TRẦN SĨ TÙNG

BÀI TẬP HÌNH HỌC 12

TẬP 2

KHỐI TRÒN XOAY

ÔN THI TỐT NGHIỆP THPT & ĐẠI HỌC

Năm 2009

CHƯƠNG II
KHỐI TRÒN XOAY

I. Mặt cầu – Khối cầu:

1. Định nghĩa

- **Mặt cầu:** $S(O;R) = \{M | OM = R\}$ • **Khối cầu:** $V(O;R) = \{M | OM \le R\}$

2. Vị trí tương đối giữa mặt cầu và mặt phẳng

Cho mặt cầu S(O; R) và mặt phẳng (P). Gọi d = d(O; (P)).

- Nếu $d < R$ thì (P) cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn nằm trên (P), có tâm H và bán kính $r = \sqrt{R^2 - d^2}$.
- Nếu $d = R$ thì (P) tiếp xúc với (S) tại tiếp điểm H. (*(P) đgl tiếp diện của (S)*)
- Nếu $d > R$ thì (P) và (S) không có điểm chung.

Khi d = 0 thì (P) đi qua tâm O và đgl mặt phẳng kính, đường tròn giao tuyến có bán kính bằng R đgl đường tròn lớn.

3. Vị trí tương đối giữa mặt cầu và đường thẳng

Cho mặt cầu S(O; R) và đường thẳng Δ. Gọi d = d(O; Δ).

- Nếu $d < R$ thì Δ cắt (S) tại hai điểm phân biệt.
- Nếu $d = R$ thì Δ tiếp xúc với (S). (*Δ đgl tiếp tuyến của (S)*).
- Nếu $d > R$ thì Δ và (S) không có điểm chung.

4. Mặt cầu ngoại tiếp – nội tiếp

	Mặt cầu ngoại tiếp	**Mặt cầu nội tiếp**
Hình đa diện	Tất cả các đỉnh của hình đa diện đều nằm trên mặt cầu	Tất cả các mặt của hình đa diện đều tiếp xúc với mặt cầu
Hình trụ	Hai đường tròn đáy của hình trụ nằm trên mặt cầu	Mặt cầu tiếp xúc với các mặt đáy và mọi đường sinh của hình trụ
Hình nón	Mặt cầu đi qua đỉnh và đường tròn đáy của hình nón	Mặt cầu tiếp xúc với mặt đáy và mọi đường sinh của hình nón

5. Xác định tâm mặt cầu ngoại tiếp khối đa diện

- Cách 1: Nếu *(n – 2)* đỉnh của đa diện nhìn hai đỉnh còn lại dưới một góc vuông thì tâm của mặt cầu là trung điểm của đoạn thẳng nối hai đỉnh đó.
- Cách 2: Để xác định tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.
  – Xác định trục Δ của đáy (*Δ là đường thẳng vuông góc với đáy tại tâm đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy).*
  – Xác định mặt phẳng trung trực (P) của một cạnh bên.
  – Giao điểm của (P) và Δ là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

II. Diện tích – Thể tích

	Cầu	**Trụ**	**Nón**
Diện tích	$S = 4\pi R^2$	$S_{xq} = 2\pi Rh$ $S_{tp} = S_{xq} + 2S_{đáy}$	$S_{xq} = \pi Rl$ $S_{tp} = S_{xq} + S_{đáy}$
Thể tích	$V = \frac{4}{3}\pi R^3$	$V = \pi R^2 h$	$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$

VẤN ĐỀ 1: Mặt cầu – Khối cầu

Bài 1. Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại B và $SA \perp (ABC)$.

a) Gọi O là trung điểm của SC. Chứng minh: OA = OB = OC = SO. Suy ra bốn điểm A, B, C, S cùng nằm trên mặt cầu tâm O bán kính $R = \frac{SC}{2}$.

b) Cho SA = BC = a và $AB = a\sqrt{2}$. Tính bán kính mặt cầu nói trên.

Bài 2. Trong mặt phẳng (P), cho đường thẳng d và một điểm A ngoài d. Một góc xAy di động quanh A, cắt d tại B và C. Trên đường thẳng qua A vuông góc với (P) lấy điểm S. Gọi H và K là các hình chiếu vuông góc của A trên SB và SC.

a) Chứng minh A, B, C, H, K thuộc cùng một mặt cầu.

b) Tính bán kính mặt cầu trên, biết AB = 2, AC = 3, $\widehat{BAC} = 60^0$.

Bài 3. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Gọi O là tâm hình vuông ABCD và K là hình chiếu của B trên SC.

a) Chúng minh ba điểm O, A, K cùng nhìn đoạn SB dưới một góc vuông. Suy ra năm điểm S, D, A, K B cùng nằm trên mặt cầu đường kính SB.

b) Xác định tâm và bán kính mặt cầu nói trên.

Bài 4. Cho mặt cầu S(O; a) và một điểm A, biết OA = 2a. Qua A kẻ một tiếp tuyến tiếp xúc với (S) tại B và cũng qua A kẻ một cát tuyến cắt (S) tại C và D, biết $CD = a\sqrt{3}$.

a) Tính AB.

b) Tính khoảng cách từ O đến đường thẳng CD.

Bài 5. Cho hình chóp tam giác đều S.ABC, có cạnh đáy bằng a và góc hợp bởi mặt bên và đáy bằng 60^0. Gọi O là tâm của tam giác ABC. Trong tam giác SAO dựng đường trung trực của cạnh SA, cắt SO tại K.

a) Tính SO, SA.

b) Chứng minh $\Delta SMK \sim \Delta SOA$ (với M là trung điểm của SA). Suy ra KS.

c) Chứng minh hình chóp K.ABC là hình chóp đều. suy ra: KA = KB +KC.

d) Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC.

Bài 6. Cho hình chóp S.ABC. biết rằng có một mặt cầu bán kính R tiếp xúc với các cạnh của hình chóp và tâm I của mặt cầu nằm trên đường cao SH của hình chóp.

a) Chứng minh rằng S.ABC là hình chóp đều.

b) Tính chiều cao của hình chóp, biết rằng $IS = R\sqrt{3}$

Bài 7. Cho tứ diện đều ABCD có cạnh là a.

a) Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện.

b) Tính diện tích mặt cầu và thể tích khối cầu đó.

Bài 8. Cho một hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy là a, cạnh bên hợp với mặt đáy một góc 60^0.

a) Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

b) Tính diện tích mặt cầu và thể tích khối cầu đó.

Bài 9. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có tất cả các cạnh đều bằng a. Xác định tâm và bán kính của mặt cầu đi qua năm điểm S, A, B, C, D.

Bài 10. Cho tam giác ABC có độ dài ba cạnh là 13, 14, 15. Một mặt cầu tâm O, bán kính R = 5 tiếp xúc với ba cạnh của tam giác ABC tại các tiếp điểm nằm trên ba cạnh đó. Tính khoảng cách từ tâm mặt cầu tới mặt phẳng chứa tam giác.

Bài 11. Hình chóp S.ABC có đường cao SA = a, đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

Bài 12. Cho hình chóp từ giác đều S.ABCD có cạnh đáy bằng a và góc hợp bởi mặt bên và đáy bằng 60^0. Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

Bài 13. Hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy a và đường cao h. Gọi O là tâm của ABCD và H là trung điểm của BC. Đường phân giác trong của góc SHO cắt SO tại I. Chứng minh rằng I là tâm mặt cầu nội tiếp hình chóp. Tính bán kính mặt cầu này.

Bài 14. Cho hình chóp S.ABC có SA ⊥ (ABC) và tam giác ABC vuông tại B. Gọi AH, AK lần lượt là các đường cao của các tam giác SAB và SAC.

a) Chứng minh rằng năm điểm A, B, C, H, K cùng ở trên một mặt cầu.

b) Cho AB = 10, BC = 24. Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu đó.

Bài 15. Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình vuông cạnh bằng a, SA = $a\sqrt{7}$ và SA ⊥ (ABCD). Một mặt phẳng (P) qua A và vuông góc với SC, cắt SB, SC, SD lần lượt tại H, M, K.

a) Chứng minh rằng bảy điểm A, B, C, D, H, M, K cùng ở trên một mặt cầu.

b) Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu đó.

VẤN ĐỀ 2: Mặt trụ – Hình trụ – Khối trụ

Bài 1. Cho hình trụ có các đáy là hai hình tròn tâm O và O′, bán kính đáy bằng 2 cm. Trên đường tròn đáy tâm O lấy hai điểm A, B sao cho AB = 2 cm. Biết rằng thể tích tứ diện OO′AB bằng 8 cm^3. Tính chiều cao hình trụ và thể tích khối trụ.

Bài 2. Cho hình trụ có các đáy là hai hình tròn tâm O và O′, bán kính đáy bằng 2 cm. Trên đường tròn đáy tâm O lấy điểm A sao cho AO′ hợp với mặt phẳng đáy một góc 60^0. Tính chiều cao hình trụ và thể tích khối trụ.

Bài 3. Cho hình trụ có các đáy là hai hình tròn tâm O và O′, bán kính đáy bằng chiều cao và bằng a. Trên đường tròn đáy tâm O lấy điểm A, trên đường tròn đáy tâm O′ lấy điểm B sao cho AB = 2a. Tính thể tích của khối tứ diện OO′AB.

Bài 4. Một khối trụ có chiều cao bằng 20 cm và có bán kính đáy bằng 10 cm. Người ta kẻ hai bán kính OA và O'B' lần lượt trên hai đáy sao cho chúng hợp với nhau một góc 30^0. Cắt khối trụ bởi một mặt phẳng chứa đường thẳng AB' và song song với trục OO' của khối trụ đó. Hãy tính diện tích của thiết diện.

Bài 5. Một hình trụ có bán kính đáy R = 53 cm, khoảng cách giữa hai đáy h = 56 cm. Một thiết diện song song với trục là hình vuông. Tính khoảng cách từ trục đến mặt phẳng thiết diện.

Bài 6. Cho hình trụ bán kính đáy R, chiều cao OO′ = h, A và B là hai điểm thay đổi trên hai đường tròn đáy sao cho độ dài AB = a không đổi $\left(h > a < \sqrt{h^2 + 4R^2}\right)$.

a) Chứng minh góc giữa hai đường thẳng AB và OO' không đổi.

b) Chứng minh khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và OO' không đổi.

Bài 7. Trong không gian cho hình vuông ABCD cạnh a. Gọi I và H lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD. Khi quay hình vuông đó xung quanh trục IH ta được một hình trụ tròn xoay.

a) Tính diện tích xung quanh của hình trụ tròn xoay được tạo nên.

b) Tính thể tích của khối trụ tròn xoay được tạo nên bởi hình trụ tròn xoay đó.

Bài 8. Một hình trụ có bán kính đáy R và có thiết diện qua trục là một hình vuông.

a) Tính diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình trụ.

b) Tính thể tích của khối lăng trụ tứ giác đều nội tiếp trong khối trụ đã cho.

Bài 9. Một hình trụ có bán kính đáy R và đường cao bằng $R\sqrt{3}$; A và B là hai điểm trên hai đường tròn đáy sao cho góc hợp bởi AB và trục của hình trụ là 30^0.

a) Tính diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình trụ.

b) Tính khoảng cách giữa AB và trục của hình trụ.

Bài 10. Cho hình trụ bán kính đáy R, chiều cao h. Gọi A và B là hai điểm lần lượt nằm trên hai đường tròn đáy (O, R) và (O′, R) sao cho OA và O′B hợp với nhau một góc bằng *x* và và hai đường thẳng AB, O′O hợp với nhau một góc bằng *y*.

a) Tính bán kính R theo h, x, y.

b) Tính S_{xq}, S_{tp} và thể tích V của hình trụ theo *h, x, y*.

Bài 11. Cho hình trụ bán kính đáy bằng a và trục OO’ = 2a. OA và OB’ là hai bán kính của hai đường tròn đáy (O), (O’) sao cho góc của OA và OB’ bằng 30^0.

a) Tính độ dài đoạn thẳng AB’.

b) Tính tang của góc giữa AB’ và OO’.

c) Tính khoảng cách giữa AB’ và OO’.

Bài 12. Một khối trụ có các đáy là hai hình tròn tâm O và O’, bán kính R và có đường cao $h = R\sqrt{2}$. Gọi A là một điểm trên đường tròn tâm O và B là một điểm trên đường tròn tâm O’ sao cho OA vuông góc với O’B.

a) Chứng minh rằng các mặt bên của tứ diện OABO’ là những tam giác vuông. Tính tỉ số thể tích của khối tứ diện OABO’ và khối trụ.

b) Gọi (α) là mặt phẳng qua AB và song song với OO’. Tính khoảng cách giữa trục OO’ và mặt phẳng (α).

c) Chứng minh rằng (α) là tiếp diện của mặt trụ có trục OO’ và có bán kính đáy bằng $\frac{R\sqrt{2}}{2}$.

VẤN ĐỀ 1: Mặt nón – Hình nón – Khối nón

Bài 1. Cho hình lăng trụ tứ giác đều ABCD.A′B′C′D′ có cạnh đáy bằng a, chiều cao 2a. Biết rằng O′ là tâm của A′B′C′D′ và (C) là đường tròn nội tiếp đáy ABCD. Tính thể tích khối nón có đỉnh O′ và đáy (C).

Bài 2. Cho hình lăng trụ tam giác đều ABC.A′B′C′ có cạnh đáy bằng a và chiều cao 2a. Biết rằng O′ là tâm của A′B′C′ và (C) là đường tròn nội tiếp đáy ABC. Tính thể tích khối nón có đỉnh O′ và đáy (C).

Bài 3. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy bằng a, cạnh bên hợp với đáy một góc 60^0. Gọi (C) là đường tròn ngoại tiếp đáy ABCD. Tính thể tích khối nón có đỉnh S và đáy (C).

Bài 4. Trong không gian cho tam giác OIM vuông tại I, góc IOM bằng 30^0 và cạnh IM = a. Khi quay tam giác OIM quanh cạnh góc vuông OI thì đường gấp khúc OMI tạo thành một hình nón tròn xoay.

a) Tính diện tích xung quanh của hình nón tròn xoay tạo thành.

b) Tính thể tích của khối nón tròn xoay tạo thành.

Bài 5. Thiết diện qua trục của một hình nón là một tam giác vuông cân có cạnh góc vuông bằng a.

a) Tính diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình nón.

b) Tính thể tích của khối nón tương ứng.

c) Một thiết diện qua đỉnh và tạo với đáy một góc 60^0. Tính diện tích của thiết diện này.

Bài 6. Cho hình nón đỉnh S, đường cao SO, A và B là hai điểm thuộc đường tròn đáy sao cho khoảng cách từ điểm O đến AB bằng a và $\widehat{SAO}=30^0$, $\widehat{SAB}=60^0$. Tính độ dài đường sinh của hình nón theo a.

Bài 7. Thiết diện qua trục của một khối nón là một tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng a. Tính thể tích khối nón và diện tích xung quanh của hình nón đã cho.

Bài 8. Cho hình lập phương ABCD. A'B'C'D' cạnh a. Tính diện tích xung quanh của hình nón có đỉnh là tâm O của hình vuông ABCD và đáy là hình tròn nội tiếp hình vuông A'B'C'D'.

Bài 9. Cắt một hình nón bằng một mặt phẳng đi qua trục của nó, ta được thiết diện là một tam giác đều cạnh 2a. Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần của hình và thể tích của khối nón.

Bài 10. Cho hình chóp tam giác đều S. ABC có cạnh bên bằng a và góc giữa các mặt bên và mặt đáy là α. Một hình nón đỉnh S có đường tròn đáy nội tiếp tam giác đều ABC, Hãy tính diện tích xung quanh của hình nón này theo a và α.

Bài 11. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có chiều cao SO = h và $\widehat{SAB}=\alpha$ $(\alpha > 45^0)$. Tính diện tích xung quanh của hình nón đỉnh S và có đường tròn đáy ngoại tiếp hình vuông ABCD.

Bài 12. Một hình nón có độ dài đường sinh bằng 1 và góc giữa đường sinh và đáy là α.

a) Tình diện tích xung quanh và thể tích của khối nón.

b) Gọi I là điểm trên đường cao SO của hình nón sao cho $\dfrac{SI}{SO}=k\ (0<k<1)$. Tính diện tích của thiết diện qua I và vuông góc với trục.

ÔN TẬP KHỐI TRÒN XOAY

Bài 1. Cho một tứ diện đều có cạnh là a.

a) Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện.

b) Tính diện tích mặt cầu và thể tích khối cầu tương ứng.

Bài 2. Cho một hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy là a, cạnh bên hợp với mặt đáy một góc 60^0.

a) Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

b) Tính diện tích mặt cầu và thể tích khối cầu tương ứng.

Bài 3. Hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy a, góc giữa mặt bên và đáy là α.

a) Tính bán kính các mặt cầu ngoại tiếp và nội tiếp hình chóp.

b) Tính giá trị của $\tan\alpha$ để các mặt cầu này có tâm trùng nhau.

Bài 4. Cho tứ diện ABCD, biết AB = BC = AC = BD = a, AD = b. Hai mặt phẳng (ACD) và (BCD) vuông góc với nhau.

a) Chứng minh tam giác ACD vuông.

b) Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD.

Bài 5. Cho hình cầu tâm O bán kính R và đường kính SS′. Một mặt phẳng vuông góc với SS′ cắt hình cầu theo một đường tròn tâm H. Gọi ABC là tam giác đều nội tiếp trong đường tròn này. Đặt SH = x $(0 < x < 2R)$.

a) Tính các cạnh của tứ diện SABC theo R, x.

b) Xác định x để SABC là tứ diện đều, khi đó tính thể tích của tứ diện và chứng minh rằng các đường thẳng S′A, S′B, S′C đôi một vuông góc với nhau.

Bài 6. Trong mặt phẳng (P), cho hình thang cân ABCD với AB = 2a, BC = CD = DA = a. Trên nửa đường thẳng Ax vuông góc với (P) ta lấy một điểm di động S. Một mặt phẳng qua A vuông góc với SB, cắt SB, SC, SD lần lượt tại P, Q, R.

a) Chứng minh rằng bảy điểm A, B, C, D, P, Q, R luôn thuộc một mặt cầu cố định. tính diện tích của mặt cầu đó.

b) Co SA = $a\sqrt{3}$. Tính diện tích của tứ giác APQR.

Bài 7. Cho một đoạn thẳng IJ có chiều dài c. Trên đường thẳng vuông góc với IJ tại I ta lấy hai điểm A, A′ đối xứng qua I và IA = IA′ = a. Trên đường thẳng vuông góc với IJ tại J và không song song với AA′ ta lấy hai điểm B, B′ đối xứng qua J và JB = JB′ = b.

a) Chứng minh rằng tâm O của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện AA′B′B nằm trên đường thẳng IJ.

b) Xác định tâm và tính bán kính của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện AA′B′B theo a, b, c.

Bài 8. Cho tứ diện ABCD với AB = AC = a, BC = b. Hai mặt phẳng (BCD) và (ABC) vuông góc với nhau và $\widehat{BDC} = 90^0$. Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD.

Bài 9. Cho hình cầu bán kính R. Từ một điểm S bất kỳ trên mặt cầu, dựng ba cát tuyến bằng nhau, cắt mặt cầu tại A, B, C sao cho: $\widehat{ASB} = \widehat{ASC} = \widehat{BSC} = \alpha$. Tính thể tích V của tứ diện SABC theo R và α.

Bài 10. Cho tứ diện SABC có SA $\perp$ (ABC), SA = a, AB = b, AC = c. Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện trong các trường hợp sau:

a) $\widehat{BAC} = 90^0$ b) $\widehat{BAC} = 60^0$, b = c c) $\widehat{BAC} = 120^0$, b = c.

Bài 11. Cho hình lăng trụ tam giác đều ABC.A'B'C' có tất cả các cạnh đều bằng a. Xác định tâm, bán kính và tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ đã cho.

Bài 12. Một hình trụ có bán kính đáy R và có thiết diện qua trục là một hình vuông.

a) Tính S_{xq} và S_{tp} của hình trụ.

b) Tính V khối lăng trụ tứ giác đều nội tiếp trong khối trụ đã cho.

Bài 13. Một hình trụ có bán kính đáy R và đường cao $R\sqrt{3}$. A và B là 2 điểm trên 2 đường tròn đáy sao cho góc hợp bởi AB và trục của hình trụ là 30^0.

a) Tính S_{xq} và S_{tp} của hình trụ.

b) Tính thể tích khối trụ tương ứng.

Bài 14. Bên trong hình trụ tròn xoay có một hình vuông ABCD cạnh a nội tiếp mà 2 đỉnh liên tiếp A, B nằm trên đường tròn đáy thứ 1 của hình trụ, 2 đỉnh còn lại nằm trên đường tròn đáy thứ 2 của hình trụ. Mặt phẳng chứa hình vuông tạo với đáy hình trụ một góc 45^0. Tính diện tích xung quanh và thể tích của hình trụ đó.

Bài 15. Thiết diện qua trục của một hình nón là một tam giác vuông cân có cạnh góc vuông bằng a.

a) Tính diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình nón.

b) Tính thể tích khối nón tương ứng.

Bài 16. Cho hình nón có đường cao SO = h và bán kính đáy R. Gọi M là điểm trên đoạn OS, đặt OM = x $(0 < x < h)$.

a) Tính diện tích thiết diện (C) vuông góc với trục tại M.

b) Tính thể tích V của khối nón đỉnh O và đáy (C) theo R, h *và* x. Xác định x sao cho V đạt giá trị lớn nhất.

Bài 17. Một hình nón đỉnh S có chiều cao SH = h và đường sinh bằng đường kính đáy. Một hình cầu có tâm là trung điểm O của đường cao SH và tiếp xúc với đáy hình nón.

a) Xác định giao tuyến của mặt nón và mặt cầu.

b) Tính diện tích của phần mặt nón nằm trong mặt cầu.

c) Tính S mặt cầu và so sánh với diện tích toàn phần của mặt nón.

Bài 18. Cho hình nón tròn xoay đỉnh S. Trong đáy của hình nón đó có hình vuông ABCD nội tiếp, cạnh bằng a. Biết rằng $\widehat{ASB} = 2\alpha, (0^0 < \alpha < 45^0)$. Tính thể tích khối nón và diện tích xung quanh của hình nón.

Bài 19. Cho hình nón có bán kính đáy bằng R và góc ở đỉnh là 2α. Trong hình nón có một hình trụ nội tiếp. Tính bán kính đáy và chiều cao của hình trụ, biết rằng thiết diện qua trục của hình trụ là một hình vuông.

Bài 20. Cho hình nón có bán kính đáy R, góc giữa đường sinh và đáy của hình nón là α. Một mặt phẳng (P) song song với đáy của hình nón, cách đáy hình nón một khoảng h, cắt hình nón theo đường tròn (C). Tính bán kính đường tròn (C) theo R, h và α.

ÔN TẬP TỔNG HỢP
HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

Bài 1. Cho hình chóp tam giác SABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, SA ⊥ (ABC) và SA = a. M là một điểm thay đổi trên cạnh AB. Đặt $\widehat{ACM} = \alpha$, hạ SH vuông góc với đường thẳng CM.

a) Tìm quỹ tích điểm H. Suy ra giá trị lớn nhất của thể tích tứ diện SAHC.

b) Hạ AI ⊥ SC, AK ⊥ SH. Tính độ dài SK, AK và thể tích tứ diện SAKI.

HD: *a) Quĩ tích điểm H là một cung tròn.* $MaxV_{SAHC} = \dfrac{a^3}{12}$

b) $AK = \dfrac{a\sin\alpha}{\sqrt{1+\sin^2\alpha}}$, $SK = \dfrac{a}{\sqrt{1+\sin^2\alpha}}$, $V = \dfrac{a^3\sin 2\alpha}{24(1+\sin^2\alpha)}$

Bài 2. Cho ΔABC cân tại A có AB = AC = a và góc $\widehat{BAC} = 2\alpha$. Trên đường thẳng d qua A và vuông góc với mặt phẳng (ABC), lấy điểm S sao cho SA = 2a. Gọi I là trung điểm của BC. Hạ AH ⊥ SI.

a) Chứng minh AH ⊥ (SBC). Tính độ dài AH theo a, α.

b) K là một điểm thay đổi trên đoạn AI, đặt $\dfrac{AK}{AI} = x$. Mặt phẳng (R) qua K và vuông góc với AI cắt các cạnh AB, AC, SC, SB lần lượt tại M, N, P, Q. Tứ giác MNPQ là hình gì? Tính diện tích tứ giác này.

HD: *a)* $AH = \dfrac{2a.\cos\alpha}{\sqrt{\cos^2\alpha+4}}$ *b)* $S_{MNPQ} = 4a^2x\left(1-x\right)\sin a$

Bài 3. Cho tứ diện ABCD có AB = CD = 2x $\left(0 < x < \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ và AC = AD = BC = BD = 1. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD.

a) Chứng minh AB ⊥ CD và IJ là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng AB và CD.

b) Tính thể tích tứ diện ABCD theo x. Tìm x để thể tích này lớn nhất và tính giá trị lớn nhất đó.

HD: *b)* $V = \dfrac{2x^2\sqrt{1-2x^2}}{3}$; $MaxV = \dfrac{2}{9\sqrt{3}}$ *khi* $x = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Bài 4. Trong mặt phẳng (P), cho hình vuông ABCD cạnh a, có tâm là O. Trên các nửa đường thẳng Ax, Cy vuông góc với (P) và ở về cùng một phía đối với (P) lấy lần lượt hai điểm M, N. Đặt AM = x, CN = y.

a) Tính độ dài MN. Từ đó chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để ΔOMN vuông tại O là: $2xy = a^2$.

b) Giả sử M, N thay đổi sao cho ΔOMN vuông tại O. Tính thể tích tứ diện BDMN. Xác định x, y để thể tích tứ diện này bằng $\dfrac{a^3}{4}$.

HD: *a)* $MN = \sqrt{2a^2+(x-y)^2}$ *b)* $V = \dfrac{a^3}{6}(x+y)$, $(x, y) = \left(a;\dfrac{a}{2}\right)$ *hoặc* $\left(\dfrac{a}{2};a\right)$.

Bài 5. Trong mặt phẳng (P), cho hình vuông ABCD cạnh a. Gọi O là giao điểm của 2 đường chéo của hình vuông ABCD. Trên đường thẳng Ox vuông góc (P) lấy điểm S. Gọi α là góc nhọn tạo bởi mặt bên và mặt đáy của hình chóp SABCD.

a) Tính thể tích và diện tích toàn phần của hình chóp SABCD theo a và α.

b) Xác định đường vuông góc chung của SA và CD. Tính độ dài đường vuông góc chung đó theo a và α.

HD: a) $V = \dfrac{a^3}{6}\tan\alpha$, $S_{tp} = a^2\left(1+\dfrac{1}{\cos\alpha}\right)$ b) $d = \dfrac{a\tan\alpha}{\cos\alpha}$

Bài 6. Trên nửa đường tròn đường kính AB = 2R lấy một điểm C tùy ý. Dựng CH vuông góc với AB (H thuộc đoạn AB) và gọi I là trung điểm của CH. Trên nửa đường thẳng It vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại I lấy điểm S sao cho góc $\widehat{ASB} = 90^o$.

a) Chứng minh tam giác SHC là tam giác đều.

b) Đặt AH = h. Tính thể tích V của tứ diện SABC theo h và R.

HD: b) $V = \dfrac{\sqrt{3}}{2}Rh\left(2R-h\right)$

Bài 7. Cho hình vuông ABCD cạnh 2a. Trên đường thẳng d qua trung điểm I của cạnh AB và vuông góc với mặt phẳng (ABCD) lấy điểm E sao cho IE = a. M là điểm thay đổi trên cạnh AB, hạ EH $\perp$ CM. Đặt BM = x.

a) Chứng minh điểm H di động trên một đường tròn. Tính độ dài IH.

b) Gọi J là trung điểm của đoạn CE. Tính độ dài JM và tìm giá trị nhỏ nhất của JM.

HD: a) $IH = \dfrac{2a|x-a|}{\sqrt{4a^2+x^2}}$ b) $JM = \sqrt{\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2+\dfrac{5a^2}{4}}$, $MinJM = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$ khi $x = \dfrac{a}{2}$

Bài 8. Cho hình hộp chữ nhật ABCDA'B'C'D' và điểm M trên cạnh AD. Mặt phẳng (A'BM) cắt đường chéo AC' của hình hộp tại điểm H.

a) Chứng minh rằng khi M thay đổi trên cạnh AD thì đường thẳng MH cắt đường thẳng A'B tại một điểm cố định.

b) Tính tỷ số thể tích của hai khối đa diện tạo bởi mặt phẳng A'BM cắt hình hộp trong trường hợp M là trung điểm của cạnh AD.

c) Giả sử AA' = AB và MB vuông góc với AC. Chứng minh rằng mặt phẳng A'BM vuông góc với AC' và điểm H là trực tâm của tam giác A'BM.

HD: *a) MH cắt A'B tại trung điểm I của A'B.* b) $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{1}{11}$

Bài 9. Cho hình vuông ABCD cạnh bằng a. I là trung điểm AB. Qua I dựng đường vuông góc với mặt phẳng (ABCD) và trên đó lấy điểm S sao cho 2IS = a$\sqrt{3}$.

a) Chứng minh rằng tam giác SAD là tam giác vuông.

b) Tính thể tích khối chóp S.ACD rồi suy ra khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAD).

HD: b) $V = \dfrac{a^3}{12}\sqrt{3}$, $d = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a$

Bài 10. Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có AB = a, AD = 2a, AA' = a.

a) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AD' và B'C.

b) Gọi M là điểm chia trong đoạn AD theo tỷ số $\dfrac{AM}{MD} = 3$. Hãy tính khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (AB'C).

c) Tính thể tích tứ diện AB'D'C.

HD: *a)* $d(AD', B'C) = a$ *b)* $d(M, (AB'C)) = \frac{a}{2}$ *c)* $V = \frac{2a^3}{3}$

Bài 11. Trong mặt phẳng (P), cho một hình vuông ABCD có cạnh bằng a. S là một điểm bất kỳ nằm trên đường thẳng At vuông góc với mặt phẳng (P) tại A.

a) Tính theo a thể tích khối cầu ngoại tiếp chóp S.ABCD khi SA = 2a.

b) M, N lần lượt là hai điểm di động trên các cạnh CB, CD ($M \in CB$, $N \in CD$) và đặt CM = m, CN = n. Tìm một biểu thức liên hệ giữa m và n để các mặt phẳng (SMA) và (SAN) tạo với nhau một góc 45°.

HD: *a)* $V = \pi a^3\sqrt{6}$ *b)* $2a^2 - 2(m+n)a + mn = 0$

Bài 12. Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{2}$. Trên cạnh AD lấy điểm M thay đổi. Đặt góc $\widehat{ACM} = \alpha$. Hạ $SN \perp CM$.

a) Chứng minh N luôn thuộc một đường tròn cố định và tính thể tích tứ diện SACN theo a và α.

b) Hạ $AH \perp SC$, $AK \perp SN$. Chứng minh rằng $SC \perp (AHK)$ và tính độ dài đoạn HK.

HD: *a) N thuộc đường tròn đường kính AC cố định,* $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}\sin 2\alpha$

b) $HK = \frac{a\cos\alpha}{\sqrt{1+\sin^2\alpha}}$

Bài 13. Cho hình chóp S.ABC có các cạnh bên SA, SB, SC đôi một vuông góc. Đặt SA = a, SB = b, SC = c. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC.

a) Tính độ dài đoạn SG theo a, b, c.

b) Một mặt phẳng (P) tuỳ ý đi qua S và G cắt đoạn AB tại M và cắt đoạn AC tại N.

i) Chứng minh rằng $\frac{AB}{AM} + \frac{AC}{AN} = 3$.

ii) Chứng minh rằng mặt cầu đi qua các điểm S, A, B, C có tâm O thuộc mặt phẳng (P). Tính thể tích khối đa diện ASMON theo a, b, c khi mặt phẳng (P) song song với BC

HD: *a)* $SG = \frac{1}{3}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ *b)* $V = \frac{1}{9}abc$

Bài 14. Cho hình vuông ABCD cạnh a. Gọi O là giao điểm hai đường chéo. Trên nửa đường thẳng Ox vuông góc với mặt phẳng chứa hình vuông, ta lấy điểm S sao cho góc $\widehat{SCB} = 60°$.

a) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BC và SD.

b) Gọi (α) là mặt phẳng chứa BC và vuông góc với mặt phẳng (SAD). Tính diện tích thiết diện tạo bởi (α) và hình chóp S.ABCD.

HD: *a)* $d(BC, SD) = \frac{a\sqrt{6}}{3}$ *b)* $S = \frac{a^2\sqrt{6}}{4}$

Bài 15. Cho hình vuông ABCD có cạnh bằng a. Trên cạnh AD lấy điểm M sao cho AM = x $(0 \le x \le a)$. Trên nửa đường thẳng Ax vuông góc với mặt phẳng (ABCD) tại điểm A, lấy điểm S sao cho SA = y (y > 0).

a) Chứng minh rằng $(SAB) \perp (SBC)$.

b) Tính khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (SAC).

c) Tính thể tích khối chóp S.ABCM theo a, y và x.

d) Biết rằng $x^2 + y^2 = a^2$. Tìm giá trị lớn nhất của thể tích khối chóp S.ABCM.

HD: b) $d(M, (SAC)) = \frac{\sqrt{2}x}{2}$ c) $V = \frac{1}{6}ya(a+x)$

d) $MaxV = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}$ khi $x = \frac{a}{2}$

Bài 16. Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại A; $\widehat{ABC} = 30^0$; SBC là tam giác đều cạnh a. Mặt bên SAB vuông góc với đáy ABC. M là trung điểm SB.

a) Chứng minh AM là đoạn vuông góc chung của SB và AC. Tính cosin góc giữa 2 mặt phẳng (SAC) và (ABC).

b) Tính thể tích của hình chóp S.ABC.

HD: a) $\cos\widehat{SAB} = \frac{1}{3}$ b) $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{24}$

Bài 17. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi, góc $\widehat{A} = 120^0$, BD = a > 0. Cạnh bên SA vuông góc với đáy. Góc giữa mặt phẳng (SBC) và đáy bằng 60^0. Một mặt phẳng (P) đi qua BD và vuông góc với cạnh SC. Tính tỉ số thể tích giữa hai phần của hình chóp do mặt phẳng (P) tạo ra khi cắt hình chóp.

HD: $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{12}$

Bài 18. Cho hình hộp đứng ABCD.A'B'C'D' có các cạnh AB = AD = a, AA' = $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ và góc $\widehat{BAD} = 60^0$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh A'D' và A'B'. Chứng minh rằng AC′ vuông góc với mặt phẳng (BDMN). Tính thể tích khối chóp A.BDMN.

HD: $V = \frac{3a^3}{16}$

Bài 19. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật với AB = a, AD = 2a, cạnh SA vuông góc với đáy, cạnh SB tạo với mặt phẳng đáy một góc 60^o. Trên cạnh SA lấy điểm M sao cho AM = $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. Mặt phẳng (BCM) cắt cạnh SD tại điểm N. Tính thể tích khối chóp S.BCNM .

HD: $V = \frac{10\sqrt{3}a^3}{27}$

Bài 20. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh a, góc $\widehat{BAD} = 60^0$, SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD), SA = a. Gọi C' là trung điểm của SC. Mặt phẳng (P) đi qua AC' và song song với BD, cắt các cạnh SB, SD của hình chóp lần lượt tại B', D'. Tính thể tích của khối chóp S.AB'C'D'.

HD: $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{18}$

Chân thành cảm ơn các bạn đồng nghiệp và các em học sinh đã đọc tập tài liệu này.

transitung_tv@yahoo.com