

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH BÀ RỊA – VŨNG TÀU**

**ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 12
NĂM HỌC 2022 – 2023
MÔN TOÁN**

Thời gian làm bài: 180 phút (không kể thời gian giao đề)

Ngày thi: 13/12/2022

Câu 1: (1.5 điểm)

Giải phương trình $4\sin^2 \frac{x}{2} - \sqrt{3} \cos 2x = 1 + 2\cos^2 \left(x - \frac{3\pi}{4} \right)$.

Câu 2: (1.5 điểm)

Tìm số hạng không chứa x trong khai triển của $\left(\frac{1}{x^2} - 2\sqrt{x} \right)^n$ với $x > 0$ biết rằng n là số nguyên dương thỏa mãn $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 1024$.

Câu 3: (1.5 điểm)

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2y^2 - 3x + 6y + 1 = 2\sqrt{x-2y} - \sqrt{4x-5y-3} \\ (1-y)\sqrt{x-y} + x = 2 + (x-y-1)\sqrt{y} \end{cases}$$

Câu 4: (3.5 điểm)

Giải các phương trình sau:

- a) $2 \cdot 27^x - 9^{x^2+3x} = (\sqrt{3})^{2x^2+9x}$;
b) $x^3 - \sqrt[3]{x+2\ln x} - \frac{2}{3} \ln(x+2\ln x) = 0$.

Câu 5: (4.0 điểm)

- a) Cho hàm số $y = \frac{mx+4}{x+m}$ với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-2023; 2023)$ để hàm số đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.
b) Cho hàm số $y = x^3 - 2(m+1)x^2 + (3m+1)x + 2m - 2$ có đồ thị là (C_m) . Tìm tất cả các giá trị tham số m để (C_m) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt $A(2;0)$, B và C sao cho trong hai điểm B , C có một điểm nằm trong và một điểm nằm ngoài đường tròn $(C): x^2 + y^2 = 1$.

Câu 6: (1.5 điểm)

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B , biết AC vuông góc với mặt phẳng (SBD) và $AB = SD = a$, $AD = SB = 2a$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BD .

Câu 7: (2.0 điểm)

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B , tam giác SAC cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và BC . Biết $AB = a$ và MN tạo với mặt đáy một góc 60° . Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ theo a .

Câu 8: (1.5 điểm)

Cho hàm số $f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(\cot x) = \sin 2x + \cos 2x$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = f(x)f(1-x)$ trên đoạn $[-1; 1]$.

Câu 9: (1.5 điểm)

Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = 2\sqrt{3}$ và $AA' = 2$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh $A'B', A'C', BC$ và hai điểm F, E lần lượt là giao điểm của mặt phẳng (MNP) với AB', AC' . Tính thể tích của khối đa diện $MFENC'B'$.

Câu 10: (1.5 điểm)

Cho các số thực dương x, y thỏa mãn điều kiện $xy \leq y - 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu

thức
$$P = \frac{x+y}{\sqrt{x^2 - xy + 3y^2}} - \frac{x-2y}{6(x+y)}.$$

----- HẾT -----

HƯỚNG DẪN GIẢI**Câu 1:** (1.5 điểm)

Giải phương trình $4\sin^2 \frac{x}{2} - \sqrt{3} \cos 2x = 1 + 2\cos^2 \left(x - \frac{3\pi}{4}\right)$.

Lời giải

Ta có: $4\sin^2 \frac{x}{2} - \sqrt{3} \cos 2x = 1 + 2\cos^2 \left(x - \frac{3\pi}{4}\right)$

$$\Leftrightarrow 2(1 - \cos x) - \sqrt{3} \cos 2x = 2 + \cos \left(2x - \frac{3\pi}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x - \sqrt{3} \cos 2x = 2 \cos x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2x = \cos x \Leftrightarrow \sin \left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin \left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} - x + k2\pi \\ 2x - \frac{\pi}{3} = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - x\right) + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3} \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

Kết luận: Phương trình có họ nghiệm là $x = \frac{5\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3}; x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}$.

Câu 2: (1.5 điểm)

Tìm số hạng không chứa x trong khai triển của $\left(\frac{1}{x^2} - 2\sqrt{x}\right)^n$ với $x > 0$ biết rằng n là số nguyên dương thỏa mãn $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 1024$.

Lời giải

Ta có: $(1+1)^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n \Leftrightarrow 2^n = 1024 \Leftrightarrow n = 10$.

Với $n = 10$ ta có $\left(\frac{1}{x^2} - 2\sqrt{x}\right)^{10} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k x^{2(k-10)} (-2\sqrt{x})^k = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k (-2)^k x^{2(k-10) + \frac{k}{2}}$.

Số hạng không chứa x trong khai triển ứng với k thỏa mãn: $2(k-10) + \frac{k}{2} = 0 \Leftrightarrow k = 8$.

Vậy số hạng không chứa x trong khai triển ứng là: $C_{10}^8 (-2)^8 = 11520$.

Câu 3: (1.5 điểm)

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2y^2 - 3x + 6y + 1 = 2\sqrt{x-2y} - \sqrt{4x-5y-3} \\ (1-y)\sqrt{x-y} + x = 2 + (x-y-1)\sqrt{y} \end{cases}$$

Lời giải

Điều kiện của hệ phương trình
$$\begin{cases} x-2y \geq 0 \\ 4x-5y-3 \geq 0 \\ x-y \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}.$$

Xét phương trình $(1-y)\sqrt{x-y} + x = 2 + (x-y-1)\sqrt{y}$

Đặt $\begin{cases} a = \sqrt{x-y} \\ b = \sqrt{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = x-y \\ b^2 = y \end{cases}$. Điều kiện $a \geq 0, b \geq 0$.

Ta được phương trình $(1-b^2)a + a^2 + b^2 = 2 + (a^2-1)b \Leftrightarrow (1-b)(a-1)(a+b+2) = 0$

$$\Leftrightarrow (1-b)(a-1)(a+b+2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b=1 \\ a=1 \\ a+b+2=0 \end{cases}.$$

Do $a \geq 0, b \geq 0$ nên $a+b+2=0$ vô nghiệm.

+ Với $b=1$ ta được $y=1$ thay vào phương trình $-3x+9=0 \Leftrightarrow x=3$.

+ Với $a=1$ ta được $x-y=1 \Rightarrow x=1+y$ thay vào phương trình

$2y^2 - 3x + 6y + 1 = 2\sqrt{x-2y} - \sqrt{4x-5y-3}$ ta được phương trình

$2y^2 - 3(y+1) + 6y + 1 = 2\sqrt{1-y} - \sqrt{1-y} \Leftrightarrow 2y^2 + 3y - 2 = \sqrt{1-y}.$

Đặt $t = \sqrt{1-y}$ ($0 \leq t \leq 1$) ta được phương trình

$$2t^4 - 7t^2 - t + 3 = 0 \Leftrightarrow (2t^2 - 2t - 3)(t^2 + t - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2t^2 - 2t - 3 = 0 \\ t^2 + t - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1-\sqrt{7}}{2} \approx -0.822(\text{loại}) \\ t = \frac{1+\sqrt{7}}{2} \approx 1.822(\text{loại}) \\ t = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \approx -1.61(\text{loại}) \\ t = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0.61 \end{cases} \Leftrightarrow t = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

$t = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ hay $\frac{-1+\sqrt{5}}{2} = \sqrt{1-y} \Leftrightarrow y = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$

Vậy hệ phương trình có 2 nghiệm là $(x; y) = (3; 1), (x; y) = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}; \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right).$

Trong $\triangle SAB$ vuông tại A , ta có $SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = \sqrt{36-9} = 3\sqrt{3}.$

Vậy thể tích khối chóp $S.ABCD$ là $V = \frac{1}{3}.SA.S_{ABCD} = \frac{1}{3}.3\sqrt{3}.3.6 = 18\sqrt{3}$ (đvtt).

Câu 4: (3.5 điểm)

Giải các phương trình sau:

a) $2.27^x - 9^{x^2+3x} = (\sqrt{3})^{2x^2+9x};$

b) $x^3 - \sqrt[3]{x+2\ln x} - \frac{2}{3}\ln(x+2\ln x) = 0.$

Lời giải

$$a) 2.27^x - 9^{x^2+3x} = (\sqrt{3})^{2x^2+9x} \Leftrightarrow 2.3^{3x} - 3^{2x^2+6x} = 3^{x^2+\frac{9}{2}x}$$

$$\Leftrightarrow 3^{2x^2+3x} + 3^{x^2+\frac{3}{2}x} - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{x^2+\frac{3}{2}x} = 1 \\ 3^{x^2+\frac{3}{2}x} = -2 \text{ (loại)} \end{cases} \Leftrightarrow x^2 + \frac{3}{2}x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{0; -\frac{3}{2}\right\}$.

$$b) \text{Điều kiện: } \begin{cases} x > 0 \\ x + \ln x > 0 \end{cases}$$

$$x^3 - \sqrt[3]{x+2\ln x} - \frac{2}{3} \ln(x+2\ln x) = 0 \Leftrightarrow x^3 = \sqrt[3]{x+2\ln x} + 2\ln(\sqrt[3]{x+2\ln x})$$

Đặt $t = \sqrt[3]{x+2\ln x}$ ($t > 0$), kết hợp phương trình ta có hệ:

$$\begin{cases} t = \sqrt[3]{x+2\ln x} \\ x^3 = t + 2\ln t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^3 = x + 2\ln x & (1) \\ x^3 = t + 2\ln t & (2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow t^3 - x^3 = x + 2\ln x - t - 2\ln t \Rightarrow t^3 + t + 2\ln t = x^3 + x + 2\ln x \quad (3)$$

Xét hàm đặc trưng $f(u) = u^3 + u + 2\ln u$, ($u > 0$)

Ta có $f'(u) = 3u^2 + 1 + \frac{2}{u} > 0$, $\forall u > 0 \Rightarrow f(u)$ đồng biến trên $(u; +\infty)$

$$(3) \Leftrightarrow f(t) = f(x) \Leftrightarrow t = x \Leftrightarrow x^3 = x + 2\ln x \Leftrightarrow x^3 - x - 2\ln x = 0.$$

Xét $g(x) = x^3 - x - 2\ln x$ ($x > 0$).

$$g'(x) = 3x^2 - 1 - \frac{2}{x} = \frac{3x^3 - x - 2}{x} = \frac{(x-1)(3x^2 + 3x + 2)}{x}$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		- 0 +	
$g(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

Từ bảng biến thiên $x = 1$ là nghiệm duy nhất của $g(x) = 0$

Thử lại, ta nhận nghiệm $x = 1$.

Câu 5: (4.0 điểm)

a) Cho hàm số $y = \frac{mx+4}{x+m}$ với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-2023; 2023)$ để hàm số đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

b) Cho hàm số $y = x^3 - 2(m+1)x^2 + (3m+1)x + 2m - 2$ có đồ thị là (C_m) . Tìm tất cả các giá trị tham số m để (C_m) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt $A(2;0)$, B và C sao cho trong hai điểm B , C có một điểm nằm trong và một điểm nằm ngoài đường tròn $(C): x^2 + y^2 = 1$.

Lời giải

a) Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$

$$\text{YCBT} \Leftrightarrow y' = \frac{m^2 - 4}{(x+m)^2} > 0, \forall x \in (1; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4 > 0 \\ -m \notin (1; +\infty) \end{cases} \Rightarrow m > 2.$$

Vì $m \in (-2023; 2023)$ và $m \in \mathbb{Z}$ nên ta có $m = \{3; 4; 5; \dots; 2021; 2022\}$.

Vậy có 2020 giá trị nguyên của tham số m .

b) Phương trình hoành độ giao điểm: $x^3 - 2(m+1)x^2 + (3m+1)x + 2m - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x^2 - 2mx - m + 1 = 0 \end{cases}$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow x^2 - 2mx - m + 1 = 0$ (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và

$$\begin{cases} -1 < x_1 < 1 < x_2 \\ x_1 < -1 < x_2 < 1 \end{cases}$$

$$+ \text{Điều kiện để phương trình có 2 nghiệm phân biệt: } \Delta' = m^2 + m - 1 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -\frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ m > \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{cases} \quad (2)$$

+ Xét phương trình (1)

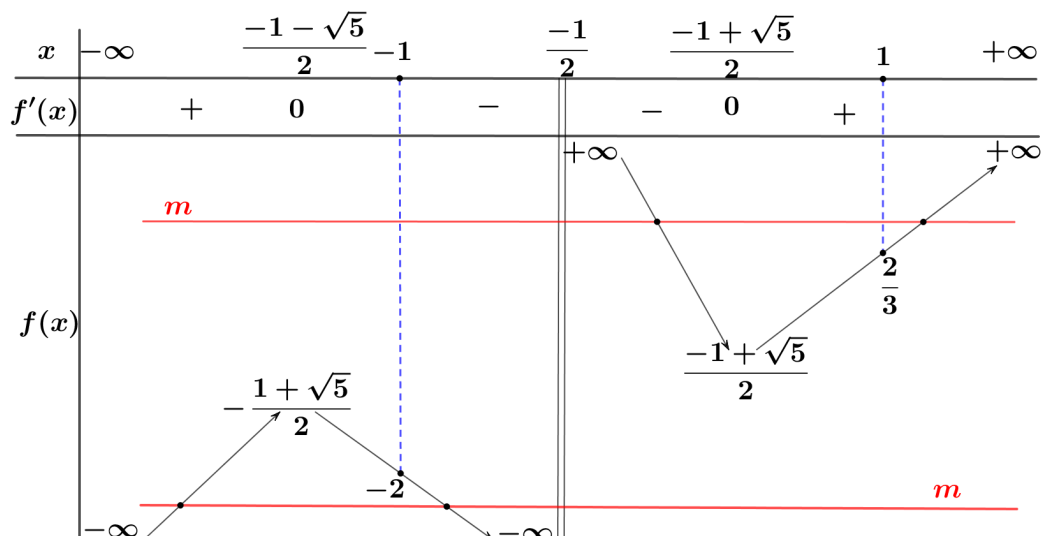
- Nếu $x = -\frac{1}{2}$ thì (1) có dạng: $\frac{1}{4} + m - m + 1 = 0$ (vô lý). Suy ra $x = -\frac{1}{2}$ không là nghiệm.

- Khi $x \neq -\frac{1}{2}$ thì (1) $\Leftrightarrow m = \frac{x^2 + 1}{2x + 1}$.

Xét hàm số $f(x) = \frac{x^2 + 1}{2x + 1}$.

$$f'(x) = \frac{2x^2 + 2x - 2}{(2x + 1)^2}, \text{ cho } f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Bảng biến thiên



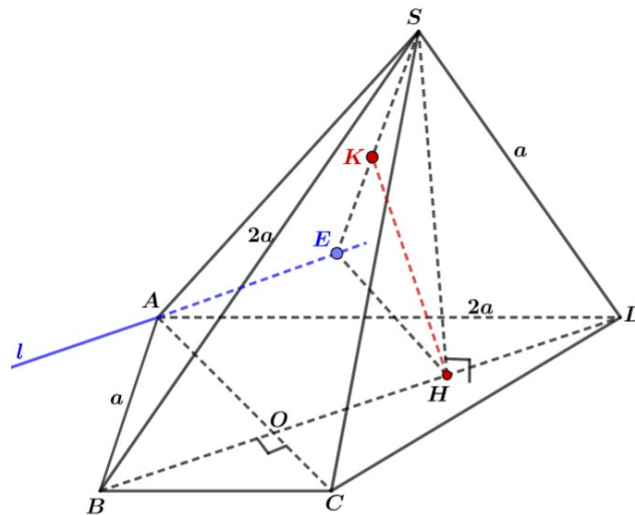
Từ BBT, ta nhận xét $\begin{cases} -1 < x_1 < 1 < x_2 \\ x_1 < -1 < x_2 < 1 \end{cases}$ thì $\begin{cases} m < -2 \\ m > \frac{2}{3} \end{cases}$ thỏa mãn điều kiện (2).

Vậy $m \in (-\infty; -2) \cup \left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 6. (1.5 điểm)

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B , biết AC vuông góc với mặt phẳng (SBD) và $AB = SD = a$, $AD = SB = 2a$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BD .

Lời giải



♦ Theo đề $\begin{cases} AC \perp (SBD) \\ AC \subset (ABCD) \end{cases} \Rightarrow (ABCD) \perp (SBD).$

Trong mặt phẳng (SBD) gọi H là hình chiếu của S lên BD (1).

Vì $\begin{cases} (ABCD) \perp (SBD) \\ (ABCD) \cap (SBD) = SD \end{cases}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $SH \perp (ABCD).$

♦ Trong mặt phẳng $(ABCD)$ ta có: $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = a\sqrt{5}.$

Từ đó suy ra tam giác SBD vuông tại S .

Khi đó $SH \cdot BD = SB \cdot SD \Rightarrow SH = \frac{SB \cdot SD}{BD} = \frac{2a}{\sqrt{5}}.$

Mặt khác $\Delta SBD = \Delta ADB \Rightarrow AO = SH = \frac{2a}{\sqrt{5}}$, với $O = AC \cap BD$.

♦ Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi l là đường thẳng qua A và song song với BD .

Ta có $BD \parallel (S, l) \Rightarrow d(BD, AC) = d(BD, (S, l)) = d(H, (S, l)).$

Gọi E là hình chiếu của H lên đường thẳng l , vì tứ giác $AEHO$ là hình chữ nhật nên

$$AO = HE = \frac{2a}{\sqrt{5}}.$$

K là hình chiếu của H lên SE . Khi đó $d(H, (S, l)) = HK.$

♦ Xét tam giác SHE vuông cân tại H (K là trung điểm của HE):

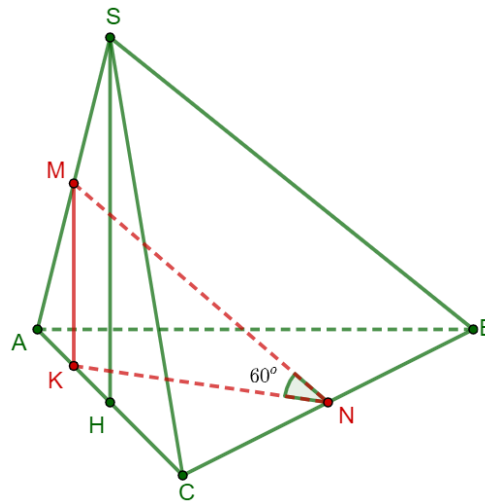
$$HK = \frac{SE}{2} = \frac{\sqrt{2}SH}{2} = \frac{\sqrt{10}a}{5}.$$

$$\text{Vậy } d(BD, AC) = \frac{a\sqrt{10}}{5}.$$

Câu 7. (2.0 điểm)

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B , tam giác SAC cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và BC . Biết $AB = a$ và MN tạo với mặt đáy một góc 60° . Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ theo a .

Lời giải



Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AC và AH khi đó: $SH \perp (ABC)$ và $MK \parallel SH$ nên $MK \perp (ABC)$.

$$\Rightarrow \widehat{(MN, (ABC))} = \widehat{MKN} = 60^\circ.$$

Do tam giác ABC vuông cân tại B và $AB = a$ nên

$$BC = a, AC = a\sqrt{2} \Rightarrow CN = \frac{a}{2}, CK = \frac{3\sqrt{2}}{4}a.$$

Áp dụng định lí cô – sin vào tam giác CKN ta có:

$$KN^2 = CN^2 + CK^2 - 2.CN.CK.\cos 45^\circ = \frac{5}{8}a^2 \Rightarrow KN = \frac{a\sqrt{10}}{4}$$

$$\Rightarrow MK = KN.\tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{30}}{4} \Rightarrow SH = \frac{a\sqrt{30}}{2}.$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SH.S_{ABC} = \frac{a^3\sqrt{30}}{12}.$$

Câu 8. (1.5 điểm)

Cho hàm số $f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(\cot x) = \sin 2x + \cos 2x$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = f(x)f(1-x)$ trên đoạn $[-1; 1]$.

Lời giải

Ta có: $f(\cot x) = \sin 2x + \cos 2x = \frac{2 \cot x}{\cot^2 x + 1} + \frac{\cot^2 x - 1}{\cot^2 x + 1} = \frac{\cot^2 x + 2 \cot x - 1}{\cot^2 x + 1}, \forall x \in (0; \pi).$

Đặt $t = \cot x$, điều kiện cho t là $t \in \mathbb{R}$, tương ứng với điều kiện $x \in (0; \pi).$

$$f(t) = \frac{t^2 + 2t - 1}{t^2 + 1}, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Ta có: $g(x) = f(x) \cdot f(1-x) = \frac{x^2(1-x)^2 + 8x(1-x) - 2}{x^2(1-x)^2 - 2x(1-x) + 2}, \forall x \in \mathbb{R}.$

Đặt $u = x(1-x).$

$$u' = 1 - 2x$$

$$u' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Ta có bảng biến thiên

x	-1	$\frac{1}{2}$	1
u'	+	0	-
u	-2	$\frac{1}{4}$	0

Do đó $u \in \left[-2; \frac{1}{4}\right].$

Khảo sát hàm $h(u) = \frac{u^2 + 8u - 2}{u^2 - 2u + 2}$ trên $\left[-2; \frac{1}{4}\right].$

$$h'(u) = \frac{2(-5u^2 + 4u + 6)}{(u^2 - 2u + 2)^2}.$$

$$h'(u) = 0 \Leftrightarrow \frac{2(-5u^2 + 4u + 6)}{(u^2 - 2u + 2)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{2 - \sqrt{34}}{2} \\ u = \frac{2 + \sqrt{34}}{2} \end{cases} (l)$$

u	-2	$\frac{2 - \sqrt{34}}{2}$	$\frac{1}{4}$
$h'(u)$	-	0	+
$h(u)$	$-\frac{7}{5}$	$4 - \sqrt{34}$	$\frac{1}{25}$

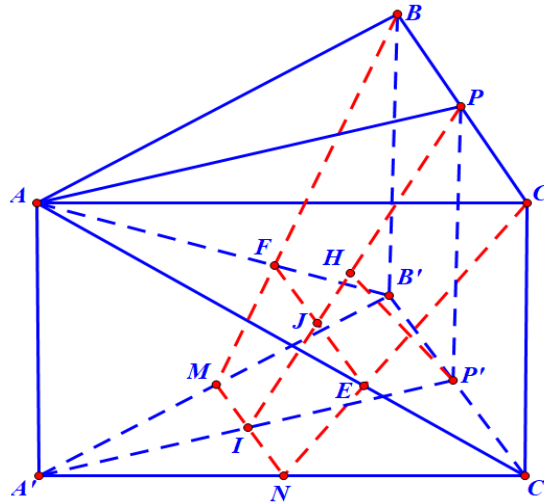
Vậy $\max_{\left[-2; \frac{1}{4}\right]} h(u) = \frac{1}{25}$ khi $u = \frac{1}{4} \Rightarrow \max_{[-1; 1]} g(x) = \frac{1}{25}$ khi $x = \frac{1}{2}.$

$$\min_{\left[-2; \frac{1}{4}\right]} h(u) = 4 - \sqrt{34} \text{ khi } u = \frac{2 - \sqrt{34}}{5} \Rightarrow \min_{[-1; 1]} g(x) = 4 - \sqrt{34} \text{ khi } x = \frac{1 - \sqrt{2\sqrt{34} - 3}}{2}.$$

Câu 9. (1.5 điểm)

Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = 2\sqrt{3}$ và $AA' = 2$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh $A'B', A'C', BC$ và hai điểm F, E lần lượt là giao điểm của mặt phẳng (MNP) với AB', AC' . Tính thể tích của khối đa diện $MFENC'B'$.

Lời giải



Ta có $(MNP) \equiv (MBCN)$.

$$\text{Thể tích khối } ABC.A'B'C' = \frac{(2\sqrt{3})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot 2 = 6\sqrt{3}.$$

Gọi P' là trung điểm của $B'C'$, $I = MN \cap A'P'$, $J = PI \cap EF$.

Vì $PP' \perp MN$, $A'P' \perp MN \Rightarrow (APP'A') \perp (MBCN)$ và $(APP'A') \cap (MBCN) = IP$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của P' trên $IP \Rightarrow P'H = d(P', (FBCE))$.

$$\text{Trong tam giác vuông } IPP' \text{ có } PP' = 2, IP' = \frac{1}{2} A'P' = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow IP = \frac{5}{2} \Rightarrow P'H = \frac{6}{5}.$$

$$\text{Ta có } E, F \text{ là trọng tâm của hai tam giác } CA'C' \text{ và } BA'B' \text{ nên suy ra } \frac{NE}{NC} = \frac{MF}{MB} = \frac{1}{3}.$$

Vì $BM = CN \Rightarrow MFEN$ là hình thang cân có $EF \parallel \frac{2}{3} B'C' = \frac{4\sqrt{3}}{3}$, $MN = \frac{1}{2} B'C' = \sqrt{3}$, chiều

$$\text{cao } IJ = \frac{1}{3} IP = \frac{5}{6} \Rightarrow S_{MFEN} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{3} + \frac{4\sqrt{3}}{3} \right) \cdot \frac{5}{6} = \frac{35\sqrt{3}}{36} \Rightarrow V_{P'.MFEN} = \frac{1}{3} \cdot \frac{35\sqrt{3}}{36} \cdot \frac{6}{5} = \frac{7\sqrt{3}}{18}.$$

$$\text{Ta có } V_{E.NC'P'} = V_{F.MB'P'} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} V_{A.A'B'C'} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} V_{ABC.A'B'C'} = \frac{6\sqrt{3}}{36} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$(\text{ vì } S_{NP'C'} = \frac{1}{4} S_{A'B'C'}, d(E, (A'B'C')) = \frac{1}{3} d(A, (A'B'C')))$$

$$\text{Vậy ta có thể tích khối } MFENC'B' = 2V_{E.NC'P'} + V_{P'.MFEN} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{7\sqrt{3}}{18} = \frac{13\sqrt{3}}{18}.$$

Câu 10. (1.5 điểm)

Cho các số thực dương x, y thỏa mãn điều kiện $xy \leq y - 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{x+y}{\sqrt{x^2 - xy + 3y^2}} - \frac{x-2y}{6(x+y)}$$

Lời giải

Ta có $x > 0, y > 0$ nên

$$xy \leq y - 1 \Leftrightarrow \frac{x}{y} \leq \frac{1}{y} - \frac{1}{y^2} = -\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4}$$

$$P = \frac{x+y}{\sqrt{x^2 - xy + 3y^2}} - \frac{x-2y}{6(x+y)} = \frac{\frac{x}{y} + 1}{\sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2 - \frac{x}{y} + 3}} - \frac{\frac{x}{y} - 2}{6\left(\frac{x}{y} + 1\right)}$$

$$\text{Đặt } t = \frac{x}{y}, \text{ điều kiện } 0 < t \leq \frac{1}{4} \text{ ta có } P = \frac{t+1}{\sqrt{t^2 - t + 3}} - \frac{t-2}{6(t+1)}$$

$$\text{Xét } f(t) = \frac{t+1}{\sqrt{t^2 - t + 3}} - \frac{t-2}{6(t+1)} \text{ với } 0 < t \leq \frac{1}{4}$$

$$f'(t) = \frac{-3t+7}{2\sqrt{(t^2 - t + 3)^3}} - \frac{1}{2(t+1)^2}$$

$$\forall t \in \left(0; \frac{1}{4}\right] \text{ ta có: } t^2 - t + 3 = t(t-1) + 3 < 3; -3t+7 > 6 \text{ và } t+1 > 1$$

$$\forall t \in \left(0; \frac{1}{4}\right]: \frac{-3t+7}{2\sqrt{(t^2 - t + 3)^3}} > \frac{-3t+7}{6\sqrt{3}} > \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{và} \quad -\frac{1}{2(t+1)^2} > -\frac{1}{2} \Rightarrow f'(t) > 0, \quad \forall t \in \left(0; \frac{1}{4}\right]$$

$$\Rightarrow f(t) \text{ đồng biến trên } \left(0; \frac{1}{4}\right]$$

Ta có bảng biến thiên như sau

t	0	$\frac{1}{4}$
$f'(t)$	+	
$f(t)$	$\frac{\sqrt{3}+1}{3}$	$\frac{7+10\sqrt{5}}{30}$

$$\Rightarrow f(t) \leq f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{7+10\sqrt{5}}{30}. \text{ Vậy } P_{\max} = \frac{7+10\sqrt{5}}{30} \text{ khi } x = \frac{1}{2}, y = 2$$

----- HẾT -----