường thẳng $A'M$ cắt mặt xung quanh của hình trụ T tại N (N khác M). Tính độ dài đoạn thẳng MN.

A. $MN=\frac{a\sqrt{15}}{3}$. **B.** $MN=\frac{a\sqrt{15}}{6}$. **C.** $MN=\frac{a\sqrt{39}}{3}$. **D.** $MN=\frac{a\sqrt{39}}{6}$.

Câu 26. Gọi C_m là đồ thị của hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-\left(\frac{2m+1}{2}\right)x^2+\ m^2+m\ x$ với m là tham số. Có bao nhiêu điểm M sao cho tồn tại hai giá trị khác nhau m_1,m_2 mà M là điểm cực đại của đồ thị C_{m_1} và là điểm cực tiểu của đồ thị C_{m_2} ?

A. 2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** Vô số.

Câu 27. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\frac{\sqrt{\ln x}}{x}$, trục hoành và đường thẳng $x=2$. Biết thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình (H) xung quanh trục hoành bằng $(a+b\ln)\pi$ với a,b là các số hữu tỉ. Tính $a+3b$.

A. $a+3b=2$. **B.** $a+3b=-\frac{1}{2}$. **C.** $a+3b=-1$. **D.** $a+3b=\frac{5}{2}$.

Câu 28. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB=2a$, $BC=4a$, $AA'=3a$. Gọi M là trung điểm của cạnh AB. Diện tích thiết diện của lăng trụ $ABC.A'B'C'$ khi cắt bởi mặt phẳng $(MB'C')$ bằng

A. $2\sqrt{10}a^2$. **B.** $3\sqrt{10}a^2$. **C.** $4\sqrt{10}a^2$. **D.** $6\sqrt{10}a^2$.

Câu 29. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân với $AB=AC=a$ và $BAC=120^0$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh S lên mặt phẳng (ABC) là điểm H thuộc cạnh BC với $HC=2HB$. Góc giữa SB và mặt phẳng (ABC) bằng 60^0. Mặt phẳng đi qua H và vuông góc với SA cắt các cạnh SA,SC lần lượt tại A',C'. Tính thể tích V của khối chóp $B.ACC'A'$

A. $V=\frac{7\sqrt{3}a^3}{192}$. **B.** $V=\frac{3\sqrt{3}a^3}{64}$. **C.** $V=\frac{3\sqrt{3}a^3}{100}$. **D.** $V=\frac{5\sqrt{3}a^3}{108}$.

Câu 30. Cho phương trình $\log_{\sqrt{2}+1}\left[x^2-(2m-3)x+m^2-m-6\right]+\log_{\sqrt{2}-1}x=0$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có đúng một nghiệm?

A. 7. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Câu 31. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt cầu (S_1), (S_2) có điểm chung $A(1;2;-1)$, cùng tiếp xúc với mặt phẳng (Oxy) và đều có tâm thuộc đường thẳng $d:\frac{x-1}{-1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+1}{2}$. Khoảng cách giữa hai tâm của hai mặt cầu (S_1), (S_2) bằng

A. $\sqrt{6}$. **B.** $\sqrt{46}$. **C.** 4. **D.** $2\sqrt{6}$.

Câu 32. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $AC=a$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh S lên mặt phẳng (ABC) là điểm H đối xứng với B qua AC. Góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (ABC) bằng $45°$. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ bằng

A. $2\pi a^2$. **B.** $V=\frac{2\pi a^2}{3}$. **C.** $5\pi a^2$. **D.** $\frac{5\pi a^2}{4}$.

Câu 33. Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục, nhận giá trị dương trên đoạn $\left[1;4\right]$, $f\left(1\right)=1$, $f\left(4\right)=8$ và $2x.f\left(x\right).f'\left(x\right)=x^3+2\left[f\left(x\right)\right]^2, \forall x\in\left[1;4\right]$. Tích phân $\int\limits_1^4 \frac{x}{f\left(x\right)}dx$ bằng

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** 2.

Câu 34. Đồ thị $\left(C\right)$ của hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+3a$ và đồ thị $\left(C'\right)$ của hàm số $y=3ax^2+2bx+c$ $\left(a,b,c\in\mathbb{R},a>0\right)$ có đúng hai điểm chung khác nhau A,B và điểm A có hoành độ bằng 1. Các tiếp tuyến của $\left(C\right)$ và $\left(C'\right)$ tại điểm A trùng nhau; diện tích hình phẳng giới hạn bởi $\left(C\right)$ và $\left(C'\right)$ bằng 1. Giá trị của $a+b+c$ bằng

A. 12. **B.** 17. **C.** 60. **D.** 45.

Câu 35. Chọn ngẫu nhiên đồng thời sáu số tự nhiên khác nhau thuộc đoạn [1;25]. Gọi A là biến cố "Chọn được sáu số tự nhiên sao cho tổng bình phương của sáu số đó chia hết cho 3". Xác suất của biến cố A bằng

A. $\frac{633}{6325}$. **B.** $\frac{453}{6325}$. **C.** $\frac{211}{6325}$. **D.** $\frac{1803}{6325}$.

Câu 36. Cho bất phương trình $x^2-(m+2019)x+2020m+(x-m+1)\log_{2019}x<2020$ với m là tham số.

Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để tập nghiệm của bất phương trình đã cho chứa trong khoảng (1000;2020) ?

A. 1018. **B.** 1019. **C.** 1020. **D.** 1021.

Câu 37. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB=a, AD=a\sqrt{3}, AA'=3a$. Gọi M là điểm thuộc cạnh CC' sao cho $mp(MBD)$ vuông góc với $mp(A'BD)$. Thể tích khối tứ diện $A'BDM$ bằng

A. $\frac{13\sqrt{3}a^3}{8}$. **B.** $\frac{10a^3}{9}$. **C.** $\frac{100a^3}{3}$. **D.** $\frac{13\sqrt{3}a^3}{24}$.

Câu 38. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên sau :

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m để phương trình $\frac{1}{f(x)}+\frac{1}{f(x)-2}=m$ có đúng 3 nghiệm thực phân biệt. Hỏi tập S có bao nhiêu phần tử?

A. 3. **B.** Vô số. **C.** 1. **D.** 2.

NHÓM TOÁN VD – VDC

Câu 39. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm A, B theo thứ tự thay đổi trên các tia Ox, Oy sao cho $OA.OB = 9$. Điểm S thuộc mặt phẳng (Ozx) sao cho hai mặt phẳng (SAB) và (SOB) cùng tạo với mặt phẳng (Oxy) một góc 30^o. Gọi $(a;0;c)$ là tọa độ điểm S. Tính giá trị của biểu thức $P = a^4 + c^4$ trong trường hợp thể tích khối chóp $S.OAB$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $P = \dfrac{10}{3}$. **B.** $P = \dfrac{40}{81}$. **C.** $P = \dfrac{40}{9}$. **D.** $P = \dfrac{45}{8}$.

Câu 40. Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $(x-z)^2 + (2y-z)^2 = 3z^2 + 4$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \dfrac{x^3(y-z) + 4y^3(x-2z) - z^3xy}{xy}$ bằng

A. $\dfrac{112}{27}$. **B.** $\dfrac{110}{27}$. **C.** $\dfrac{128}{27}$. **D.** $\dfrac{55}{27}$.

-------------- HẾT ---------------

BẢNG ĐÁP ÁN

1A	2A	3B	4D	5C	6A	7A	8D	9B	10C	11B	12D	13A	14C	15C
16D	17D	18C	19B	20C	21A	22A	23A	24B	25C	26C	27C	28B	29A	30D
31A	32D	33D	34C	35D	36D	37D	38C	39A	40A					

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1. Hàm số $y=\dfrac{x^2+3}{x-1}$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(1;3)$. **B.** $(-\infty;-1)$. **C.** $(-3;1)$. **D.** $(1;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

$y'=\dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}\ \forall x\neq 1,\ y'=0\Leftrightarrow x=-1;\ x=3$.

$y'<0\Leftrightarrow x\in(-1;3)\setminus\{1\}$.Hàm số nghịch biến trên $(-1;1)$ và $(1;3)$.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$ cho $\vec{u}=(2;-1;1)$, $\vec{v}=(-3;4;-5)$. Số đo góc giữa hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ bằng

A. 150^0. **B.** 120^0. **C.** 60^0. **D.** 30^0.

Lời giải

Chọn A

$$\cos(\vec{u},\vec{v})=\frac{\vec{u}.\vec{v}}{\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|}=\frac{-15}{\sqrt{6}.5\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow(\vec{u},\vec{v})=150^0.$$

Câu 3. Cho khối chóp có chiều cao bằng $2a$, đáy là hình thoi cạnh a và có một góc bằng $60°$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

A. $a^3\sqrt{3}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải

Chọn B

Diện tích hình thoi là $S=a^2.\sin 60°=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Thể tích của khối chóp là $V=\dfrac{1}{3}Sh=\dfrac{1}{3}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}.2a=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 4. Điểm cực đại của hàm số $y=-x^3+3x+2$ là

A. $x=-1$. **B.** $x=4$. **C.** $x=0$. **D.** $x=1$.

Lời giải

Chọn D

TXĐ $D=\mathbb{R}$.

Ta có $y'=-3x^2+3$; $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-1\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, hàm số đạt cực đại tại $x=1$.

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, giao tuyến của hai mặt phẳng $P: x-2y+3z=0$, $Q: x+4z-1=0$ có một véc tơ chỉ phương là.

A. $\vec{u}_1=(5;-2;-3)$. **B.** $\vec{u}_2=(5;2;-3)$. **C.** $\vec{u}_3=(8;1;-2)$. **D.** $\vec{u}_4=(4;-1;-2)$.

Lời giải

Chọn C

Mặt P có một véc tơ pháp tuyến là $\vec{n}_1=\ 1;-2;3$;

Mặt Q có một véc tơ pháp tuyến là $\vec{n}_2=\ 1;0;4$;

Gọi Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng P và Q, và $\vec{u}$ là 1 véc tơ chỉ phương của Δ; khi đó ta có $\begin{cases}\Delta\perp\vec{n}_1\\\Delta\perp\vec{n}_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\vec{u}\perp\vec{n}_1\\\vec{u}\perp\vec{n}_2\end{cases}$ $\Rightarrow$ đường thẳng Δ có 1 véc tơ chỉ phương là $\vec{u}=\ \vec{n}_1,\vec{n}_2\ =\ -8;-1;2\ =-\vec{u}_3$. Suy ra $\vec{u}_3$ cũng là 1 véc tơ chỉ phương của Δ.

Câu 6. Nếu tích phân $\int_1^3 f\ x\ \mathrm{d}x=6$ thì $\int_0^1 f\ 2x+1\ \mathrm{d}x$ bằng

A. 3. **B.** 12. **C.** 6. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Đặt $2x+1=u\Rightarrow \mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{d}u$; đổi cận $x=0\Rightarrow u=1$; $x=1\Rightarrow u=3$.

Khi đó $\int_0^1 f\ 2x+1\ \mathrm{d}x=\int_1^3 f\ u\ \frac{1}{2}\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\int_1^3 f\ u\ \mathrm{d}u=\frac{1}{2}\int_1^3 f\ x\ \mathrm{d}x=\frac{1}{2}.6=3$.

Câu 7. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\sqrt{2-x}-\sqrt{x+1}$ bằng

A. $\sqrt{3}$. **B.** $-\sqrt{3}$. **C.** 0. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Hàm số có nghĩa $\Leftrightarrow \begin{cases} 2-x\ge 0 \\ x+1\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 2 \\ x\ge -1 \end{cases} \Leftrightarrow x\in[-1;2]$

Ta có $y'=\left(\sqrt{2-x}-\sqrt{x+1}\right)'=-\dfrac{1}{2\sqrt{2-x}}-\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}=-\left(\dfrac{1}{2\sqrt{2-x}}+\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}\right)<0, \forall x\in(-1;2)$.

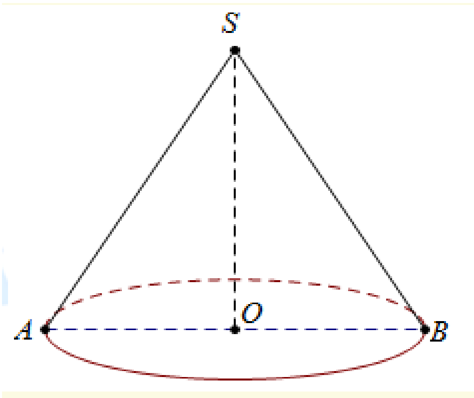
Suy ra hàm số nghịch biến trên đoạn $[-1;2]$ nên $Max\, y=y(-1)=\sqrt{3}$.

Câu 8. Cho hình nón có bán kính đáy bằng 1, góc giữa đường sinh và trục của hình nón bằng 30^0. Diện tích xung quanh của hình nón đã cho bằng

A. $\dfrac{4\sqrt{3}\pi}{3}$. **B.** $\sqrt{3}\pi$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{3}\pi}{3}$. **D.** 2π.

Lời giải

Chọn D



Xét tam giác SOB ta có $OB=1,\ \angle OSB=30^0 \Rightarrow \sin 30^0=\dfrac{OB}{SB}\Rightarrow SB=\dfrac{OB}{\sin 30^0}=2$.

Vậy ta có $S_{xq}=\pi Rl=\pi.1.2=2\pi$.

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, điểm đối xứng với điểm $M(4;-5;3)$ qua trục Oz có tọa độ là

A. $(4;-5;-3)$. **B.** $(-4;5;3)$. **C.** $(-4;5;-3)$. **D.** $(0;0;3)$.

Lời giải

Chọn B

Hình chiếu của điểm M lên trục Oz là $H(0;0;3)$.

Gọi M' là điểm đối xứng với điểm M qua trục Oz. Ta có H là trung điểm của MM' nên suy ra $H(-4;5;3)$.

Câu 10. Tổng số đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{x^3+x^2-2x}$ là

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

Hàm số xác định khi $\begin{cases} x^2-4\ge 0 \\ x\left(x^2+x-2\right)\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x\ge 2 \\ x\le -2 \end{array}\right. \\ x\ne 0 \\ x\ne 1 \\ x\ne -2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\ge 2 \\ x<-2 \end{array}\right.$.

TXĐ: $D=\left(-\infty;-2\right)\cup\left[2;+\infty\right)$.

*) Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{x^3+x^2-2x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\pm x\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}}{x^3+x^2-2x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\pm\frac{1}{x^2}\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}}{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}=\dfrac{0}{1}=0$.

suy ra $y=0$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

*) Không tồn tại $\lim\limits_{x\to 0^+} y, \lim\limits_{x\to 0^-} y, \lim\limits_{x\to 1^+} y, \lim\limits_{x\to 1^-} y$

Khi $x\to\left(-2\right)^+$ thì hàm số không xác định nên ta chỉ tìm $\lim\limits_{x\to(-2)^-} y$

Ta có $\lim\limits_{x\to(-2)^-} y=\lim\limits_{x\to(-2)^-}\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{x\left(x^2+x-2\right)}=\lim\limits_{x\to(-2)^-}\dfrac{\sqrt{-\left(4-x^2\right)}}{x\left(x-1\right)\left(x+2\right)}$

$=\lim\limits_{x\to(-2)^-}\dfrac{\sqrt{\left(2-x\right)\left[-\left(x+2\right)\right]}}{-x\left(x-1\right)\sqrt{\left[-\left(x+2\right)\right]^2}}=\lim\limits_{x\to(-2)^-}\dfrac{\sqrt{\left(2-x\right)}}{-x\left(x-1\right)\sqrt{-\left(x+2\right)}}=-\infty$

suy ra $x=-2$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.
Do đó tổng số đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là 2.

Câu 11. Bất phương trình $\log_2\left(x-1\right)<\log_4\left(6x+5\right)$ có bao nhiêu nghiệm nguyên?

A. 6. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 9.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện $\begin{cases} x-1>0 \\ 6x+5>0 \end{cases} \Leftrightarrow x>1$.

Bất phương trình $\log_2\left(x-1\right)<\log_4\left(6x+5\right)\Leftrightarrow\log_2\left(x-1\right)^2<\log_2\left(6x+5\right)$

$\Leftrightarrow\left(x-1\right)^2<6x+5\Leftrightarrow x^2-8x-4<0\Leftrightarrow 4-2\sqrt{5}<x<4+2\sqrt{5}$.

Kết hợp điều kiện $\Rightarrow 1<x<4+2\sqrt{5}$.

Vì $x\in Z\Rightarrow x\in\left\{2;3;4;5;6;7;8\right\}$.

Câu 12. Họ tất cả nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{4x^2-4x+1}$ là

A. $\dfrac{1}{2(2x-1)}+C$. **B.** $\dfrac{1}{2x-1}+C$. **C.** $-\dfrac{1}{2x-1}+C$. **D.** $-\dfrac{1}{2(2x-1)}+C$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int f(x)dx=\int\dfrac{1}{(2x-1)^2}dx=-\dfrac{1}{2(2x-1)}+C$.

Câu 13. Số điểm cực trị của hàm số $y=x-\sin^2 x$ trong khoảng $(-\pi;2\pi)$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

$y'=1-\sin 2x$.

$y'\geq 0,\ \ \forall x\in(-\pi;2\pi)$ suy ra hàm số đồng biến trên $(-\pi;2\pi)$.

Vậy hàm số không có cực trị trong khoảng $(-\pi;2\pi)$.

Câu 14. Tích các nghiệm của phương trình $\left(2+\sqrt{3}\right)^{x^2-5x}-7+4\sqrt{3}=0$ bằng

A. 2. **B.** -2. **C.** 5. **D.** -5.

Lời giải

Chọn C

$\left(2+\sqrt{3}\right)^{x^2-5x}-7+4\sqrt{3}=0$

$\Leftrightarrow\left(2+\sqrt{3}\right)^{x^2-5x}=\left(2+\sqrt{3}\right)^{-2}$

$\Leftrightarrow x^2-5x+2=0$.

Tổng các nghiệm của phương trình bậc hai $x^2-5x+2=0$ bằng 5.

Câu 15. Cho khối trụ có chiều cao bằng bán kính đáy và có diện tích thiết diện qua trục của khối trụ bằng 16. Thể tích khối trụ đã cho bằng.

A. 64π. **B.** $\dfrac{64\pi}{3}$. **C.** $16\sqrt{2}\pi$. **D.** $\dfrac{16\sqrt{2}\pi}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có:

Từ đây ta suy ra.

Ta có: chiều cao $h=R$

Diện tích thiết diện qua trục $S = h.2R = 16 \Leftrightarrow h.R = 8$

$\Leftrightarrow R^2 = 8 \Leftrightarrow R = 2\sqrt{2}$ và $h = 2\sqrt{2}$

Thể tích khối trụ: $V = \pi.R^2.h = \pi.\left(2\sqrt{2}\right)^2.2\sqrt{2} = 16\sqrt{2}\pi$

Câu 16. Biết $\int (x-1).e^{2x}dx = a(x+b).e^{2x} + C$, với a,b là các số hữu tỉ. Giá trị của $a-b$ bằng.

A. $\frac{5}{2}$. **B.** 4. **C.** -1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Đặt $\begin{cases} u = x-1 \\ dv = e^{2x}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{cases}$

$$I = \int (x-1).e^{2x}dx = \frac{1}{2}(x-1).e^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}dx = \frac{1}{2}(x-1).e^{2x} - \frac{1}{4}.e^{2x} + C = \frac{1}{2}e^{2x}\left(x - \frac{3}{2}\right) + C$$

Vậy $a = \frac{1}{2}; b = -\frac{3}{2}$

Câu 17. Biết phương trình $\log_9^2 x + \log_3 \frac{x}{27} = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 với $x_1 < x_2$. Hiệu $x_2 - x_1$ bằng

A. $\frac{80}{3}$. **B.** $\frac{80}{27}$. **C.** $\frac{6560}{27}$. **D.** $\frac{6560}{729}$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện $x > 0$.

$$\log_9^2 x + \log_3 \frac{x}{27} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\log_3 x\right)^2 + \log_3 x - \log_3 27 = 0.$$

$$\Leftrightarrow (\log_3 x)^2 + 4\log_3 x - 12 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_3 x = -6 \\ \log_3 x = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3^{-6} = \frac{1}{729} \\ x = 3^2 = 9 \end{array}\right. \Rightarrow x_1 = \frac{1}{729}, x_2 = 9.$$

Do đó $x_2 - x_1 = 9 - \frac{1}{729} = \frac{6560}{729}$.

Câu 18. Biết rằng tập nghiệm của bất phương trình $4^x - 8.6^x + 12.9^x < 0$ là khoảng $(a;b)$. Giá trị của $b-a$ bằng

A. $-\log_{\frac{2}{3}} 4$. **B.** $\log_{\frac{2}{3}} 4$. **C.** $-\log_{\frac{2}{3}} 3$. **D.** $\log_{\frac{2}{3}} 3$.

Lời giải

Chọn C

Vì $9^x > 0$ nên $4^x - 8.6^x + 12.9^x < 0 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} - 8.\left(\frac{2}{3}\right)^x + 12 < 0$

$\Leftrightarrow 2 < \left(\frac{2}{3}\right)^x < 6 \Leftrightarrow \log_{\frac{2}{3}} 6 < x < \log_{\frac{2}{3}} 2$

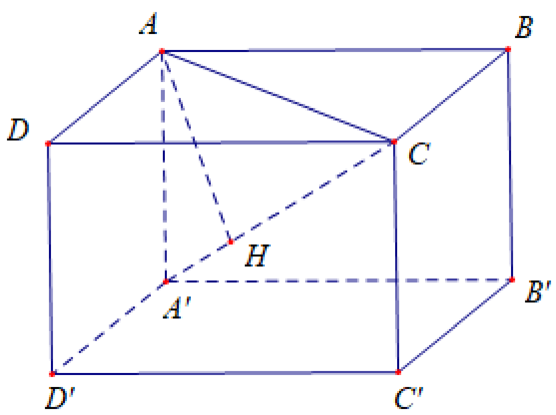
Suy ra $a = \log_{\frac{2}{3}} 6, b = \log_{\frac{2}{3}} 2 \Rightarrow b - a = \log_{\frac{2}{3}} 2 - \log_{\frac{2}{3}} 6 = \log_{\frac{2}{3}} \frac{1}{3} = -\log_{\frac{2}{3}} 3$.

Câu 19. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Thể tích khối cầu có tâm A và tiếp xúc với đường thẳng $A'C$ bằng

A. $\frac{\sqrt{2}\pi a^3}{3}$. **B.** $\frac{8\sqrt{6}\pi a^3}{27}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}\pi a^3}{2}$. **D.** $\sqrt{6}\pi a^3$.

Lời giải

Chọn B



Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên đường thẳng $A'C$.

Ta có $ABCD$ là hình vuông cạnh a nên $AC = a\sqrt{2}$

Vì $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương nên $AA' \perp (ABCD) \Rightarrow AA' \perp A'C$ $\Rightarrow$ tam giác ACA' vuông tại A.

Do đó ta có $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AA'^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{3}{2a^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Vì khối cầu tâm A và tiếp xúc với đường thẳng $A'C$ nên có bán kính $R = AH = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Vậy thể tích khối cầu là $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{8\sqrt{6}\pi a^3}{27}$.

Câu 20. Biết $\int_3^4 |x - \pi| dx = a\pi^2 + b\pi + c$ với a, b, c là các số hữu tỉ. Giá trị của $a + b + c$ bằng

A. $\frac{41}{2}$. **B.** $\frac{25}{2}$. **C.** $\frac{13}{2}$. **D.** $\frac{5}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\int\limits_3^4 |x-\pi| \text{d}x = \int\limits_3^\pi |x-\pi| \text{d}x + \int\limits_\pi^4 |x-\pi| \text{d}x = \int\limits_3^\pi (\pi - x) \text{d}x + \int\limits_\pi^4 (x-\pi) \text{d}x$

$= \left(\pi x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_3^\pi + \left(\frac{x^2}{2} - \pi x\right)\Big|_\pi^4 = \pi^2 - 7\pi + \frac{25}{2}$.

Từ đó suy ra $\begin{cases} a = 1 \\ b = -7 \Rightarrow a+b+c = \frac{13}{2} \\ c = \frac{25}{2} \end{cases}$.

Câu 21. Biết nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình $2\left(1-\sqrt{3}.\cos x\right)\sin x = \cos 2x$ là $x_0 = \frac{a\pi}{b}$, với a,b là các số nguyên dương và $a < 10$. Giá trị của a+b bằng

A. 23 **B.** 7 **C.** 11 **D.** 17

Lời giải

Chọn A

Ta có:

$2\left(1-\sqrt{3}.\cos x\right)\sin x = \cos 2x \Leftrightarrow 2\sin x = \sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x$

$\Leftrightarrow \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}\cos 2x \Leftrightarrow \sin x = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = -\frac{\pi}{6} - k2\pi & (1) \\ x = \frac{5\pi}{18} + \frac{l2\pi}{3} & (2) \end{array}\right., k, l \in \mathbb{Z}$

Nếu x_0 có dạng (1) thì: $x_0 = -\frac{\pi}{6} - k2\pi = \pi\left(-\frac{1}{6} - 2k\right) > 0 \Rightarrow k < -\frac{1}{12}\ (k \in \mathbb{Z})$

Vì a<10 nên suy ra $-1-12k < 10 \Leftrightarrow k > \frac{-11}{12}\ (k \in \mathbb{Z})$.

Vậy $-\frac{11}{12} < k < -\frac{1}{12}\ (k \in \mathbb{Z})$ nên không có giá trị k thỏa mãn.

Nếu x_0 có dạng (2) thì nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình ứng với k=0.Hay $x_0 = \frac{5\pi}{18}$

Từ đây ta suy ra a=5;b=18. Vậy a+b=23.

Câu 22. Tiếp tuyến đi qua điểm $A(-1;0)$ của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$ (C) có phương trình là

A. $y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$. **B.** $y = x + 1$. **C.** $y = 3x + 3$. **D.** $y = -x - 1$.

Lời giải

Chọn A

Đường thẳng đi qua $A(-1;0)$ với hệ số góc k có phương trình $y=k(x+1)=kx+k$ tiếp xúc với (C) $\Leftrightarrow kx+k=\dfrac{2x-1}{x+1}\Leftrightarrow (kx+k)(x+1)=2x-1$ có nghiệm kép $x\neq -1$.

$\Leftrightarrow kx^2+2x(k-1)+k+1=0$ có nghiệm kép $x\neq -1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k\neq 0 \\ \Delta' =(k-1)^2-k(k+1)=1-3k=0 \\ k+2(-1)(k-1)+k+1\neq 0 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} k\neq 0 \\ k=\dfrac{1}{3} \end{cases}\Leftrightarrow k=\dfrac{1}{3}$$

Vậy tiếp tuyến đó là $y=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{1}{3}$.

Câu 23. Cho phương trình $9^x+2(m+1).3^x+m+7=0$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có 2 nghiệm thực phân biệt?

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn A

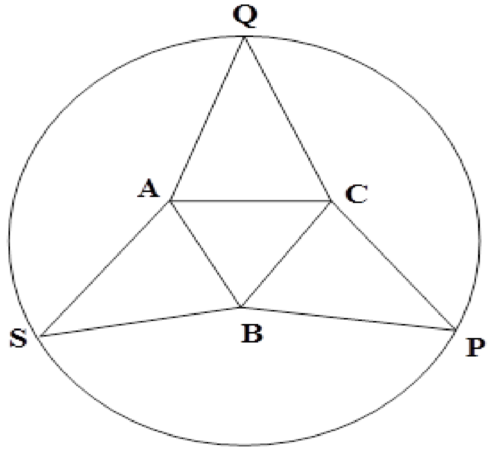
Đặt $t=3^x\ (t>0)$ ta được phương trình $t^2+2(m+1)t+m+7=0\ (1)$

Theo yêu cầu đề bài suy ra phương trình (1) phải có 2 nghiệm phân biệt cùng dương

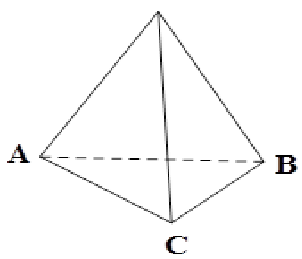
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' >0 \\ S>0 \\ P>0 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} m^2+m-6>0 \\ -2(m+1)>0 \\ m+7>0 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} m\in(-\infty;-3)\cup(2;+\infty) \\ m<-1 \\ m>-7 \end{cases}\Leftrightarrow -7<m<-3$$

Suy ra có 3 giá trị nguyên của tham số m là $-6;-5;-4$.

Câu 24. Cắt tấm bìa hình tròn có bán kính bằng 1 (độ dày không đáng kể) theo đường gấp khúc $SAQCPBS$ như hình 1, sau đó gấp phần đa giác còn lại theo các đoạn AB, BC, CA sao cho các điểm S,P,Q trùng nhau để được hình chóp đều có đáy là tam giác ABC như hình 2.



Hình 1



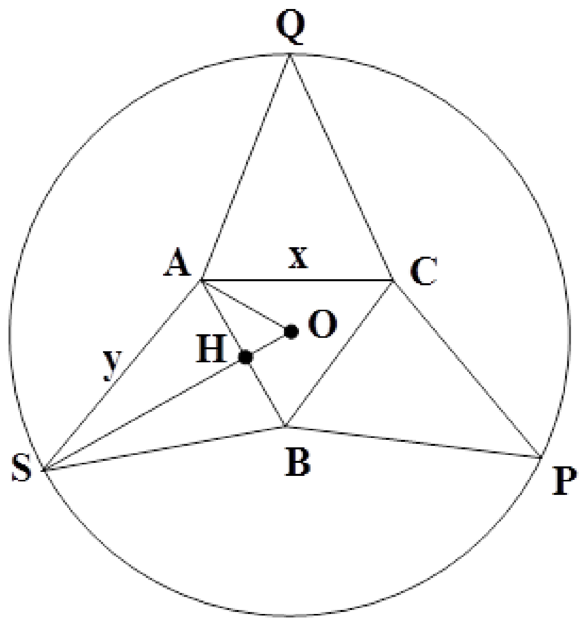
Hình 2

Giá trị lớn nhất của thể tích khối chóp SABC bằng

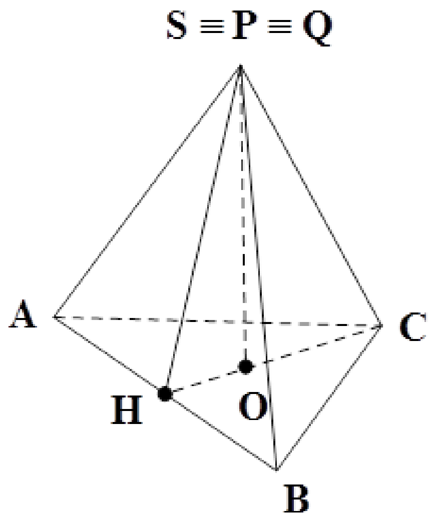
A. $\frac{1}{9}$. **B.** $\frac{4\sqrt{15}}{125}$. **C.** $\frac{\sqrt{15}}{125}$. **D.** $\frac{4}{9}$

Lời giải

Chọn B



Hình 1



Hình 2

Đặt $AB = x; SA = y\left(x>0; y>0\right)$

Ta có tâm O của hình tròn cũng là tâm của tam giác đều ABC và $SO \perp AB$.

Khi đó: $SH = \sqrt{y^2 - \frac{x^2}{4}}; OH = \sqrt{\left(\frac{2}{3}x\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \frac{x^2}{4}} = \sqrt{\frac{x^2}{12}} = \frac{x}{2\sqrt{3}}$

Mà $SO = 1 \Leftrightarrow SH + OH = 1 \Leftrightarrow \sqrt{y^2 - \frac{x^2}{4}} + \frac{x}{2\sqrt{3}} = 1 \Leftrightarrow y^2 - \frac{x^2}{4} = 1 + \frac{x^2}{12} - \frac{x}{\sqrt{3}}$

$\Leftrightarrow y^2 = \frac{x^2}{3} - \frac{x}{\sqrt{3}} + 1$

Mặt khác, ta có thể tích khối chóp đều $SABC$ là $V = \frac{\sqrt{3}}{12}x^2\sqrt{y^2 - \frac{x^2}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{12}x^2\sqrt{1 - \frac{x}{\sqrt{3}}}$

Xét hàm số $y = x^2\sqrt{1 - \frac{x}{\sqrt{3}}}$ ĐK: $0 < x < \sqrt{3}$. Có $y' = \frac{4\sqrt{3}x - 5x^2}{2\sqrt{\sqrt{3} - x}}$

BBT:

x	0		$\frac{4\sqrt{3}}{5}$		$\sqrt{3}$
y'		$+$	0	$-$	
y		$\nearrow$	$\frac{48\sqrt{5}}{125}$	$\searrow$	

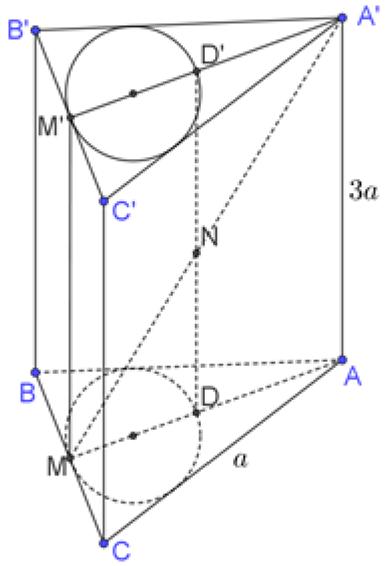
Vậy giá trị lớn nhất của thể tích bằng $\frac{\sqrt{3}}{12}.\frac{48\sqrt{5}}{125}=\frac{4\sqrt{15}}{125}$

Câu 25. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng $3a$. Một hình trụ T có hai đáy nội tiếp tam giác $ABC, A'B'C'$. Gọi M là trung điểm cạnh BC. Đường thẳng $A'M$ cắt mặt xung quanh của hình trụ T tại N (N khác M). Tính độ dài đoạn thẳng MN.

A. $MN=\frac{a\sqrt{15}}{3}$. **B.** $MN=\frac{a\sqrt{15}}{6}$. **C.** $MN=\frac{a\sqrt{39}}{3}$. **D.** $MN=\frac{a\sqrt{39}}{6}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có $MD=\frac{2}{3}MA\Rightarrow MN=\frac{2}{3}MA'=\frac{2}{3}\sqrt{MA^2+AA'^2}=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{3a^2}{4}+9a^2}=\frac{a\sqrt{39}}{3}$.

Câu 26. Gọi C_m là đồ thị của hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-\left(\frac{2m+1}{2}\right)x^2+\ m^2+m\ x$ với m là tham số. Có bao nhiêu điểm M sao cho tồn tại hai giá trị khác nhau m_1, m_2 mà M là điểm cực đại của đồ thị C_{m_1} và là điểm cực tiểu của đồ thị C_{m_2} ?

A. 2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y' = x^2 - (2m+1)x + m^2 + m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = m+1 \\ x = m \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = \dfrac{(2m-1)(m+1)^2}{6} \\ y = \dfrac{1}{3}m^3 + \dfrac{1}{2}m^2 \end{array}\right.$.

Giả sử $M = (x_0; y_0)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán, ta có hệ $\begin{cases} x_0 = m_1 = m_2 + 1 \\ y_0 = \dfrac{1}{3}m_1^3 + \dfrac{1}{2}m_1^2 = \dfrac{(2m_2-1)(m_2+1)^2}{6} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{1}{3}(m_2+1)^3 + \dfrac{1}{2}(m_2+1)^2 = \dfrac{(2m_2-1)(m_2+1)^2}{6}$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} (m_2+1)^2 = 0 \\ \dfrac{1}{3}(m_2+1) + \dfrac{1}{2} = \dfrac{2m_2-1}{6} \end{array}\right. \Leftrightarrow m_2 = -1 \Rightarrow m_1 = 0 \Rightarrow M = (0;0)$.

Như vậy, có duy nhất điểm $M = (0;0)$ là điểm cực đại của đồ thị với $m = 0$ và là điểm cực tiểu của đồ thị với $m = -1$.

Câu 27. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \dfrac{\sqrt{\ln x}}{x}$, trục hoành và đường thẳng $x = 2$. Biết thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình (H) xung quanh trục hoành bằng $(a + b\ln)\pi$ với a, b là các số hữu tỉ. Tính $a + 3b$.

A. $a + 3b = 2$. **B.** $a + 3b = -\dfrac{1}{2}$. **C.** $a + 3b = -1$. **D.** $a + 3b = \dfrac{5}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình $\dfrac{\sqrt{\ln x}}{x} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \ln x \ge 0 \\ \ln x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \ge 1 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$.

Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình (H) xung quanh trục hoành là

$$V = \pi\int_1^2 \left(\frac{\sqrt{\ln x}}{x}\right)^2 .\mathrm{d}x = \pi\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2}.\mathrm{d}x = \pi\int_1^2 \ln x.\mathrm{d}\left(\frac{-1}{x}\right) = \pi\left(-\frac{1}{x}\ln x\Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{-1}{x}.\mathrm{d}(\ln x)\right)$$

$$= \pi\left(-\frac{1}{2}\ln 2 + \int_1^2 \frac{1}{x}.\frac{1}{x}\mathrm{d}x\right) = \pi\left(-\frac{1}{2}\ln 2 + \int_1^2 \frac{1}{x^2}.\mathrm{d}x\right) = \pi\left(-\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{x}\Big|_1^2\right)$$

$$= \pi\left(-\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2} + 1\right) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2\right)\pi.$$

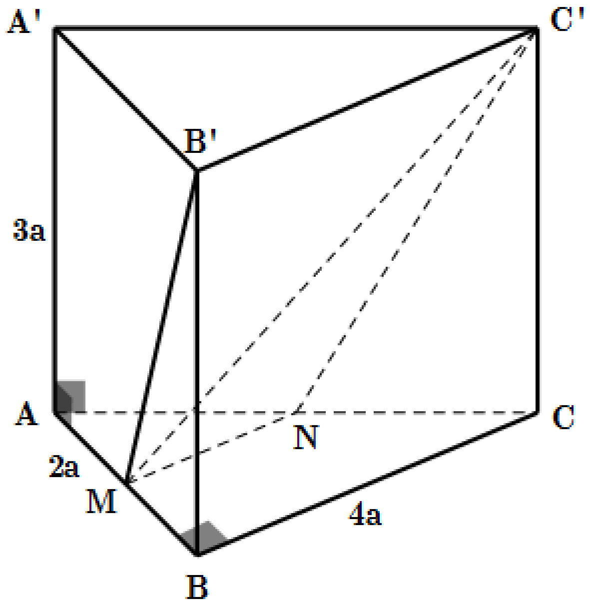
Vậy $a = \dfrac{1}{2}; b = -\dfrac{1}{2}$. Suy ra $a + 3b = -1$.

Câu 28. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = 2a$, $BC = 4a$, $AA' = 3a$. Gọi M là trung điểm của cạnh AB. Diện tích thiết diện của lăng trụ $ABC.A'B'C'$ khi cắt bởi mặt phẳng $(MB'C')$ bằng

A. $2\sqrt{10}a^2$. **B.** $3\sqrt{10}a^2$. **C.** $4\sqrt{10}a^2$. **D.** $6\sqrt{10}a^2$.

Lời giải

Chọn B



Ta có $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đứng nên $BC // B'C'$ mà $M \in (MB'C') \cap (ABC)$ $\Rightarrow (MB'C') \cap (ABC) = MN // BC$ nên N là trung điểm của AC.

Do đó $(MB'C') \cap (ABC) = MN$; $(MB'C') \cap (ACC'A') = NC'$;

$(MB'C') \cap (A'B'C') = B'C'$; $(MB'C') \cap (ABB'A') = B'M$

Suy ra thiết diện của lăng trụ $ABC.A'B'C'$ khi cắt bởi mặt phẳng $(MB'C')$ là hình thang $B'C'NM$.

Tam giác ABC vuông tại B nên $BC \perp AB$ và $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đứng nên $AA' \perp BC$ suy ra $BC \perp (AA'B'B)$ mà $MN // BC \Rightarrow MN \perp (AA'B'B) \Rightarrow MN \perp B'M$.

Suy ra $S_{B'C'NM} = \dfrac{MN + B'C'}{2}.B'M$.

Mặt khác ta có $B'C' = BC = 4a; MN = \dfrac{BC}{2} = 2a$; $MB' = \sqrt{BB'^2 + BM^2} = \sqrt{(3a)^2 + a^2} = a\sqrt{10}$.

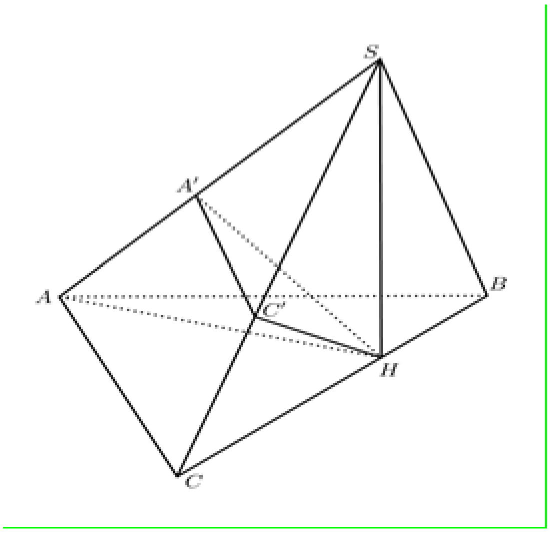
Vậy $S_{B'C'NM} = \dfrac{MN + B'C'}{2}.B'M = \dfrac{2a + 4a}{2}.a\sqrt{10} = 3\sqrt{10}a^2$.

Câu 29. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân với $AB = AC = a$ và $BAC = 120^0$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh S lên mặt phẳng (ABC) là điểm H thuộc cạnh BC với $HC = 2HB$. Góc giữa SB và mặt phẳng (ABC) bằng 60^0. Mặt phẳng đi qua H và vuông góc với SA cắt các cạnh SA, SC lần lượt tại A', C'. Tính thể tích V của khối chóp $B.ACC'A'$

A. $V = \dfrac{7\sqrt{3}a^3}{192}$. **B.** $V = \dfrac{3\sqrt{3}a^3}{64}$. **C.** $V = \dfrac{3\sqrt{3}a^3}{100}$. **D.** $V = \dfrac{5\sqrt{3}a^3}{108}$.

Lời giải

Chọn A



Do $SH \perp (ABC)$ nên góc giữa SB và mặt phẳng (ABC) bằng $SBH = 60^0$

Ta có $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos 120^2 = 3a^2 \Rightarrow BC = a\sqrt{3}$

khi đó $HB = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}, HC = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Trong ta giác vuông SHB ta có $SH = HB.\tan 60^0 = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}.\sqrt{3} = a$

Trong ta giác vuông SHC ta có $SC = \sqrt{SH^2 + BC^2} = \sqrt{a^2 + \left(\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{21}}{2}$

Trong tam giác AHC ta có $AH^2 = AC^2 + HC^2 - 2AC.HC.\cos 30^0 = \dfrac{a^2}{3} \Rightarrow AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

Trong ta giác vuông SHA ta có $SA = \sqrt{AH^2 + SH^2} = \sqrt{a^2 + \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$

Khi đó $SA^2 + AC^2 = SC^2$ khi đó tam giác SAC vuông tại A hay $SA \perp AC$

Do $SA \perp (HA'C') \Rightarrow SA \perp A'C'$. Vậy $A'C'$ song song với AC, suy ra $\dfrac{SA'}{SA} = \dfrac{SC'}{SC}$

Khi đó $\Delta SA'H$ đồng dạng với $\Delta SHA \Rightarrow \dfrac{SA'}{SH} = \dfrac{SH}{SA} \Rightarrow \dfrac{SA'}{SA} = \dfrac{SH^2}{SA^2}$.

Ta có $V_{B.ACC'A'} = V_{S.ABC} - V_{S.A'C'B}$. Mà $\dfrac{V_{S.A'C'B}}{V_{S.ACB}} = \dfrac{SA'}{SA}.\dfrac{SC'}{SC} = \left(\dfrac{SH}{SA}\right)^4 = \dfrac{9}{16}$.

Khi đó $V_{B.ACC'A'} = V_{S.ABC} - \dfrac{9}{16}V_{S.ABC} = \dfrac{7}{16}.\dfrac{1}{6}SH.AB.AC.\sin 120^0 = \dfrac{7\sqrt{3}a^3}{192}$.

Câu 30. Cho phương trình $\log_{\sqrt{2}+1}\left[x^2 - (2m-3)x + m^2 - m - 6\right] + \log_{\sqrt{2}-1} x = 0$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có đúng một nghiệm?

A. 7. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\log_{\sqrt{2}+1}\left[x^2-(2m-3)x+m^2-m-6\right]+\log_{\sqrt{2}-1}x=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x^2-(2m-3)x+m^2-m-6=x \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x^2-2(m-1)x+m^2-m-6=0\ (1) \end{cases}$

Bài toán trở thành: Có bao nhiêu giá trị m nguyên để phương trình (1) có đúng một nghiệm dương

TH1: Phương trình (1) có một nghiệm kép dương

Ta có $\Delta'=(m-1)^2-(m^2-m-6)=7-m=0 \Leftrightarrow m=7$. Nghệm kép: $x=6$

TH1: Phương trình (1) có hai nghiệm trái dấu hay $m^2-m-6<0 \Leftrightarrow -2<m<3$. Vì m nguyên nên $m\in\{-1;0;1;2\}$

TH3:: Phương trình (1) có một nghiệm bằng 0 và một nghiệm dương

Vì $x=0$ là nghiệm của (1) nên $m^2-m-6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=3 \\ m=-2 \end{array}\right.$

* Với $m=3$ phương trình (1) trở thành $x^2-4x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=4 \end{array}\right.$. Vậy $m=3$ (t/m)

* Với $m=-2$ phương trình (1) trở thành $x^2+6x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-6 \end{array}\right.$. Vậy $m=-2$ (Loại)

Vậy có 6 giá trị m nguyên.

Câu 31. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt cầu (S_1), (S_2) có điểm chung $A(1;2;-1)$, cùng tiếp xúc với mặt phẳng (Oxy) và đều có tâm thuộc đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+1}{2}$. Khoảng cách giữa hai tâm của hai mặt cầu (S_1), (S_2) bằng

A. $\sqrt{6}$. **B.** $\sqrt{46}$. **C.** 4. **D.** $2\sqrt{6}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi I là điểm thuộc đường d thẳng thỏa mãn $AI=d\left(I,(Oxy)\right)$.

Phương trình tham số $d:\begin{cases} x=1-t \\ y=1+t \\ z=-1+2t \end{cases}$.

Tọa độ điểm $I(1-t;1+t;-1+2t)\in d$.

Khi đó $AI=d\left(I,(Oxy)\right) \Leftrightarrow \sqrt{(-t)^2+(t-1)^2+(2t)^2}=|-1+2t|$.

$\Leftrightarrow 6t^2-2t+1=4t^2-4t+1 \Leftrightarrow 2t^2+2t=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \Rightarrow I(1;1;-1) \\ t=-1 \Rightarrow I(2;0;-3) \end{array}\right.$.

Do đó tọa độ tâm hai mặt cầu (S_1), (S_2) là $I_1(1;1;-1)$, $I_2(2;0;-3)$ hoặc ngược lại.

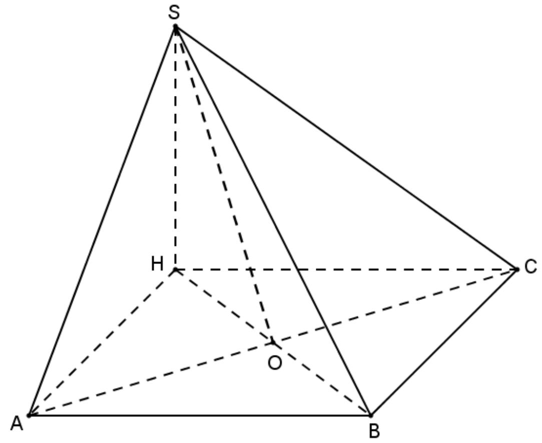
Vậy Khoảng cách giữa hai tâm của hai mặt cầu (S_1), (S_2) là $\sqrt{1^2+1^2+(-2)^2}=\sqrt{6}$.

Câu 32. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $AC=a$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh S lên mặt phẳng (ABC) là điểm H đối xứng với B qua AC. Góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (ABC) bằng $45°$. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ bằng

A. $2\pi a^2$. **B.** $V=\dfrac{2\pi a^2}{3}$. **C.** $5\pi a^2$. **D.** $\dfrac{5\pi a^2}{4}$.

Lời giải

Chọn D



Do điểm H đối xứng với B qua AC nên tứ giác $ABCH$ là hình vuông.

Gọi O là giao điểm của AC và HB.

Ta có $HO\perp AC$ và $SH\perp AC$ nên $AC\perp(SHO)\Rightarrow SO\perp AC$. Do đó góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (ABC) bằng $SOH=45°$.

Trong tam giác SHO có $SH=HO.\tan SOH=\dfrac{1}{2}AC.\tan SOH=\dfrac{1}{2}a.\tan 45°=\dfrac{a}{2}$.

Ta có: $SH\perp\ ABCH$ nên $SH\perp BC$ mà $HC\perp BC$ nên $BC\perp(SHC)\Rightarrow BC\perp SC$.

Tương tự ta cũng chứng minh được $AB\perp SA$.

Do đó $SHB=SAB=SCB=90^\circ$.

Suy ra các điểm S,A,B,C,H cùng thuộc mặt cầu đường kính SB.

Do đó bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCH$ là

$$R=\frac{1}{2}SB=\frac{1}{2}\sqrt{SH^2+HB^2}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2}{4}+a^2}=\frac{a\sqrt{5}}{4}.$$

Vậy diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ bằng $S=4\pi R^2=4\pi.\dfrac{5a^2}{16}=\dfrac{5\pi a^2}{4}$.

Câu 33. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục, nhận giá trị dương trên đoạn $[1;4]$, $f(1)=1$, $f(4)=8$ và $2x.f(x).f'(x)=x^3+2\left[f(x)\right]^2,\forall x\in[1;4]$. Tích phân $\displaystyle\int_1^4\frac{x}{f(x)}dx$ bằng

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $2x.f(x).f'(x)-2f(x)^2=x^3 \Leftrightarrow 2x^2.f(x).f'(x)-2xf(x)^2=x^4$

$\Leftrightarrow \frac{2x^2.f(x).f'(x)-2xf(x)^2}{x^4}=1 \Leftrightarrow \left(\frac{f^2(x)}{x^2}\right)'=1$

Tích phân hai vế ta được $\int\left(\frac{f^2(x)}{x^2}\right)'=\int 1 \Leftrightarrow \frac{f^2(x)}{x^2}=x+C \Leftrightarrow f(x)=x\sqrt{x+C}$.

Thay $x=4 \Leftrightarrow C=0$. Vậy $f(x)=x\sqrt{x} \Rightarrow \int_1^4 \frac{x}{x\sqrt{x}}=2\sqrt{x}\Big|_1^4=2$

Câu 34. Đồ thị (C) của hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+3a$ và đồ thị (C') của hàm số $y=3ax^2+2bx+c$ $(a,b,c\in\mathbb{R},a>0)$ có đúng hai điểm chung khác nhau A,B và điểm A có hoành độ bằng 1. Các tiếp tuyến của (C) và (C') tại điểm A trùng nhau; diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và (C') bằng 1. Giá trị của $a+b+c$ bằng

A. 12. **B.** 17. **C.** 60. **D.** 45.

Lời giải

Chọn C

Gọi $f(x)=ax^3+bx^2+cx+3a; g(x)=3ax^2+2bx+c$

Ta có: $f(x)=g(x)$ có 1 nghiệm bằng 1 và $f'(x)=g'(x)$ có nghiệm bằng 1

Do đó: $\begin{cases} c=3a \\ b=a \end{cases} \Rightarrow$ Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và (C') là

$a\int_0^1 x(x-1)^2\,dx=1 \Rightarrow a=12 \Rightarrow a+b+c=60.$

Câu 35. Chọn ngẫu nhiên đồng thời sáu số tự nhiên khác nhau thuộc đoạn [1;25]. Gọi A là biến cố "Chọn được sáu số tự nhiên sao cho tổng bình phương của sáu số đó chia hết cho 3". Xác suất của biến cố A bằng

A. $\frac{633}{6325}$. **B.** $\frac{453}{6325}$. **C.** $\frac{211}{6325}$. **D.** $\frac{1803}{6325}$.

Lời giải

Chọn D

Nhận xét: Số chính phương chia 3 luôn dư 0 hoặc dư 1.

Thật vậy:

Xét số chính phương $n^2 (n\in N)$, ta có 3 trường hợp:

Trường hợp 1: n = 3k (k ∈ N):

Khi đó: $n^2 = 9k^2 \vdots 3$

Trường hợp 2: n = 3k + 1 (k ∈ N):

Khi đó: $n^2 = (3k+1)^2 = 9k^2 + 6k + 1$ chia 3 dư 1.

Trường hợp 3: n = 3k + 2 (k ∈ N)

Khi đó: $n^2 = (3k+2)^2 = 9k^2 + 12k + 4 = (9k^2 + 12k + 3) + 1$ chia 3 dư 1.

Vậy, số chính phương chia 3 luôn dư 0 hoặc 1.

Chia 25 số tự nhiên trong đoạn [1;25] thành 2 nhóm

Nhóm 1: Gồm các số tự nhiên chia hết cho 3. Có 8 số tự nhiên thuộc nhóm 1.

Nhóm 2: Gồm các số tự nhiên không chia hết cho 3. Có 17 số tự nhiên thuộc nhóm 2.

Để chọn được sáu số tự nhiên sao cho tổng bình phương của sáu số đó chia hết cho 3 thì chỉ có thể thực hiện 1 trong 3 cách chọn:

Cách 1: Cả 6 số tự nhiên được chọn đều nằm trong nhóm 1

Cách 2: Cả 6 số tự nhiên được chọn đều nằm trong nhóm 2

Cách 3: Chọn 3 số tự nhiên trong nhóm 1 và 3 số tự nhiên trong nhóm 2.

Số phần tử không gian mẫu: $n(\Omega) = C_{25}^6 = 177100$

Xác suất của biến cố A:

$$P_A = \frac{C_8^6 + C_{17}^6 + C_8^3.C_{17}^3}{177100} = \frac{1803}{6325}$$

Câu 36. Cho bất phương trình $x^2 - (m+2019)x + 2020m + (x-m+1)\log_{2019} x < 2020$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để tập nghiệm của bất phương trình đã cho chứa trong khoảng (1000;2020) ?

A. 1018. **B.** 1019. **C.** 1020. **D.** 1021.

Lời giải

Chọn D

Theo bài ra:

$$x^2 - (m+2019)x + 2020m + (x-m+1)\log_{2019} x < 2020$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 2019x - mx + 2020m + x.\log_{2019} x - m.\log_{2019} x + \log_{2019} x < 2020$$
$$\Leftrightarrow m(-x + 2020 - \log_{2019} x) < 2020 - x^2 + 2019x - x.\log_{2019} x - \log_{2019} x$$
$$\Leftrightarrow m(-x + 2020 - \log_{2019} x) < (-x + 2020 - \log_{2019} x) + x(2020 - x - \log_{2019} x)$$
$$\Leftrightarrow m(-x + 2020 - \log_{2019} x) < (-x + 2020 - \log_{2019} x)(1+x)$$

Trường hợp 1: $-x + 2020 - \log_{2019x} = 0$

Xét hàm số $f(x) = -x + 2020 - \log_{2019} x$:

$$f'(x) = -1 - \frac{1}{x.\ln 2019} < 0 \forall x \in (1000;2020)$$

Do đó, f’(x) là hàm nghịch biến trên (1000;2020).

Mà f(2019) = 0 nên phương trình f(x) = 0 nhận nghiệm duy nhất x = 2019.

Khi đó, bất phương trình trở thành:

0.m < 0.(1 – 2019) (Vô lý)

Như vậy, x = 2019 không là nghiệm của bất phương trình đã cho.

Trường hợp 2: $-x+2020-\log_{2019}x>0$

Vì hàm f(x) nghịch biến nên x < 2019.

Khi đó $m<1+x \Leftrightarrow x>m-1$

Mà tập nghiệm của bất phương trình chứa trong khoảng (1000;2019) nên $1000\le m-1<2019 \Leftrightarrow 1001\le m<2020$

Trường hợp 2 có 1019 giá trị nguyên của m thỏa mãn bài toán.

Trường hợp 3: $-x+2020-\log_{2019}x<0$

Vì hàm f(x) nghịch biến nên x > 2019.

Khi đó $m>1+x \Leftrightarrow x<m-1$

Mà bất phương trình của tập nghiệm đã cho chứa trong khoảng (2019;2020) nên $2019<m-1\le 2020$

$\Leftrightarrow 2020<m\le 2021$

Trường hợp 3 có 1 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn bài toán.

Trường hợp 4: m = 2020

Bất phương trình trở thành: $2020(-x+2020-\log_{2019}x)<\left(x+1\right)(-x+2020-\log_{2019}x)$

*) Nếu $x>2019$ thì bất phương trình tương đương với $2020>x+1 \Leftrightarrow x<2019$

Tập nghiệm của bất phương trình: $S=\varnothing$

*) Nếu x < 2019, chứng minh tương tự, ta được tập nghiệm của phương trình $S=\varnothing$

Vì tập rỗng cũng nằm trong (1000;2020) nên m = 2020 cũng thỏa mãn bài toán.

Vậy có tất cả 1021 giá trị nguyên m sao cho tập nghiệm của bất phương trình chứa trong khoảng (1000;2020).

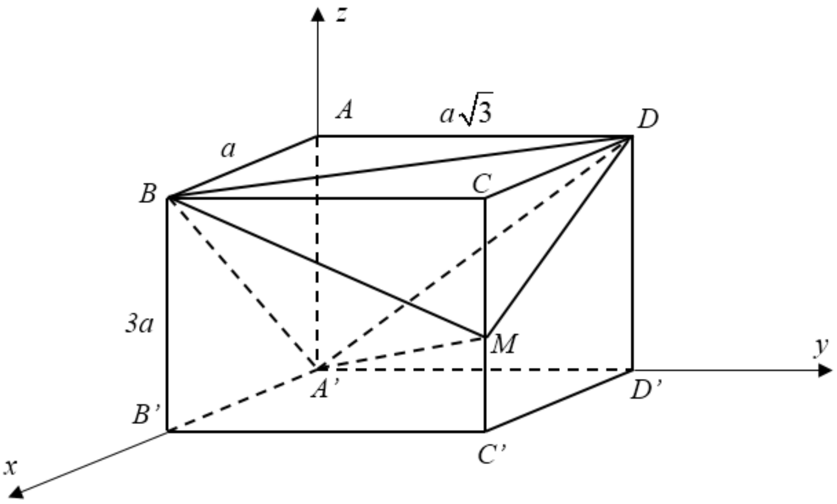
Câu 37. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB=a, AD=a\sqrt{3}, AA'=3a$. Gọi M là điểm thuộc cạnh CC' sao cho $mp(MBD)$ vuông góc với $mp(A'BD)$. Thể tích khối tứ diện $A'BDM$ bằng

A. $\dfrac{13\sqrt{3}a^3}{8}$. **B.** $\dfrac{10a^3}{9}$. **C.** $\dfrac{100a^3}{3}$. **D.** $\dfrac{13\sqrt{3}a^3}{24}$.

Lời giải

Chọn D

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ:



Ta có $A'(0;0;0)$, $B(a;0;3a)$, $D(0;a\sqrt{3};3a)$. Giả sử $M(a;a\sqrt{3};z_0)$, suy ra $\begin{cases}\overrightarrow{A'B}=(a;0;3a)\\ \overrightarrow{A'D}=(0;a\sqrt{3};3a)\end{cases} \Rightarrow \left[\overrightarrow{A'B},\overrightarrow{A'D}\right]=\left(-3a^2\sqrt{3};-3a^2;a^2\sqrt{3}\right)$. Chọn véctơ pháp tuyến của $mp(A'BD)$ là $\vec{n}=(-3;-\sqrt{3};1)$.

Lại có $\begin{cases}\overrightarrow{BM}=(0;a\sqrt{3};z_0-3a)\\ \overrightarrow{BD}=(-a;a\sqrt{3};0)\end{cases} \Rightarrow \left[\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BD}\right]=\left(-a\sqrt{3}(z_0-3a);-a(z_0-3a);a^2\sqrt{3}\right)$.

Chọn véctơ pháp tuyến của $mp(MBD)$ là $\vec{n}'=\left(-\sqrt{3}(z_0-3a);(3a-z_0);a\sqrt{3}\right)$.

Vì $(A'BD)\perp(MBD) \Rightarrow \vec{n}.\vec{n}'=0 \Leftrightarrow 3\sqrt{3}(z_0-3a)-\sqrt{3}(3a-z_0)+a\sqrt{3}=0$

$\Leftrightarrow 3\sqrt{3}z_0-9a\sqrt{3}-3a\sqrt{3}+\sqrt{3}z_0+a\sqrt{3}=0 \Leftrightarrow 4\sqrt{3}z_0=11a\sqrt{3} \Leftrightarrow z_0=\dfrac{11a}{4}$.

Vậy $M\left(a;a\sqrt{3};\dfrac{11a}{4}\right) \Rightarrow V_{A'BDM}=\dfrac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{A'B},\overrightarrow{A'D}\right].\overrightarrow{A'M}\right|$

$=\dfrac{1}{6}\left|-3a^3\sqrt{3}-3a^3\sqrt{3}+\dfrac{11a^3\sqrt{3}}{4}\right|=\dfrac{13a^3\sqrt{3}}{24}$

Câu 38. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên sau :

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$	↗	1	↘	-2	↗	$+\infty$

Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m để phương trình $\dfrac{1}{f(x)}+\dfrac{1}{f(x)-2}=m$ có đúng 3 nghiệm thực phân biệt. Hỏi tập S có bao nhiêu phần tử?

A. 3. **B.** Vô số. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình $\dfrac{1}{f(x)}+\dfrac{1}{f(x)-2}=m$ (1).

Điều kiện $\begin{cases} f(x)\neq 0 \\ f(x)\neq 2 \end{cases}$.

Ta có $f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=a<1 \\ x=b\in(1;2) \\ x=c>2 \end{array}\right.$; $f(x)=2 \Leftrightarrow x=d>c$

Đặt $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}+\dfrac{1}{f(x)-2}$ $\Rightarrow g'(x)=-f'(x)\left[\dfrac{1}{\left[f(x)\right]^2}+\dfrac{1}{\left[f(x)-2\right]^2}\right]$

$\Rightarrow g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		a		1		b		2		c		d		$+\infty$
$g'(x)$		-	||	-	0	+	||	+	0	-	||	-	||	-	
$g(x)$	0	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$ || $-\infty$	↗	$-\dfrac{3}{4}$	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	0

Phương trình (1) có đúng 3 nghiệm thực phân biệt khi và chỉ khi đường thẳng $y=m$ có 3 điểm chung phân biệt với đồ thị hàm số $y=g(x)$, khi và chỉ khi $m=-\dfrac{3}{4}$.

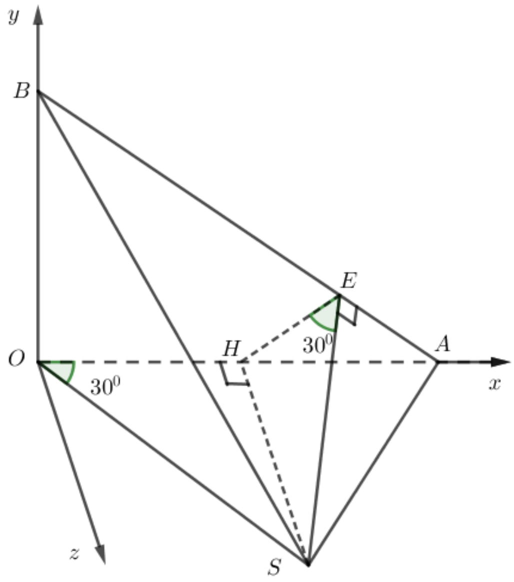
Vậy có một giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 39. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm A, B theo thứ tự thay đổi trên các tia Ox, Oy sao cho $OA.OB=9$. Điểm S thuộc mặt phẳng (Ozx) sao cho hai mặt phẳng (SAB) và (SOB) cùng tạo với mặt phẳng (Oxy) một góc 30^o. Gọi $(a;0;c)$ là tọa độ điểm S. Tính giá trị của biểu thức $P=a^4+c^4$ trong trường hợp thể tích khối chóp $S.OAB$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $P=\dfrac{10}{3}$. **B.** $P=\dfrac{40}{81}$. **C.** $P=\dfrac{40}{9}$. **D.** $P=\dfrac{45}{8}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có:

Hạ $SH \perp OA \Rightarrow ((SOB),(Oxy)) = SOH$

$HE \perp AB \Rightarrow ((SAB),(Oxy)) = SEH$

$\Rightarrow SOH = SEH = 30^o \Rightarrow HO = HE = SH\sqrt{3}$, suy ra BH là tia phân giác của góc OBA.

$V = \dfrac{1}{3}S_{OAB}.SH = \dfrac{3}{2}SH \Rightarrow V_{\max} \Leftrightarrow SH_{\max} \Leftrightarrow HO_{\max}$.

Đặt $OA = x,\ OB = y$, $x, y > 0 \Rightarrow x.y = 9$.

$\dfrac{OH}{HA} = \dfrac{OB}{BA} \Rightarrow OH = \dfrac{OA.OB}{OB + BA}$ (Do BH là tia phân giác của góc OBA).

$\Rightarrow OH = \dfrac{9}{y + \sqrt{x^2 + y^2}} = \dfrac{9}{y + \sqrt{\dfrac{81}{y^2} + y^2}}$ (Do $x.y = 9$).

Xét $A = y + \sqrt{\dfrac{81}{y^2} + y^2} \Rightarrow (A - y)^2 = \dfrac{81}{y^2} + y^2$

$\Rightarrow A^2 = 2Ay + \dfrac{81}{y^2} = Ay + Ay + \dfrac{81}{y^2} \ge 3\sqrt[3]{81A^2} \Leftrightarrow A^6 \ge 27.81.A^2 \Leftrightarrow A^4 \ge 3\sqrt[4]{27}$

$\Rightarrow OH \le \dfrac{9}{3\sqrt[4]{27}} = \dfrac{3}{\sqrt[4]{27}} = \sqrt[4]{3} \Rightarrow S\left(\sqrt[4]{3}; 0; \dfrac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{3}}\right) \Rightarrow a = \sqrt[4]{3};\ c = \dfrac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{3}}$.

Vậy $P = a^4 + c^4 = 3 + \dfrac{1}{3} = \dfrac{10}{3}$.

Câu 40. Cho ba số thực dương $x,\ y,\ z$ thỏa mãn $(x-z)^2+(2y-z)^2=3z^2+4$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{x^3(y-z)+4y^3(x-2z)-z^3xy}{xy}$ bằng

A. $\dfrac{112}{27}$. **B.** $\dfrac{110}{27}$. **C.** $\dfrac{128}{27}$. **D.** $\dfrac{55}{27}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $(x-z)^2+(2y-z)^2=3z^2+4 \Leftrightarrow x^2-2xz+z^2+4y^2-4yz+z^2=3z^2+4$

$\Leftrightarrow x^2+4y^2-2z(x+2y)=z^2+4 \Rightarrow x^2+4y^2=2z(x+2y)+z^2+4 \quad (1)$

Khi đó:

$$P=\frac{x^3(y-z)+4y^3(x-2z)-z^3xy}{xy}=\frac{x^3y-x^3z+4y^3x-8y^3z-z^3xy}{xy}=x^2+4y^2-\frac{z(x^3+8y^3)}{xy}-z^3$$

$$=2z(x+2y)+z^2+4-\frac{z(x+2y)(x^2+4y^2-2xy)}{xy}-z^3 \text{ (Do } (1)\text{).}$$

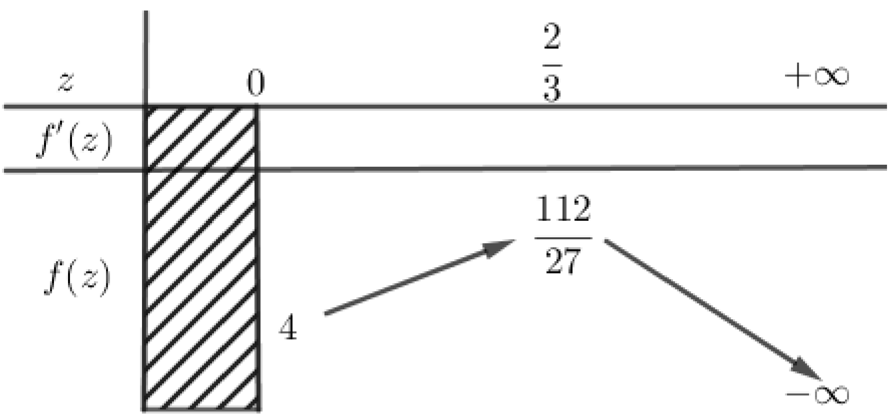
$$=2z(x+2y)\left[1-\frac{x^2+4y^2-2xy}{2xy}\right]+z^2-z^3+4$$

$$=2z(x+2y)\frac{4xy-x^2-4y^2}{xy}+z^2-z^3+4$$

$=-2z(x+2y)\dfrac{(x-2y)^2}{xy}+z^2-z^3+4\le -z^3+z^2+4$. Dấu bằng xảy ra khi $x=2y$.

Xét hàm $f(z)=-z^3+z^2+4$ với $z>0$. Ta có $f'(z)=-3z^2+2z=0 \Leftrightarrow z=\dfrac{2}{3}$ (do $z>0$).

Bảng biến thiên:



-------------- HẾT ---------------