SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO HÀ NỘI
TRƯỜNG THPT PHÙNG KHẮC KHOAN - THẠCH THẤT

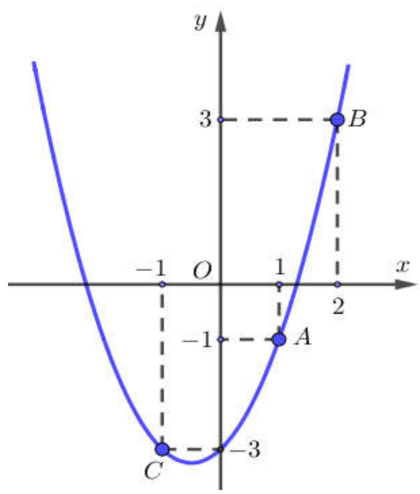
ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TRƯỜNG
CÁC MÔN VĂN HÓA KHỐI 10, 11
NĂM HỌC 2022-2023
ĐỀ THI MÔN: TOÁN HỌC LỚP 10
Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề
(Đề thi gồm 01 trang)

Số báo danh:....................Họ và tên ....

Câu 1 (5,0 điểm):

a)Tìm phương trình parabol $(P): y = ax^2 + bx + c$, biết rằng (P) đi qua ba điểm A, B, C như hình vẽ.



b) Giải phương trình $\sqrt{3x^2 - 4x + 4} = 3x + 2$ trên tập số thực.

Câu 2 (2,5 điểm): Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để bất phương trình

$$(m+1)x^2 - 2(m-1)x + 3m - 8 \leq 0 \text{ đúng với mọi } x \in \mathbb{R}.$$

Câu 3 (5,0 điểm):

a) Cho tam giác *ABC* lấy các điểm *I, J* thỏa mãn $\overrightarrow{IA} = 2\overrightarrow{IB}$ và $3\overrightarrow{JA} + 2\overrightarrow{JC} = \vec{0}$. Chứng minh rằng *IJ* đi qua trọng tâm *G* của tam giác *ABC*.

b) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm $M(-1;2)$ và hai đường thẳng $d_1: x + 2y + 1 = 0$, $d_2: 2x + y + 2 = 0$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua M và cắt d_1 tại A, cắt d_2 tại B sao cho $MA = 2MB$.

Câu 4 (2,5 điểm): Trong mọi tam giác *ABC*, gọi *a, b, c* lần lượt là độ dài các cạnh *BC, AC, AB* và *S* là diện tích tam giác *ABC*. Chứng minh rằng: $\cot A + \cot B + \cot C = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{4S}$.

Câu 5 (2,0 điểm): Cho phương trình $4\sqrt{x^2 - 4x + 5} = x^2 - 4x + 2m - 1$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình có bốn nghiệm thực phân biệt.

Câu 6 (3,0 điểm):

Cho x, y, z là số thực. Chứng minh rằng $x^2 + y^2 + z^2 + x^2y^2z^2 - 4xyz + y^2z^2 - 2yz + 1 \geq 0$.

------------- HẾT -------------

(Thí sinh không dùng tài liệu, cán bộ coi thi không giải thích gì thêm)

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO HÀ NỘI
TRƯỜNG THPT PHÙNG KHẮC KHOAN - THẠCH THẤT

ĐÁP ÁN CHẤM

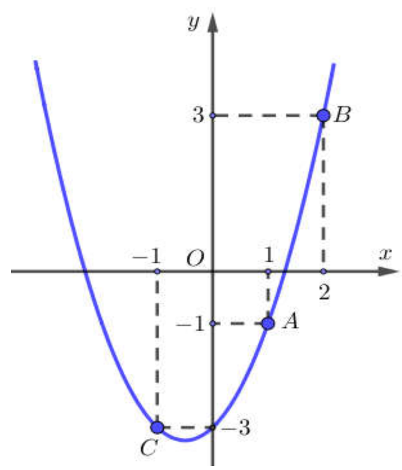
KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TRƯỜNG CÁC MÔN VĂN HÓA KHỐI 10, 11
NĂM HỌC 2022-2023
ĐỀ THI MÔN: TOÁN HỌC LỚP 10
Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề
(Đề thi gồm 01 trang)

I. LƯU Ý CHUNG:

- Hướng dẫn chấm chỉ trình bày một cách giải với những ý cơ bản phải có. Khi chấm bài học sinh làm theo cách khác nếu đúng và đủ ý thì vẫn cho điểm tối đa.

- Điểm toàn bài tính đến 0,25 và không làm tròn.

II. ĐÁP ÁN:

Câu	Nội dung trình bày	Điểm
1.a	**(2,5 điểm)** **a)**Tìm phương trình parabol $(P): y = ax^2 + bx + c$, biết rằng (P) đi qua ba điểm A, B, C như hình vẽ. 	**2,5**
	Dựa vào đồ thị ta có (P) đi qua ba điểm $A(1;-1)$, $B(2;3)$, $C(-1;-3)$.	0,5
	Ta có: $\begin{cases} a.1^2 + b.1 + c = -1 \\ a.2^2 + b.2 + c = 3 \\ a.(-1)^2 + b(-1) + c = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = -3 \end{cases} \Rightarrow (P): y = x^2 + x - 3$	1,75
	Vậy (P) có phương trình là $y = x^2 + x - 3$.	0,25
1.b	**(2,5 điểm)** Giải phương trình $\sqrt{3x^2 - 4x + 4} = 3x + 2$ trên tập số thực.	**2,5**
	Ta có: $\sqrt{3x^2 - 4x + 4} = 3x + 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2 \geq 0 \\ 3x^2 - 4x + 4 = (3x+2)^2 \end{cases}$.	1,0

	$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -\dfrac{2}{3} \\ 6x^2 + 16x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -\dfrac{2}{3} \\ \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -\dfrac{8}{3} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$.	1,25
	Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{0\}$.	0,25
2	**(2,5 điểm):** Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để bất phương trình $(m+1)x^2 - 2(m-1)x + 3m - 8 \le 0$ đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.	**2,5**
	Nếu $m = -1$ thì $f(x) = 4x - 11 \le 0 \Leftrightarrow x \le \dfrac{11}{4}$ không thỏa mãn.	0,5
	Nếu $m \ne -1$ thì $f(x) \le 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \le 0 \\ a < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2m^2 + 3m + 9 \le 0 \\ m + 1 < 0 \end{cases}$.	1,0
	$\Leftrightarrow \begin{cases} m \in \left(-\infty; -\dfrac{3}{2}\right] \cup [3; +\infty) \\ m < -1 \end{cases} \Leftrightarrow m \le -\dfrac{3}{2}$.	0,75
	Vậy $f(x) \le 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m \in \left(-\infty; -\dfrac{3}{2}\right]$.	0,25
3.a	**(3,0 điểm):** Cho tam giác *ABC* lấy các điểm *I, J* thỏa mãn $\overrightarrow{IA} = 2\overrightarrow{IB}$ và $3\overrightarrow{JA} + 2\overrightarrow{JC} = \vec{0}$. Chứng minh rằng *IJ* đi qua trọng tâm *G* của tam giác *ABC*.	**3,0**
	Ta có : $\begin{cases} \overrightarrow{IA} = 2\overrightarrow{IB} \\ 3\overrightarrow{JA} + 2\overrightarrow{JC} = \vec{0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{IA} - 2\overrightarrow{IB} = \vec{0} \\ 3\left(\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IJ}\right) + 2\left(\overrightarrow{IC} - \overrightarrow{IJ}\right) = \vec{0} \end{cases}$.	1,0
	$\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{IA} - 2\overrightarrow{IB} = \vec{0} \\ 3\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IC} = 5\overrightarrow{IJ} \end{cases} \Rightarrow 2\left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}\right) = 5\overrightarrow{IJ}$.	1,0

	$\Leftrightarrow 6\overrightarrow{IG}=5\overrightarrow{IJ}$ (Với G là trọng tâm của tam giác ABC) . Vậy IJ đi qua trọng tâm G của tam giác ABC.	1,0
3.b	(***2,0 điểm***) **:** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho điểm $M\left(-1;2\right)$ và hai đường thẳng $d_1: x+2y+1=0$, $d_2: 2x+y+2=0$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua M và cắt d_1 tại A, cắt d_2 tại B sao cho $MA=2MB$.	**2,0**
	Ta có $\Delta\cap d_1=A$ suy ra $A\in d_1$ nên $A\left(-1-2a;a\right)$, $\Delta\cap d_2=B$ suy ra $B\in d_2$ nên $B\left(b;-2-2b\right)$. Suy ra $\overrightarrow{MA}=\left(-2a;a-2\right)$ và $\overrightarrow{MB}=\left(b+1;-2b-4\right)$.	0,25
	Do Δ qua M nên A, B, M thẳng hàng. Hơn nữa $MA=2MB$, suy ra $\left[\begin{array}{l}\overrightarrow{MA}=2\overrightarrow{MB}\\ \overrightarrow{MA}=-2\overrightarrow{MB}\end{array}\right.$.	0,25
	Với $\overrightarrow{MA}=2\overrightarrow{MB}\Leftrightarrow\begin{cases}-2a=2\left(b+1\right)\\ a-2=2\left(-2b-4\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{2}{3}\\ b=-\dfrac{5}{3}\end{cases}$.	0,25
	Suy ra $A\left(-\dfrac{7}{3};\dfrac{2}{3}\right)$ và $B\left(-\dfrac{5}{3};\dfrac{4}{3}\right)$.	0,25
	Khi đó đường thẳng Δ qua $M\left(-1;2\right)$ và nhận $\overrightarrow{AB}=\left(\dfrac{2}{3};\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{2}{3}.(1;1)$ làm vectơ chỉ phương nên $\Delta: x-y+3=0$.	0,25
	Với $\overrightarrow{MA}=-2\overrightarrow{MB}\Leftrightarrow\begin{cases}-2a=-2\left(b+1\right)\\ a-2=-2\left(-2b-4\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-2\\ b=-3\end{cases}$.	0,25
	Suy ra $A\left(3;-2\right)$ và $B\left(-3;4\right)$.	0,25
	Khi đó đường thẳng Δ qua $M\left(-1;2\right)$ và nhận $\overrightarrow{AB}=\left(-6;6\right)$ làm vectơ chỉ phương nên $\Delta: x+y-1=0$. Vậy có hai đường thẳng cần tìm: $\Delta: x-y+3=0$ hoặc $\Delta: x+y-1=0$.	0,25

4	**(2,5 điểm):** Trong mọi tam giác *ABC*, gọi *a, b, c* lần lượt là độ dài các cạnh *BC, AC, AB* và *S* là diện tích tam giác *ABC*. Chứng minh rằng: $$\cot A+\cot B+\cot C=\frac{a^2+b^2+c^2}{4S}.$$	**2,5**
	Từ giả thiết ta có $VT=\cot A+\cot B+\cot C=\frac{\cos A}{\sin A}+\frac{\cos B}{\sin B}+\frac{coC}{\sin C}$	0,5
	$=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc.\frac{a}{2R}}+\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac.\frac{b}{2R}}+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab.\frac{c}{2R}}$	0,75
	$=\frac{2R(b^2+c^2-a^2)}{2bc.a}+\frac{2R(a^2+c^2-b^2)}{2ac.b}+\frac{2R(a^2+b^2-c^2)}{2ab.c}$	0,5
	$=\frac{R(a^2+b^2+c^2)}{abc}=\frac{a^2+b^2+c^2}{4S}=VP$ (Do S = $\frac{abc}{4R}\Rightarrow\frac{R}{abc}=\frac{1}{4S}$).	0,75
5	**(2,0 điểm):** Cho phương trình $4\sqrt{x^2-4x+5}=x^2-4x+2m-1$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình có bốn nghiệm thực phân biệt.	**2,0**
	PT xác định $\forall x\in\mathbb{R}$. Ta có $4\sqrt{x^2-4x+5}=x^2-4x+2m-1\ (1)\Leftrightarrow x^2-4x+5-4\sqrt{x^2-4x+5}=6-2m$	0,5
	$t=\sqrt{x^2-4x+5}\Rightarrow t\in[1;+\infty)$. Phương trình có dạng $t^2-4t=6-2m\ \ (2)$	0,5
	Phương trình (1) có 4 nghiệm x phân biệt khi phương trình (2) có 2 nghiệm t phân biệt lớn hơn 1.	0,5
	Lập BBT cho hàm số $f(t)=t^2-4t$ trên $[1;+\infty)$ ta có phương trình (2) có 2 nghiệm t phân biệt lớn hơn 1 khi $f(2)<6-2m<f(1)\Leftrightarrow\frac{9}{2}<m<5$	0,5

6	**(3,0 điểm):** Cho x,y,z là số thực. Chứng minh rằng $$x^2+y^2+z^2+x^2y^2z^2-4xyz+y^2z^2-2yz+1\ge 0.$$	**3,0**
	Bất đẳng thức viết lại $\left(1+y^2z^2\right)x^2-4xyz+y^2+z^2+y^2z^2-2yz+1\ge 0$	0,25
	Đặt $f\left(x\right)=\left(1+y^2z^2\right)x^2-4xyz+y^2+z^2+y^2z^2-2yz+1$. Khi đó $f\left(x\right)$ là một tam thức bậc hai ẩn x có hệ số $a=1+y^2z^2>0$; và $\Delta'_x=4y^2z^2-\left(1+y^2z^2\right)\left(y^2+z^2+y^2z^2-2yz+1\right)$.	0,75
	Ta có $\Delta'_x=-(1+y^2-2yz+z^2-2y^2z^2+y^4z^2-2y^3z^3+y^2z^4+y^4z^4)$	0,5
	Áp dụng BĐT $a^2+b^2\ge 2ab$ ta có: $\begin{cases} y^4z^2+y^2z^4\ge 2y^3z^3 \\ y^4z^4+1\ge 2y^2z^2 \\ y^2+z^2\ge 2yz \end{cases}$,	0,75
	Cộng vế với vế lại suy ra $\Delta'_x\le 0$. Do đó $f\left(x\right)\ge 0, \forall x,y,z$. ĐPCM.	0,75