

MỤC LỤC

PHẦN A. CÂU HỎI	1
Dạng 1. Diện tích xung quanh, diện tích toàn phần, chiều cao, bán kính đáy, thiết diện	1
Dạng 2. Thể tích	3
Dạng 3. Khối tròn xoay nội, ngoại tiếp khối đa diện	6
Dạng 4. Bài toán thực tế	8
Dạng 5. Bài toán cực trị	9
PHẦN B. ĐÁP ÁN THAM KHẢO	10
Dạng 1. Diện tích xung quanh, diện tích toàn phần, chiều cao, bán kính đáy, thiết diện	10
Dạng 2. Thể tích	17
Dạng 3. Khối tròn xoay nội, ngoại tiếp khối đa diện	24
Dạng 4. Bài toán thực tế	29
Dạng 5. Bài toán cực trị	32

PHẦN A. CÂU HỎI

Dạng 1. Diện tích xung quanh, diện tích toàn phần, chiều cao, bán kính đáy, thiết diện

- Câu 1.** (KTNL GV THUẬN THÀNH 2 BẮC NINH NĂM 2018-2019) Gọi l, h, r lần lượt là độ dài đường sinh, chiều cao và bán kính mặt đáy của hình nón. Diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón là:
- A. $S_{xq} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. B. $S_{xq} = \pi r l$. C. $S_{xq} = \pi r h$. D. $S_{xq} = 2\pi r l$.
- Câu 2.** (CHUYÊN THÁI BÌNH NĂM 2018-2019 LẦN 03) Cho hình nón có bán kính đáy bằng a , đường cao là $2a$. Tính diện tích xung quanh hình nón?
- A. $2\sqrt{5}\pi a^2$. B. $\sqrt{5}\pi a^2$. C. $2a^2$. D. $5a^2$.
- Câu 3.** (MĐ 104 BGD&ĐT NĂM 2017) Cho hình nón có bán kính đáy $r = \sqrt{3}$ và độ dài đường sinh $l = 4$. Tính diện tích xung quanh của hình nón đã cho.
- A. $S_{xq} = 8\sqrt{3}\pi$ B. $S_{xq} = 12\pi$ C. $S_{xq} = 4\sqrt{3}\pi$ D. $S_{xq} = \sqrt{39}\pi$
- Câu 4.** (ĐỀ THAM KHẢO BGD&ĐT NĂM 2017) Cho hình nón có diện tích xung quanh bằng $3\pi a^2$ và bán kính đáy bằng a . Tính độ dài đường sinh l của hình nón đã cho.
- A. $l = 3a$. B. $l = 2\sqrt{2}a$. C. $l = \frac{3a}{2}$. D. $l = \frac{\sqrt{5}a}{2}$.
- Câu 5.** (ĐỀ THAM KHẢO BGD & ĐT 2018) Cho hình nón có diện tích xung quanh bằng $3\pi a^2$ và có bán kính đáy bằng a . Độ dài đường sinh của hình nón đã cho bằng:
- A. $3a$ B. $2a$ C. $\frac{3a}{2}$ D. $2\sqrt{2}a$

- Câu 6.** (ĐỀ MINH HỌA GBD&ĐT NĂM 2017) Trong không gian, cho tam giác vuông ABC tại A , $AB = a$ và $AC = a\sqrt{3}$. Tính độ dài đường sinh l của hình nón, nhận được khi quay tam giác ABC xung quanh trục AB .
- A. $l = a\sqrt{3}$ B. $l = 2a$ C. $l = a$ D. $l = a\sqrt{2}$
- Câu 7.** (THPT LÊ QUY ĐÔN ĐIỆN BIÊN NĂM 2018-2019 LẦN 01) Một hình nón có thiết diện qua trục là một tam giác vuông cân có cạnh góc vuông bằng a . Tính diện tích xung quanh của hình nón.
- A. $\frac{2\pi a^2 \sqrt{2}}{3}$ B. $\frac{\pi a^2 \sqrt{2}}{4}$ C. $\pi a^2 \sqrt{2}$ D. $\frac{\pi a^2 \sqrt{2}}{2}$
- Câu 8.** (THPT LƯƠNG THẾ VINH HÀ NỘI NĂM 2018-2019 LẦN 1) Cho hình nón có bán kính đáy bằng a và độ dài đường sinh bằng $2a$. Diện tích xung quanh của hình nón đó bằng
- A. $4\pi a^2$ B. $3\pi a^2$ C. $2\pi a^2$ D. $2a^2$
- Câu 9.** (SỞ GIÁO DỤC ĐÀO TẠO VĨNH PHÚC NĂM 2018 - 2019 LẦN 01) Cho hình nón có diện tích xung quanh bằng $3\pi a^2$, bán kính đáy bằng a . Tính độ dài đường sinh của hình nón đó
- A. $2a\sqrt{2}$ B. $\frac{3a}{2}$ C. $2a$ D. $3a$
- Câu 10.** (THPT - YÊN ĐỊNH THANH HÓA 2018 2019- LẦN 2) Cho khối nón (N) có thể tích bằng 4π và chiều cao là 3. Tính bán kính đường tròn đáy của khối nón (N).
- A. 2 B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ C. 1 D. $\frac{4}{3}$
- Câu 11.** (MÃ ĐỀ 123 BGD&ĐT NĂM 2017) Cho một hình nón có chiều cao $h = a$ và bán kính đáy $r = 2a$. Mặt phẳng (P) đi qua S cắt đường tròn đáy tại A và B sao cho $AB = 2\sqrt{3}a$. Tính khoảng cách d từ tâm của đường tròn đáy đến (P).
- A. $d = \frac{\sqrt{3}a}{2}$ B. $d = \frac{\sqrt{5}a}{5}$ C. $d = \frac{\sqrt{2}a}{2}$ D. $d = a$
- Câu 12.** (KSCL THPT NGUYỄN KHUYẾN LẦN 05 NĂM 2018-2019) Cho hình nón đỉnh S, đường cao SO, A và B là hai điểm thuộc đường tròn đáy sao cho khoảng cách từ O đến (SAB) bằng $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ và $\widehat{SAO} = 30^\circ, \widehat{SAB} = 60^\circ$. Độ dài đường sinh của hình nón theo a bằng
- A. $a\sqrt{2}$ B. $a\sqrt{3}$ C. $2a\sqrt{3}$ D. $a\sqrt{5}$
- Câu 13.** (THPT CẨM GIÀNG 2 NĂM 2018-2019) Cho một hình nón có bán kính đáy bằng a và góc ở đỉnh bằng 60° . Tính diện tích xung quanh của hình nón đó.
- A. $S_{xq} = 4\pi a^2$ B. $S_{xq} = \frac{2\sqrt{3}\pi a^2}{3}$ C. $S_{xq} = \frac{4\sqrt{3}\pi a^2}{3}$ D. $S_{xq} = 2\pi a^2$
- Câu 14.** (THPT CẨM GIÀNG 2 NĂM 2018-2019) Cho đoạn thẳng AB có độ dài bằng $2a$, vẽ tia Ax về phía điểm B sao cho điểm B luôn cách tia Ax một đoạn bằng a . Gọi H là hình chiếu của B lên tia Ax , khi tam giác AHB quay quanh trục AB thì đường gấp khúc AHB vẽ thành mặt tròn xoay có diện tích xung quanh bằng:
- A. $\frac{3\sqrt{2}\pi a^2}{2}$ B. $\frac{(3+\sqrt{3})\pi a^2}{2}$ C. $\frac{(1+\sqrt{3})\pi a^2}{2}$ D. $\frac{(2+\sqrt{2})\pi a^2}{2}$

- Câu 15.** (HSG BẮC NINH NĂM 2018-2019) Cho hình nón có chiều cao $h = 20$, bán kính đáy $r = 25$. Một thiết diện đi qua đỉnh của hình nón có khoảng cách từ tâm của đáy đến mặt phẳng chứa thiết diện là 12. Tính diện tích S của thiết diện đó.
 A. $S = 500$ B. $S = 400$ C. $S = 300$ D. $S = 406$
- Câu 16.** (LIÊN TRƯỜNG THPT TP VINH NGHỆ AN NĂM 2018-2019) Cắt hình nón (N) đỉnh S cho trước bởi mặt phẳng qua trục của nó, ta được một tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng $2a\sqrt{2}$. Biết BC là một dây cung đường tròn của đáy hình nón sao cho mặt phẳng (SBC) tạo với mặt phẳng đáy của hình nón một góc 60° . Tính diện tích tam giác SBC .
 A. $\frac{4a^2\sqrt{2}}{3}$ B. $\frac{4a^2\sqrt{2}}{9}$ C. $\frac{2a^2\sqrt{2}}{3}$ D. $\frac{2a^2\sqrt{2}}{9}$
- Câu 17.** (SỞ GD&ĐT HÀ NỘI NĂM 2018-2019) Cho hình nón tròn xoay có chiều cao bằng 4 và bán kính bằng 3. Mặt phẳng (P) đi qua đỉnh của hình nón và cắt hình nón theo thiết diện là một tam giác có độ dài cạnh đáy bằng 2. Diện tích của thiết diện bằng.
 A. $\sqrt{6}$ B. $\sqrt{19}$ C. $2\sqrt{6}$ D. $2\sqrt{3}$
- Câu 18.** (CHUYÊN HẠ LONG NĂM 2018-2019 LẦN 02) Cắt hình nón bằng một mặt phẳng qua trục của nó, ta được một thiết diện là một tam giác vuông cân cạnh bên $a\sqrt{2}$. Tính diện tích toàn phần của hình nón.
 A. $4a^2\pi$ (đvdt). B. $4\sqrt{2}a^2\pi$ (đvdt). C. $a^2\pi(\sqrt{2}+1)$ (đvdt). D. $2\sqrt{2}a^2\pi$ (đvdt).
- Câu 19.** (CHUYÊN KHTN LẦN 2 NĂM 2018-2019) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Tính diện tích toàn phần của vật tròn xoay thu được khi quay tam giác $AA'C$ quanh trục AA' .
 A. $\pi(\sqrt{3}+2)a^2$ B. $2\pi(\sqrt{2}+1)a^2$ C. $2\pi(\sqrt{6}+1)a^2$ D. $\pi(\sqrt{6}+2)a^2$
- Câu 20.** Cho hình nón có chiều cao và bán kính đáy đều bằng 1. Mặt phẳng (P) qua đỉnh của hình nón và cắt đáy theo dây cung có độ dài bằng 1. Khoảng cách từ tâm của đáy tới mặt phẳng (P) bằng
 A. $\frac{\sqrt{7}}{7}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{\sqrt{21}}{7}$
- Câu 21.** (PEN I - THẦY LÊ ANH TUẤN - ĐỀ 3 - NĂM 2019) Cho hình nón đỉnh S , đáy là đường tròn $(O; 5)$. Một mặt phẳng đi qua đỉnh của hình nón cắt đường tròn đáy tại hai điểm A và B sao cho $SA = AB = 8$. Tính khoảng cách từ O đến (SAB) .
 A. $2\sqrt{2}$ B. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ C. $\frac{3\sqrt{2}}{7}$ D. $\frac{\sqrt{13}}{2}$

Dạng 2. Thể tích

- Câu 22.** (Mã 103 - BGD - 2019) Thể tích của khối nón có chiều cao h và có bán kính đáy r là
 A. $2\pi r^2 h$ B. $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ C. $\pi r^2 h$ D. $\frac{4}{3}\pi r^2 h$
- Câu 23.** (MÃ ĐỀ 110 BGD&ĐT NĂM 2017) Cho khối nón có bán kính đáy $r = \sqrt{3}$ và chiều cao $h = 4$. Tính thể tích V của khối nón đã cho.

A. $V = 12\pi$ B. $V = 4\pi$ C. $V = 16\pi\sqrt{3}$ D. $V = \frac{16\pi\sqrt{3}}{3}$

Câu 24. (Mã đề 101 - BGD - 2019) Thể tích của khối nón có chiều cao h và bán kính đáy r là

A. $\frac{4}{3}\pi r^2 h$. B. $2\pi r^2 h$. C. $\frac{1}{3}\pi r^2 h$. D. $\pi r^2 h$.

Câu 25. (Mã đề 104 - BGD - 2019) Thể tích khối nón có chiều cao h và bán kính đáy r là

A. $\frac{1}{3}\pi r^2 h$. B. $\frac{4}{3}\pi r^2 h$. C. $2\pi r^2 h$. D. $\pi r^2 h$.

Câu 26. (Mã 102 - BGD - 2019) Thể tích của khối nón có chiều cao h và bán kính đáy r là

A. $\frac{4}{3}\pi r^2 h$. B. $\pi r^2 h$. C. $2\pi r^2 h$. D. $\frac{1}{3}\pi r^2 h$.

Câu 27. (CHUYÊN QUỐC HỌC HUẾ NĂM 2018-2019 LẦN 1) Cho khối nón có bán kính đáy $r = 3$, chiều cao $h = \sqrt{2}$. Tính thể tích V của khối nón.

A. $V = \frac{3\pi\sqrt{2}}{3}$ B. $V = 3\pi\sqrt{11}$ C. $V = \frac{9\pi\sqrt{2}}{3}$ D. $V = 9\pi\sqrt{2}$

Câu 28. (CHUYÊN ĐHSPT HÀ NỘI NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho tam giác ABC vuông tại A , $AB = c$, $AC = b$. Quay tam giác ABC xung quanh đường thẳng chứa cạnh AB ta được một hình nón có thể tích bằng

A. $\frac{1}{3}\pi bc^2$. B. $\frac{1}{3}\pi bc^2$. C. $\frac{1}{3}\pi b^2 c$. D. $\frac{1}{3}\pi b^2 c$.

Câu 29. Cho khối (N) có bán kính đáy bằng 3 và diện tích xung quanh bằng 15π . Tính thể tích V của khối nón (N)

A. $V = 12\pi$. B. $V = 20\pi$. C. $V = 36\pi$. D. $V = 60\pi$.

Câu 30. (CHUYÊN LƯƠNG THẾ VINH ĐỒNG NAI NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho hình nón có độ dài đường sinh bằng 25 và bán kính đường tròn đáy bằng 15. Tính thể tích của khối nón đó.

A. 1500π . B. 4500π . C. 375π . D. 1875π .

Câu 31. (MĐ 105 BGD&ĐT NĂM 2017) Trong không gian cho tam giác ABC vuông tại A , $AB = a$ và $\widehat{ACB} = 30^\circ$. Tính thể tích V của khối nón nhận được khi quay tam giác ABC quanh cạnh AC .

A. $V = \pi a^3$ B. $V = \sqrt{3}\pi a^3$ C. $V = \frac{\sqrt{3}\pi a^3}{9}$ D. $V = \frac{\sqrt{3}\pi a^3}{3}$

Câu 32. (ĐỀ THAM KHẢO BGD&ĐT NĂM 2018-2019) Cho khối nón có độ dài đường sinh bằng $2a$ và bán kính đáy bằng a . Thể tích của khối nón đã cho bằng

A. $\frac{\sqrt{3}\pi a^3}{3}$. B. $\frac{\sqrt{3}\pi a^3}{2}$. C. $\frac{2\pi a^3}{3}$. D. $\frac{\pi a^3}{3}$

Câu 33. (THPT CHUYÊN BẮC GIANG NAM 2018-2019 LẦN 01) Cho khối nón có bán kính đáy $r = 2$, chiều cao $h = \sqrt{3}$. Thể tích của khối nón là

A. $\frac{4\pi\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{4\pi}{3}$. C. $\frac{2\pi\sqrt{3}}{3}$. D. $4\pi\sqrt{3}$.

Câu 34. (KTNL GIA BÌNH NĂM 2018-2019) Cho khối nón tròn xoay có chiều cao và bán kính đáy cùng bằng a . Khi đó thể tích khối nón là

A. $\frac{4}{3}\pi a^3$. B. $\frac{2}{3}\pi a^3$. C. πa^3 . D. $\frac{1}{3}\pi a^3$.

Câu 35. (THPT CHUYÊN VĨNH PHÚC LẦN 02 NĂM 2018-2019) Cho khối nón có bán kính đáy $r = \sqrt{3}$ và chiều cao $h = 4$. Tính thể tích V của khối nón đã cho.

A. $V = 16\pi\sqrt{3}$ B. $V = \frac{16\pi\sqrt{3}}{3}$ C. $V = 12\pi$ D. $V = 4\pi$

Câu 36. (KSCL THPT NGUYỄN KHUYẾN LẦN 05 NĂM 2018-2019) Tính thể tích của hình nón có góc ở đỉnh bằng 60° và diện tích xung quanh bằng $6\pi a^2$.

A. $V = \frac{3\pi a^3 \sqrt{2}}{4}$ B. $V = 3\pi a^3$ C. $V = \frac{3\pi a^3 \sqrt{2}}{4}$ D. $V = \pi a^3$

Câu 37. (THPT CHUYÊN THÁI NGUYÊN LẦN 01 NĂM 2018-2019) Cho tam giác ABC vuông tại A , cạnh $AB = 6$, $AC = 8$ và M là trung điểm của cạnh AC . Khi đó thể tích của khối tròn xoay do tam giác BMC quanh quanh AB là

A. 86π B. 106π C. 96π D. 98π

Câu 38. (CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN ĐIỆN BIÊN LẦN 3 NĂM 2018-2019) Cho hình nón có bán kính đáy bằng 2 cm, góc ở đỉnh bằng 60° . Tính thể tích của khối nón đó.

A. $\frac{8\sqrt{3}\pi}{9}\text{cm}^3$. B. $8\sqrt{3}\pi\text{cm}^3$. C. $\frac{8\sqrt{3}\pi}{3}\text{cm}^3$. D. $\frac{8\pi}{3}\text{cm}^3$.

Câu 39. (ĐỀ GK2 VIỆT ĐỨC HÀ NỘI NĂM 2018-2019) Cho tam giác ABC vuông tại A , $AB = 6\text{cm}$, $AC = 8\text{cm}$. Gọi V_1 là thể tích khối nón tạo thành khi quay tam giác ABC quanh cạnh AB và V_2 là thể tích khối nón tạo thành khi quay tam giác ABC quanh cạnh AC . Khi đó, tỷ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng:

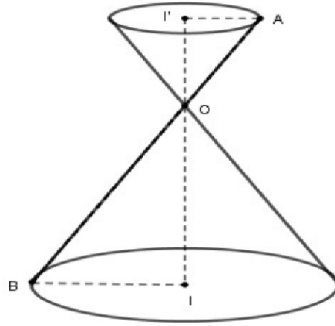
A. $\frac{3}{4}$. B. $\frac{4}{3}$. C. $\frac{16}{9}$. D. $\frac{9}{16}$.

Câu 40. (ĐỀ GK2 VIỆT ĐỨC HÀ NỘI NĂM 2018-2019) Cho hình nón N_1 đỉnh S đáy là đường tròn $C(O; R)$, đường cao $SO = 40\text{cm}$. Người ta cắt nón bằng mặt phẳng vuông góc với trục để được nón nhỏ N_2 có đỉnh

S và đáy là đường tròn $C'(O'; R')$. Biết rằng tỷ số thể tích $\frac{V_{N_2}}{V_{N_1}} = \frac{1}{8}$. Tính độ dài đường cao nón N_2 .

A. 20cm . B. 5cm . C. 10cm . D. 49cm .

Câu 41. (THPT LÊ QUÝ ĐÔN ĐIỆN BIÊN NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho một đồng hồ cát như bên dưới (gồm hai hình nón chung đỉnh ghép lại), trong đó đường sinh bất kỳ của hình nón tạo với đáy một góc 60° . Biết rằng chiều cao của đồng hồ là 30cm và tổng thể tích của đồng hồ là $1000\pi\text{cm}^3$. Hỏi nếu cho đầy lượng cát vào phần bên trên thì khi chảy hết xuống dưới, tỷ số thể tích lượng cát chiếm chỗ và thể tích phần phía dưới là bao nhiêu?



- A. $\frac{1}{64}$ B. $\frac{1}{8}$ C. $\frac{1}{27}$ D. $\frac{1}{3\sqrt{3}}$

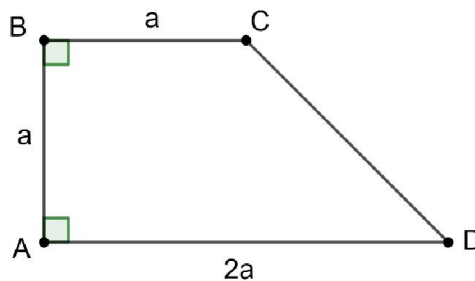
Câu 42. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 2, AD = 2\sqrt{3}$ và nằm trong mặt phẳng (P) . Quay (P) một vòng quanh đường thẳng BD . Khối tròn xoay được tạo thành có thể tích bằng

- A. $\frac{28\pi}{9}$ B. $\frac{28\pi}{3}$ C. $\frac{56\pi}{9}$ D. $\frac{56\pi}{3}$

Câu 43. (CHUYÊN NGUYỄN TRÃI HẢI DƯƠNG NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 2, AD = 2\sqrt{3}$ và nằm trong mặt phẳng (P) . Quay (P) một vòng quanh đường thẳng BD . Khối tròn xoay được tạo thành có thể tích bằng

- A. $\frac{28\pi}{9}$ B. $\frac{28\pi}{3}$ C. $\frac{56\pi}{9}$ D. $\frac{56\pi}{3}$

Câu 44. (CỤM 8 TRƯỜNG CHUYÊN LẦN 1) Cho hình thang $ABCD$ có $\hat{A} = \hat{B} = 90^\circ, AB = BC = a, AD = 2a$. Tính thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay hình thang $ABCD$ xung quanh trục CD .



- A. $\frac{7\sqrt{2}\pi a^3}{6}$ B. $\frac{7\sqrt{2}\pi a^3}{12}$ C. $\frac{7\pi a^3}{6}$ D. $\frac{7\pi a^3}{12}$

Câu 45. (KTNL GV THPT LÝ THÁI TÔ NĂM 2018-2019) Cho hình tứ diện $ABCD$ có $AD \perp (ABC)$, ABC là tam giác vuông tại B . Biết $BC = 2(cm), AB = 2\sqrt{3}(cm), AD = 6(cm)$. Quay các tam giác ABC và ABD (bao gồm cả điểm bên trong 2 tam giác) xung quanh đường thẳng AB ta được 2 khối tròn xoay. Thể tích phần chung của 2 khối tròn xoay đó bằng

- A. $\sqrt{3}\pi(cm^3)$ B. $\frac{5\sqrt{3}}{2}\pi(cm^3)$ C. $\frac{3\sqrt{3}}{2}\pi(cm^3)$ D. $\frac{64\sqrt{3}}{3}\pi(cm^3)$

Dạng 3. Khối tròn xoay nội, ngoại tiếp khối đa diện

- Câu 46.** (MÃ ĐỀ 123 BGD&ĐT NĂM 2017) Trong hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đều bằng $a\sqrt{2}$. Tính thể tích V của khối nón đỉnh S và đường tròn đáy là đường tròn nội tiếp tứ giác $ABCD$
- A. $V = \frac{\sqrt{2}\pi a^3}{2}$ B. $V = \frac{\pi a^3}{2}$ C. $V = \frac{\pi a^3}{6}$ D. $V = \frac{\sqrt{2}\pi a^3}{6}$
- Câu 47.** (MÃ ĐỀ 110 BGD&ĐT NĂM 2017) Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng $3a$. Hình nón (N) có đỉnh A có đáy là đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD . Tính diện tích xung quanh S_{xq} của (N) .
- A. $S_{xq} = 12\pi a^2$ B. $S_{xq} = 6\pi a^2$ C. $S_{xq} = 3\sqrt{3}\pi a^2$ D. $S_{xq} = 6\sqrt{3}\pi a^2$
- Câu 48.** (THPT CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG NAM ĐỊNH NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh a . Một khối nón có đỉnh là tâm của hình vuông $ABCD$ và đáy là hình tròn nội tiếp hình vuông $A'B'C'D'$. Diện tích toàn phần của khối nón đó là
- A. $S_{tp} = \frac{\pi a^2}{2}(\sqrt{3} + 2)$ B. $S_{tp} = \frac{\pi a^2}{4}(\sqrt{5} + 1)$ C. $S_{tp} = \frac{\pi a^2}{4}(\sqrt{5} + 2)$ D. $S_{tp} = \frac{\pi a^2}{2}(\sqrt{3} + 1)$
- Câu 49.** (THPT CHUYÊN VĨNH PHÚC NĂM 2018-2019 LẦN 02) Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a , góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng 60° . Tính diện tích xung quanh của hình nón đỉnh S , đáy là hình tròn ngoại tiếp tam giác ABC .
- A. $\frac{\pi a^2 \sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{\pi a^2 \sqrt{7}}{6}$ C. $\frac{\pi a^2 \sqrt{7}}{4}$ D. $\frac{\pi a^2 \sqrt{10}}{8}$
- Câu 50.** (MĐ 105 BGD&ĐT NĂM 2017) Cho hình nón (N) có đường sinh tạo với đáy một góc 60° . Mặt phẳng qua trục của (N) cắt (N) được thiết diện là một tam giác có bán kính đường tròn nội tiếp bằng 1. Tính thể tích V của khối nón giới hạn bởi (N) .
- A. $V = 9\pi$ B. $V = 3\sqrt{3}\pi$ C. $V = 9\sqrt{3}\pi$ D. $V = 3\pi$
- Câu 51.** (THPT CHUYÊN VĨNH PHÚC LẦN 02 NĂM 2018-2019) Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a , góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng 60° . Tính diện tích xung quanh của hình nón đỉnh S , đáy là hình tròn ngoại tiếp tam giác ABC .
- A. $\frac{\pi a^2 \sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{\pi a^2 \sqrt{7}}{6}$ C. $\frac{\pi a^2 \sqrt{7}}{4}$ D. $\frac{\pi a^2 \sqrt{10}}{8}$
- Câu 52.** (THCS - THPT NGUYỄN KHUYẾN NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có độ dài cạnh đáy là a và (N) là hình nón có đỉnh là S với đáy là đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABCD$. Tỷ số thể tích của khối chóp $S.ABCD$ và khối nón (N) là
- A. $\frac{\pi}{4}$ B. $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{2}{\pi}$ D. $\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$
- Câu 53.** (THPT NGÔ SĨ LIÊN BẮC GIANG NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $2a$, cạnh bên tạo với đáy góc 45° . Thể tích khối nón ngoại tiếp hình chóp trên là:
- A. $\frac{8}{3}\pi a^3 \sqrt{3}$ B. $\frac{2}{3}\pi a^3 \sqrt{3}$ C. $2\pi a^3 \sqrt{2}$ D. $\frac{2}{3}\pi a^3 \sqrt{2}$
- Câu 54.** (SỞ GD&ĐT BẮC NINH NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, tứ giác $ABCD$ là hình thang vuông với cạnh đáy AD, BC . $AD = 3CB = 3a$, $AB = a$

, $SA = a\sqrt{3}$. Điểm I thỏa mãn $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AI}$, M là trung điểm SD , H là giao điểm của AM và SI . Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của A lên SB, SC . Tính thể tích V của khối nón có đáy là đường tròn ngoại tiếp tam giác EFH và đỉnh thuộc mặt phẳng $(ABCD)$.

A. $V = \frac{\pi a^3}{5\sqrt{5}}$.

B. $V = \frac{\pi a^3}{2\sqrt{5}}$.

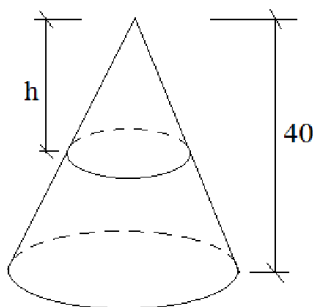
C. $V = \frac{\pi a^3}{\sqrt{5}}$.

D. $V = \frac{\pi a^3}{10\sqrt{5}}$.

Dạng 4. Bài toán thực tế

Câu 55. (CHUYÊN BẮC GIANG NĂM 2018-2019 LẦN 02)

40cm. Người ta cắt vật N_1 bằng một mặt cắt song song với mặt đáy của nó để được một hình nón nhỏ N_2 có thể tích bằng $\frac{1}{8}$



thể tích N_1 . Tính chiều cao h của hình nón N_2 ?

A. 10cm

B. 20cm

C. 40cm

D. 5cm

Câu 56. (TOÁN HỌC TUỔI TRẺ NĂM 2018 - 2019 LẦN 01) Cho một tấm bìa hình dạng tam giác vuông, biết b và c là độ dài cạnh tam giác vuông của tấm một khối tròn xoay. Hỏi thể tích V của khối tròn xoay sinh ra bởi tấm bìa bằng bao nhiêu?

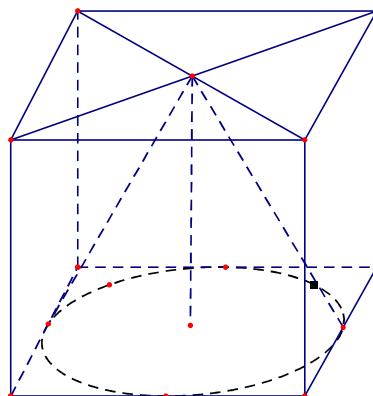
A. $V = \frac{b^2 c^2}{3\sqrt{b^2 + c^2}}$.

B. $V = \frac{\pi b^2 c^2}{3\sqrt{b^2 + c^2}}$.

C. $V = \frac{2\pi b^2 c^2}{3\sqrt{b^2 + c^2}}$.

D. $V = \frac{\pi b^2 c^2}{3\sqrt{2(b^2 + c^2)}}$.

Câu 57. Một chiếc thùng chứa đầy nước có hình một khối lập phương. Đặt vào trong thùng đó một khối nón sao cho đỉnh khối nón trùng với tâm một mặt của khối lập phương, đáy khối nón tiếp xúc với các cạnh của mặt đối diện. Tính tỉ số thể tích của lượng nước trào ra ngoài và lượng nước còn lại ở trong thùng.



A. $\frac{\pi}{12 - \pi}$.

B. $\frac{1}{11}$.

C. $\frac{\pi}{12}$.

D. $\frac{11}{12}$.

Câu 58. (THPT BẠCH ĐẰNG QUẢNG NINH NĂM 2018-2019) Một cái phễu có dạng hình nón. Người ta đổ một lượng nước vào phễu sao cho chiều cao của lượng nước trong phễu bằng $\frac{1}{3}$ chiều cao của phễu. Hỏi nếu bịt kín miệng phễu rồi lật ngược phễu lên thì chiều cao của mực nước xấp xỉ bằng bao nhiêu? Biết rằng chiều cao của phễu là 15cm.

- A. 0,501(cm). B. 0,302(cm). C. 0,216(cm). D. 0,188(cm).

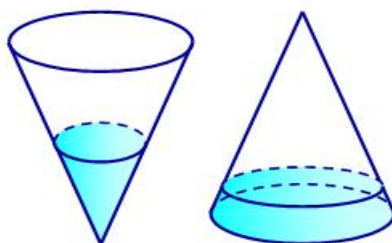
Câu 59. (CHUYÊN HÙNG VƯƠNG GIA LAI NĂM 2018-2019 LẦN 01) Hai hình nón bằng nhau có chiều cao bằng 2 dm được đặt như hình vẽ bên (mỗi hình đều đặt thẳng đứng với đỉnh nằm phía dưới). Lúc đầu, hình nón trên chứa đầy nước và hình nón dưới không chứa nước. Sau đó, nước được chảy xuống hình nón dưới thông qua lỗ trống ở đỉnh của hình nón trên. Hãy tính chiều cao của nước trong hình nón dưới tại thời điểm khi mà chiều cao của nước trong hình nón trên bằng 1 dm.

- A. $\sqrt[3]{7}$. B. $\frac{1}{3}$. C. $\sqrt[3]{5}$. D. $\frac{1}{2}$.

Câu 60. (CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU NGHỆ AN NĂM 2018-2019 LẦN 02) Tại trung tâm thành phố người ta tạo điểm nhấn bằng cột trang trí hình nón có kích thước như sau: chiều dài đường sinh $l = 10$ m, bán kính đáy $R = 5$ m. Biết rằng tam giác SAB là thiết diện qua trục của hình nón và C là trung điểm của SB . Trang trí một hệ thống đèn điện từ chạy từ A đến C trên mặt nón. Xác định giá trị ngắn nhất của chiều dài dây đèn điện từ.

- A. 15 m. B. 10 m. C. $5\sqrt{3}$ m. D. $5\sqrt{5}$ m.

Câu 61. (ĐỀ 04 VTED NĂM 2018-2019) Một cái phễu có dạng hình nón, chiều cao của phễu là 20cm. Người ta đổ một lượng nước vào phễu sao cho chiều cao của cột nước trong phễu là 10cm. Nếu bịt kín miệng phễu rồi lật ngược lên chiều cao của cột nước trong phễu gần nhất với giá trị nào sau đây.



- A. 1,07cm. B. 0,97cm. C. 0,67cm. D. 0,87cm.

Dạng 5. Bài toán cực trị

Câu 62. Giả sử đồ thị hàm số $y = (m^2 + 1)x^4 - 2mx^2 + m^2 + 1$ có 3 điểm cực trị là A, B, C mà $x_A < x_B < x_C$. Khi quay tam giác ABC quanh cạnh AC ta được một khối tròn xoay. Giá trị của m để thể tích của khối tròn xoay đó lớn nhất thuộc khoảng nào trong các khoảng dưới đây:

- A. (4; 6). B. (2; 4). C. (-2; 0). D. (0; 2).

Câu 63. Khi cắt hình nón có chiều cao 16 cm và đường kính đáy 24 cm bởi một mặt phẳng song song với đường sinh của hình nón ta thu được thiết diện có diện tích lớn nhất gần với giá trị nào sau đây?

- A. 170. B. 260. C. 294. D. 208.

Câu 64. Một hình nón tròn xoay có đường sinh $2a$. Thể tích lớn nhất của khối nón đó là

- A. $\frac{16\pi a^3}{3\sqrt{3}}$. B. $\frac{16\pi a^3}{9\sqrt{3}}$. C. $\frac{4\pi a^3}{3\sqrt{3}}$. D. $\frac{8\pi a^3}{3\sqrt{3}}$.

Câu 65. (CỤM LIÊN TRƯỜNG HẢI PHÒNG NĂM 2018-2019 LẦN 01) Huyền có một tấm bìa như hình vẽ, Huyền muốn biến đường tròn đó thành một cái phễu hình nón. Khi đó Huyền phải cắt bỏ hình quạt tròn AOB rồi dán OA , OB lại với nhau. Gọi x là góc ở tâm hình quạt tròn dùng làm phễu. Tìm x để thể tích phễu lớn nhất?

- A. $\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{\pi}{2}$ D. $\frac{\pi}{4}$

Câu 66. (CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU NĂM 2018-2019) Tại trung tâm một thành phố người ta tạo điểm nhân bằng cột trang trí hình nón có kích thước như sau: đường sinh $l = 10m$, bán kính đáy $R = 5m$. Biết rằng tam giác SAB là thiết diện qua trục của hình nón và C là trung điểm của SB . Trang trí một hệ thống đèn điện từ chạy từ A đến C trên mặt nón. Định giá trị ngắn nhất của chiều dài dây đèn điện từ.

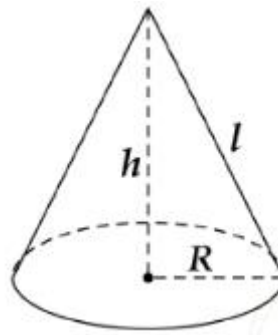
- A. $15m$. B. $10m$. C. $5\sqrt{3}m$. D. $5\sqrt{5}m$.

PHẦN B. ĐÁP ÁN THAM KHẢO

Dạng 1. Diện tích xung quanh, diện tích toàn phần, chiều cao, bán kính đáy, thiết diện

Câu 1. Chọn B

Diện tích xung quanh của hình nón là $S_{xq} = \pi rl$.



Câu 2.

Ta có $S_{xq} = \pi Rl = \pi a\sqrt{a^2 + 4a^2} = \sqrt{5}\pi a^2$ (đvdt).

Câu 3. Chọn C

Diện tích xung quanh của hình nón là: $S_{xq} = \pi rl = 4\sqrt{3}\pi$.

Câu 4. Chọn A

Diện tích xung quanh của hình nón là: $S_{xq} = \pi rl = \pi al = 3\pi a^2 \Rightarrow l = 3a$.

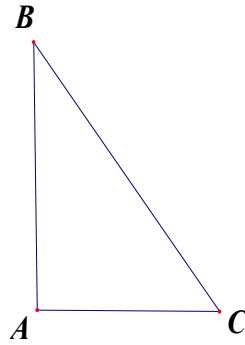
Câu 5.

Lời giải

Chọn A

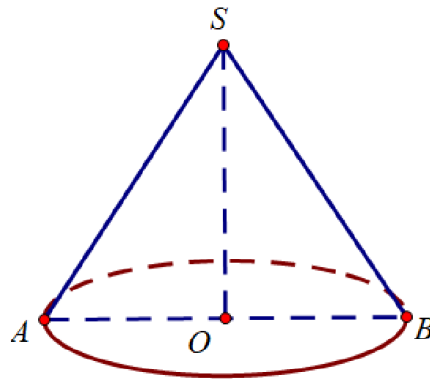
Diện tích xung quanh hình nón: $S_{xq} = \pi rl$ với $r = a \Rightarrow \pi \cdot a \cdot l = 3\pi a^2 \Rightarrow l = 3a$.

Câu 6. Chọn B



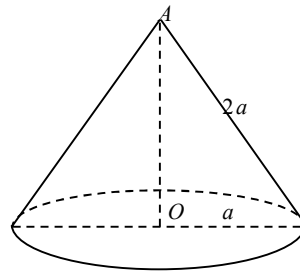
Xét tam giác ABC vuông tại A ta có $BC^2 = AC^2 + AB^2 = 4a^2 \Leftrightarrow BC = 2a$
 Đường sinh của hình nón cũng chính là cạnh huyền của tam giác $\Leftrightarrow l = BC = 2a$.

Câu 7. Chọn D



Ta có tam giác SAB vuông cân tại S có $SA = a$.

Khi đó: $R = OA = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $l = SA = a$. Nên $S_{xq} = \pi Rl = \pi \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot a = \frac{\pi a^2 \sqrt{2}}{2}$.



Câu 8.

Ta có: $S_{xq} = \pi r l = \pi \cdot a \cdot 2a = 2\pi a^2$.

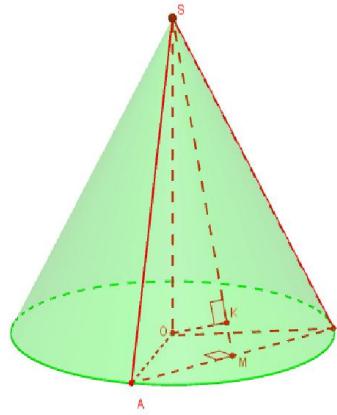
Câu 9. $S_{xq} = \pi R l \Rightarrow l = \frac{S_{xq}}{\pi R} = \frac{3\pi a^2}{\pi a} = 3a$.

Câu 10. Thể tích của khối nón được tính bởi công thức $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$ (R là bán kính đáy, h là độ dài đường cao của khối chóp).

Theo bài ra: $V = 4\pi, h = 3$ nên ta có $4\pi = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot 3 \Leftrightarrow R^2 = 4 \Leftrightarrow R = 2$.

Vậy $R = 2$.

Câu 11. Chọn C

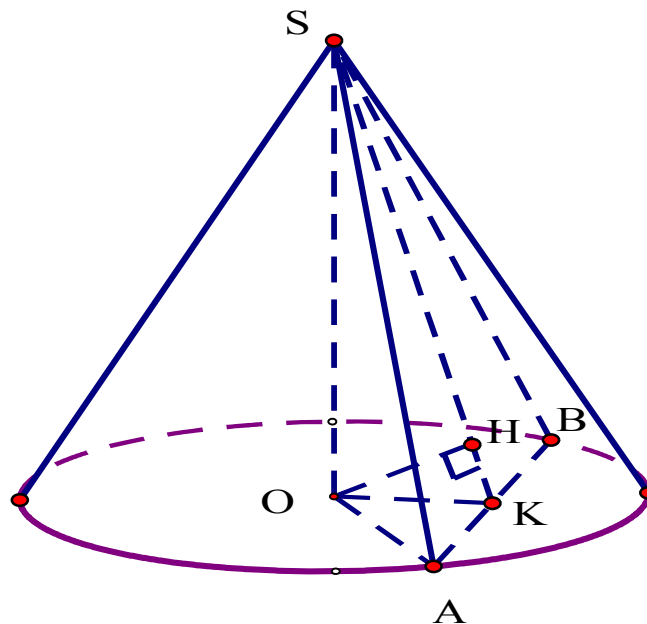


Có $(P) \equiv (SAB)$.

Ta có $SO = a = h, OA = OB = r = 2a, AB = 2a\sqrt{3}$, gọi M là hình chiếu của O lên AB suy ra M là trung điểm AB , gọi K là hình chiếu của O lên SM suy ra $d(O; (SAB)) = OK$.

Ta tính được $OM = \sqrt{OA^2 - MA^2} = a$ suy ra SOM là tam giác vuông cân tại O , suy ra K là trung điểm của SM nên $OK = \frac{SM}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Câu 12. Chọn A



Gọi K là trung điểm của AB ta có $OK \perp AB$ vì tam giác OAB cân tại O

Mà $SO \perp AB$ nên $AB \perp (SOK) \Rightarrow (SOK) \perp (SAB)$ mà $\Rightarrow (SOK) \cap (SAB) = SK$ nên từ O dựng $OH \perp SK$ thì $OH \perp (SAB) \Rightarrow OH = d(O, (SAB))$

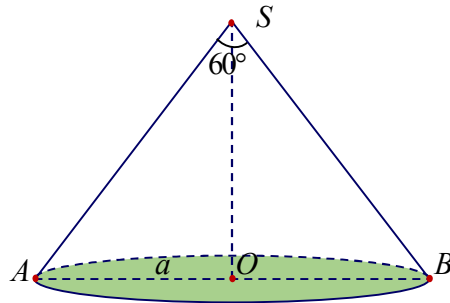
Xét tam giác SAO ta có: $\sin \widehat{SAO} = \frac{SO}{SA} \Rightarrow SO = \frac{SA}{2}$

Xét tam giác SAB ta có: $\sin \widehat{SAB} = \frac{SK}{SA} \Rightarrow SK = \frac{SA\sqrt{3}}{2}$

Xét tam giác SOK ta có: $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OK^2} + \frac{1}{OS^2} = \frac{1}{SK^2 - SO^2} + \frac{1}{SO^2}$

$$\Rightarrow \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{\frac{SA^2}{4}} + \frac{1}{\frac{3SA^2}{4} - \frac{SA^2}{4}} = \frac{4}{SA^2} + \frac{2}{SA^2} \Rightarrow \frac{6}{SA^2} = \frac{3}{a^2} \Rightarrow SA = 2a^2 \Rightarrow SA = a\sqrt{2}$$

Câu 13.

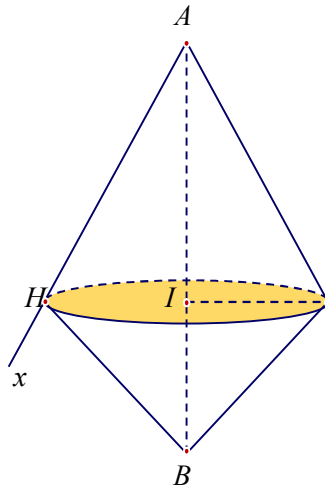


Giả sử hình nón có đỉnh là S , O là tâm của đường tròn đáy và AB là một đường kính của đáy.

$r = OA = a$, $\widehat{ASB} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{ASO} = 30^\circ$.

Độ dài đường sinh là $l = SA = \frac{OA}{\sin 30^\circ} = 2a$.

Vậy diện tích xung quanh của hình nón là $S_{xq} = \pi r l = \pi \cdot a \cdot 2a = 2\pi a^2$.



Câu 14.

Xét tam giác AHB vuông tại H . Ta có $AH = \sqrt{AB^2 - HB^2} = a\sqrt{3}$

Xét tam giác AHB vuông tại H , $HI \perp AB$ tại I ta có $HI = \frac{AH \cdot HB}{AB} = \frac{a\sqrt{3} \cdot a}{2a} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Khi tam giác AHB quay quanh trục AB thì đường gấp khúc AHB vẽ thành mặt tròn xoay (có diện tích xung quanh là S) là hợp của hai mặt xung quanh của hình nón (N_1) và (N_2).

Trong đó:

(N_1) là hình nón có được do quay tam giác AHI quanh trục AI có diện tích xung quanh là

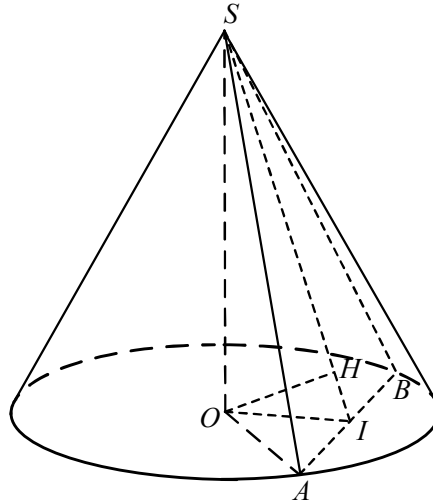
$$S_1 = \pi \cdot HI \cdot AH = \pi \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a\sqrt{3} = \frac{3\pi a^2}{2}$$

(N_2) là hình nón có được do quay tam giác BHI quanh trục BI có diện tích xung quanh là

$$S_2 = \pi \cdot HI \cdot BH = \pi \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a = \frac{\sqrt{3}\pi a^2}{2}$$

$$\Rightarrow S = S_1 + S_2 = \frac{3\pi a^2}{2} + \frac{\sqrt{3}\pi a^2}{2} = \frac{(3 + \sqrt{3})\pi a^2}{2}.$$

Câu 15. Giả sử hình nón đỉnh S , tâm đáy O và có thiết diện qua đỉnh thỏa mãn yêu cầu bài toán là $\triangle SAB$ (hình vẽ).



Ta có SO là đường cao của hình nón. Gọi I là trung điểm của $AB \Rightarrow OI \perp AB$.

Gọi H là hình chiếu của O lên $SI \Rightarrow OH \perp SI$.

Ta chứng minh được $OH \perp (SAB) \Rightarrow OH = 12$.

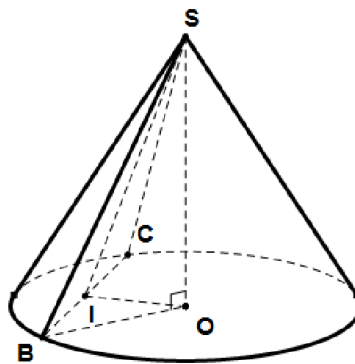
$$\text{Xét tam giác vuông } SOI \text{ có } \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OS^2} + \frac{1}{OI^2} \Rightarrow \frac{1}{OI^2} = \frac{1}{OH^2} - \frac{1}{OS^2} = \frac{1}{12^2} - \frac{1}{20^2} = \frac{1}{225}.$$

$$\Rightarrow OI^2 = 225 \Rightarrow OI = 15.$$

$$\text{Xét tam giác vuông } SOI \text{ có } SI = \sqrt{OS^2 + OI^2} = \sqrt{20^2 + 15^2} = 25.$$

$$\text{Xét tam giác vuông } OIA \text{ có } IA = \sqrt{OA^2 - OI^2} = \sqrt{25^2 - 15^2} = 20 \Rightarrow AB = 40.$$

$$\text{Ta có } S = S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot SI = \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 25 = 500.$$



Câu 16.

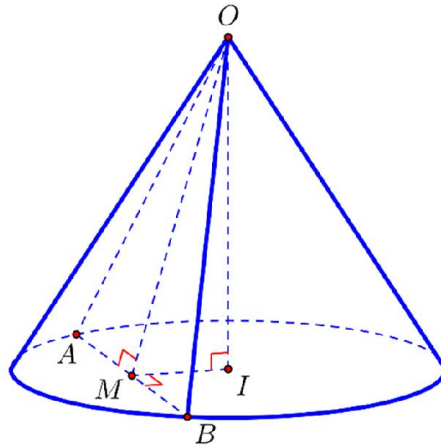
Thiết diện qua trục của hình nón là tam giác vuông cân, suy ra $r = SO = a\sqrt{2}$

Ta có góc giữa mặt phẳng (SBC) tạo với đáy bằng góc $\widehat{SIO} = 60^\circ$

$$\text{Trong tam giác } SIO \text{ vuông tại } O \text{ có } SI = \frac{SO}{\sin \widehat{SIO}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}a \text{ và } OI = SI \cdot \cos \widehat{SIO} = \frac{\sqrt{6}}{3}a$$

$$\text{Mà } BC = 2\sqrt{r^2 - OI^2} = \frac{4\sqrt{3}}{3}a$$

$$\text{Diện tích tam giác } SBC \text{ là } S = \frac{1}{2}SI \cdot BC = \frac{4a^2\sqrt{2}}{3}$$



Câu 17.

Ta có: $h = OI = 4, R = IA = IB = 3, AB = 2$.

Gọi M là trung điểm AB $\Rightarrow MI \perp AB \Rightarrow AB \perp (SMI) \Rightarrow AB \perp SM$.

Lại có: $SB = \sqrt{OI^2 + IB^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5; SM = \sqrt{SB^2 - MB^2} = \sqrt{5^2 - 1^2} = 2\sqrt{6}$.

Vậy: $S_{\Delta SAB} = \frac{1}{2} \cdot SM \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{6} \cdot 2 = 2\sqrt{6}$.

Câu 18. Giả sử hình nón đã cho có độ dài đường sinh l , bán kính đáy là R .

Thiết diện của hình nón qua trục là tam giác OAB vuông cân tại O và $OA = a\sqrt{2}$.

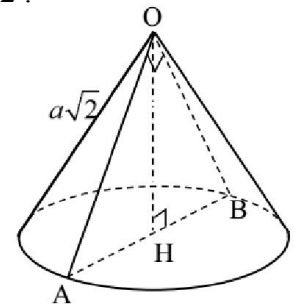
Áp dụng định lý Pitago trong tam giác vuông cân OAB ta có:

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 = 4a^2 \Rightarrow AB = 2a.$$

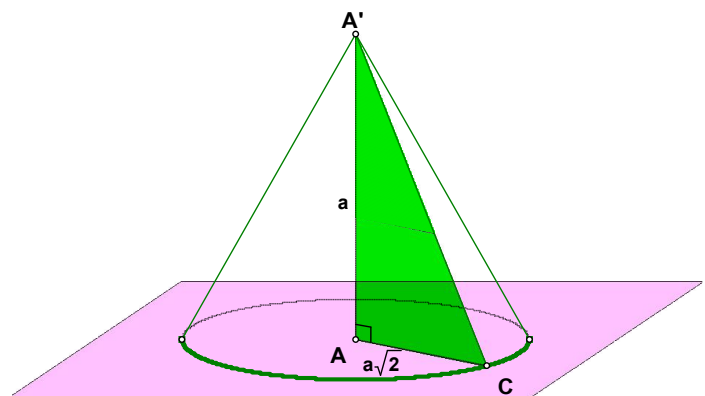
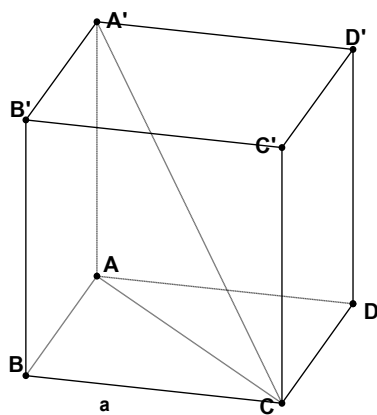
Vậy: $l = a\sqrt{2}, R = a$.

Diện tích toàn phần của hình nón là:

$$S_{TP} = S_{xq} + S_{s,y} = \pi Rl + \pi R^2 = \pi a^2 (\sqrt{2} + 1) \text{ (đvdt)}.$$



Câu 19.

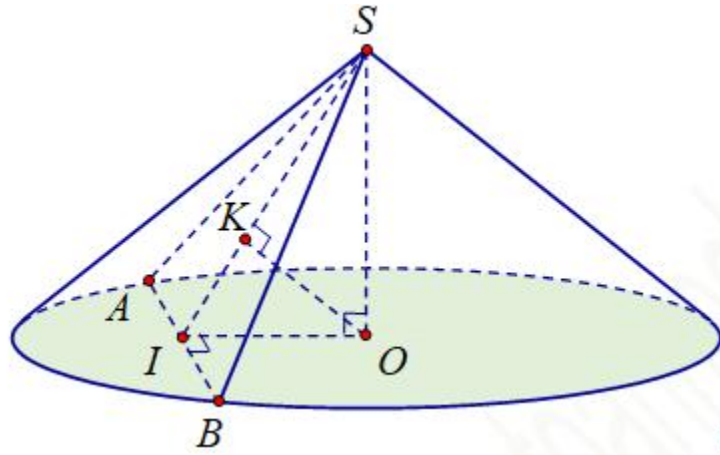


Quay tam giác $AA'C$ một vòng quanh trục AA' tạo thành hình nón có chiều cao $AA' = a$, bán kính đáy

$r = AC = a\sqrt{2}$, đường sinh $l = A'C = \sqrt{AA'^2 + AC^2} = a\sqrt{3}$.

Diện tích toàn phần của hình nón: $S = \pi r(r + l) = \pi a\sqrt{2}(a\sqrt{2} + a\sqrt{3}) = \pi(\sqrt{6} + 2)a^2$.

Câu 20. Chọn D



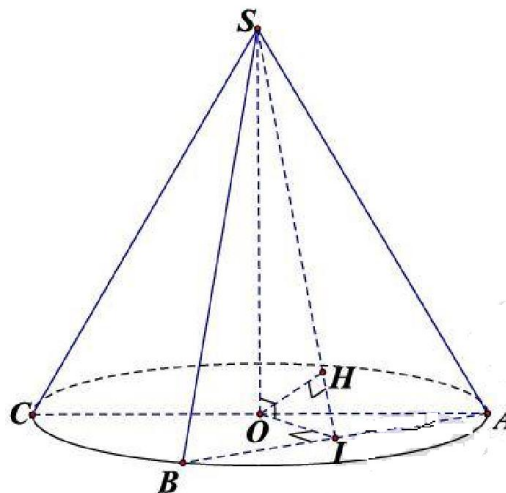
Ta có $l = h = 1$

Mặt phẳng (P) qua đỉnh của hình nón và cắt đáy theo dây cung AB có độ dài bằng 1. I , K là hình chiếu O lên AB ; SI . Ta có $AB \perp (SIO) \Rightarrow OK \perp (SAB)$

$$\text{ta có } IO = \sqrt{R^2 - OA^2} = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\frac{1}{OK^2} = \frac{1}{OI^2} + \frac{1}{OS^2} \Rightarrow OK = \frac{OI \cdot SO}{\sqrt{OI^2 + OS^2}} = \frac{\sqrt{21}}{7}.$$

Câu 21. Chọn B



Gọi I là trung điểm AB .

$$\text{Ta có } \begin{cases} AB \perp SO \\ AB \perp OI \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SOI) \Rightarrow (SAB) \perp (SOI).$$

Trong (SOI) , kẻ $OH \perp SI$ thì $OH \perp (SAB)$.

$$\Rightarrow d(O; (SAB)) = OH.$$

Ta có: $SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{\left(\frac{8.5}{5}\right)^2 - 5^2} = \sqrt{39}$.

Ta có: $OI = \sqrt{OA^2 - AI^2} = \sqrt{5^2 - \left(\frac{4.5}{5}\right)^2} = 3$.

Tam giác vuông SOI có: $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OI^2} + \frac{1}{SO^2} \Rightarrow OH = \frac{3\sqrt{13}}{4}$.

Vậy $d(O; (SAB)) = OH = \frac{3\sqrt{13}}{4}$.

Dạng 2. Thể tích

Câu 22. Chọn B

Thể tích của khối nón có chiều cao h và có bán kính đáy r là $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

Câu 23. Chọn B

Ta có $V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{1}{3}\pi (\sqrt{3})^2 \cdot 4 = 4\pi$.

Câu 24. Chọn C

Thể tích của khối nón có chiều cao h và bán kính đáy r là: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

Câu 25. Chọn A

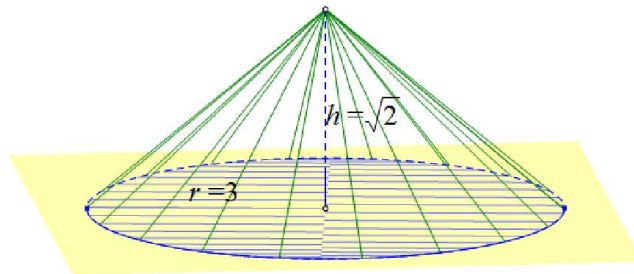
Lý thuyết thể tích khối nón.

Câu 26.

Lời giải

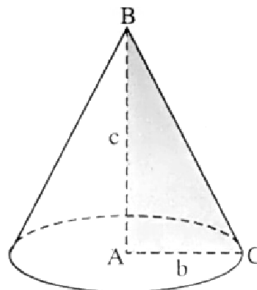
Chọn D

Thể tích của khối nón có chiều cao h và bán kính đáy r là $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$



Câu 27.

Thể tích khối nón: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h = \frac{9\pi\sqrt{2}}{3}$



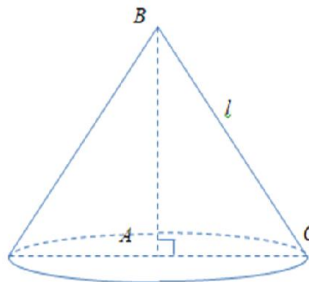
Câu 28.

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi b^2 c.$$

Câu 29. Chọn A

$$\text{Ta có } S_{xq} = 15\pi \Rightarrow \pi r l = 15\pi \Leftrightarrow l = 5 \Rightarrow h = 4.$$

$$\text{Vậy } V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = 12\pi.$$



Câu 30.

$$\text{Gọi } h \text{ là chiều cao khối nón} \Rightarrow h = \sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{25^2 - 15^2} = 20.$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi \cdot 15^2 \cdot 20 = 1500\pi.$$

Câu 31. Chọn D

$$\text{Ta có } AC = AB \cdot \cot 30^\circ = a\sqrt{3}. \text{ Vậy thể tích khối nón là: } V = \frac{1}{3} \pi a^2 \cdot a\sqrt{3} = \frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{3}.$$

Câu 32. Chọn A

$$\text{Chiều cao khối nón đã cho là } h = \sqrt{l^2 - r^2} = a\sqrt{3}$$

$$\text{Thể tích khối nón đã cho là: } V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi a^2 \cdot a\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3} \pi a^3}{3}.$$

Câu 33. Chọn A

$$\text{Khối nón có thể tích là } V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{4\pi\sqrt{3}}{3}$$

Câu 34. Chọn D

$$\text{Khối nón có bán kính đáy } R = a. \text{ Diện tích đáy } S = \pi a^2. \text{ Thể tích khối nón là } V = \frac{1}{3} \pi a^3.$$

Câu 35. Chọn D

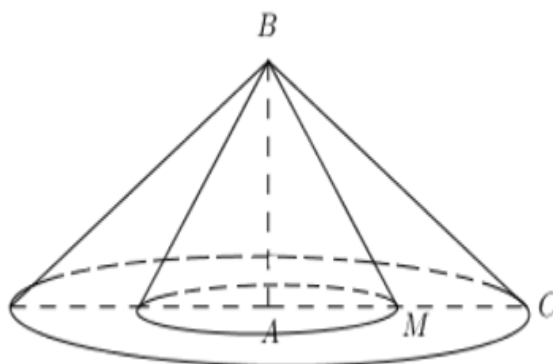
$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi \cdot 3 \cdot 4 = 4\pi.$$

Câu 36. Chọn B

Khối nón có góc ở đỉnh bằng 60° nên góc tạo bởi đường sinh và đáy bằng 60° .

$$\text{Vậy } R = \frac{l}{2}; \text{ lại có } S_{xq} = \pi R l = \pi R \cdot 2R = 6\pi a^2 \text{ nên } R = a\sqrt{3}; \text{ vậy } h = \sqrt{l^2 - R^2} = R\sqrt{3} = 3a$$

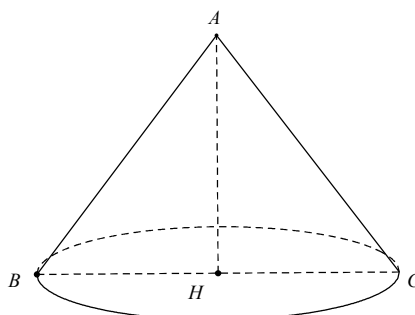
$$\text{Vậy } V = \frac{1}{3} \pi R^2 h = 3\pi a^3.$$



Câu 37.

Khi tam giác BMC quay quanh trục AB thì thể tích khối tròn xoay tạo thành là hiệu của thể tích khối nón có đường cao AB , đường sinh BC và khối nón có đường cao AB , đường sinh BM . Nên

$$V = \frac{1}{3} AB \cdot \pi \cdot AC^2 - \frac{1}{3} AB \cdot \pi \cdot AM^2 = \frac{1}{4} AB \cdot \pi \cdot AC^2 = 96\pi. \text{ Đáp án C}$$



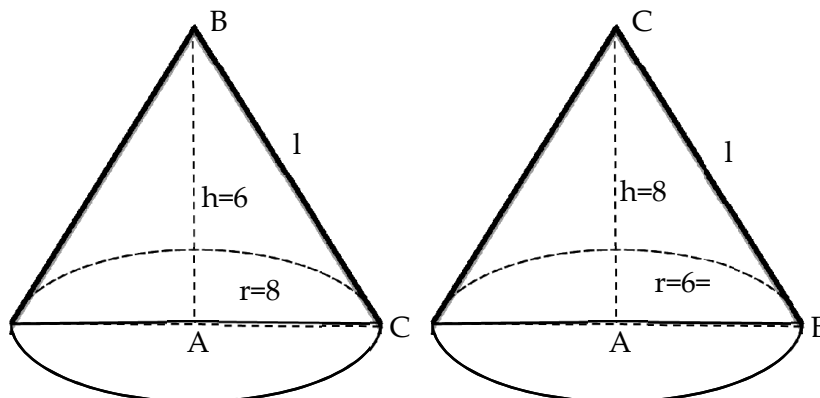
Câu 38.

Cắt hình nón bởi một mặt phẳng đi qua trục, ta được thiết diện là tam giác ABC cân tại đỉnh A của hình nón.

Do góc ở đỉnh của hình nón là $\widehat{BAC} = 60^\circ$, suy ra $\widehat{HAC} = 30^\circ$. Bán kính đáy $R = HC = 2 \text{ cm}$.

Xét $\triangle AHC$ vuông tại H , ta có $AH = \frac{HC}{\tan 30^\circ} = \frac{2}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = 2\sqrt{3} \text{ cm}$.

Thể tích của khối nón: $V = \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot AH = \frac{8\sqrt{3}\pi}{3} \text{ cm}^3$.



Câu 39.

Ta có công thức tính thể tích khối nón có chiều cao h và bán kính r là $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$

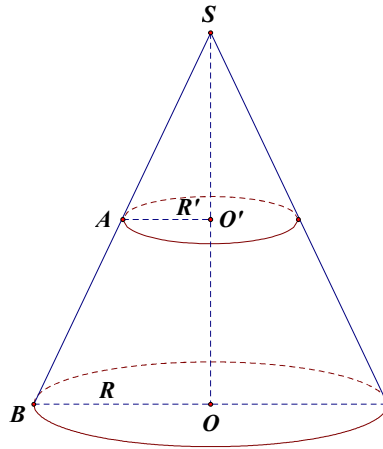
+ Khi quay tam giác ABC quanh cạnh AB thì:

$$h = AB = 6\text{cm} \text{ và } r = AC = 8\text{cm} \text{ thì } V_1 = \frac{1}{3} \pi \cdot 8^2 \cdot 6 = 128\pi$$

+ Khi quay tam giác ABC quanh cạnh AC thì:

$$h = AC = 8\text{cm} \text{ và } r = AB = 6\text{cm} \text{ thì } V_2 = \frac{1}{3} \pi \cdot 6^2 \cdot 8 = 96\pi$$

Vậy: $\frac{V_1}{V_2} = \frac{4}{3}$ đáp án B.



Câu 40.

$$\text{Ta có: } V_{N_1} = \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot SO, \quad V_{N_2} = \frac{1}{3} \pi R'^2 \cdot SO'.$$

$$\text{Mặt khác, } \triangle SO'A \text{ và } \triangle SOB \text{ đồng dạng nên } \frac{R'}{R} = \frac{SO'}{SO}.$$

$$\text{Suy ra: } \frac{V_{N_2}}{V_{N_1}} = \frac{R'^2 \cdot SO'}{R^2 \cdot SO} = \left(\frac{SO'}{SO} \right)^3 = \frac{1}{8}$$

$$\text{Suy ra } \frac{SO'}{SO} = \frac{1}{2} \Rightarrow SO' = \frac{1}{2} \cdot 40 = 20\text{ cm}. \text{ Do đó chọn } \mathbf{A}.$$

Câu 41. Chọn B

Gọi r_1, h_1, r_2, h_2 lần lượt là bán kính, đường cao của hình nón trên và hình nón dưới.

Do đường sinh bất kỳ của hình nón tạo với đáy một góc 60° .

$$\text{Suy ra: } \widehat{OAI'} = \widehat{OBI} = 60^\circ, \text{ khi đó ta có mối liên hệ: } h_1 = \sqrt{3}r_1, \quad h_2 = \sqrt{3}r_2.$$

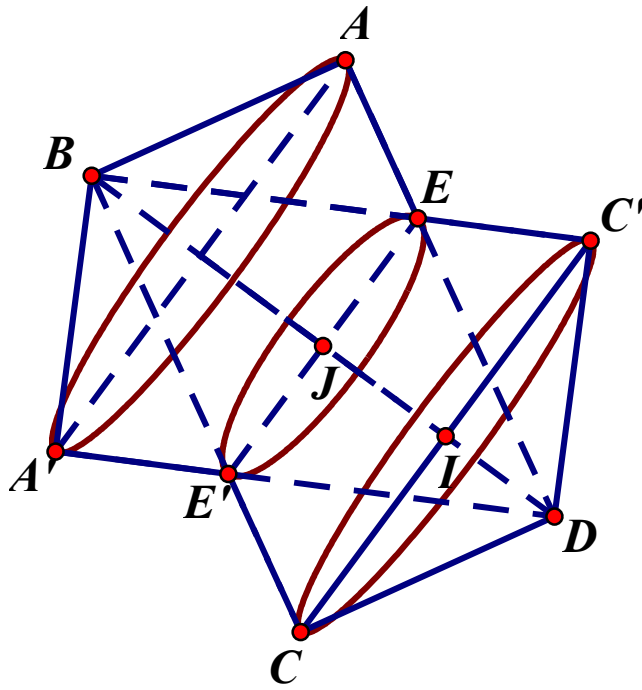
$$\text{Theo đề ta có: } V = V_1 + V_2 = \frac{1}{3} \pi (h_1 r_1^2 + h_2 r_2^2) = \frac{1}{9} \pi (h_1^3 + h_2^3) = 1000\pi.$$

$$\text{Mà: } (h_1^3 + h_2^3) = (h_1 + h_2)^3 - 3(h_1 + h_2) \cdot h_1 h_2 \Rightarrow h_1 \cdot h_2 = 200.$$

$$\text{Kết hợp giả thiết: } h_1 + h_2 = 30 \text{ ta được } \begin{cases} h_1 = 10 \\ h_2 = 20 \end{cases}.$$

$$\text{Từ đó tỉ lệ cần tìm là } \frac{V_1}{V_2} = \frac{(10\sqrt{3})^2 \cdot h_1}{(20\sqrt{3})^2 \cdot h_2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}.$$

Câu 42. Chọn C



Khối nón đỉnh D , tâm đáy I có thể tích V_1

Ta có $BD = 4$ mà $IC' \cdot BD = BC' \cdot C'D \Rightarrow IC' = \sqrt{3}$

$$ID = \frac{DC'^2}{BD} = 1 \text{ nên } V_1 = \frac{1}{3} \pi \cdot IC'^2 \cdot ID = \pi$$

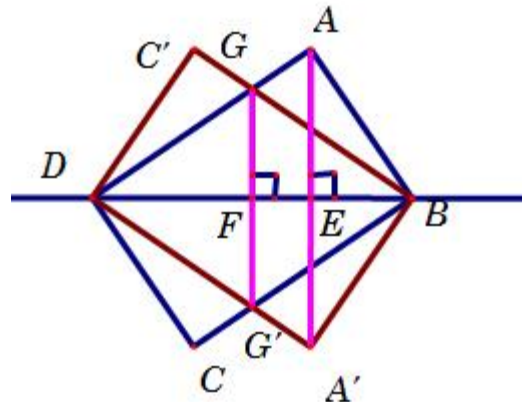
Khối nón cụt có tâm đáy J, I có thể tích V_2

$$\text{Ta có } DI = 3, DJ = 2, \frac{JE}{IC'} = \frac{DJ}{DI} = \frac{2}{3} \Rightarrow JE = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$V_2 = \frac{1}{3} \pi (IC'^2 \cdot DI - JE^2 \cdot DJ) = \frac{19\pi}{9}$$

Vậy thể tích cần tìm là $V = 2(V_1 + V_2) = \frac{56}{9} \pi$. Đáp án **C**.

Câu 43. Cách 1:



Gọi A', C' lần lượt đối xứng với A, C qua BD , $G = BC' \cap AD$, G' đối xứng với G qua BD .

$E = AA' \cap BD$, $F = GG' \cap BD \Rightarrow F$ là trung điểm BD .

Gọi V là thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình chữ nhật $ABCD$ quanh đường thẳng BD .

V_1 là thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay tam giác BAD quanh cạnh BD (cũng là thể tích của khối tròn xoay khi quay tam giác BCD quanh cạnh BD).

V'_1, V''_1 lần lượt là thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay $\triangle BAE, \triangle EAD$ quanh cạnh BD .

V_2 là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay $\triangle BGD$ quanh cạnh BD .

V'_2 là thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay $\triangle BGF$ quanh cạnh BD .

Ta có V'_1 là thể tích của khối nón đỉnh B , bán kính đáy AE .

$$\text{Tính được } AE = \frac{AB \cdot AD}{\sqrt{AB^2 + AD^2}} = \frac{2 \cdot 2\sqrt{3}}{\sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2}} = \sqrt{3}, BD = 4, BE = 1, DE = 3.$$

$$\Rightarrow V'_1 = \frac{1}{3} \pi \cdot AE^2 \cdot BE = \frac{1}{3} \pi (\sqrt{3})^2 = \pi.$$

Ta có V''_1 là thể tích của khối nón đỉnh D , bán kính đáy AE .

$$\Rightarrow V''_1 = \frac{1}{3} \pi \cdot AE^2 \cdot DE = \frac{1}{3} \pi (\sqrt{3})^2 \cdot 3 = 3\pi.$$

$$\text{Suy ra } V_1 = V'_1 + V''_1 = \pi + 3\pi = 4\pi.$$

Ta có V'_2 là thể tích của khối nón đỉnh B , bán kính đáy GF .

Ta chứng minh được $\triangle BGF \sim \triangle BDC'$ (g - g).

$$\Rightarrow \frac{GF}{DC'} = \frac{BF}{BC'} \Rightarrow GF = \frac{BF \cdot DC'}{BC'} = \frac{BD \cdot DC'}{2BC'} = \frac{4 \cdot 2}{2 \cdot 2\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

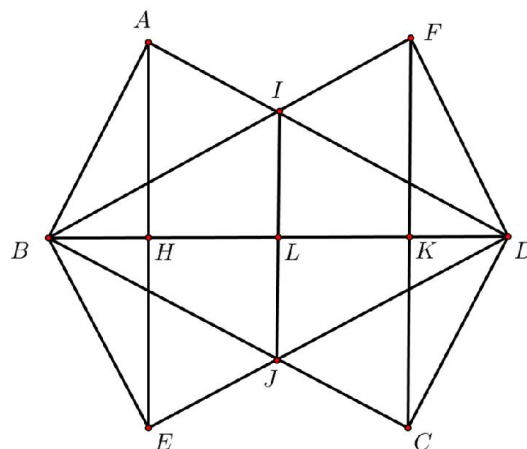
$$V'_2 = \frac{1}{3} \pi \cdot GF^2 \cdot BF = \frac{1}{3} \pi \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 \cdot 2 = \frac{8\pi}{9}.$$

$$\text{Ta có } V_2 = 2V'_2 = \frac{16\pi}{9}.$$

$$\text{Vậy } V = 2V_1 - V_2 = 2 \cdot 4\pi - \frac{16\pi}{9} = \frac{56\pi}{9}.$$

Cách 2: Lưu Thêm

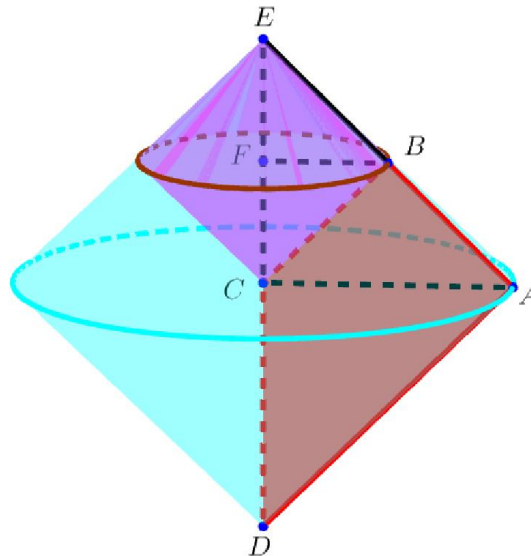
Gọi điểm như hình vẽ



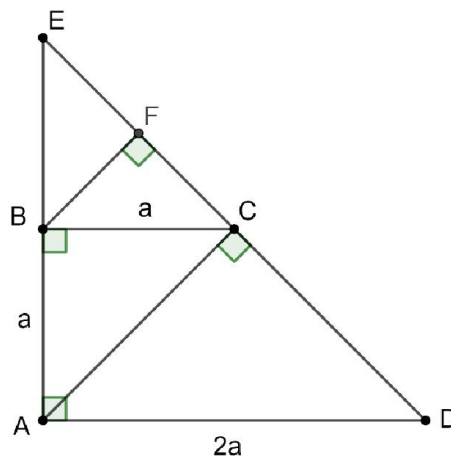
V_1, V_2 lần lượt là thể tích khối nón, nón cụt nhận được khi quay tam giác ABH và tứ giác $AHLT$ quay quanh trục BD .

Ta có: $AH = \sqrt{3}, IL = \frac{2}{\sqrt{3}}, BH = HL = 1$.

Ta có: $V = 2(V_1 + V_2) = 2 \left[\frac{1}{3} BH \cdot \pi \cdot AH^2 + \frac{1}{3} HL \cdot \pi \cdot (IL^2 + IL \cdot AH + AH^2) \right]$
 $= 2 \left[\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \pi \cdot 3 + \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \pi \cdot \left(\frac{4}{3} + 2 + 3 \right) \right] = \frac{56\pi}{9}$.



Câu 44.



Gọi E là giao điểm của AB và CD . Gọi F là hình chiếu vuông góc của B trên CE .

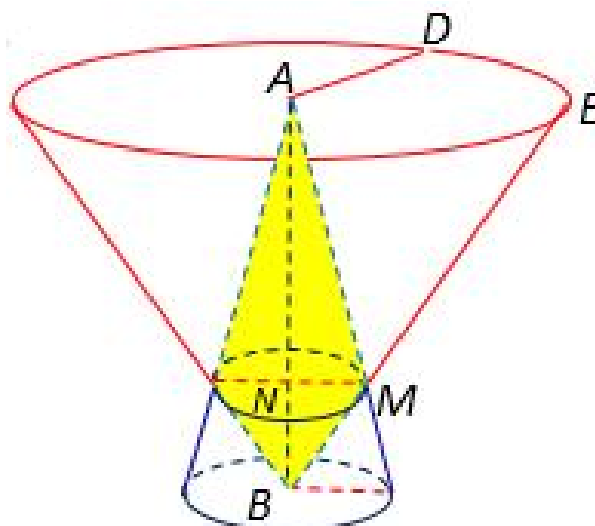
Ta có: $\triangle BCF = \triangle BEF$ nên tam giác $\triangle BCF$ và $\triangle BEF$ quay quanh trục CD tạo thành hai khối nón bằng nhau có thể tích V_1 .

$\triangle ADC = \triangle AEC$ nên tam giác $\triangle ADC$ và $\triangle AEC$ quay quanh trục CD tạo thành hai khối nón bằng nhau có thể tích V .

Nên thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay hình thang $ABCD$ xung quanh trục CD bằng:

$$2V - 2V_1 = 2 \cdot \frac{1}{3} \pi (CD \cdot AC^2 - CF \cdot BF^2) = \frac{2}{3} \pi \left[(a\sqrt{2})^3 - \left(\frac{a}{\sqrt{2}} \right)^3 \right] = \frac{7\sqrt{2}\pi a^3}{6}.$$

Câu 45. Chọn C



Dễ thấy $AD \perp (ABC) \Rightarrow AD = R_1$

Gọi $\{M\} = BD \cap AC$ và N là hình chiếu của M trên AB. Dễ dàng chứng minh được tỉ lệ:

$$\frac{MN}{BC} = \frac{AN}{AB} \quad (1); \text{ và } \frac{MN}{AD} = \frac{BN}{AB} \quad (2) \Rightarrow \frac{(1)}{(2)} = \frac{AD}{BC} = \frac{AN}{BN} = 3 \Rightarrow \frac{AN}{AB} = \frac{3}{4}; \frac{BN}{AB} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow AN = \frac{3\sqrt{3}}{2}; BN = \frac{\sqrt{3}}{2}; MN = \frac{3}{2}$$

Phần thể tích chung của 2 khối tròn xoay là phần thể tích khi quay tam giác $\triangle AMB$ xung quanh trục AB.

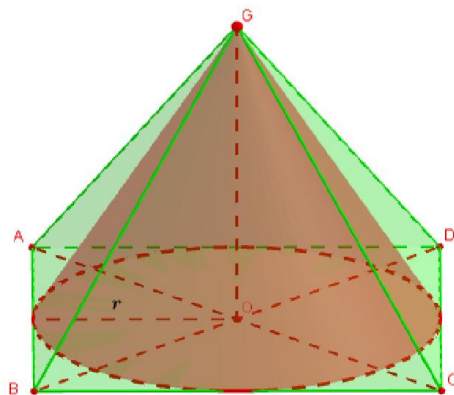
Gọi V_1 là thể tích khối tròn xoay khi quay tam giác $\triangle BMN$ xung quanh AB

Và V_2 là thể tích khối tròn xoay khi quay tam giác $\triangle AMN$ xung quanh AB

Dễ tính được: $V_1 = \frac{3\sqrt{3}\pi}{8} (dvtt)$ và $V_2 = \frac{9\sqrt{3}\pi}{8} (dvtt) \Rightarrow V_1 + V_2 = \frac{3\sqrt{3}\pi}{2} (dvtt)$. Chọn C.

Dạng 3. Khối tròn xoay nội, ngoại tiếp khối đa diện

Câu 46. Chọn C



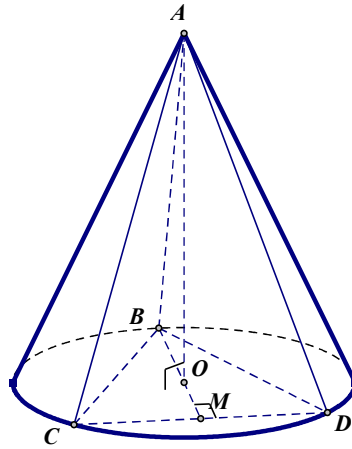
Gọi $O = AC \cap BD \Rightarrow SO \perp (ABCD)$. Lại có $OC = \frac{AC}{2} = a$

$$\Rightarrow SO = \sqrt{SA^2 - OC^2} = a.$$

Bán kính $r = \frac{AB}{2} = \frac{a}{\sqrt{2}}$. Suy thể tích khối nón là:

$$V = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{a}{\sqrt{2}} \right)^2 \cdot a = \frac{\pi a^3}{6}.$$

Câu 47. Chọn C

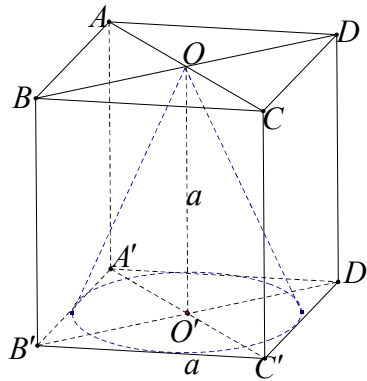


Gọi r là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD .

$$\text{Ta có } BM = \frac{3a\sqrt{3}}{2}; r = \frac{2}{3}BM = \frac{2}{3} \cdot \frac{3a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}.$$

$$S_{xq} = \pi r.l = \pi r.AB = \pi a\sqrt{3}.3a = 3\sqrt{3}.\pi a^2.$$

Câu 48. Chọn B



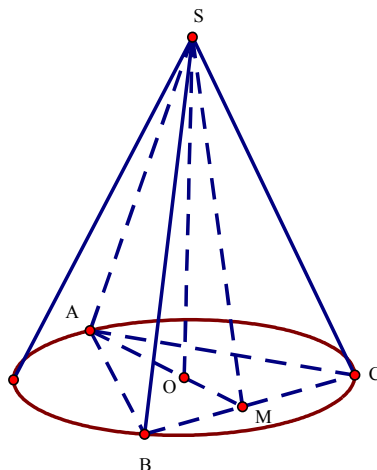
$$\text{Bán kính của đường tròn đáy là } r = \frac{a}{2}.$$

$$\text{Diện tích đáy nón là: } S_1 = \pi r^2 = \frac{\pi a^2}{4}.$$

$$\text{Độ dài đường sinh là } l = \sqrt{a^2 + r^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

$$\text{Diện tích xung quanh của khối nón là: } S_2 = \pi r l = \frac{\pi a^2 \sqrt{5}}{4}.$$

$$\text{Vậy, diện tích toàn phần của khối nón đó là: } S_{tp} = S_1 + S_2 = \frac{\pi a^2}{4}(\sqrt{5} + 1).$$



Câu 49.

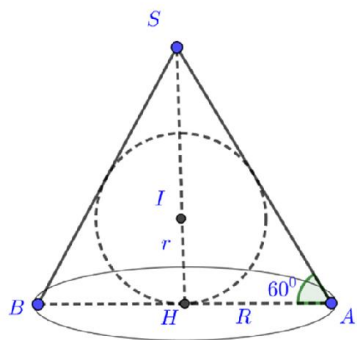
Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC , M là trung điểm cạnh BC , ta có $OM = \frac{a\sqrt{3}}{6}$,

$$OA = \frac{a\sqrt{3}}{3} \text{ và } \widehat{SMO} = 60^\circ$$

Trong tam giác vuông SMO : $SO = OM \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{6} \cdot \sqrt{3} = \frac{a}{2} \Rightarrow SA = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{7}}{2\sqrt{3}}$.

$$\text{Vậy } S_{xq} = \pi \cdot OA \cdot SA = \pi \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{a\sqrt{7}}{2\sqrt{3}} = \frac{\pi a^2 \sqrt{7}}{6}.$$

Câu 50. Chọn D



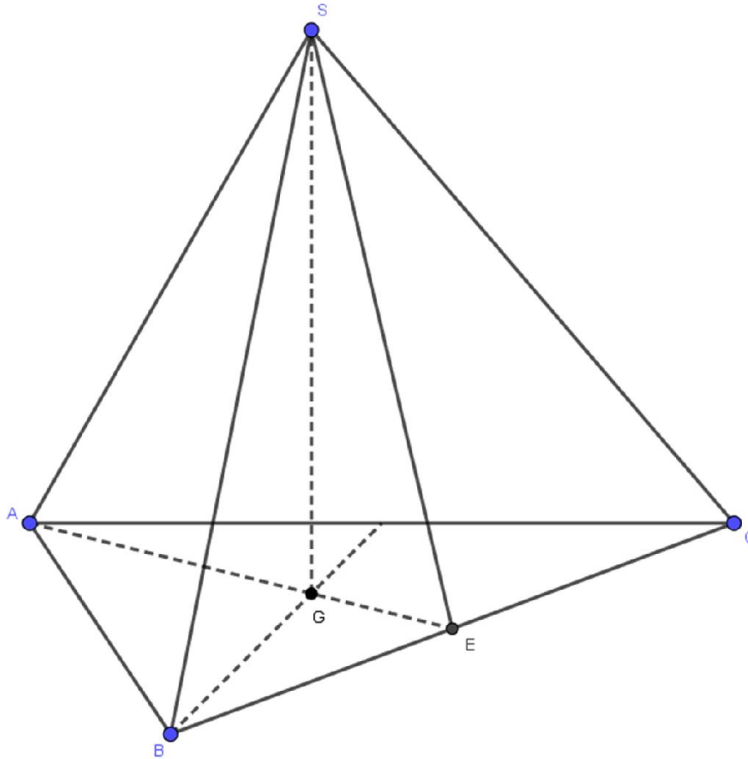
Hình nón (N) có đường sinh tạo với đáy một góc 60° nên $\widehat{SAH} = 60^\circ$

Ta có ΔSAB cân tại S có $\widehat{A} = 60^\circ$ nên ΔSAB đều. Do đó tâm I của đường tròn nội tiếp ΔSAB cũng là trọng tâm của ΔSAB .

$$\text{Suy ra } SH = 3IH = 3. \text{ Mặt khác } SH = \frac{AB\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AB = 2\sqrt{3} \Rightarrow R = \sqrt{3} \Rightarrow S_{\text{Đáy}} = \pi R^2 = 3\pi.$$

$$\text{Do đó } V = \frac{1}{3} SH \cdot S_{\text{Đáy}} = \frac{1}{3} 3 \cdot 3\pi = 3\pi.$$

Câu 51. Chọn B



Gọi E là trung điểm BC . Theo giả thiết $\widehat{SEA} = 60^\circ$.

Suy ra: $SA = \frac{a\sqrt{7}}{2\sqrt{3}} = l$.

$$S_{xq} = \pi Rl = \pi \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{a\sqrt{7}}{2\sqrt{3}} = \frac{\pi a^2 \sqrt{7}}{6}$$

Câu 52. Gọi h là chiều cao của khối chóp và đồng thời là đường cao của khối nón.

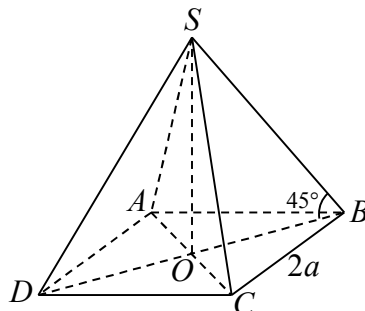
Thể tích của khối chóp là $V_1 = \frac{1}{3}a^2h$.

Bán kính của đường tròn ngoại tiếp đáy $ABCD$ là $r = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Thể tích của khối nón là $V_2 = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{a^2}{2} \cdot h$.

Tỉ số thể tích của khối chóp $S.ABCD$ và khối nón (N) là $\frac{V_1}{V_2} = \frac{2}{\pi}$.

Câu 53. Chọn D



Ta có $S.ABCD$ là hình chóp đều, gọi $O = AC \cap BD$

$\Rightarrow$ Góc giữa cạnh bên với mặt đáy là $\widehat{SBO} = 45^\circ$

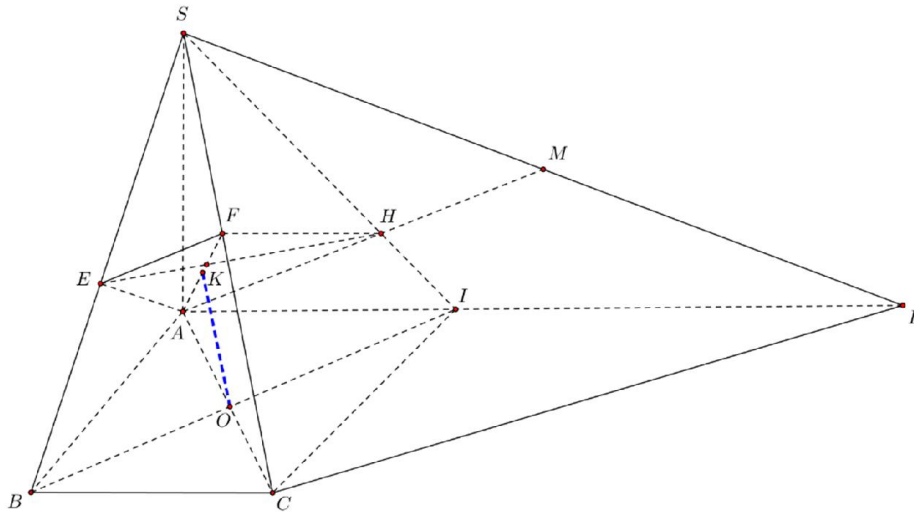
$ABCD$ là hình vuông cạnh $2a \Rightarrow BD = 2\sqrt{2}a$

Khối nón ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ có bán kính đường tròn đáy $R = \frac{BD}{2} = a\sqrt{2}$

$\triangle SOB$ vuông cân tại O

$\Rightarrow$ Chiều cao khối nón $h = SO = OB = \sqrt{2}a$

$\Rightarrow$ Thể tích khối nón là: $V = \frac{1}{3} \pi R^2 h = \frac{1}{3} \pi (a\sqrt{2})^2 \cdot a\sqrt{2} = \frac{2}{3} \pi a^3 \sqrt{2}$.



Câu 54.

Nhận xét: Tứ giác $ABCI$ là hình vuông. Để chứng minh $BC \perp (SAB)$ và $BI \perp SC$.

$$\begin{cases} EA \perp SB \\ EA \perp BC \end{cases} \Rightarrow EA \perp (SBC) \Rightarrow EA \perp SC.$$

$$\begin{cases} EA \perp SC \\ FA \perp SC \end{cases} \Rightarrow SC \perp (AEF).$$

Trong tam giác vuông SAB có $\frac{SE}{SB} = \frac{SA^2}{SB^2} = \frac{3}{4}$.

Trong tam giác SAD có $\frac{HS}{HI} \cdot \frac{AI}{AD} \cdot \frac{MD}{MS} = 1 \Rightarrow \frac{HS}{HI} = 3 \Rightarrow \frac{SH}{SI} = \frac{3}{4}$.

Trong tam giác SBI có $\frac{SE}{SB} = \frac{SH}{SI} = \frac{3}{4} \Rightarrow EH \parallel BI$. Do $BI \perp SC$ nên $EH \perp SC$.

Suy ra các điểm A, E, F, H cùng thuộc mặt phẳng đi qua A và vuông góc với SC .

Gọi K là trung điểm AF .

Vì $\begin{cases} EA \perp EF \\ AH \perp FH \end{cases} \Rightarrow K$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $\triangle EFH$.

$$\text{Ta có: } AF = \frac{SA \cdot AC}{SC} = \frac{a\sqrt{3} \cdot a\sqrt{2}}{a\sqrt{5}} = \frac{a\sqrt{6}}{\sqrt{5}}.$$

Suy ra bán kính đáy của khối nón là $R = \frac{1}{2} AF = \frac{a\sqrt{6}}{2\sqrt{5}}$.

Gọi O là tâm hình vuông $ABCI$.

$$\text{Do } \begin{cases} SC \perp (EFH) \\ OK // SC \end{cases} \Rightarrow OK \perp (EFH) \Rightarrow O \text{ là đỉnh của khối nón.}$$

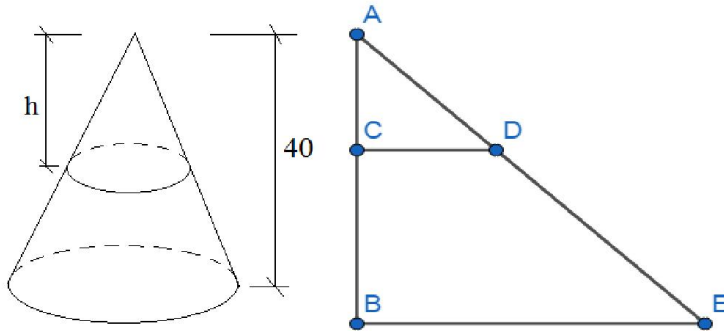
$$\text{Chiều cao của khối nón là } h = \frac{1}{2} FC = \frac{1}{2} \sqrt{AC^2 - AF^2} = \frac{1}{2} \sqrt{2a^2 - \frac{6}{5}a^2} = \frac{a}{\sqrt{5}}.$$

$$\text{Vậy thể tích khối nón là } V = \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot h = \frac{1}{3} \pi \cdot \left(\frac{a\sqrt{6}}{2\sqrt{5}} \right)^2 \cdot \frac{a}{\sqrt{5}} = \frac{\pi a^3}{10\sqrt{5}}.$$

Dạng 4. Bài toán thực tế

Chọn B

Câu 55.



Gọi $r_1 = BE$, $h_1 = AB$ lần lượt là bán kính đáy và chiều cao của hình nón N_1

Gọi $r_2 = CD$, $h = AC$ lần lượt là bán kính đáy và chiều cao của hình nón N_2

Khi đó thể tích của hai khối nón lần lượt là

$$V_1 = \frac{1}{3} \pi r_1^2 h_1$$

$$V_2 = \frac{1}{3} \pi r_2^2 h$$

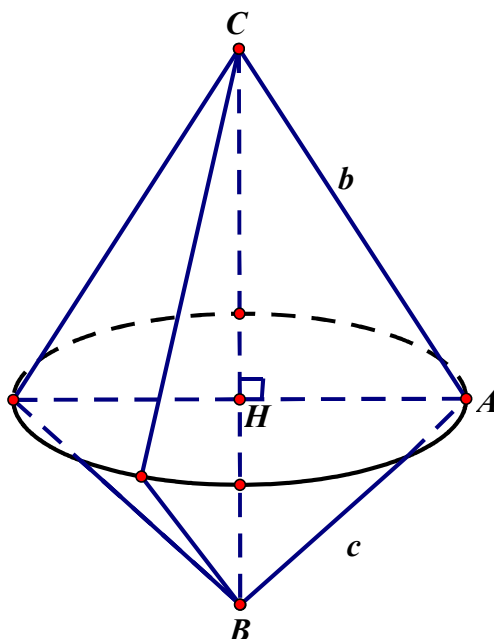
Theo đề bài ta có

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\frac{1}{3} \pi r_2^2 h}{\frac{1}{3} \pi r_1^2 h_1} = \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^2 \cdot \frac{h}{h_1} = \frac{1}{8} \quad (1)$$

Xét hai tam giác đồng dạng ACD, ABE có:

$$\frac{AC}{AB} = \frac{CD}{BE} \Leftrightarrow \frac{r_2}{r_1} = \frac{h}{h_1} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } \left(\frac{h}{h_1} \right)^3 = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \frac{h}{h_1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow h = \frac{1}{2} h_1 = 20$$



Câu 56.

Gọi tam giác vuông là ABC , kẻ $AH \perp BC$, H là chân đường cao.

$$\text{Khi đó } \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} \Rightarrow AH = \frac{bc}{\sqrt{b^2 + c^2}}$$

Thể tích khối tròn xoay cần tính bằng tổng thể tích 2 khối nón tạo bởi hai tam giác vuông ACH và ABH khi quay quanh trục BC .

Khối nón tạo bởi tam giác vuông ACH khi quay quanh trục BC có thể tích $V_1 = \frac{1}{3}\pi CH \cdot AH^2$

Khối nón tạo bởi tam giác vuông ABH khi quay quanh trục BC có thể tích $V_2 = \frac{1}{3}\pi BH \cdot AH^2$

Thể tích khối tròn xoay cần tính là:

$$\begin{aligned} V &= V_1 + V_2 = \frac{1}{3}\pi CH \cdot AH^2 + \frac{1}{3}\pi BH \cdot AH^2 \\ &= \frac{1}{3}\pi BC \cdot AH^2 = \frac{1}{3}\pi \sqrt{b^2 + c^2} \cdot \left(\frac{bc}{\sqrt{b^2 + c^2}}\right)^2 = \frac{\pi b^2 c^2}{3\sqrt{b^2 + c^2}} \end{aligned}$$

Câu 57. Chọn A

Coi khối lập phương có cạnh 1. Thể tích khối lập phương là $V = 1$.

Từ giả thiết ta suy ra khối nón có chiều cao $h = 1$, bán kính đáy $r = \frac{1}{2}$.

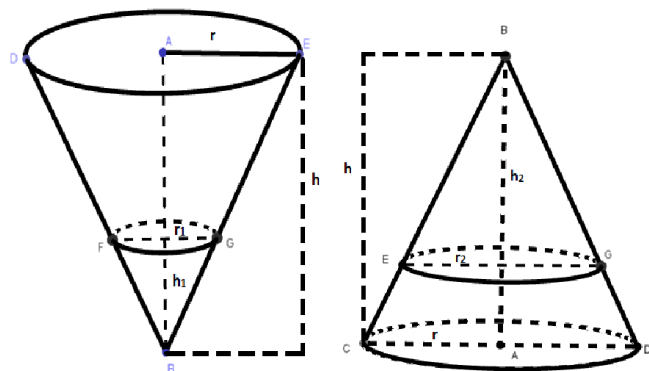
Thể tích lượng nước trào ra ngoài là thể tích V_1 của khối nón.

$$\text{Ta có: } V_1 = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{\pi}{12}.$$

$$\text{Thể tích lượng nước còn lại trong thùng là: } V_2 = V - V_1 = 1 - \frac{\pi}{12} = \frac{12 - \pi}{12}.$$

$$\text{Do đó: } \frac{V_1}{V_2} = \frac{\pi}{12 - \pi}.$$

Câu 58.



Gọi h_1 là chiều cao của nước ta có $h_1 = \frac{1}{3}h$. Từ hình vẽ ta

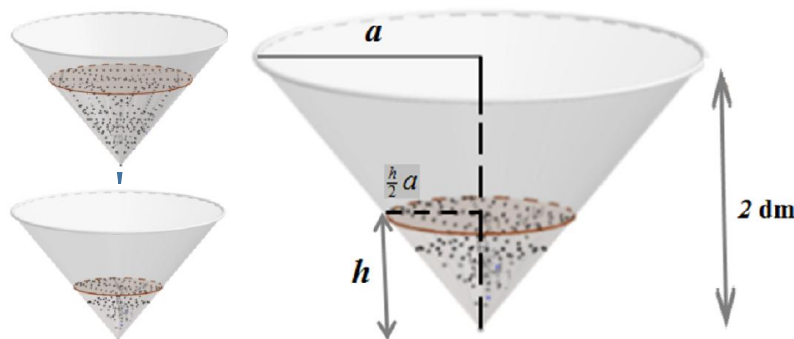
$$\text{có: } \frac{h_1}{h} = \frac{r_1}{r} \Rightarrow r_1 = \frac{1}{3}r; \frac{h_2}{h} = \frac{r_2}{r} \Leftrightarrow \frac{h_2}{r_2} = \frac{h}{r} \Leftrightarrow \frac{r}{h}h_2 = r_2.$$

Ta có thể tích của nước trước và sau khi lật ngược là như nhau:

$$\begin{aligned} h_1 \cdot \pi r_1^2 &= h \cdot \pi r^2 - h_2 \cdot \pi r_2^2 \Leftrightarrow h_2 = \frac{h\pi r^2 - h_1\pi r_1^2}{\pi r_2^2} \Leftrightarrow h_2 = \frac{hr^2 - h_1r_1^2}{r_2^2} \Leftrightarrow h_2 = \frac{hr^2}{r_2^2} - \frac{h_1r_1^2}{r_2^2} \\ \Leftrightarrow h_2 &= \frac{h^3}{h_2^2} - \frac{h_1 \cdot \frac{1}{9}r^2}{\frac{r^2}{h^2}h_2^2} \Leftrightarrow h_2 = \frac{h^3}{h_2^2} - \frac{h_1 \cdot \frac{1}{9}}{\frac{1}{h^2}h_2^2} \Leftrightarrow h_2 = \frac{15^3}{h_2^2} - \frac{5 \cdot \frac{1}{9} \cdot 15^2}{h_2^2} \Leftrightarrow h_2^3 = 15^3 - 5 \cdot \frac{1}{9} \cdot 15^2 \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow h_2^3 = 3250 \Leftrightarrow h_2 = \sqrt[3]{3250}$ Vậy bịt kín miệng phễu rồi lật ngược phễu lên thì chiều cao của mực nước xấp xỉ bằng: $0,188(\text{cm})$.

Câu 59.



Gọi a là bán kính đáy hình nón;

V_1, V_2 lần lượt là thể tích của hình nón trên lúc chứa đầy nước và khi chiều cao của nước bằng 1 dm;

h, V_3 lần lượt là chiều cao của nước, thể tích của hình nón dưới khi chiều cao của nước trong hình nón trên bằng 1 dm;

R, r lần lượt là bán kính của hình nón trên của nước, bán kính của hình nón dưới của nước khi chiều cao của nước trong hình nón trên bằng 1 dm.

$$\text{Ta có: } \frac{R}{a} = \frac{1}{2} \Rightarrow R = \frac{a}{2}.$$

$$\text{Thể tích nước của hình nón trên khi chiều cao bằng 1 là } V_2 = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \pi \left(\frac{1}{2}a\right)^2 = \frac{\pi a^2}{12}.$$

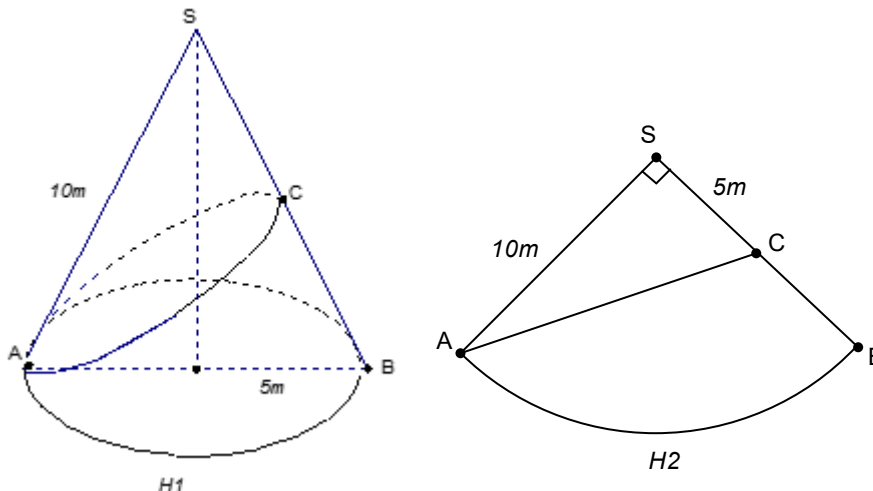
$$\text{Mặt khác: } \frac{r}{a} = \frac{h}{2} \Rightarrow r = \frac{ah}{2}.$$

$$\text{Do đó thể tích nước hình nón dưới } V_3 = \frac{1}{3} \cdot h \cdot \pi \left(\frac{h}{2} a \right)^2 = \frac{\pi a^2 h^3}{12}.$$

$$\text{Thể tích nước của hình nón trên khi đầy nước } V_1 = \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot \pi a^2.$$

$$\text{Lại có: } V_3 = V_1 - V_2 \Rightarrow \frac{\pi a^2 h^3}{12} = \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot \pi a^2 - \frac{\pi a^2}{12} \Leftrightarrow 1 + h^3 = 8 \Leftrightarrow h = \sqrt[3]{7}.$$

Câu 60. • Cắt hình nón theo hai đường sinh SA, SB rồi trải ra ta được hình ($H2$) như sau:



Khi đó, chiều dài dây đèn ngắn nhất là độ dài đoạn thẳng AC trên hình $H2$.

$$\bullet \text{ Chu vi cung tròn } \widehat{AB}: C = \frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot 5 = 5\pi.$$

$\Rightarrow \Delta SAC$ vuông tại S .

$$\Rightarrow AC = \sqrt{SA^2 + SC^2} = \sqrt{10^2 + 5^2} = 5\sqrt{5} \text{ m}.$$

Câu 61. Chọn D

Gọi R là bán kính đáy của cái phễu ta có $\frac{R}{2}$ là bán kính của đáy chứa cột nước

$$\text{Ta có thể tích phần nón không chứa nước là } V = \frac{1}{3} \pi (R)^2 \cdot 20 - \frac{1}{3} \pi \left(\frac{R}{2} \right)^2 \cdot 10 = \frac{35}{6} \pi R^2.$$

Khi lật ngược phễu Gọi h chiều cao của cột nước trong phễu. phần thể tích phần nón không chứa nước là

$$V = \frac{1}{3} \pi (20-h) \left(\frac{R(20-h)}{20} \right)^2 = \frac{1}{1200} \pi (20-h)^3 R^2.$$

$$\frac{1}{1200} \pi (20-h)^3 R^2 = \frac{35}{6} \pi R^2 \Rightarrow (20-h)^3 = 7000 \Rightarrow h \approx 0,87$$

Dạng 5. Bài toán cực trị

Câu 62. Chọn B

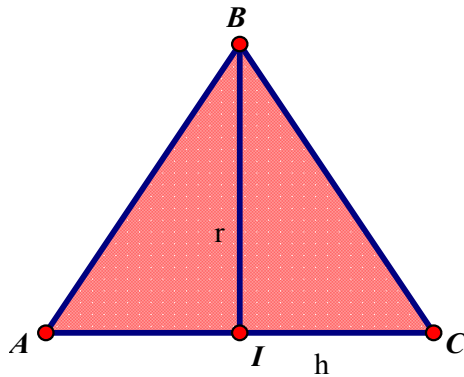
$$y' = 4(m^2 + 1)x^3 - 4mx = 4x[(m^2 + 1)x^2 - m]$$

$$+ y' = 0 \Leftrightarrow 4x[(m^2 + 1)x^2 - m] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm \sqrt{\frac{m}{m^2 + 1}} \quad (m > 0) \end{cases}$$

+ Với $m > 0$ thì đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị (với $x_A < x_B < x_C$) là:

$$A\left(-\sqrt{\frac{m}{m^2+1}}; -\frac{m^2}{m^2+1} + m^2 + 1\right); B(0; m^2 + 1); C\left(\sqrt{\frac{m}{m^2+1}}; -\frac{m^2}{m^2+1} + m^2 + 1\right).$$

+ Quay $\triangle ABC$ quanh AC thì được khối tròn xoay có thể tích là:



$$V = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 h = \frac{2}{3} \pi BI^2 \cdot IC = \frac{2}{3} \pi \left(\frac{m^2}{m^2+1} \right)^2 \cdot \sqrt{\frac{m}{m^2+1}} = \frac{2}{3} \pi \sqrt{\frac{m^9}{(m^2+1)^5}}.$$

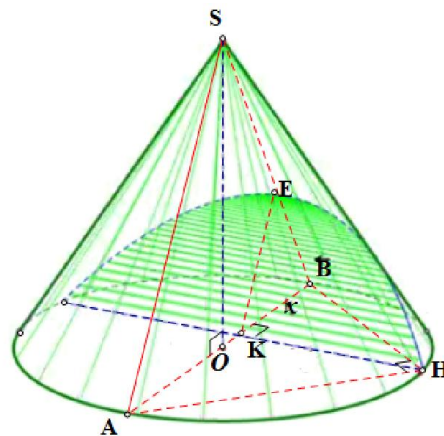
+ Xét hàm số $f(x) = \frac{m^9}{(m^2+1)^5}$

Có: $f'(x) = \frac{m^8(9-m^2)}{(m^2+1)^6}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow m = 3 \ (m > 0)$.

Ta có BBT:

x	0	3	$-\infty$
$f'(x)$		0	-
$f(x)$	0	max	0

Vậy thể tích cần tìm lớn nhất khi $m = 3$.



Câu 63.

Cắt hình nón bởi một mặt phẳng song song với đường sinh của hình nón ta thu được thiết diện là một parabol.

Xét dây cung bất kỳ chứa đoạn KH như hình vẽ, suy ra tồn tại đường kính $AB \perp KH$, trong tam giác SAB , $KE \parallel SA, E \in SB$, Suy ra Parabol nhận KE làm trục như hình vẽ chính là một thiết diện thỏa yêu cầu bài toán. (Thiết diện này song song với đường sinh SA)

Đặt $BK = x$ (với $0 < x < 24$).

Trong tam giác ABH có: $HK^2 = BK \cdot AK = x(24 - x)$.

Trong tam giác SAB có: $\frac{KE}{SA} = \frac{BK}{BA} \Leftrightarrow KE = \frac{BK}{BA} \cdot SA \Leftrightarrow KE = \frac{5x}{6}$.

Thiết diện thu được là một parabol có diện tích: $S = \frac{4}{3} KH \cdot KE$.

Ta có: $S^2 = \frac{16}{9} KH^2 \cdot KE^2 = \frac{16}{9} \cdot x(24 - x) \cdot \frac{25x^2}{36} = \frac{100}{81} (24x^3 - x^4) \Rightarrow S = \frac{10}{9} \sqrt{24x^3 - x^4}$

Đặt $f(x) = 24x^3 - x^4$, với $0 < x < 24$.

Ta có: $f'(x) = 72x^2 - 4x^3$. Suy ra $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 72x^2 - 4x^3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 18 \end{cases}$.

Bảng biến thiên:

x	0	18	24	
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$			34992	

Vậy thiết diện có diện tích lớn nhất là: $\frac{10}{9} \sqrt{34992} \approx 207,8 \text{ cm}^2$

Câu 64. Fb: Bi Trần

Gọi hình nón tròn xoay có đường sinh $l = 2a$ có bán kính đáy là R và đường cao là h .

Thể tích khối nón: $V = \frac{1}{3} \pi R^2 h$. Ta có: $R^2 + h^2 = 4a^2$.

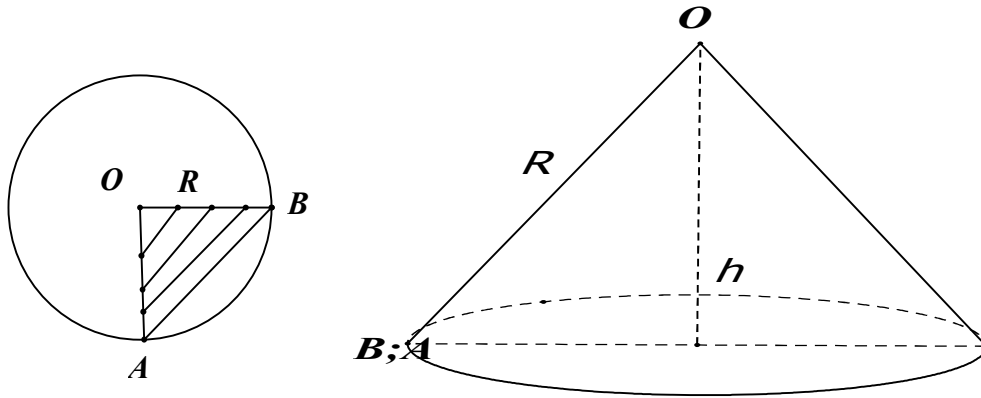
Áp dụng bất đẳng thức Cô si: $4a^2 = R^2 + h^2 = \frac{R^2}{2} + \frac{R^2}{2} + h^2 \geq 3\sqrt[3]{\frac{R^4 h^2}{4}}$.

$\Rightarrow \frac{R^4 h^2}{4} \leq \frac{64}{27} a^6 \Rightarrow \frac{1}{3} \pi R^2 h \leq \frac{16\pi\sqrt{3}}{27} a^3$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} \frac{R^2}{2} = h^2 \\ h^2 + R^2 = 4a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h = \frac{2\sqrt{3}}{3} a \\ R = \frac{2\sqrt{6}}{3} a \end{cases}$.

Khi đó $V_{\max} = \frac{16\pi\sqrt{3}}{27} a^3$.

Câu 65. Chọn A



Ta có diện tích của hình phễu $S_{xq} = \frac{R^2 x}{2} \Rightarrow r = \frac{xR}{2\pi}$ là bán kính của đáy phễu; $\Rightarrow x = \frac{2\pi r}{R}$

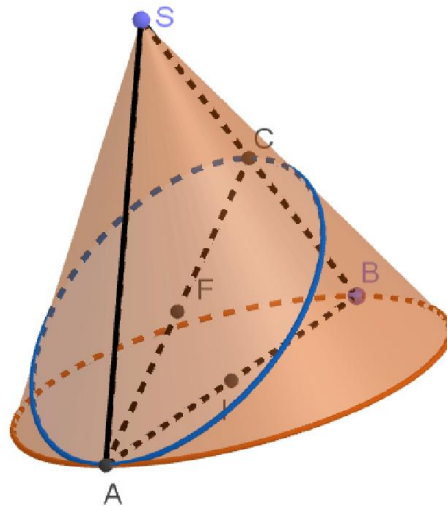
$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi r^2 \sqrt{R^2 - r^2} = \frac{1}{3} \pi \sqrt{r^4 \cdot R^2 - r^6} \text{ là thể tích của phễu}$$

Xét hàm số phụ $y = r^4 \cdot R^2 - r^6 \Rightarrow y' = 4r^3 \cdot R^2 - 6r^5$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot R^2 - 3r^2 = 0 \Leftrightarrow r = \frac{\sqrt{6}}{3} R$$

r	0	$\frac{R\sqrt{6}}{3}$	R
$y'(r)$	+	0	-
$y(r)$			

Vậy y max thì V và V max khi $r = \frac{R\sqrt{6}}{3} \Leftrightarrow x = \frac{2\pi r}{R} \Leftrightarrow x = \frac{2\pi R\sqrt{6}}{3R} \Leftrightarrow x = \frac{2\pi\sqrt{6}}{3}$



Câu 66.

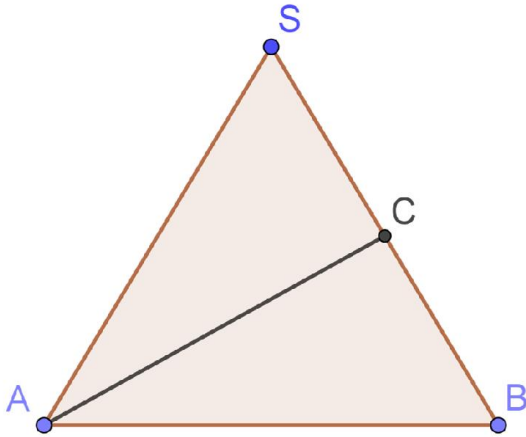
Ta có: $\triangle SAB$ cân và $SB = AB \Rightarrow \triangle SAB$ đều

Diện tích xung quanh hình nón là $S_{xq} = \pi Rl = 50\pi (m^2)$

Vẽ (P) đi qua C và vuông góc với AB . Mặt phẳng (P) cắt hình nón theo thiết diện là một Elip

Khi đó, chiều dài dây đèn điện từ ngắn nhất chính là chiều dài dây cung AC trên Elip.

* Ta dùng phương pháp trái hình ra sẽ thấy ngay như sau



Hình trái dài là một hình quạt với AB là độ dài nửa đường tròn và $AB = R.\pi = 5\pi (m)$

$$S_{ABS} = \frac{1}{2}S = 25\pi \Leftrightarrow \frac{\widehat{ASB} \cdot \pi R_1^2}{360} = 25\pi \Leftrightarrow \widehat{ASB} = \frac{360 \cdot 25\pi}{\pi \cdot 10^2} = 90^\circ$$

Vậy $\triangle SAC$ vuông tại S và $AC = \sqrt{SA^2 + SC^2} = 5\sqrt{5}$.

MỤC LỤC

PHẦN A. CÂU HỎI.....	1
Dạng 1. Diện tích xung quanh, diện tích toàn phần, chiều cao, bán kính đáy, thiết diện.....	1
Dạng 2. Thể tích.....	3
Dạng 3. Khối tròn xoay nội, ngoại tiếp khối đa diện	4
Dạng 4. Bài toán thực tế.....	5
Dạng 5. Bài toán cực trị.....	8
PHẦN B. ĐÁP ÁN THAM KHẢO	9
Dạng 1. Diện tích xung quanh, diện tích toàn phần, chiều cao, bán kính đáy, thiết diện.....	9
Dạng 2. Thể tích.....	14
Dạng 3. Khối tròn xoay nội, ngoại tiếp khối đa diện	15
Dạng 4. Bài toán thực tế.....	19
Dạng 5. Bài toán cực trị.....	23

PHẦN A. CÂU HỎI

Dạng 1. Diện tích xung quanh, diện tích toàn phần, chiều cao, bán kính đáy, thiết diện

- Câu 1.** (Mã đề 104 BGD&ĐT NĂM 2018) Diện tích xung quanh của hình trụ tròn xoay có bán kính đáy r và độ dài đường sinh l bằng
- A. $4\pi rl$ B. $2\pi rl$ C. $\frac{4}{3}\pi rl$ D. πrl
- Câu 2.** (ĐỀ MINH HỌA GBD&ĐT NĂM 2017) Trong không gian, cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 1$ và $AD = 2$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC . Quay hình chữ nhật $ABCD$ xung quanh trục MN , ta được một hình trụ. Tính diện tích toàn phần S_{tp} của hình trụ đó.
- A. $S_{tp} = 10\pi$ B. $S_{tp} = 2\pi$ C. $S_{tp} = 6\pi$ D. $S_{tp} = 4\pi$
- Câu 3.** (MĐ 105 BGD&ĐT NĂM 2017) Cho hình trụ có diện tích xung quanh bằng 50π và độ dài đường sinh bằng đường kính của đường tròn đáy. Tính bán kính r của đường tròn đáy.
- A. $r = 5\sqrt{\pi}$ B. $r = 5$ C. $r = \frac{5\sqrt{2}\pi}{2}$ D. $r = \frac{5\sqrt{2}}{2}$
- Câu 4.** (THPT CHUYÊN LAM SƠN THANH HÓA NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho khối trụ (T) có bán kính đáy $R = 1$, thể tích $V = 5\pi$. Tính diện tích toàn phần của hình trụ tương ứng
- A. $S = 12\pi$ B. $S = 11\pi$ C. $S = 10\pi$ D. $S = 7\pi$
- Câu 5.** (THPT LÊ QUY ĐÔN ĐIỆN BIÊN NĂM 2018-2019 LẦN 01) Tính diện tích xung quanh của hình trụ biết hình trụ có bán kính đáy là a và đường cao là $a\sqrt{3}$.

- A. $2\pi a^2$ B. πa^2 C. $\pi a^2 \sqrt{3}$ D. $2\pi a^2 \sqrt{3}$
- Câu 6. (THPT - YÊN ĐỊNH THANH HÓA 2018 2019- LẦN 2) Cắt một khối trụ bởi một mặt phẳng qua trục của nó ta được thiết diện là một hình vuông có cạnh bằng $3a$. Tính diện tích toàn phần của khối trụ.
- A. $S_{tp} = \frac{13a^2\pi}{6}$. B. $S_{tp} = a^2\pi\sqrt{3}$. C. $S_{tp} = \frac{a^2\pi\sqrt{3}}{2}$. D. $S_{tp} = \frac{27a^2\pi}{2}$.
- Câu 7. (THPT CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG NAM ĐỊNH NĂM 2018-2019 LẦN 01) Một hình trụ có diện tích xung quanh bằng $4\pi a^2$ và bán kính đáy là a . Tính độ dài đường cao của hình trụ đó.
- A. a . B. $2a$. C. $3a$. D. $4a$.
- Câu 8. (THPT CHUYÊN THÁI NGUYÊN LẦN 01 NĂM 2018-2019) Một hình trụ có bán kính đáy bằng $2cm$ và có thiết diện qua trục là một hình vuông. Diện tích xung quanh của hình trụ là
- A. $8p\text{ cm}^3$ B. $4p\text{ cm}^3$ C. $32p\text{ cm}^3$ D. $16p\text{ cm}^3$
- Câu 9. (THPT GIA LỘC HẢI DƯƠNG NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cắt một hình trụ bởi một mặt phẳng qua trục của nó, ta được thiết diện là một hình vuông có cạnh bằng $3a$. Tính diện tích toàn phần của hình trụ đã cho.
- A. $\frac{13\pi a^2}{6}$. B. $\frac{27\pi a^2}{2}$. C. $9\pi a^2$. D. $\frac{9\pi a^2}{2}$.
- Câu 10. (THPT YÊN PHONG 1 BẮC NINH NĂM HỌC 2018-2019 LẦN 2) Trong không gian cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=1, AD=2$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC . Quay hình chữ nhật đó xung quanh trục MN ta được một hình trụ. Tính diện tích toàn phần S_{tp} của hình trụ đó.
- A. $S_{tp} = 4\pi$. B. $S_{tp} = 6\pi$. C. $S_{tp} = 2\pi$. D. $S_{tp} = 10\pi$.
- Câu 11. (Mã 103 - BGD - 2019) Cho hình trụ có chiều cao bằng $3\sqrt{2}$. Cắt hình trụ đã cho bởi mặt phẳng song song với trục và cách trục một khoảng bằng 1, thiết diện thu được có diện tích bằng $12\sqrt{2}$. Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho bằng
- A. $6\sqrt{10}\pi$. B. $6\sqrt{34}\pi$. C. $3\sqrt{10}\pi$. D. $3\sqrt{34}\pi$.
- Câu 12. (Mã đề 101 - BGD - 2019) Cho hình trụ có chiều cao bằng $5\sqrt{3}$. Cắt hình trụ đã cho bởi mặt phẳng song song với trục và cách trục một khoảng bằng 1, thiết diện thu được có diện tích bằng 30. Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho bằng
- A. $10\sqrt{3}\pi$. B. $5\sqrt{39}\pi$. C. $20\sqrt{3}\pi$. D. $10\sqrt{39}\pi$.
- Câu 13. (Mã 102 - BGD - 2019) Cho hình trụ có chiều cao bằng $4\sqrt{2}$. Cắt hình trụ đã cho bởi một mặt phẳng song song với trục và cách trục một khoảng bằng $\sqrt{2}$, thiết diện thu được có diện tích bằng 16. Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho bằng
- A. $16\sqrt{2}\pi$. B. $8\sqrt{2}\pi$. C. $12\sqrt{2}\pi$. D. $24\sqrt{2}\pi$.
- Câu 14. Cắt hình trụ (T) bằng một mặt phẳng đi qua trục được thiết diện là một hình chữ nhật có diện tích bằng 30 cm^2 và chu vi bằng 26 cm . Biết chiều dài của hình chữ nhật lớn hơn đường kính mặt đáy của hình trụ (T) . Diện tích toàn phần của (T) là:
- A. $23\pi(\text{cm}^2)$. B. $\frac{23\pi}{2}(\text{cm}^2)$. C. $\frac{69\pi}{2}(\text{cm}^2)$. D. $69\pi(\text{cm}^2)$.
- Câu 15. Một hình trụ có bán kính đáy bằng 50 cm và có chiều cao là 50 cm . Một đoạn thẳng AB có chiều dài là 100 cm và có hai đầu mút nằm trên hai đường tròn đáy. Tính khoảng cách d từ đoạn thẳng đó đến trục hình trụ.

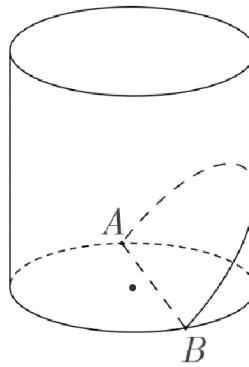
- A. $d = 50 \text{ cm}$. B. $d = 50\sqrt{3} \text{ cm}$. C. $d = 25 \text{ cm}$. D. $d = 25\sqrt{3} \text{ cm}$.

Câu 16. (THPT LÊ QUY ĐÔN ĐIỆN BIÊN NĂM 2018-2019 LẦN 01) Một hình trụ tròn xoay có hai đáy là hai đường tròn (O, R) và (O', R) . Biết rằng tồn tại dây

cung AB của đường tròn (O, R) sao cho tam giác $O'AB$ đều và góc giữa hai mặt phẳng $(O'AB)$ và mặt phẳng chứa đường tròn (O, R) bằng 60° . Tính diện tích xung quanh của hình trụ đã cho.

- A. $4\pi R^2$ B. $2\sqrt{3}\pi R^2$ C. $\frac{3\sqrt{7}}{7}\pi R^2$ D. $\frac{6\sqrt{7}}{7}\pi R^2$

Câu 17. (THPT CHUYÊN SƠN LA NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho khối trụ có bán kính đáy bằng $4(\text{cm})$ và chiều cao $5(\text{cm})$. Gọi AB là một dây cung đáy dưới sao cho $AB = 4\sqrt{3}(\text{cm})$. Người ta dựng mặt phẳng (P) đi qua hai điểm A, B và tạo với mặt phẳng đáy hình trụ một góc 60° như hình vẽ. Tính diện tích thiết diện của hình trụ cắt bởi mặt phẳng (P) .



- A. $\frac{8(4\pi - 3\sqrt{3})}{3}(\text{cm}^2)$. B. $\frac{4(4\pi - \sqrt{3})}{3}(\text{cm}^2)$. C. $\frac{4(4\pi - 3\sqrt{3})}{3}(\text{cm}^2)$. D. $\frac{8(4\pi - \sqrt{3})}{3}(\text{cm}^2)$.

Dạng 2. Thể tích

Câu 18. (Mã đề 104 - BGD - 2019) Thể tích của khối lăng trụ có diện tích đáy B và chiều cao h là

- A. $\frac{4}{3}Bh$. B. $\frac{1}{3}Bh$. C. $3Bh$. D. Bh .

Câu 19. (MĐ 103 BGD&ĐT NĂM 2017-2018) Thể tích của khối trụ tròn xoay có bán kính đáy r và chiều cao h bằng

- A. $\frac{4}{3}\pi r^2 h$ B. $\pi r^2 h$ C. $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ D. $2\pi r h$

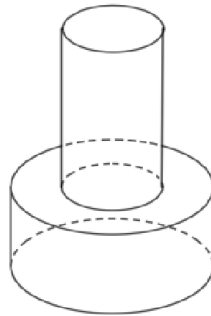
Câu 20. (Mã 102 - BGD - 2019) Thể tích của khối lăng trụ có diện tích đáy B và chiều cao h là

- A. $\frac{4}{3}Bh$. B. $\frac{1}{3}Bh$. C. $3Bh$. D. Bh .

Câu 21. (MÃ ĐỀ 123 BGD&ĐT NĂM 2017) Tính thể tích V của khối trụ có bán kính $r = 4$ và chiều cao $h = 4\sqrt{2}$.

- A. $V = 32\pi$ B. $V = 64\sqrt{2}\pi$ C. $V = 128\pi$ D. $V = 32\sqrt{2}\pi$

- Câu 22.** (CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG NAM ĐỊNH LẦN 1 NĂM 2018-2019) Thể tích khối trụ có bán kính đáy $r = a$ và chiều cao $h = a\sqrt{2}$ bằng
- A. $4\pi a^3\sqrt{2}$. B. $\pi a^3\sqrt{2}$. C. $2\pi a^3$. D. $\frac{\pi a^3\sqrt{2}}{3}$.
- Câu 23.** (CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN ĐIỆN BIÊN LẦN 3 NĂM 2018-2019) Thiết diện qua trục của một hình trụ là một hình vuông có cạnh bằng $2a$. Tính theo a thể tích khối trụ đó.
- A. πa^3 . B. $2\pi a^3$. C. $4\pi a^3$. D. $\frac{2}{3}\pi a^3$.
- Câu 24.** (THPT LÊ QUÝ ĐÔN ĐÀ NẴNG NĂM 2018-2019) Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 2BC = 2a$. Tính thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng $ABCD$ quanh trục AD .
- A. $4\pi a^3$. B. $2\pi a^3$. C. $8\pi a^3$. D. πa^3 .
- Câu 25.** (THPT CHUYÊN BẮC GIANG NAM 2018-2019 LẦN 01) Cho hình trụ có diện tích toàn phần là 4π và có thiết diện cắt bởi mặt phẳng qua trục là hình vuông. Tính thể tích khối trụ?
- A. $\frac{\pi\sqrt{6}}{12}$ B. $\frac{\pi\sqrt{6}}{9}$ C. $\frac{4\pi}{9}$ D. $\frac{4\pi\sqrt{6}}{9}$
- Câu 26.** (ĐỀ THAM KHẢO BGD&ĐT NĂM 2018-2019) Một khối đồ chơi gồm hai khối trụ $(H_1), (H_2)$ xếp chồng lên nhau, lần lượt có bán kính đáy và chiều cao tương ứng là r_1, h_1, r_2, h_2 thỏa mãn $r_2 = \frac{1}{2}r_1, h_2 = 2h_1$ (tham khảo hình vẽ). Biết rằng thể tích của toàn bộ khối đồ chơi bằng 30cm^3 , thể tích khối trụ (H_1) bằng



- A. 24cm^3 B. 15cm^3 C. 20cm^3 D. 10cm^3
- Câu 27.** (LIÊN TRƯỜNG THPT TP VINH NGHỆ AN NĂM 2018-2019) Một khối trụ có thể tích bằng 6π . Nếu giữ nguyên chiều cao và tăng bán kính đáy của khối trụ đó gấp 3 lần thì thể tích của khối trụ mới bằng bao nhiêu?
- A. $V = 162\pi$ B. $V = 27\pi$ C. $V = 18\pi$ D. $V = 54\pi$
- Câu 28.** (SỞ GD&ĐT HÀ NỘI NĂM 2018-2019) Hỏi nếu tăng chiều cao của khối trụ lên 2 lần, bán kính của nó lên 3 lần thì thể tích của khối trụ mới sẽ tăng bao nhiêu lần so với khối trụ ban đầu?
- A. 36. B. 6. C. 18. D. 12.

Dạng 3. Khối tròn xoay nội, ngoại tiếp khối đa diện

- Câu 29.** (ĐỀ THAM KHẢO BGD & ĐT 2018) Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng 4. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình trụ có một đường tròn đáy là đường tròn nội tiếp tam giác BCD và chiều cao bằng chiều cao của tứ diện $ABCD$.
- A. $S_{xq} = 8\sqrt{3}\pi$ B. $S_{xq} = 8\sqrt{2}\pi$ C. $S_{xq} = \frac{16\sqrt{3}\pi}{3}$ D. $S_{xq} = \frac{16\sqrt{2}\pi}{3}$

- Câu 30.** (ĐỀ THAM KHẢO BGD&ĐT NĂM 2017) Tính thể tích V của khối trụ ngoại tiếp hình lập phương có cạnh bằng a .
- A. $V = \frac{\pi a^3}{6}$ B. $V = \frac{\pi a^3}{2}$ C. $V = \frac{\pi a^3}{4}$ D. $V = \pi a^3$
- Câu 31.** Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng h . Tính thể tích V của khối trụ ngoại tiếp lăng trụ đã cho.
- A. $V = 3\pi a^2 h$ B. $V = \pi a^2 h$ C. $V = \frac{\pi a^2 h}{9}$ D. $V = \frac{\pi a^2 h}{3}$
- Câu 32.** (SỞ GD&ĐT QUẢNG NINH NĂM 2018-2019 LẦN 01) Một hình trụ có thiết diện qua trục là hình vuông, diện tích xung quanh bằng $36\pi a^2$. Tính thể tích V của lăng trụ lục giác đều nội tiếp hình trụ.
- A. $27\sqrt{3}a^3$ B. $24\sqrt{3}a^3$ C. $36\sqrt{3}a^3$ D. $81\sqrt{3}a^3$
- Câu 33.** (CHUYÊN KHTN NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho hình trụ (T) chiều cao bằng $2a$, hai đường tròn đáy của (T) có tâm lần lượt là O và O_1 , bán kính bằng a . Trên đường tròn đáy tâm O lấy điểm A , trên đường tròn đáy tâm O_1 lấy điểm B sao cho $AB = \sqrt{5}a$. Thể tích khối tứ diện OO_1AB bằng
- A. $\frac{\sqrt{3}a^3}{12}$ B. $\frac{\sqrt{3}a^3}{4}$ C. $\frac{\sqrt{3}a^3}{6}$ D. $\frac{\sqrt{3}a^3}{3}$
- Câu 34.** (THPT BA ĐÌNH NĂM 2018-2019 LẦN 02) Cho khối trụ có đáy là các đường tròn tâm (O) , (O') có bán kính là R và chiều cao $h = R\sqrt{2}$. Gọi A , B lần lượt là các điểm thuộc (O) và (O') sao cho OA vuông góc với $O'B$. Tỉ số thể tích của khối tứ diện $OO'AB$ với thể tích khối trụ là:
- A. $\frac{2}{3\pi}$ B. $\frac{1}{3\pi}$ C. $\frac{1}{6\pi}$ D. $\frac{1}{4\pi}$
- Câu 35.** (THPT LƯƠNG THẾ VINH HÀ NỘI NĂM 2018-2019 LẦN 1) Một hình trụ có bán kính đáy bằng chiều cao và bằng a . Một hình vuông $ABCD$ có đáy AB, CD là hai dây cung của hai đường tròn đáy và $(ABCD)$ không vuông góc với đáy. Diện tích hình vuông đó bằng
- A. $\frac{5a^2}{4}$ B. $5a^2$ C. $\frac{5a^2\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{5a^2}{2}$
- Câu 36.** (ĐỀ 15 LOVE BOOK NĂM 2018-2019) Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$, biết góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng 45° , diện tích tam giác $A'BC$ bằng $a^2\sqrt{6}$. Tính diện tích xung quanh của hình trụ ngoại tiếp hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$.
- A. $\frac{4\pi a^2\sqrt{3}}{3}$ B. $2\pi a^2$ C. $4\pi a^2$ D. $\frac{8\pi a^2\sqrt{3}}{3}$
- Câu 37.** (THPT ĐOÀN THƯỢNG - HẢI DƯƠNG - 2018 2019) Cho hình trụ có bán kính R và chiều cao $\sqrt{3}R$. Hai điểm A , B lần lượt nằm trên hai đường tròn đáy sao cho góc giữa AB và trục d của hình trụ bằng 30° . Tính khoảng cách giữa AB và trục của hình trụ:
- A. $d(AB, d) = \frac{R\sqrt{3}}{2}$ B. $d(AB, d) = R$ C. $d(AB, d) = R\sqrt{3}$ D. $d(AB, d) = \frac{R}{2}$

Dạng 4. Bài toán thực tế

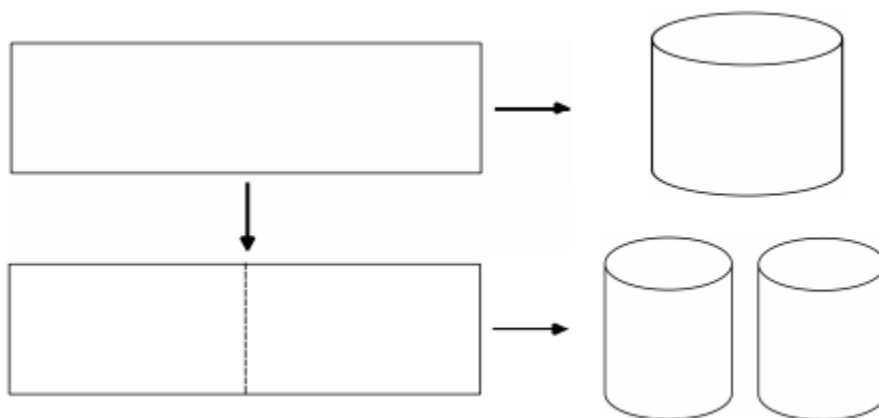
- Câu 38.** (ĐỀ THI THỬ VTED 02 NĂM HỌC 2018 - 2019) Một ngôi biệt thự có 10 cây cột nhà hình trụ tròn, tất cả đều có chiều cao 4,2 m. Trong đó, 4 cây cột trước đại sảnh có đường kính 40 cm và 6 cây cột còn lại bên thân nhà có đường kính 26 cm. Chủ nhà dùng loại sơn giả đá để sơn 10 cây cột đó. Nếu giá của một loại sơn giả đá là 380.000 đồng/m² (gồm cả tiền thi công) thì người chủ phải chi ít nhất bao nhiêu tiền để sơn 10 cây cột đó? (Số tiền làm tròn đến hàng nghìn).
 A. 14.647.000 (đồng). B. 13.627.000 (đồng). C. 16.459.000 (đồng). D. 15.844.000 (đồng).
- Câu 39.** Mặt tiền của nhà văn hóa huyện Quỳnh Lưu có 17 cây cột hình trụ tròn, tất cả đều có chiều cao bằng 4,2 m. Trong số các cây đó có 3 cây cột trước đại sảnh đường kính bằng 40 cm, 14 cây cột còn lại phân bố đều hai bên đại sảnh và chúng đều có đường kính bằng 26 cm. Chủ đầu tư thuê nhân công để sơn các cây cột bằng loại sơn giả gỗ, biết giá thuê là 360.000 / m² (kể cả vật liệu sơn và phần thi công). Hỏi chủ đầu tư phải chi ít nhất bao nhiêu tiền để sơn hết các cây cột nhà đó (đơn vị đồng)? (lấy $\pi \approx 3,14159$)
 A. ≈ 22990405 B. ≈ 5473906 C. ≈ 5473907 D. ≈ 22990407
- Câu 40.** (Mã đề 102 BGD&ĐT NĂM 2018) Một chiếc bút chì có dạng khối trụ lục giác đều có cạnh đáy 3 (mm) và chiều cao bằng 200 (mm). Thân bút chì được làm bằng gỗ và phần lõi được làm bằng than chì. Phần lõi có dạng khối trụ có chiều cao bằng chiều cao bằng chiều dài của bút và đáy là hình tròn có bán kính 1 (mm). Giả định 1 m³ gỗ có giá a triệu đồng, 1 m³ than chì có giá $6a$ triệu đồng. Khi đó giá nguyên vật liệu làm một chiếc bút chì như trên gần nhất với kết quả nào dưới đây?
 A. 8,45.a đồng B. 7,82.a đồng C. 84,5.a đồng D. 78,2.a đồng
- Câu 41.** (Mã đề 104 - BGD - 2019) Một cơ sở sản xuất có hai bể nước hình trụ có chiều cao bằng nhau, bán kính đáy lần lượt bằng 1 m và 1,5 m. Chủ cơ sở dự định làm một bể nước mới, hình trụ, có cùng chiều cao và thể tích bằng tổng thể tích của hai bể nước trên. Bán kính đáy của bể nước dự định làm gần nhất với kết quả nào dưới đây?
 A. 1,8 m. B. 2,1 m. C. 1,6 m. D. 2,5 m.
- Câu 42.** (Mã đề 101 - BGD - 2019) Một cơ sở sản xuất có hai bể nước hình trụ có chiều cao bằng nhau, bán kính đáy lần lượt bằng 1m và 1,2m. Chủ cơ sở dự định làm một bể nước mới, hình trụ, có cùng chiều cao và có thể tích bằng tổng thể tích của hai bể nước trên. Bán kính đáy của bể nước dự định làm gần nhất với kết quả nào dưới đây?
 A. 2,2m. B. 1,6m. C. 1,8m. D. 1,4m.
- Câu 43.** (Mã đề 101 BGD&ĐT NĂM 2018) Một chiếc bút chì có dạng khối lăng trụ lục giác đều có cạnh đáy 3 mm và chiều cao bằng 200 mm. Thân bút chì được làm bằng gỗ và phần lõi được làm bằng than chì. Phần lõi có dạng khối trụ có chiều cao bằng chiều dài của bút và đáy là hình tròn có bán kính đáy 1 mm. Giả định 1 m³ gỗ có giá a (triệu đồng), 1 m³ than chì có giá $8a$ (triệu đồng). Khi đó giá nguyên liệu làm một chiếc bút chì như trên gần nhất với kết quả nào dưới đây?
 A. 9,07a (đồng) B. 97,03a (đồng) C. 90,7a (đồng) D. 9,7a (đồng)
- Câu 44.** (Mã 102 - BGD - 2019) Một cơ sở sản xuất có hai bể nước hình trụ có chiều cao bằng nhau, bán kính đáy lần lượt bằng 1m và 1,4 m. Chủ cơ sở dự định làm một bể nước mới, hình trụ, có cùng chiều cao và có thể tích bằng tổng thể tích của hai bể nước trên. Bán kính đáy của bể nước dự định làm gần nhất với kết quả nào dưới đây?
 A. 1,7 m. B. 1,5 m. C. 1,9 m. D. 2,4 m.
- Câu 45.** (Mã 103 - BGD - 2019) Một cơ sở sản xuất có hai bể nước hình trụ có chiều cao bằng nhau, bán kính đáy lần lượt bằng 1m và 1,8m. Chủ cơ sở dự định làm một bể nước mới, hình trụ, có cùng chiều cao và có thể tích bằng tổng thể tích của hai bể nước trên. Bán kính đáy của bể nước dự định làm gần nhất với kết quả nào dưới đây?
 A. 2,8m. B. 2,6m. C. 2,1m. D. 2,3m.

Câu 46. (ĐỀ MINH HỌA GBD&ĐT NĂM 2017) Từ một tấm tôn hình chữ nhật kích thước $50cm.240cm$, người ta làm các thùng đựng nước hình trụ có chiều cao bằng $50cm$, theo hai cách sau (xem hình minh họa dưới đây):

- Cách 1: Gò tấm tôn ban đầu thành mặt xung quanh của thùng.
- Cách 2: Cắt tấm tôn ban đầu thành hai tấm bằng nhau, rồi gò mỗi tấm đó thành mặt xung quanh của một thùng.

Kí hiệu V_1 là thể tích của thùng gò được theo cách 1 và V_2 là tổng thể tích của hai thùng gò được theo cách

2. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.



A. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{2}$

B. $\frac{V_1}{V_2} = 1$

C. $\frac{V_1}{V_2} = 2$

D. $\frac{V_1}{V_2} = 4$

Câu 47. (Mã đề 104 BGD&ĐT NĂM 2018) Một chiếc bút chì có dạng khối lăng trụ lục giác đều có cạnh đáy $3mm$ và chiều cao $200mm$. Thân bút chì được làm bằng gỗ và phần lõi được làm bằng than chì. Phần lõi có dạng khối trụ có chiều cao bằng chiều cao của bút và đáy là hình tròn có bán kính $1mm$. Giả định $1m^3$ gỗ có giá a (triệu đồng), $1m^3$ than chì có giá $7a$ (triệu đồng). Khi đó giá nguyên vật liệu làm một chiếc bút chì như trên gần nhất với kết quả nào dưới đây?

A. $85,5.a$ (đồng)

B. $9,07.a$ (đồng)

C. $8,45.a$ (đồng)

D. $90,07.a$ (đồng)

Câu 48. (MĐ 103 BGD&ĐT NĂM 2017-2018) Một chiếc bút chì có dạng khối lăng trụ lục giác đều có cạnh đáy bằng $3mm$ và chiều cao bằng $200mm$. Thân bút chì được làm bằng gỗ và phần lõi có dạng khối trụ có chiều cao bằng chiều dài của bút và đáy là hình tròn có bán kính bằng $1mm$. Giả định $1m^3$ gỗ có giá a (triệu đồng). $1m^3$ than chì có giá $9a$ (triệu đồng). Khi đó giá nguyên vật liệu làm một chiếc bút chì như trên gần nhất với kết quả nào dưới đây?

A. $103,3a$ đồng

B. $97,03a$ đồng

C. $10,33a$ đồng

D. $9,7a$ đồng

Câu 49. (CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN QUẢNG TRỊ NĂM 2018-2019 LẦN 01) Người ta làm tạ tập cơ tay như hình vẽ với hai đầu là hai khối trụ bằng nhau và tay cầm cũng là khối trụ. Biết hai đầu là hai khối trụ đường kính đáy bằng 12 , chiều cao bằng 6 , chiều dài tạ bằng 30 và bán kính tay cầm là 2 . Hãy tính thể tích vật liệu làm nên tạ tay đó.



A. 108π .

B. 6480π .

C. 502π .

D. 504π .

Câu 50. (CHUYÊN TRẦN PHÚ HẢI PHÒNG NĂM 2018-2019 LẦN 02) Để làm cống thoát nước cho một con đường người ta cần đúc 200 ống hình trụ bằng bê tông có đường kính trong lòng ống là $1m$ và chiều cao

của mỗi ống bằng $2m$, độ dày của thành ống là $8cm$. Biết rằng $1m^3$ bê tông thì cần đúng 10 bao xi-măng. Hỏi cần bao nhiêu bao xi-măng để đúc 200 ống trên (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)?

- A. 1086 bao. B. 1025 bao. C. 2091 bao. D. 523 bao.

Câu 51. (THPT LÊ QUY ĐÔN ĐIỆN BIÊN NĂM 2018-2019 LẦN 01) Một người thợ có một khối đá hình trụ. Kẽ hai đường kính MN , PQ của hai đáy sao cho $MN \perp PQ$. Người thợ đó cắt khối đá theo các mặt đi qua 3 trong 4 điểm M, N, P, Q để khối đá có hình tứ diện $MNPQ$. Biết $MN = 60$ cm và thể tích khối tứ diện $MNPQ = 30 \text{ dm}^3$. Hãy tính thể tích lượng đá cắt bỏ (làm tròn đến một chữ số thập phân sau dấu phẩy).

- A. $101,3 \text{ dm}^3$ B. $111,4 \text{ dm}^3$ C. $121,3 \text{ dm}^3$ D. $141,3 \text{ dm}^3$

Câu 52. (CHUYÊN TRẦN PHÚ HẢI PHÒNG NĂM 2018-2019 LẦN 02) Công ty X định làm một téc nước hình trụ bằng inox (gồm cả nắp) có dung tích $1m^3$. Để tiết kiệm chi phí công ty X chọn loại téc nước có diện tích toàn phần nhỏ nhất. Hỏi diện tích toàn phần của téc nước nhỏ nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến 2 chữ số sau dấu phẩy)?

- A. $5,59 \text{ m}^2$ B. $5,54 \text{ m}^2$ C. $5,57 \text{ m}^2$ D. $5,52 \text{ m}^2$

Câu 53. (CHUYÊN NGUYỄN TẤT THÀNH YÊN BÁI LẦN 01 NĂM 2018-2019) Một cái trục lăn sơn nước có dạng một hình trụ. Đường kính của đường tròn đáy là 5cm , chiều dài lăn là 23cm (hình bên). Sau khi lăn tròn 10 vòng thì trục lăn tạo nên tường phẳng lớp sơn có diện tích là



- A. $2300\pi \text{ cm}^2$. B. $1150\pi \text{ cm}^2$. C. $862,5\pi \text{ cm}^2$. D. $5230\pi \text{ cm}^2$.

Dạng 5. Bài toán cực trị

Câu 54. (THPT CHUYÊN VĨNH PHÚC LẦN 02 NĂM 2018-2019) Một hình trụ có độ dài đường cao bằng 3, các đường tròn đáy lần lượt là $(O;1)$ và $(O';1)$. Giả sử AB là đường kính cố định của $(O;1)$ và CD là đường kính thay đổi trên $(O';1)$. Tìm giá trị lớn nhất $V_{\max}$ của thể tích khối tứ diện $ABCD$.

- A. $V_{\max} = 2$. B. $V_{\max} = 6$. C. $V_{\max} = \frac{1}{2}$. D. $V_{\max} = 1$.

Câu 55. (CHUYÊN NGUYỄN TRÃI HẢI DƯƠNG NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cần sản xuất một vỏ hộp sữa hình trụ có thể tích V cho trước. Để tiết kiệm vật liệu nhất thì bán kính đáy phải bằng

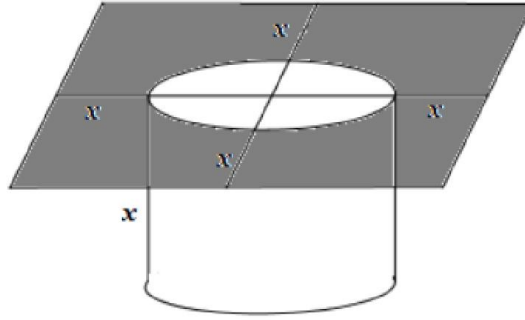
- A. $\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$. B. $\sqrt[3]{\frac{V}{2}}$. C. $\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$. D. $\sqrt[3]{\frac{V}{3\pi}}$.

Câu 56. Thiết diện của hình trụ và mặt phẳng chứa trục của hình trụ là hình chữ nhật có chu vi là 12 cm . Giá trị lớn nhất của thể tích khối trụ là:

- A. $64\pi \text{ cm}^3$. B. $16\pi \text{ cm}^3$. C. $8\pi \text{ cm}^3$. D. $32\pi \text{ cm}^3$.

Câu 57. (THPT CHUYÊN THÁI NGUYÊN LẦN 01 NĂM 2018-2019) Trên một mảnh đất hình vuông có diện tích $81m^2$ người ta đào một cái ao nuôi cá hình trụ (như hình vẽ) sao cho tâm của hình tròn đáy trùng với tâm của mảnh đất. Ở giữa mép ao và mép mảnh đất người ta để lại một khoảng đất trống để đi lại, biết

khoảng cách nhỏ nhất giữa mép ao và mép mảnh đất là $x(m)$. Giả sử chiều sâu của ao cũng là $x(m)$.
 Tính thể tích lớn nhất V của ao.



- A. $V = 13,5\pi(m^3)$. B. $V = 27\pi(m^3)$. C. $V = 36\pi(m^3)$. D. $V = 72\pi(m^3)$.

Câu 58. (THPT CHUYÊN VĨNH PHÚC NĂM 2018-2019 LẦN 3) Cho hình trụ có đáy là hai đường tròn tâm O và O' , bán kính đáy bằng chiều cao và bằng $2a$. Trên đường tròn đáy có tâm O lấy điểm A , trên đường tròn tâm O' lấy điểm B . Đặt α là góc giữa AB và đáy. Tính $\tan \alpha$ khi thể tích khối tứ diện $OO'AB$ đạt giá trị lớn nhất.

- A. $\tan \alpha = \sqrt{2}$ B. $\tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ C. $\tan \alpha = \frac{1}{2}$ D. $\tan \alpha = 1$

Câu 59. (THPT CHUYÊN VĨNH PHÚC NĂM 2018-2019 LẦN 3) Cho hình trụ có đáy là hai đường tròn tâm O và O' , bán kính đáy bằng chiều cao và bằng $2a$. Trên đường tròn đáy có tâm O lấy điểm A, D sao cho $AD = 2\sqrt{3}a$; gọi C là hình chiếu vuông góc của D lên mặt phẳng chứa đường tròn (O') ; trên đường tròn tâm O' lấy điểm B (AB chéo với CD). Đặt α là góc giữa AB và đáy. Tính $\tan \alpha$ khi thể tích khối tứ diện $CDAB$ đạt giá trị lớn nhất.

- A. $\tan \alpha = \sqrt{3}$ B. $\tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ C. $\tan \alpha = 1$ D. $\tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Câu 60. (THPT CHUYÊN VĨNH PHÚC NĂM 2018-2019 LẦN 3) Cho hình trụ có đáy là hai đường tròn tâm O và O' , bán kính đáy bằng chiều cao và bằng $2a$. Trên đường tròn đáy có tâm O lấy điểm A, D trên đường tròn tâm O' lấy điểm B, C sao cho $AB \parallel CD$ và AB không cắt OO' . Tính AD để thể tích khối chóp $O'.ABCD$ đạt giá trị lớn nhất.

- A. $AD = 2\sqrt{2}a$ B. $AD = 4a$ C. $AD = \frac{4\sqrt{3}}{3}a$ D. $AD = \sqrt{2}a$

PHẦN B. ĐÁP ÁN THAM KHẢO

Dạng 1. Diện tích xung quanh, diện tích toàn phần, chiều cao, bán kính đáy, thiết diện

Câu 1. Chọn B

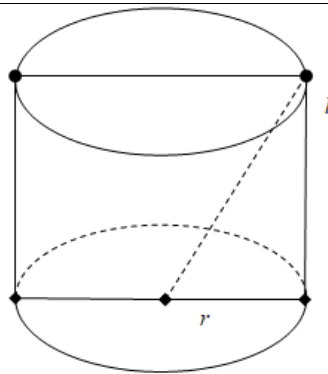
Diện tích xung quanh của hình trụ tròn xoay: $S_{xq} = 2\pi rl$.

Câu 2. Chọn D

Quay hình chữ nhật $ABCD$ xung quanh MN nên hình trụ có bán kính $r = AM = \frac{AD}{2} = 1$

Vậy diện tích toàn phần của hình trụ $S_{tp} = 2\pi r \cdot AB + 2\pi r^2 = 2\pi + 2\pi = 4\pi$.

Câu 3. Chọn D



Diện tích xung quanh của hình trụ: $2\pi rl$ (l : độ dài đường sinh) Có $l = 2r$

$$S_{xq} = 2\pi rl \Leftrightarrow 2\pi rl = 50\pi \Leftrightarrow 2\pi r 2r = 50\pi \Leftrightarrow r = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

Câu 4. Chọn A

Ta có $V = S.h$ với $S = \pi r^2 = \pi$ nên $h = \frac{V}{S} = 5$.

Diện tích toàn phần của trụ tương ứng là: $S_p = 2\pi Rh + 2\pi R^2 = 2\pi \cdot 1 \cdot 5 + 2\pi \cdot 1^2 = 12\pi$.

Câu 5. Chọn D

Diện tích xung quanh của hình trụ là: $S_{xq} = 2\pi rl = 2\pi rh = 2\pi \cdot a \cdot a\sqrt{3} = 2\pi a^2 \sqrt{3}$.

Câu 6. Thiết diện qua trục là một hình vuông có cạnh bằng $3a$ nên ta có độ dài đường sinh $l = 3a$ và bán kính đường tròn đáy là $r = \frac{3a}{2}$.

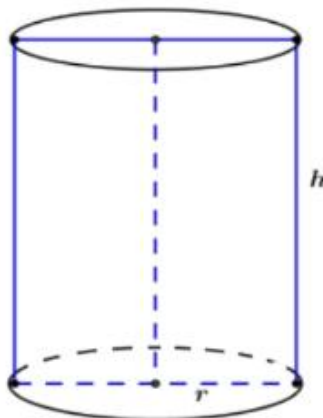
$$\text{Từ đó ta tính được } S_{tp} = 2\pi rl + 2\pi r^2 = 2\pi \cdot \frac{3a}{2} \cdot 3a + 2\pi \cdot \left(\frac{3a}{2}\right)^2 = \frac{27a^2\pi}{2}.$$

Câu 7. Chọn B

Diện tích xung quanh của hình trụ có bán kính đáy a và chiều cao h là

$$S_{xq} = 2\pi ah \Leftrightarrow h = \frac{S_{xq}}{2\pi a} = \frac{4\pi a^2}{2\pi a} = 2a.$$

Vậy độ dài đường cao của hình trụ đó là $h = 2a$.

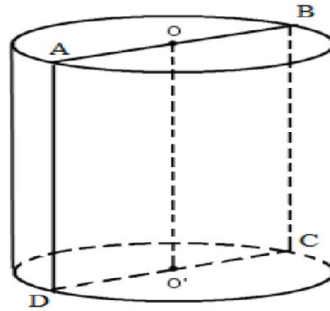


Câu 8.

Công thức tính diện tích xung quanh hình trụ có bán kính đáy R , chiều cao h là $S_{xq} = 2\pi Rh$

Công thức tính thể tích của khối trụ có bán kính đáy R , chiều cao h là $V = \pi R^2 h$

Vì thiết diện qua trục là hình vuông nên ta có $h = 2r = 4\text{cm}$. $S_{xq} = 2p \cdot rh = 2p \cdot 2 \cdot 4 = 16p \text{ cm}^3$



Câu 9.

Gọi thiết diện qua trục là hình vuông $ABCD$. Theo đề thì $AB = AD = 3a$.

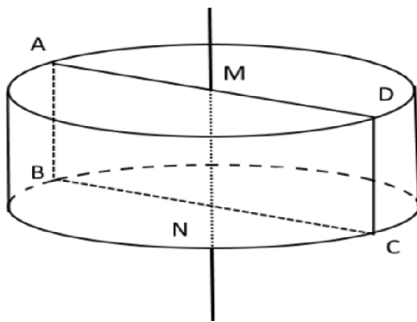
Bán kính đáy của hình trụ là $R = \frac{AB}{2} = \frac{3a}{2}$.

Đường sinh của hình trụ là $l = AD = 3a$.

Áp dụng công thức diện tích toàn phần của hình trụ, ta có

$$S_{tp} = 2\pi Rl + 2\pi R^2 = 2\pi \cdot \frac{3a}{2} \cdot 3a + 2\pi \left(\frac{3a}{2}\right)^2 = \frac{27\pi a^2}{2}.$$

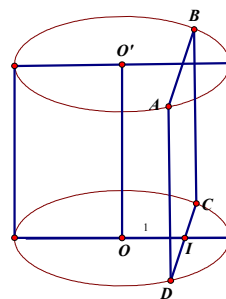
Câu 10.



Hình trụ đã cho có chiều cao là AB và đáy là hình tròn tâm N bán kính BN .

$$\text{Do đó: } S_{tp} = S_{xq} + 2S_{\text{đáy}} = AB \cdot 2\pi \cdot BN + 2\pi \cdot BN^2 = 1 \cdot 2\pi \cdot 1 + 2\pi \cdot 1^2 = 4\pi.$$

Câu 11. Chọn A



Ta có:

$$S_{ABCD} = 12\sqrt{2} = 3\sqrt{2} \cdot CD$$

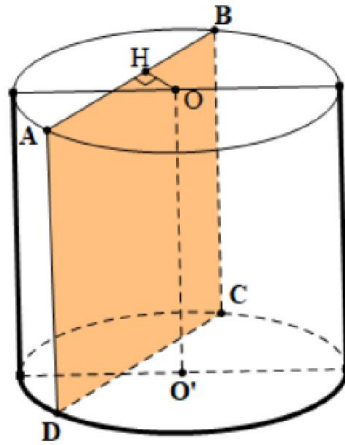
$$\Rightarrow CD = 4$$

$$\Rightarrow CI = 2$$

$$\Rightarrow CO = \sqrt{CI^2 + IO^2} = \sqrt{5} = r$$

$$S_{xq} = 2\pi rl = 6\sqrt{10}\pi$$

Câu 12. Chọn C



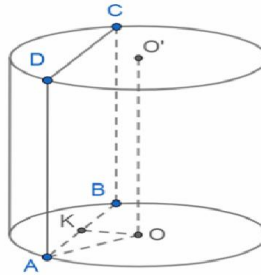
Gọi O, O' lần lượt là tâm của hai đáy và $ABCD$ là thiết diện song song với trục với $A, B \in (O); C, D \in (O')$. Gọi H là trung điểm của $AB \Rightarrow OH = d(OO', (ABCD)) = 1$.

$$\text{Vì } S_{ABCD} = 30 \Leftrightarrow AB \cdot BC = 30 \Rightarrow AB = \frac{30}{5\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} \Rightarrow HA = HB = \sqrt{3}.$$

$$\text{Bán kính của đáy là } r = \sqrt{OH^2 + HA^2} = \sqrt{3+1} = 2.$$

$$\text{Diện tích xung quanh của hình trụ bằng } S_{xq} = 2\pi rh = 2\pi \cdot 2 \cdot 5\sqrt{3} = 20\sqrt{3}\pi.$$

Câu 13. Chọn A



Cắt hình trụ đã cho bởi một mặt phẳng song song với trục, ta được thiết diện là hình chữ nhật $ABCD$ (với AB là dây cung của hình tròn đáy tâm O).

$$\text{Do hình trụ có chiều cao là } h = OO' = 4\sqrt{2} \Rightarrow \text{hình trụ có độ dài đường sinh } l = AD = 4\sqrt{2}.$$

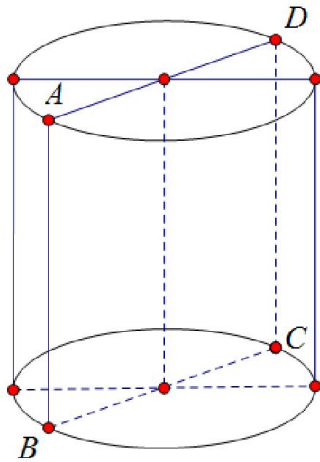
$$\text{Diện tích hình chữ nhật } ABCD \text{ bằng } AB \cdot CD = 16 \Rightarrow AB = \frac{16}{AD} = \frac{16}{4\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}.$$

Gọi K là trung điểm đoạn AB thì $OK \perp AB$, lại có $\text{mp}(ABCD)$ vuông góc với mặt phẳng đáy của hình trụ $\Rightarrow OK \perp \text{mp}(ABCD) \Rightarrow$ khoảng cách giữa OO' và $\text{mp}(ABCD)$ là $OK = \sqrt{2}$.

$$\text{Xét tam giác vuông } AOK \quad R = OA = \sqrt{OK^2 + AK^2} = \sqrt{OK^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = 2.$$

$$\text{Diện tích xung quanh của hình trụ là } S = 2\pi Rl = 2\pi \cdot 2 \cdot 4\sqrt{2} = 16\pi\sqrt{2}.$$

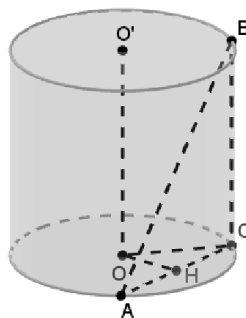
Câu 14. Chọn C



Gọi h, r lần lượt là đường cao và bán kính đáy của hình trụ (T) . Thiết diện của mặt phẳng và hình trụ (T) là hình chữ nhật $ABCD$. Khi đó theo giả thiết ta có

$$\begin{cases} h > 2r \\ S_{ABCD} = h \cdot 2r = 30 \\ C_{ABCD} = 2(h + 2r) = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h > 2r \\ hr = 15 \\ h + 2r = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h > 2r \\ h = 13 - 2r \\ -2r^2 + 15r - 15 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h > 2r \\ h = 13 - 2r \\ \begin{cases} r = 5 \Rightarrow h = 3(l) \\ r = \frac{3}{2} \Rightarrow h = 10(TM) \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } S_{TP} = S_{XQ} + 2S_{\diamond} = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi \cdot \frac{3}{2} \cdot 10 + 2\pi \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{69\pi}{2} (cm^2).$$



Câu 15.

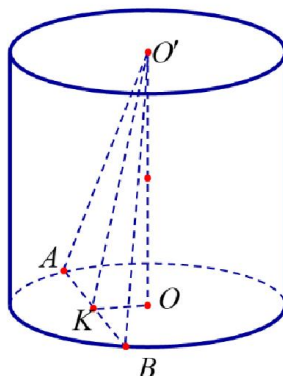
Qua B kẻ đường thẳng song song với OO' cắt đường tròn đáy tại C .

$OO' \parallel BC \Rightarrow OO' \parallel (ABC) \Rightarrow d(OO', AB) = d(OO', (ABC)) = d(O, (ABC)) = OH = d$. (H là trung điểm của đoạn thẳng AC).

$$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = 50\sqrt{3} \text{ cm.}$$

$$\text{Vậy } d = OH = \sqrt{OC^2 - HC^2} = 25 \text{ cm.}$$

Câu 16. Chọn D



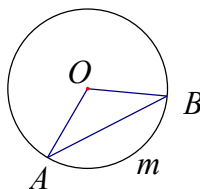
Gọi K là trung điểm AB , đặt $AB = 2a$.

Ta có : $AB \perp OK$ và $AB \perp OO'$ nên $\widehat{OKO'} = 60^\circ \Rightarrow O'K = 2OK \Rightarrow O'K^2 = 4OK^2$

$$\Rightarrow 3a^2 = 4(R^2 - a^2) \Rightarrow a^2 = \frac{4R^2}{7}$$

$$\text{Mặt khác : } OO'^2 = O'B^2 - OB^2 = 4a^2 - R^2 = 4 \cdot \frac{4R^2}{7} - R^2 = \frac{9R^2}{7} \Rightarrow O'O = \frac{6\sqrt{7}\pi R}{7}$$

$$\text{Vậy diện tích xung quanh hình trụ đã cho là : } S_{xq} = 2\pi Rl = \frac{6\sqrt{7}\pi R^2}{7}.$$



Câu 17.

Gọi S là diện tích thiết diện, S' là diện tích hình chiếu của thiết diện lên mặt phẳng đáy. Khi đó $S' = S \cdot \cos 60^\circ$.

$$\text{Ta có } AB = 4\sqrt{3} \Rightarrow \cos \widehat{AOB} = \frac{OA^2 + OB^2 - AB^2}{2 \cdot OA \cdot OB} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{AOB} = 120^\circ$$

$$\Rightarrow \begin{cases} S_{OAB} = \frac{1}{2} OA \cdot OB \cdot \sin 120^\circ = 4\sqrt{3} \\ S_{OAmB} = \frac{1}{3} \pi \cdot OA^2 = \frac{16\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow S' = S_{OAmB} - S_{OAB} = \frac{4(4\pi - 3\sqrt{3})}{3}$$

$$\Rightarrow S = \frac{S'}{\cos 60^\circ} = \frac{8(4\pi - 3\sqrt{3})}{3}.$$

Dạng 2. Thể tích

Câu 18. Chọn D

Câu hỏi lý thuyết

Câu 19. Chọn B

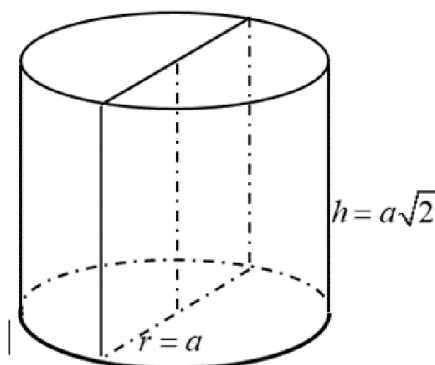
$$V_{tru} = \pi r^2 h.$$

Câu 20. Chọn D

Ta có công thức tính thể tích lăng trụ có diện tích đáy B và chiều cao h là $V = Bh$.

Câu 21. Chọn B

$$V = \pi r^2 h = 16.4\sqrt{2}\pi = 64\sqrt{2}\pi$$



Câu 22.

Thể tích khối trụ là: $V = \pi r^2 h = \pi \cdot a^2 \cdot a\sqrt{2} = \pi a^3 \sqrt{2}$.

Câu 23. Gọi chiều cao và bán kính đáy của hình trụ lần lượt là h, r .

Thiết diện qua trục của hình trụ là một hình vuông có cạnh bằng $2a$ nên $h = 2a, r = a$.

Thể tích của khối trụ đó là $V = \pi r^2 h = \pi a^2 \cdot 2a = 2\pi a^3$.

Câu 24. Khối tròn xoay tạo thành là khối trụ có bán kính đáy là $AB = 2a$ và đường cao $AD = BC = a$ có thể tích bằng $V = \pi AB^2 AD = 4\pi a^3$

Câu 25. Chọn D

Hình trụ có thiết diện cắt bởi mặt phẳng qua trục là hình vuông suy ra: $l = h = 2r$

Hình trụ có diện tích toàn phần là 4π suy ra:

$$S_{tp} = 2\pi r l + 2\pi r^2 = 2\pi \cdot 2r^2 + 2\pi \cdot r^2 = 6\pi r^2 = 4\pi$$

$$\text{Nên } r = \frac{\sqrt{6}}{3}, l = h = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

$$\text{Thể tích khối trụ: } V = \pi r^2 \cdot h = \frac{4\pi\sqrt{6}}{9}$$

Câu 26. Chọn C

Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích khối trụ $(H_1), (H_2)$

$$V_2 = \pi r_2^2 h_2 = \pi \left(\frac{1}{2} r_1 \right)^2 2h_1 = \frac{V_1}{2}$$

$$\Rightarrow V_1 = 2V_2 \text{ mà } V_1 + V_2 = 30 \Rightarrow V_1 = 20$$

Câu 27. Ta có: $V_1 = \pi R^2 \cdot h = 6\pi$

$$\text{Suy ra: } V_2 = \pi (3R)^2 \cdot h = 9V_1 = 9 \cdot 6\pi = 54\pi.$$

Câu 28. Giả sử ban đầu khối trụ có chiều cao h_1 và bán kính r_1 . Khi đó, khối trụ có thể tích là $V_1 = \pi r_1^2 h_1$.

Sau khi tăng chiều cao của khối trụ lên 2 lần, bán kính của nó lên 3 lần thì khối trụ có chiều cao $2h_1$ và bán kính $3r_1$. Khi đó, khối trụ mới có thể tích là $V_2 = \pi (3r_1)^2 \cdot 2h_1 = 18\pi r_1^2 h_1$.

$$\text{Do vậy } \frac{V_2}{V_1} = 18.$$

Dạng 3. Khối tròn xoay nội, ngoại tiếp khối đa diện

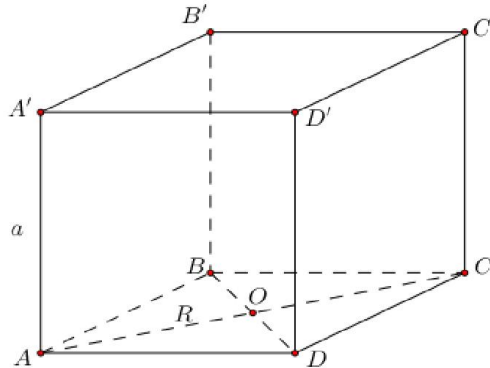
Câu 29. Chọn D

$$\text{Bán kính đường tròn đáy hình trụ bằng một phần ba đường cao tam giác } BCD \text{ nên } r = \frac{1}{3} \cdot \frac{4\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Chiều cao hình trụ bằng chiều cao hình chóp: $h = \sqrt{4^2 - \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{4\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{16 - \frac{16 \cdot 3}{9}} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

$$S_{xq} = 2\pi rh = 2\pi \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{16\sqrt{2}\pi}{3}$$

Câu 30. Chọn B



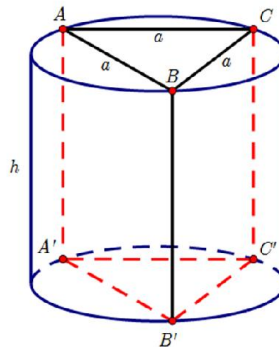
Bán kính đường tròn đáy là $R = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$; chiều cao $h = a$.

Vậy thể tích khối trụ là: $V = \pi R^2 h = \pi \cdot \frac{a^2}{2} \cdot a = \frac{\pi a^3}{2}$.

Câu 31.

Lời giải

Chọn D



Khối trụ ngoại tiếp lăng trụ tam giác đều có hình tròn đáy là hình tròn ngoại tiếp tam giác đáy của lăng trụ, và chiều cao bằng chiều cao lăng trụ.

Tam giác đều cạnh a có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng $\frac{\sqrt{3}a}{3}$.

Vậy thể tích của khối trụ cần tìm là $V = h \cdot S = h \cdot \pi \cdot \left(\frac{\sqrt{3}a}{3}\right)^2 = \frac{\pi a^2 h}{3}$ (đvtt).

Câu 32. Ta có $S_{xq} = 36\pi a^2 = 2\pi Rh$.

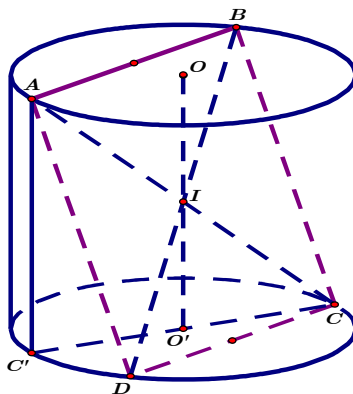
Do thiết diện qua trục là hình vuông nên ta có $2R = h$.

Khi đó $h^2 = 36a^2$ hay $h = 6a$; $R = 3a$.

Diện tích của mặt đáy hình lăng trụ lục giác đều nội tiếp hình trụ là $B = 6 \cdot \frac{R^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{27a^2 \sqrt{3}}{2}$.

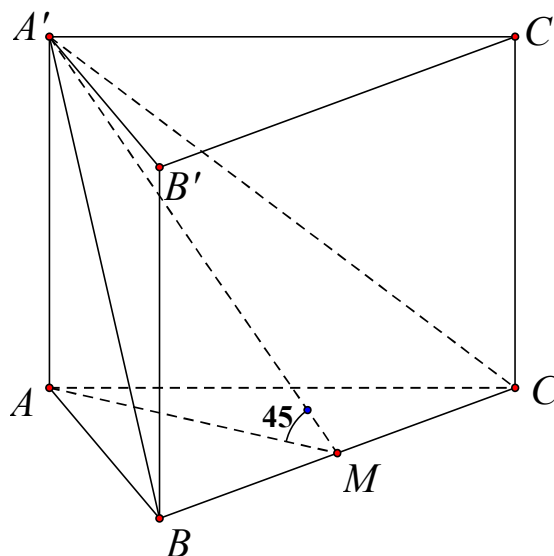
A diagram of a cylinder. The bottom base is a circle with center O and radius R . The top base is a circle with center O' and radius R . A point A is on the bottom base, and a point B is on the top base. A dashed line segment AO' is labeled $R\sqrt{2}$. A solid line segment AB is labeled R . The cylinder's height is indicated by a vertical line on the left.

17



+ Gọi O, O' là tâm của 2 đường tròn đáy, I là trung điểm của OO' .
Do tính đối xứng nên I là trung điểm của AC, BD .

+ Do đó $S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC^2 = \frac{5a^2}{2}$.



Gọi M là trung điểm BC , khi đó $\begin{cases} BC \perp AM \\ BC \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BC \perp A'M$, do đó góc giữa $(A'BC)$ và (ABC) là $\widehat{A'MA} = 45^\circ$.

Tam giác $A'MA$ vuông cân tại A nên $A'M = AM\sqrt{2} = \frac{BC\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{2} = \frac{BC\sqrt{6}}{2}$.

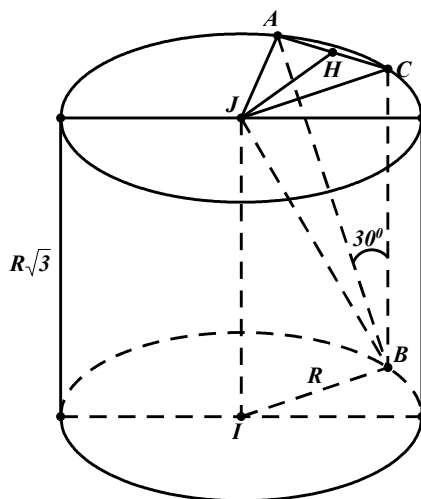
$$\text{Diện tích } S_{A'BC} = \frac{1}{2} A'M \cdot BC = \frac{1}{2} \frac{BC\sqrt{6}}{2} \cdot BC = \frac{BC^2\sqrt{6}}{4}.$$

Theo đề $\frac{BC^2\sqrt{6}}{4} = a^2\sqrt{6} \Rightarrow BC = 2a.$

Hình trụ có đáy là đường tròn ngoại tiếp ABC có bán kính $r = \frac{BC\sqrt{3}}{3} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$, đường cao

$$h = AA' = AM = \frac{BC\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}.$$

$$\text{Diện tích xung quanh } S = 2\pi rh = 2\pi \frac{2a\sqrt{3}}{3} \cdot a\sqrt{3} = 4\pi a^2.$$



Câu 37.

Gọi I, J là tâm của hai đáy (hình vẽ).

Từ B kẻ đường thẳng song song với trục d của hình trụ, cắt đường tròn đáy kia tại C . Khi đó, $(AB, d) = (AB, BC) = \widehat{ABC}$. Suy ra $\widehat{ABC} = 30^\circ$.

Xét tam giác ABC vuông tại C , ta có:

$$\tan \widehat{ABC} = \frac{AC}{CB} \Rightarrow AC = CB \cdot \tan \widehat{ABC} = R\sqrt{3} \cdot \tan 30^\circ = R\sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = R.$$

Lại có $d \parallel (ABC)$ và $(ABC) \supset AB$ nên $d(d, AB) = d(d, (ABC)) = d(J, (ABC))$.

Kẻ $JH \perp AC$, $H \in AC$. Vì $BC \perp JH$ nên $JH \perp (ABC)$. Suy ra $d(J, (ABC)) = JH$.

Xét tam giác JAC ta thấy $JA = JC = AC = R$ nên JAC là tam giác đều cạnh R . Khi đó chiều cao là

$$JH = \frac{R\sqrt{3}}{2}. \text{ Vậy } d(d, AB) = \frac{R\sqrt{3}}{2}.$$

Dạng 4. Bài toán thực tế

Câu 38. Tổng diện tích xung quanh của 10 cây cột là $(4.0, 4. + 6.0, 26) \cdot \pi \cdot 4, 2 \text{ m}^2$

Tổng số tiền sơn 10 cây cột là $(4.0, 4. + 6.0, 26) \cdot \pi \cdot 4, 2.380000 \approx 15844000$ (đồng).

Câu 39. Chọn D

Gọi r_1, r_2 lần lượt là bán kính cây cột hình trụ tròn trước đại sảnh và hai bên đại sảnh.

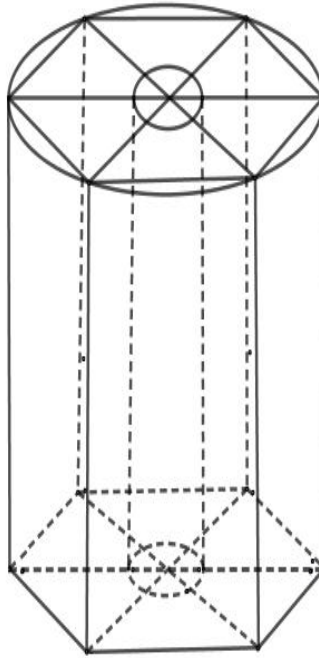
Khi đó $r_1 = 20 \text{ cm}$ và $r_2 = 13 \text{ cm}$.

Diện tích cần phải sơn 17 cây cột là

$$S = 3(2\pi r_1 l) + 14(2\pi r_2 l) = 6\pi \cdot 0,2 \cdot 4,2 + 28\pi \cdot 0,13 \cdot 4,2 = 20,328\pi \approx 63,86224152 \text{ (m}^2\text{)}.$$

Vậy số tiền cần phải sơn là $T \approx 63,86224152 \times 360.000 \approx 22990407$ (đồng)

Câu 40. Chọn B



1 m^3 gỗ có giá a triệu đồng suy ra 1 mm^3 gỗ có giá $\frac{a}{1000}$ đồng.

1 m^3 than chì có giá $6a$ triệu đồng suy ra 1 mm^3 than chì có giá $\frac{6a}{1000}$ đồng.

Phần chì của cái bút có thể tích bằng $V_1 = 200 \cdot \pi \cdot 1^2 = 200\pi \text{ (mm}^3\text{)}.$

Phần gỗ của của bút chì có thể tích bằng $V_2 = 200 \cdot 6 \cdot \frac{3^2 \sqrt{3}}{4} - 200\pi = 2700\sqrt{3} - 200\pi \text{ (mm}^3\text{)}.$

Số tiền làm một chiếc bút chì là $\frac{6a \cdot V_1 + a \cdot V_2}{1000} \approx 7,82a$ đồng.

Câu 41. Chọn A

Gọi h là chiều cao của các bể nước và r là bán kính đáy của bể nước dự định làm.

Theo giả thiết, ta có $\pi r^2 h = \pi \cdot 1^2 \cdot h + \pi \cdot (1,5)^2 \cdot h \Leftrightarrow r^2 = 1 + \frac{9}{4} = \frac{13}{4}.$

Suy ra $r = \frac{\sqrt{13}}{2} \approx 1,8.$

Câu 42. Chọn B

Gọi $R_1; R_2; R$ lần lượt là bán kính của trụ thứ nhất, thứ hai và dự kiến sẽ làm, ta có:

$$V = V_1 + V_2 = \pi R^2 h = \pi R_1^2 h + \pi R_2^2 h \Leftrightarrow R^2 = R_1^2 + R_2^2.$$

$$\Rightarrow R = \sqrt{R_1^2 + R_2^2} = \sqrt{1^2 + (1,2)^2} \approx 1,56(m).$$

Vậy: Giá trị cần tìm là: 1,6m.

Câu 43. Chọn.

D.

Diện tích của khối lăng trụ lục giác đều là $S = 6 \cdot \left((3 \cdot 10^{-3})^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \right) (\text{m}^2)$

Thể tích của chiếc bút chì là: $V = S \cdot h = 6 \cdot \left((3 \cdot 10^{-3})^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \right) \cdot 200 \cdot 10^{-3} = 27\sqrt{3} \cdot 10^{-7} (\text{m}^3)$.

Thể tích của phần lõi bút chì là $V_1 = \pi r^2 h = \pi \cdot (10^{-3})^2 \cdot 200 \cdot 10^{-3} = 2\pi \cdot 10^{-7} (\text{m}^3)$.

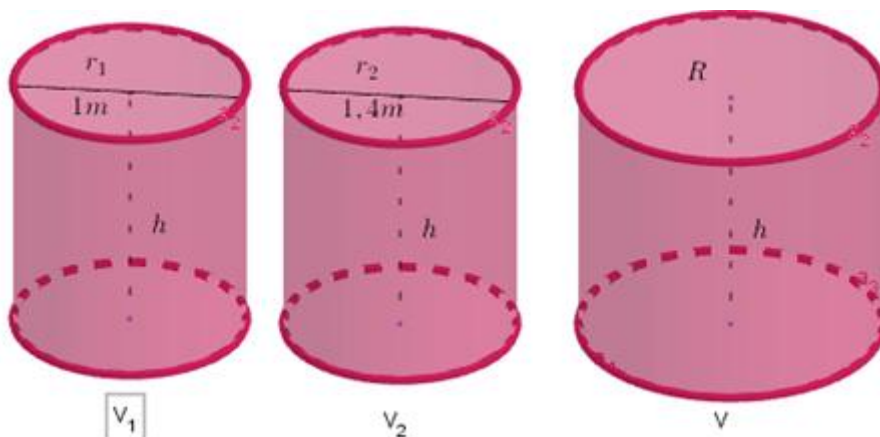
Suy ra thể tích phần thân bút chì là $V_2 = V - V_1 = (27\sqrt{3} - 2\pi) \cdot 10^{-7} (\text{m}^3)$.

Giá nguyên liệu làm một chiếc bút chì như trên là:

$$V_2 \cdot a \cdot 10^6 + V_1 \cdot 8a \cdot 10^6 = (27\sqrt{3} - 2\pi) \cdot 10^{-7} \cdot a \cdot 10^6 + 2\pi \cdot 10^{-7} \cdot 8a \cdot 10^6 = (2,7\sqrt{3} + 1,4\pi)a \approx 9,07a$$

(đồng).

Câu 44. Chọn A



Ta có: $V = V_1 + V_2 \Leftrightarrow h\pi R^2 = h\pi r_1^2 + h\pi r_2^2$.

$$\Rightarrow R = \sqrt{r_1^2 + r_2^2} \approx 1,72 \text{ m}.$$

Câu 45. Chọn C

Gọi hai bể nước hình trụ ban đầu lần lượt có chiều cao là h , bán kính r_1, r_2 , thể tích là V_1, V_2 .

Ta có một bể nước mới có chiều cao h , $V = V_1 + V_2$.

$$\Rightarrow \pi r^2 h = \pi r_1^2 h + \pi r_2^2 h \Rightarrow \pi r^2 h = \pi \cdot 1^2 \cdot h + \pi \cdot 1,8^2 \cdot h \Leftrightarrow r = \sqrt{\frac{106}{25}} \approx 2,1 \text{ m}.$$

Câu 46.

Lời giải

Chọn C

Ban đầu bán kính đáy là R , sau khi cắt tấm tôn bán kính đáy là $\frac{R}{2}$

Đường cao của các khối trụ là không đổi

$$\text{Ta có } V_1 = h\pi R^2, V_2 = 2 \cdot h\pi \left(\frac{R}{2} \right)^2 = h\pi \frac{R^2}{2}. \text{ Vậy tỉ số } \frac{V_1}{V_2} = 2.$$

Câu 47. Chọn C

Thể tích phần lõi than chì: $V_1 = \pi \cdot 0,001^2 \cdot 0,2 = 2\pi \cdot 10^{-7} \text{ m}^3$.

Số tiền làm lõi than chì $T_1 = (2\pi \cdot 10^{-7}) 7a \cdot 10^6 = 1,4\pi a$ (đồng).

Thể tích phần thân bằng gỗ của bút

$$V_2 = 6 \cdot \frac{(0,003)^2 \sqrt{3}}{4} \cdot 0,2 - 2\pi \cdot 10^{-7} = \left[\sqrt{3} \cdot 27 \cdot 10^{-7} - 2\pi \cdot 10^{-7} \right] m^3.$$

Số tiền làm phần thân bằng gỗ của bút

$$T_2 = \left[27\sqrt{3} \cdot 10^{-7} - \pi \cdot 2 \cdot 10^{-7} \right] a \cdot 10^6 = \left[2,7\sqrt{3} - \pi \cdot 0,2 \right] a \text{ (đồng)}.$$

Vậy giá vật liệu làm bút chì là: $T = T_1 + T_2 \approx 8,45.a$ (đồng).

Câu 48. Chọn D

$$3mm = 0,003m; 200mm = 0,2m; 1mm = 0,001m$$

$$\text{Diện tích đáy của phần than chì: } S_1 = \pi r^2 = \pi \cdot 10^{-6} (m^2)$$

$$\text{Diện tích đáy phần bút bằng gỗ: } S_2 = 6S_{OAB} - S_1 = \left(6 \cdot \frac{3^2 \sqrt{3}}{4} - \pi \right) \cdot 10^{-6} = \left(\frac{27\sqrt{3}}{2} - \pi \right) \cdot 10^{-6} (m^2)$$

$$\text{Thể tích than chì cần dùng: } V_1 = S_1 \cdot h = \pi r^2 \cdot 0,2 = 0,2\pi \cdot 10^{-6} (m^3)$$

$$\text{Thể tích gỗ làm bút chì: } V_2 = S_2 \cdot h = \left(\frac{27\sqrt{3}}{2} - \pi \right) \cdot 0,2 \cdot 10^{-6} (m^3)$$

$$\text{Tiền làm một cây bút: } V_1 \cdot 9a + V_2 \cdot a = (9V_1 + V_2) a = \left(9 \cdot 0,2\pi \cdot 10^{-6} + \left(\frac{27\sqrt{3}}{2} - \pi \right) \cdot 0,2 \cdot 10^{-6} \right) a = 9,7a$$

(đồng)

Câu 49. Gọi h_1 , R_1 , V_1 lần lượt là chiều cao, bán kính đáy, thể tích khối trụ nhỏ mỗi đầu.

$$V_1 = h_1 \cdot \pi \cdot R_1^2 = 6 \cdot \pi \cdot 6^2 = 216\pi.$$

Gọi h_2 , R_2 , V_2 lần lượt là chiều cao, bán kính đáy, thể tích của tay cầm.

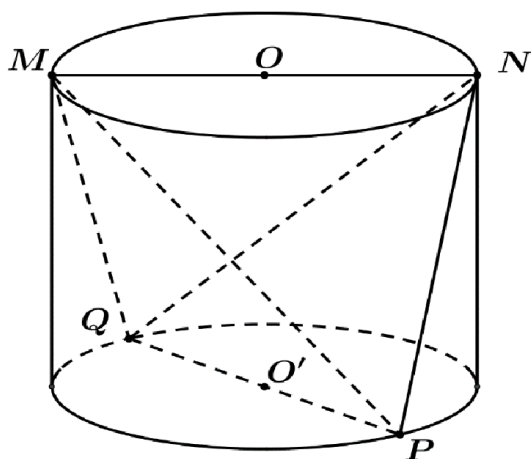
$$V_2 = h_2 \cdot \pi \cdot R_2^2 = (30 - 2 \cdot 6) \cdot \pi \cdot 2^2 = 72\pi.$$

$$\text{Thể tích vật liệu làm nên tay bằng } V = 2V_1 + V_2 = 504\pi.$$

Câu 50. Ta có thể tích của mỗi ống là $V = \pi \cdot 2 \cdot (0,5 + 0,08)^2 - \pi \cdot 2 \cdot (0,5)^2 = \frac{108\pi}{625} (m^3).$

Như vậy cần tất cả là: $\frac{108\pi}{625} \cdot 200 \cdot 10 = 1085,73$ bao xi-măng.

Câu 51. Chọn B



Gọi O và O' lần lượt là trung điểm MN và PQ .

Khi đó OO' là trục của hình trụ và $OO' \perp MN \Rightarrow MN \perp (OPQ)$.

$$V_{MNPQ} = \frac{1}{3} MN \cdot S_{OPQ} = \frac{OO' \cdot 6^2}{6} = 6OO' \text{ (dm}^3\text{)}. \text{ Theo bài ra ta có } V_{MNPQ} = 30\text{dm}^3 \Rightarrow OO' = 5\text{dm}.$$

Thể tích khối trụ là $V_{tru} = \pi \cdot 3^2 \cdot 5 \approx 141,4\text{dm}^3$. Vậy thể tích lượng đá cắt bỏ $V = V_{tru} - V_{MNPQ} \approx 111,4\text{dm}^3$.

Câu 52. Ta có: $V = \pi R^2 h = 1 \Rightarrow \begin{cases} \pi R h = \frac{1}{R} \\ \pi R^2 = \frac{1}{h} \end{cases}$

Diện tích toàn phần của tép nước: $S_{tp} = 2\pi R h + 2\pi R^2 = \frac{2}{R} + 2\pi R^2$

Xét $S' = 4\pi R - \frac{2}{R^2} = 0 \Leftrightarrow R = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$.

Lập bảng biến thiên ta có S_{tp} đạt giá trị nhỏ nhất tại $R = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$

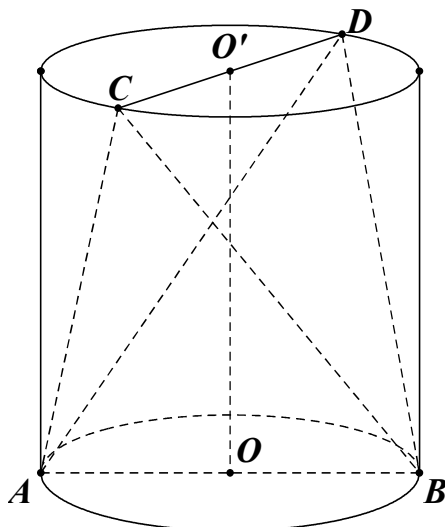
$$\Rightarrow S_{(tp)\min} = 2\sqrt[3]{2\pi} + \frac{2\pi}{\sqrt[3]{4\pi^2}} \approx 5,54$$

Câu 53. Khi lăn tròn một vòng thì trục lăn tạo trên tường phẳng lớp sơn có diện tích bằng diện tích xung quanh của trục lăn là $S = 2\pi R \cdot h = 2\pi \cdot \frac{5}{2} \cdot 23 = 115\pi \text{ (cm}^2\text{)}$.

Vậy sau khi lăn tròn 10 vòng thì trục lăn tạo nên tường phẳng lớp sơn có diện tích là $10S = 1150\pi \text{ (cm}^2\text{)}$.

Dạng 5. Bài toán cực trị

Câu 54. Chọn A



Gọi α là số đo góc giữa AB và CD .

Ta có $V_{ABCD} = \frac{1}{6} AB \cdot CD \cdot d(AB; CD) \cdot \sin \alpha = \frac{1}{6} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \sin \alpha = 2 \sin \alpha \leq 2$.

Do đó V_{ABCD} đạt giá trị lớn nhất là 2, đạt được khi $AB \perp CD$.

Câu 55. Giả sử vỏ hộp sữa có bán kính đáy là R , chiều cao là h ($R, h > 0$).

Vì thể tích vỏ hộp là V nên ta có $V = \pi R^2 h \Rightarrow h = \frac{V}{\pi R^2}$.

Để tiết kiệm vật liệu nhất thì hình trụ vỏ hộp sữa phải có diện tích toàn phần

$$S_{tp} = 2\pi Rh + 2\pi R^2 = \frac{2V}{R} + 2\pi R^2 \text{ nhỏ nhất.}$$

Cách 1:

$$\text{Ta có } S_{tp} = \frac{2V}{R} + 2\pi R^2 = \frac{V}{R} + \frac{V}{R} + 2\pi R^2 \geq 3\sqrt[3]{2\pi V^2}.$$

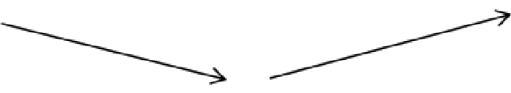
$$S_{tp} \text{ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi } \frac{V}{R} = 2\pi R^2 \Leftrightarrow R = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}.$$

Cách 2:

Xét hàm số $f(R) = \frac{2V}{R} + 2\pi R^2$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

$$\text{Ta có } f'(R) = -\frac{2V}{R^2} + 4\pi R = \frac{4\pi R^3 - 2V}{R^2}. \quad f'(R) = 0 \Leftrightarrow R = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}.$$

Bảng biến thiên:

R	0	$\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$	$+\infty$
$f'(R)$	-	0	+
$f(R)$			

Từ BBT ta thấy $f(R)$ đạt nhỏ nhất khi $R = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$.

Vậy để tiết kiệm vật liệu nhất thì bán kính đáy vỏ hộp phải bằng $\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$.

Câu 56. Gọi chiều cao và bán kính đáy của hình trụ lần lượt là x, y ($x, y > 0$).

Khi đó ta có thiết diện của hình trụ và mặt phẳng chứa trục của hình trụ là hình chữ nhật có kích thước lần lượt là $x, 2y$

$$\text{Theo giả thiết ta có } 2.(x + 2y) = 12 \Leftrightarrow x + 2y = 6.$$

Cách 1.

$$\text{Thể tích khối trụ: } V = \pi y^2 \cdot x = \pi y^2 (6 - 2y) = 2\pi (-y^3 + 3y^2).$$

$$\text{Vì } x + 2y = 6 \Rightarrow 0 < 2y < 6 \Leftrightarrow 0 < y < 3.$$

Xét hàm số $f(y) = -y^3 + 3y^2$ trên khoảng $(0; 3)$

$$\text{Ta có } f'(y) = -3y^2 + 6y \Rightarrow f'(y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = 2 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên:

y	0	2	3
$f'(y)$	+	0	-
$f(y)$		4	

Suy ra $\max_{(0;3)} f(y) = f(2) = 4$.

Vậy giá trị lớn nhất của thể tích khối trụ bằng $2\pi \cdot 4 = 8\pi \text{ cm}^3$.

Cách 2.

Thể tích khối trụ: $V = \pi y^2 x = \pi \cdot x \cdot y \cdot y \leq \pi \left(\frac{x+y+y}{3} \right)^3 = \pi \left(\frac{x+2y}{3} \right)^3 = \pi \left(\frac{6}{3} \right)^3 = 8\pi$

Dấu “=” xảy ra khi $x = y = 2$.

Vậy giá trị lớn nhất của thể tích khối trụ bằng $V = 8\pi \text{ cm}^3$.

Câu 57. Chọn A.

Phương pháp

Xác định bán kính đáy và chiều cao của hình trụ, sử dụng công thức $V = \pi R^2 h$ tính thể tích của hình trụ.

+) Lập BBT tìm GTLN của hàm thể tích.

Cách giải

Ta có: Đường kính đáy của hình trụ là $9 - 2x \Rightarrow$ Bán kính đáy hình trụ là $\frac{9-2x}{2}$.

Khi đó ta có thể tích ao là $V = \pi \left(\frac{9-2x}{2} \right)^2 x = \frac{\pi}{4} (9-2x)^2 x = \frac{\pi}{4} f(x)$

Xét hàm số $f(x) = (9-2x)^2 x = 4x^3 - 36x^2 + 81x$ với $0 < x < \frac{9}{2}$ ta có:

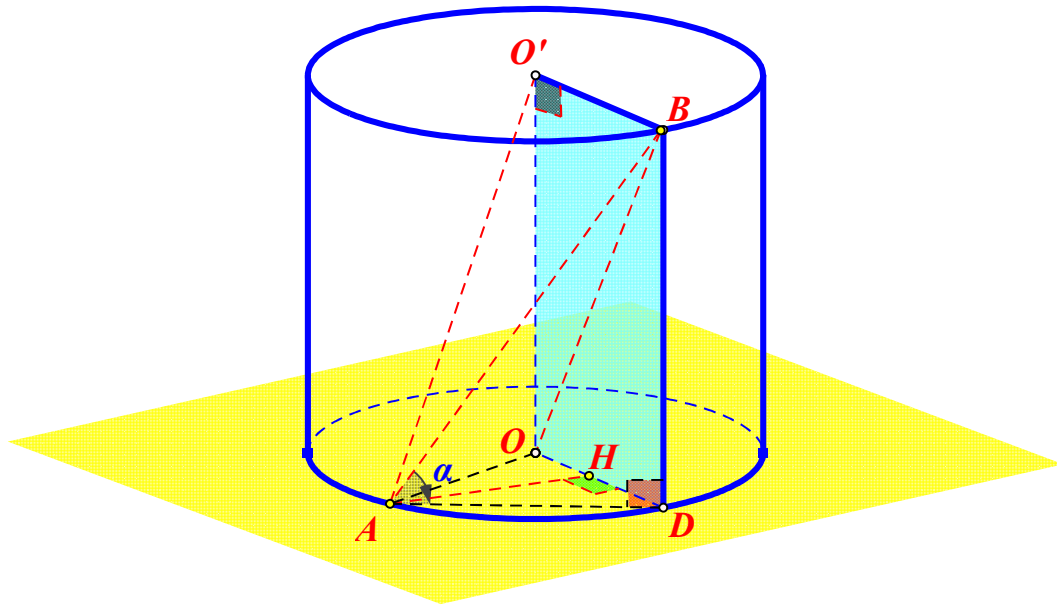
$$f'(x) = 12x^2 - 72x + 81 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{9}{2} \\ x = \frac{3}{2} \end{cases}$$

BBT:

x	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{2}$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	0	54	0

Dựa vào BBT ta thấy $f(x)_{\max} = 54 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$. Khi đó $V_{\max} = \frac{\pi}{4} \cdot 54 = \frac{27\pi}{2} = 13,5\pi (m^3)$.

Câu 58. Cách 1:



Gọi D là hình chiếu vuông góc của B lên mặt phẳng (O) .

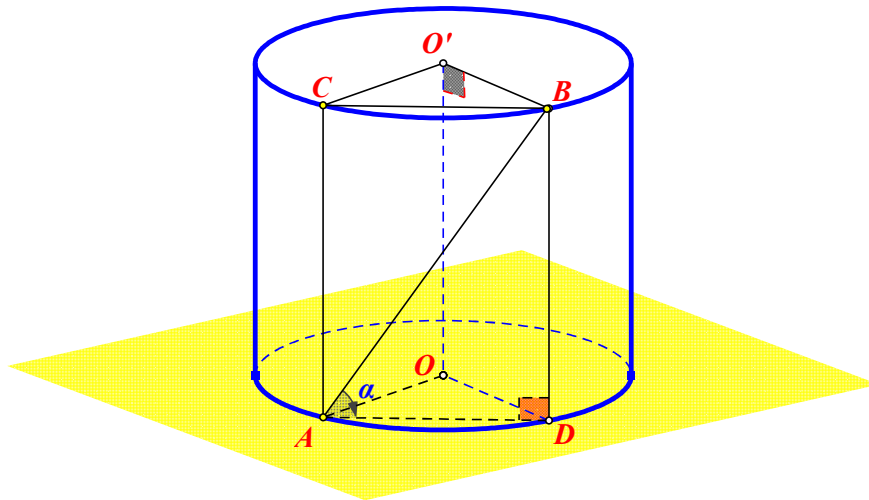
Kẻ $AH \perp OD$, $H \in OD$.

Ta có thể tích của khối chóp $OO'AB$: $V_{OO'AB} = \frac{1}{3} AH \cdot S_{\triangle OO'B} = \frac{2a^2}{3} \cdot AH \leq \frac{2a^2}{3} \cdot AO = \frac{4a^3}{3}$.

$(V_{OO'AB})_{\max} \Leftrightarrow H \equiv O$. Suy ra $AD = 2\sqrt{2}a$.

Suy ra: $\tan \alpha = \tan \widehat{BAD} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Nhận xét: Nên thêm giả thiết AB chéo với OO' để tứ diện $OO'AB$ tồn tại.



Gọi D là hình chiếu vuông góc của B lên mặt phẳng chứa đường tròn (O) .

Gọi C là hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng chứa đường tròn (O') .

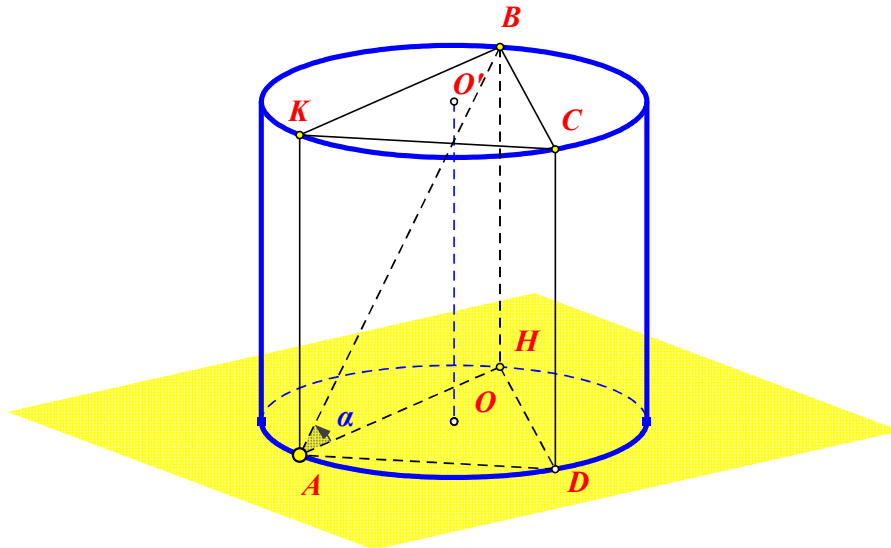
Ta có $O'CB.OAD$ là một hình lăng trụ đứng.

Ta có thể tích của khối chóp $OO'AB$:

$$V_{OO'AB} = V_{O'BC.OAD} = \frac{1}{3} 2a \cdot S_{\triangle OAD} = \frac{1}{3} \cdot 2a \cdot \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 2a \cdot \sin \widehat{AOD} \leq \frac{4a^3}{3}.$$

$$(V_{O'ABCD})_{\max} \Leftrightarrow \widehat{AOD} = 90^\circ \Leftrightarrow AD = 2\sqrt{2}a.$$

$$\text{Suy ra: } \tan \alpha = \tan \widehat{BAD} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$



Câu 59.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của B lên mặt phẳng chứa đường tròn (O) .

Gọi K là hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng chứa đường tròn (O') .

Ta có $HAD.BKC$ là một hình lăng trụ đứng.

Ta có thể tích của tứ diện $CDAB$ là

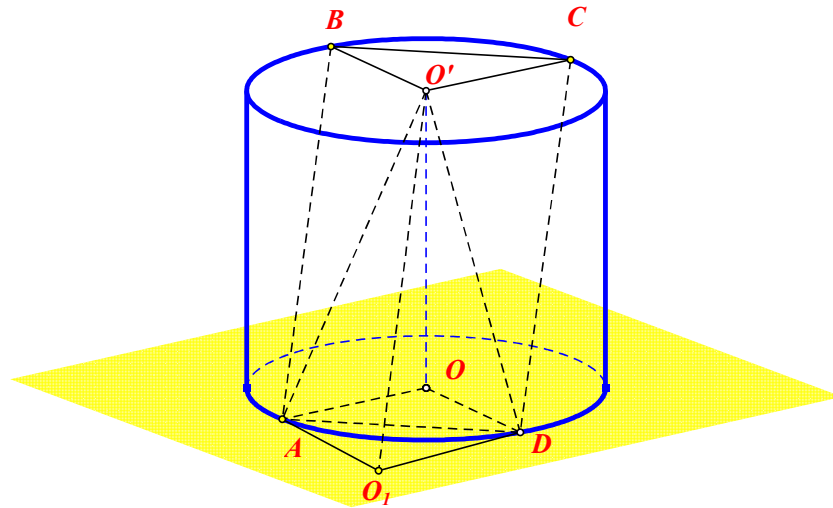
$$V_{ABCD} = \frac{1}{3}V_{HAD.BKC} = \frac{1}{3}.2a.S_{\triangle HAD} = \frac{1}{3}.2a.\frac{1}{2}.AD.d(H; AD) = \frac{1}{3}.2a.\frac{1}{2}.2a\sqrt{3}.d(H; AD).$$

$$(V_{ABCD})_{\max} \Leftrightarrow (d(H; AD))_{\max} \Leftrightarrow H \text{ là điểm chính giữa cung lớn } \widehat{AD} \text{ của đường tròn } (O) \quad (1).$$

$$\text{Theo định lý sin ta có } \frac{AD}{\sin \widehat{AHD}} = 2.2a \Leftrightarrow \sin \widehat{AHD} = \frac{AD}{4a} = \frac{2\sqrt{3}a}{4a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ nên } \widehat{AHD} = 60^\circ.$$

$$\text{Do đó (1) xảy ra khi } \triangle AHD \text{ đều } \Leftrightarrow AH = AD = 2\sqrt{3}a.$$

$$\text{Suy ra: } \tan \alpha = \tan \widehat{BAH} = \frac{BH}{AH} = \frac{2a}{2a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$


$$(V_{O'ABCD})_{\max} \Leftrightarrow \widehat{AOD} = 90^\circ \Leftrightarrow AD = 2\sqrt{2}a.$$

MỤC LỤC

PHẦN A. CÂU HỎI	1
Dạng 1. Diện tích xung quanh, bán kính	1
Dạng 2. Thể tích	2
Dạng 3. Khối cầu nội tiếp, ngoại tiếp khối đa diện	3
Dạng 3.1 Khối cầu nội tiếp, ngoại tiếp khối lăng trụ	3
Dạng 3.2 Khối cầu nội tiếp, ngoại tiếp khối chóp	4
Dạng 3.2.1 Khối chóp có cạnh bên vuông góc với đáy	4
Dạng 3.2.2 Khối chóp có mặt bên vuông góc với đáy	7
Dạng 3.2.3 Khối chóp đều	8
Dạng 3.2.4 Khối chóp khác	8
Dạng 4. Bài toán thực tế, cực trị	10
PHẦN B. ĐÁP ÁN THAM KHẢO	11
Dạng 1. Diện tích xung quanh, bán kính	11
Dạng 2. Thể tích	12
Dạng 3. Khối cầu nội tiếp, ngoại tiếp khối đa diện	13
Dạng 3.1 Khối cầu nội tiếp, ngoại tiếp khối lăng trụ	13
Dạng 3.2 Khối cầu nội tiếp, ngoại tiếp khối chóp	17
Dạng 3.2.1 Khối chóp có cạnh bên vuông góc với đáy	17
Dạng 3.2.2 Khối chóp có mặt bên vuông góc với đáy	29
Dạng 3.2.3 Khối chóp đều	36
Dạng 3.2.4 Khối chóp khác	39
Dạng 4. Bài toán thực tế, cực trị	49

PHẦN A. CÂU HỎI

Dạng 1. Diện tích xung quanh, bán kính

Câu 1. (Mã đề 101 BGD&ĐT NĂM 2018) Diện tích của mặt cầu bán kính R bằng:

- A. πR^2 B. $\frac{4}{3}\pi R^2$ C. $2\pi R^2$ D. $4\pi R^2$

Câu 2. (THPT THIẾU HÓA – THANH HÓA NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho mặt cầu có diện tích bằng $16\pi a^2$. Khi đó, bán kính mặt cầu bằng

A. $2\sqrt{2}a$ B. $\sqrt{2}a$ C. $2a$ D. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$

Câu 3. (CHUYÊN ĐHSPT HÀ NỘI NĂM 2018-2019 LẦN 01) Diện tích mặt cầu bán kính $2a$ là

A. $4\pi a^2$. B. $16\pi a^2$. C. $16a^2$. D. $\frac{4\pi a^2}{3}$.

Câu 4. (THPT NGHĨA HƯNG ND- GK2 - 2018 - 2019) Diện tích của một mặt cầu bằng $16\pi (cm^2)$. Bán kính của mặt cầu đó là.

A. $8cm$. B. $2cm$. C. $4cm$. D. $6cm$.

Câu 5. (SỞ GD&ĐT BÌNH PHƯỚC NĂM 2018-2019 LẦN 01) Tính diện tích mặt cầu (S) khi biết chu vi đường tròn lớn của nó bằng 4π

A. $S = 32\pi$ B. $S = 16\pi$ C. $S = 64\pi$ D. $S = 8\pi$

Câu 6. Cho ba hình cầu tiếp xúc ngoài nhau từng đôi một và cùng tiếp xúc với một mặt phẳng. Các tiếp điểm của các hình cầu trên mặt phẳng lập thành tam giác có các cạnh bằng 4, 2 và 3. Tích bán kính của ba hình cầu trên là

A. 12 B. 3 C. 6 D. 9

Dạng 2. Thể tích

Câu 7. (Mã đề 102 BGD&ĐT NĂM 2018) Thể tích của khối cầu bán kính R bằng

A. $\frac{3}{4}\pi R^3$ B. $\frac{4}{3}\pi R^3$ C. $4\pi R^3$ D. $2\pi R^3$

Câu 8. (ĐỀ THAM KHẢO BGD&ĐT NĂM 2018-2019) Thể tích khối cầu bán kính a bằng :

A. $\frac{\pi a^3}{3}$ B. $2\pi a^3$ C. $\frac{4\pi a^3}{3}$ D. $4\pi a^3$

Câu 9. (THPT ĐÔNG SƠN THANH HÓA NĂM 2018-2019 LẦN 02) Thể tích khối cầu bán kính 3 cm bằng

A. $36\pi (cm^3)$. B. $108\pi (cm^3)$. C. $9\pi (cm^3)$. D. $54\pi (cm^3)$.

Câu 10. (THPT LÊ XOAY VĨNH PHÚC LẦN 1 NĂM 2018-2019) Cho mặt cầu (S) có diện tích $4\pi a^2 (cm^2)$. Khi đó, thể tích khối cầu (S) là

A. $\frac{4\pi a^3}{3} (cm^3)$. B. $\frac{\pi a^3}{3} (cm^3)$. C. $\frac{64\pi a^3}{3} (cm^3)$. D. $\frac{16\pi a^3}{3} (cm^3)$.

Câu 11. (CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU NGHỆ AN NĂM 2018-2019 LẦN 02) Cho mặt cầu có diện tích bằng $36\pi a^2$. Thể tích khối cầu là

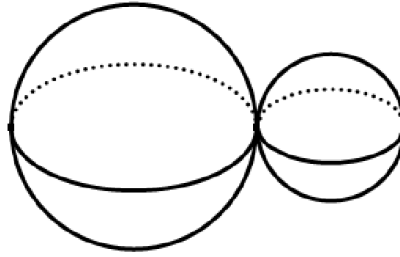
A. $18\pi a^3$. B. $12\pi a^3$. C. $36\pi a^3$. D. $9\pi a^3$.

Câu 12. (CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN ĐIỆN BIÊN LẦN 3 NĂM 2018-2019) Cắt mặt cầu (S) bằng một mặt phẳng cách tâm một khoảng bằng $4cm$ được thiết diện là một hình tròn có diện tích $9\pi cm^2$. Tính thể tích khối cầu (S).

A. $\frac{2500\pi}{3} cm^3$. B. $\frac{2500\pi}{3} cm^3$. C. $\frac{25\pi}{3} cm^3$. D. $\frac{500\pi}{3} cm^3$.

Câu 13. Một khối đồ chơi gồm hai khối cầu $(H_1), (H_2)$ tiếp xúc với nhau, lần lượt có bán kính tương

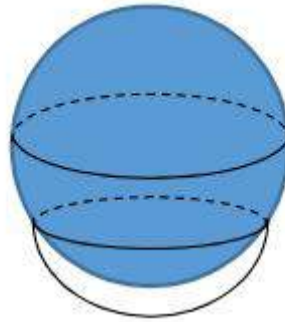
ứng là r_1, r_2 thỏa mãn $r_2 = \frac{1}{2}r_1$ (tham khảo hình vẽ).



Biết rằng thể tích của toàn bộ khối đồ chơi bằng 180cm^3 . Thể tích của khối cầu (H_1) bằng

- A. 90 cm^3 B. 120 cm^3 C. 160 cm^3 D. 135 cm^3

Câu 14. Cho một bán cầu đựng đầy nước với bán kính $R = 2$. Người ta bỏ vào đó một quả cầu có bán kính bằng $2R$. Tính lượng nước còn lại trong bán cầu ban đầu.



- A. $V = \left(24\sqrt{3} - \frac{112}{3}\right)\pi$. B. $V = \frac{16\pi}{3}$.
C. $V = \frac{8}{3}\pi$. D. $V = (24\sqrt{3} - 40)\pi$.

Dạng 3. Khối cầu nội tiếp, ngoại tiếp khối đa diện

Dạng 3.1 Khối cầu nội tiếp, ngoại tiếp khối lăng trụ

Câu 15. (MÃ ĐỀ 123 BGD&ĐT NĂM 2017) Tìm bán kính R mặt cầu ngoại tiếp một hình lập phương có cạnh bằng $2a$.

- A. $R = \sqrt{3}a$ B. $R = a$ C. 100 D. $R = 2\sqrt{3}a$

Câu 16. (MÃ ĐỀ 110 BGD&ĐT NĂM 2017) Cho mặt cầu bán kính R ngoại tiếp một hình lập phương cạnh a . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $a = \frac{\sqrt{3}R}{3}$ B. $a = \frac{2\sqrt{3}R}{3}$ C. $a = 2R$ D. $a = 2\sqrt{3}R$

Câu 17. (THPT CHUYÊN ĐẠI HỌC VINH NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $AD = AA' = 2a$. Diện tích của mặt cầu ngoại tiếp của hình hộp chữ nhật đã cho bằng

- A. $9\pi a^2$ B. $\frac{3\pi a^2}{4}$ C. $\frac{9\pi a^2}{4}$ D. $3\pi a^2$

- Câu 18.** (CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG NAM ĐỊNH LẦN 1 NĂM 2018-2019) Thể tích khối cầu ngoại tiếp hình hộp chữ nhật có ba kích thước 1, 2, 3 là
- A. 36π . B. $\frac{9\pi}{2}$. C. $\frac{7\pi\sqrt{14}}{3}$. D. $\frac{9\pi}{8}$.
- Câu 19.** (TRƯỜNG THPT HOÀNG HOA THÁM HƯNG YÊN NĂM 2018-2019) Thể tích khối cầu ngoại tiếp hình lập phương cạnh 3 cm là
- A. $\frac{27\pi\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^3$. B. $\frac{9\pi\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^3$. C. $9\pi\sqrt{3} \text{ cm}^3$. D. $\frac{27\pi\sqrt{3}}{8} \text{ cm}^3$.
- Câu 20.** (CHUYÊN NGUYỄN TRÃI HẢI DƯƠNG NĂM 2018-2019 LẦN 01) Diện tích mặt cầu ngoại tiếp khối hộp chữ nhật có kích thước a , $a\sqrt{3}$, $2a$ là
- A. $8a^2$. B. $4\pi a^2$. C. $16\pi a^2$. D. $8\pi a^2$.
- Câu 21.** (SỞ GD&ĐT BẮC NINH NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , $AB = a\sqrt{3}$, $BC = 2a$, đường thẳng AC' tạo với mặt phẳng $(BCC'B')$ một góc 30° . Diện tích của mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ đã cho bằng:
- A. $3\pi a^2$. B. $6\pi a^2$. C. $4\pi a^2$. D. $24\pi a^2$.

Dạng 3.2 Khối cầu nội tiếp, ngoại tiếp khối chóp

Dạng 3.2.1 Khối chóp có cạnh bên vuông góc với đáy

- Câu 22.** (THPT QUỲNH LƯU 3 NGHỆ AN NĂM 2018-2019) Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, $SA = a$ và đáy $ABCD$ nội tiếp đường tròn bán kính bằng a . Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ là
- A. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{a\sqrt{5}}{2}$. D. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$.
- Câu 23.** (GKI THPT LƯƠNG THẾ VINH HÀ NỘI NĂM 2018-2019) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $AB = a$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Đường thẳng SC tạo với mặt đáy một góc 60° . Tính diện tích mặt cầu đi qua 4 đỉnh của hình chóp $S.ABC$.
- A. $8a^2\pi$ B. $\frac{32a^2\pi}{3}$ C. $\frac{8a^2\pi}{3}$ D. $4a^2\pi$
- Câu 24.** (CHUYÊN NGUYỄN TẤT THÀNH YÊN BÁI LẦN 01 NĂM 2018-2019) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a . Cạnh bên $SA = a\sqrt{6}$ và vuông góc với đáy $(ABCD)$. Tính theo a diện tích mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABCD$.
- A. $8\pi a^2$. B. $a^2\sqrt{2}$. C. $2\pi a^2$. D. $2a^2$.
- Câu 25.** (THPT CHUYÊN THÁI NGUYÊN LẦN 01 NĂM 2018-2019) Trong không gian, cho hình chóp $S.ABC$ có SA, AB, BC đôi một vuông góc với nhau và $SA = a, AB = b, BC = c$. Mặt cầu đi qua S, A, B, C có bán kính bằng
- A. $\frac{2(a+b+c)}{3}$. B. $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. C. $2\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. D. $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.
- Câu 26.** (MĐ 105 BGD&ĐT NĂM 2017) Cho tứ diện $ABCD$ có tam giác BCD vuông tại C , AB vuông góc với mặt phẳng (BCD) , $AB = 5a$, $BC = 3a$ và $CD = 4a$. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

$$\text{A. } R = \frac{5a\sqrt{2}}{3} \quad \text{B. } R = \frac{5a\sqrt{3}}{3} \quad \text{C. } R = \frac{5a\sqrt{2}}{2} \quad \text{D. } R = \frac{5a\sqrt{3}}{2}$$

Câu 27. (MĐ 104 BGD&ĐT NĂM 2017) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật với $AB = 3a$, $BC = 4a$, $SA = 12a$ và SA vuông góc với đáy. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

$$\text{A. } R = \frac{13a}{2} \quad \text{B. } R = 6a \quad \text{C. } R = \frac{5a}{2} \quad \text{D. } R = \frac{17a}{2}$$

Câu 28. (KTNL GV THUẬN THÀNH 2 BẮC NINH NĂM 2018-2019) Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác ABC vuông tại B , SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) . $SA = 5$, $AB = 3$, $BC = 4$. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$

$$\text{A. } R = \frac{5\sqrt{2}}{2} \quad \text{B. } R = 5 \quad \text{C. } R = \frac{5}{2} \quad \text{D. } R = 5\sqrt{2}$$

Câu 29. (KTNL GIA BÌNH NĂM 2018-2019) Cho hình chóp $SABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $AB = 8$, $BC = 6$. Biết $SA = 6$ và $SA \perp (ABC)$. Tính thể tích khối cầu có tâm thuộc phần không gian bên trong của hình chóp và tiếp xúc với tất cả các mặt phẳng của hình chóp $SABC$.

$$\text{A. } \frac{16\pi}{9} \quad \text{B. } \frac{625\pi}{81} \quad \text{C. } \frac{256\pi}{81} \quad \text{D. } \frac{25\pi}{9}$$

Câu 30. (THPT AN LÃO HẢI PHÒNG NĂM 2018-2019 LẦN 02) Cho hình chóp $S.ABC$ có đường cao SA , đáy ABC là tam giác vuông tại A . Biết $SA = 6a$, $AB = 2a$, $AC = 4a$. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$?

$$\text{A. } R = 2a\sqrt{7} \quad \text{B. } R = a\sqrt{14} \quad \text{C. } R = 2a\sqrt{3} \quad \text{D. } r = 2a\sqrt{5}$$

Câu 31. (THPT GIA LỘC HẢI DƯƠNG NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có đường chéo bằng $\sqrt{2}a$, cạnh SA có độ dài bằng $2a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$?

$$\text{A. } \frac{a\sqrt{6}}{2} \quad \text{B. } \frac{a\sqrt{6}}{4} \quad \text{C. } \frac{2a\sqrt{6}}{3} \quad \text{D. } \frac{a\sqrt{6}}{12}$$

Câu 32. (HSG BẮC NINH NĂM 2018-2019) Cho hình chóp $S.ABC$ có $\widehat{BAC} = 60^\circ$, $BC = a$, $SA \perp (ABC)$. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB và SC . Bán kính mặt cầu đi qua các điểm A, B, C, M, N bằng

$$\text{A. } \frac{a\sqrt{3}}{3} \quad \text{B. } \frac{2a\sqrt{3}}{3} \quad \text{C. } a \quad \text{D. } 2a$$

Câu 33. (PEN I - THẦY LÊ ANH TUẤN - ĐỀ 3 - NĂM 2019) Hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AB = a$, $SA \perp (ABCD)$, SC tạo với mặt đáy một góc 45° . Mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ có bán kính bằng $a\sqrt{2}$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng

$$\text{A. } 2a^3 \quad \text{B. } 2a^3\sqrt{3} \quad \text{C. } \frac{a^3\sqrt{3}}{3} \quad \text{D. } \frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$$

Câu 34. (CHUYÊN HẠ LONG NĂM 2018-2019 LẦN 02) Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a . $SA \perp (ABCD)$, $SA = a\sqrt{3}$. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp?

A. $\frac{a\sqrt{5}}{2}$. B. $2a$. C. $a\sqrt{5}$. D. $a\sqrt{7}$.

Câu 35. (THPT GANG THẾP THÁI NGUYÊN NĂM 2018-2019) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B , $BC = 2a$, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Gọi H , K lần lượt là hình chiếu của A lên SB và SC , khi đó thể tích của khối cầu ngoại tiếp hình chóp $AHKCB$ là

A. $\sqrt{2}\pi a^3$. B. $\frac{\pi a^3}{3}$. C. $\frac{\sqrt{2}\pi a^3}{2}$. D. $\frac{8\sqrt{2}\pi a^3}{3}$.

Câu 36. (THPT YÊN KHÁNH - NINH BÌNH - 2018 - 2019) Cho hình chóp $SABC$, đáy ABC là tam giác đều cạnh a ; $SA \perp (ABC)$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên SB, SC . Diện tích mặt cầu đi qua 5 điểm A, B, C, K, H là

A. $\frac{4\pi a^2}{9}$. B. $3\pi a^2$. C. $\frac{4\pi a^2}{3}$. D. $\frac{\pi a^2}{3}$.

Câu 37. (GKI CS2 LƯƠNG THẾ VINH HÀ NỘI NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho hình chóp $SABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $AB = a$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Đường thẳng SC tạo với đáy một góc 60° . Tính diện tích mặt cầu đi qua bốn đỉnh của hình chóp $SABC$

A. $8a^2\pi$. B. $\frac{32a^2}{3}\pi$. C. $\frac{8a^2\pi}{3}$. D. $4a^2\pi$.

Câu 38. (THPT YÊN PHONG SỐ 1 BẮC NINH NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) , tam giác ABC vuông tại B . Biết $SA = 2a, AB = a, BC = a\sqrt{3}$. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

A. a . B. $2a\sqrt{2}$. C. $a\sqrt{2}$. D. $x = 3; y = \frac{1}{2}$.

Câu 39. (THPT YÊN PHONG SỐ 1 BẮC NINH NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có các cạnh bên SA, SB, SC vuông góc với nhau từng đôi một. Biết thể tích của khối chóp bằng $\frac{a^3}{6}$. Tính bán kính r của mặt cầu nội tiếp của hình chóp $S.ABC$.

A. $r = \frac{a}{3 + \sqrt{3}}$. B. $r = 2a$. C. $r = \frac{a}{3(3 + 2\sqrt{3})}$. D. $r = \frac{2a}{3(3 + 2\sqrt{3})}$.

Câu 40. (CỤM LIÊN TRƯỜNG HẢI PHÒNG NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a . Đường thẳng $SA = a\sqrt{2}$ vuông góc với đáy $(ABCD)$. Gọi M là trung điểm SC , mặt phẳng (α) đi qua hai điểm A và M đồng thời song song với BD cắt SB, SD lần lượt tại E, F . Bán kính mặt cầu đi qua năm điểm S, A, E, M, F nhận giá trị nào sau đây?

A. a B. $\frac{a}{2}$ C. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ D. $a\sqrt{2}$

Câu 41. (ĐỀ GK2 VIỆT ĐỨC HÀ NỘI NĂM 2018-2019) Trong không gian cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B với $AB = BC = 1, AD = 2$, cạnh bên $SA = 1$ và SA vuông góc với đáy. Gọi E là trung điểm AD . Tính diện tích S_{mc} của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.CDE$.

A. $S_{mc} = 11\pi$. B. $S_{mc} = 5\pi$. C. $S_{mc} = 2\pi$. D. $S_{mc} = 3\pi$.

Câu 42. (SỞ GD&ĐT BẮC NINH NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và $AB = 2$, $AC = 4$, $SA = \sqrt{5}$. Mặt cầu đi qua các đỉnh của hình chóp $S.ABC$ có bán kính là:

- A. $R = \frac{25}{2}$. B. $R = \frac{5}{2}$. C. $R = 5$. D. $R = \frac{10}{3}$.

Dạng 3.2.2 Khối chóp có mặt bên vuông góc với đáy

Câu 43. (THPT-THANG-LONG-HA-NOI-NAM-2018-2019 LẦN 01) Cho tứ diện $ABCD$ có các mặt ABC và BCD là các tam giác đều cạnh bằng 2; hai mặt phẳng (ABD) và (ACD) vuông góc với nhau. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

- A. $2\sqrt{2}$. B. $\sqrt{2}$. C. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. D. $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Câu 44. (KSCL THPT NGUYỄN KHUYẾN LẦN 05 NĂM 2018-2019) Hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng 1, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính thể tích của khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

- A. $V = \frac{5\sqrt{15}\pi}{18}$ B. $V = \frac{5\sqrt{15}\pi}{54}$ C. $V = \frac{4\sqrt{3}\pi}{27}$ D. $V = \frac{5\pi}{3}$

Câu 45. (THPT AN LÃO HẢI PHÒNG NĂM 2018-2019 LẦN 02) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang cân, $AB = 2a$, $CD = a$, $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với $(ABCD)$. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABC$.

- A. $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ B. $R = a$ C. $R = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$ D. $R = \frac{2a}{3}$

Câu 46. (THPT LƯƠNG THẾ VINH HÀ NỘI NĂM 2018-2019 LẦN 1) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B , $AB = BC = a$, $AD = 2a$. Tam giác SAD đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ theo a .

- A. $6\pi a^2$. B. $10\pi a^2$. C. $3\pi a^2$. D. $5\pi a^2$.

Câu 47. (HOC MÃI NĂM 2018-2019-LẦN 02) Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB = a$, $\widehat{ACB} = 30^\circ$. Biết SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy (ABC) . Tính diện tích mặt cầu S_{mc} ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

- A. $S_{mc} = \frac{7\pi a^2}{3}$. B. $S_{mc} = \frac{13\pi a^2}{3}$. C. $S_{mc} = \frac{7\pi a^2}{12}$. D. $S_{mc} = 4\pi a^2$.

Câu 48. (KTNL GV BẮC GIANG NĂM 2018-2019) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính diện tích S của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$

- A. $S = 3\pi a^2$. B. $S = \frac{4\pi a^2}{3}$. C. $S = \frac{7\pi a^2}{3}$. D. $S = 7\pi a^2$.

Câu 49. (THPT CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG NAM ĐỊNH NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính thể tích V của khối cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho.

- A. $V = \frac{7\sqrt{21}\pi a^3}{54}$. B. $V = \frac{7\sqrt{21}\pi a^3}{18}$. C. $V = \frac{4\sqrt{3}\pi a^3}{81}$. D. $V = \frac{4\sqrt{3}\pi a^3}{27}$.

- Câu 50.** (SỐ GD&ĐT PHÚ THỌ NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = BC = AC = BD = 2a, AD = a\sqrt{3}$; hai mặt phẳng (ACD) và (BCD) vuông góc với nhau. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ bằng
- A. $\frac{64\pi a^2}{27}$ B. $\frac{4\pi a^2}{27}$ C. $\frac{16\pi a^2}{9}$ D. $\frac{64\pi a^2}{9}$
- Câu 51.** (THPT NGHĨA HƯNG NĐ- GK2 - 2018 - 2019) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Tam giác SAB nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Biết rằng $AB = a, AD = a\sqrt{3}$ và $\widehat{ASB} = 60^\circ$. Tính diện tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.
- A. $S = \frac{13\pi a^2}{2}$ B. $S = \frac{13\pi a^2}{3}$ C. $S = \frac{11\pi a^2}{2}$ D. $S = \frac{11\pi a^2}{3}$

Dạng 3.2.3 Khối chóp đều

- Câu 52.** (THCS - THPT NGUYỄN KHUYẾN NĂM 2018-2019 LẦN 01) Nếu tứ diện đều có cạnh bằng a thì mặt cầu ngoại tiếp của tứ diện có bán kính bằng:
- A. $\frac{a\sqrt{2}}{6}$ B. $\frac{a\sqrt{2}}{4}$ C. $\frac{a\sqrt{6}}{4}$ D. $\frac{a\sqrt{6}}{6}$
- Câu 53.** (ĐỀ THAM KHẢO BGD&ĐT NĂM 2017) Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $3\sqrt{2}a$, cạnh bên bằng $5a$. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.
- A. $R = \sqrt{3}a$ B. $R = \sqrt{2}a$ C. $R = \frac{25a}{8}$ D. $R = 2a$
- Câu 54.** (ĐỀ 15 LOVE BOOK NĂM 2018-2019) Hình chóp đều $S.ABCD$ tất cả các cạnh bằng a . Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp là
- A. $4\pi a^2$ B. πa^2 C. $\sqrt{2}\pi a^2$ D. $2\pi a^2$
- Câu 55.** (THPT CHUYÊN VĨNH PHÚC NĂM 2018-2019 LẦN 02) Cho hình chóp tứ giác đều có góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng 60° . Biết rằng mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đó có bán kính $R = a\sqrt{3}$. Tính độ dài cạnh đáy của hình chóp tứ giác đều nói trên.
- A. $\frac{12}{5}a$ B. $2a$ C. $\frac{3}{2}a$ D. $\frac{9}{4}a$
- Câu 56.** (GKI CS2 LƯƠNG THẾ VINH HÀ NỘI NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho hình chóp đều $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $AB = a$, góc giữa mặt bên với mặt phẳng đáy bằng 60° . Tính bán kính mặt cầu đi qua bốn đỉnh của hình chóp $S.ABC$
- A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{7a}{12}$ C. $\frac{7a}{16}$ D. $\frac{a}{2}$
- Câu 57.** (THPT CHUYÊN VĨNH PHÚC LẦN 02 NĂM 2018-2019) Cho hình chóp tứ giác đều có góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng 60° . Biết rằng mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đó có bán kính $R = a\sqrt{3}$. Tính độ dài cạnh đáy của hình chóp tứ giác đều nói trên.
- A. $\frac{12}{5}a$ B. $2a$ C. $\frac{3}{2}a$ D. $\frac{9}{4}a$

Dạng 3.2.4 Khối chóp khác

Câu 58. (CHUYÊN QUỐC HỌC HUẾ NĂM 2018-2019 LẦN 1) Cho mặt cầu tâm O và tam giác ABC

có ba đỉnh nằm trên mặt cầu với góc $BAC = 30^\circ$ và $BC = a$. Gọi S là điểm nằm trên mặt cầu, không thuộc mặt phẳng (ABC) và thỏa mãn $SA = SB = SC$, góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Tính thể tích V của khối cầu tâm O theo a .

A. $V = \frac{\sqrt{3}}{9} \pi a^3$ B. $V = \frac{32\sqrt{3}}{27} \pi a^3$ C. $V = \frac{4\sqrt{3}}{27} \pi a^3$ D. $V = \frac{15\sqrt{3}}{27} \pi a^3$

Câu 59. (CHUYÊN BẮC GIANG NĂM 2018-2019 LẦN 02) Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, các cạnh còn lại cùng bằng a . Bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là:

A. $R = \frac{a\sqrt{13}}{2}$ B. $R = \frac{a}{3}$ C. $R = \frac{a\sqrt{13}}{3}$ D. $R = \frac{a\sqrt{13}}{6}$

Câu 60. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = a$, $\widehat{ASB} = \widehat{ASC} = 90^\circ$, $\widehat{BSC} = 60^\circ$. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

A. $\frac{7\pi a^2}{18}$ B. $\frac{7\pi a^2}{12}$
C. $\frac{7\pi a^2}{3}$ D. $\frac{7\pi a^2}{6}$

Câu 61. (SỞ GIÁO DỤC ĐÀO TẠO VĨNH PHÚC NĂM 2018 - 2019 LẦN 01) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a . Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là điểm H thuộc đoạn AC thỏa mãn $AC = 4AH$ và $SH = a$. Tính bán kính mặt cầu nội tiếp hình chóp $S.ABCD$ (mặt cầu tiếp xúc với tất cả các mặt bên của hình chóp)

A. $\frac{4a}{9 + \sqrt{13}}$ B. $\frac{4a}{5 + \sqrt{17}}$ C. $\frac{4a}{5 + \sqrt{13}}$ D. $\frac{4a}{9 + \sqrt{17}}$

Câu 62. (CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN ĐIỆN BIÊN NĂM 2018-2019 LẦN 02) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = 3$, $AD = 4$ và các cạnh bên của hình chóp tạo với mặt đáy một góc 60° . Tính thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho.

A. $V = \frac{250\sqrt{3}}{3} \pi$ B. $V = \frac{125\sqrt{3}}{6} \pi$ C. $V = \frac{50\sqrt{3}}{3} \pi$ D. $V = \frac{500\sqrt{3}}{27} \pi$

Câu 63. (CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU NGHỆ AN NĂM 2018-2019 LẦN 02) Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông cạnh a , tam giác SAB đều và tam giác SCD vuông cân tại S . Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

A. $\frac{7\pi a^2}{3}$ B. $\frac{8\pi a^2}{3}$ C. $\frac{5\pi a^2}{3}$ D. πa^2

Câu 64. (CHUYÊN HƯNG YÊN NĂM 2018-2019 LẦN 03) Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình chữ nhật tâm I cạnh $AB = 3a$, $BC = 4a$. Hình chiếu của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm của ID . Biết rằng SB tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc 45° . Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

A. $\frac{25\pi}{2} a^2$ B. $\frac{125\pi}{4} a^2$ C. $\frac{125\pi}{2} a^2$ D. $4\pi a^2$

- Câu 65.** (CHUYÊN HẠ LONG NĂM 2018-2019 LẦN 02) Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = 3$, $AD = BC = 5$, $AC = BD = 6$. Tính thể tích khối cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.
- A. 35π (đvtt). B. 35 (đvtt). C. $\frac{35\sqrt{35}}{6}\pi$ (đvtt). D. $35\sqrt{35}\pi$ (đvtt).
- Câu 66.** (THPT YÊN PHONG SỐ 1 BẮC NINH NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho đường tròn tâm O có đường kính $AB = 2a$ nằm trong mặt phẳng (P) . Gọi I là điểm đối xứng với O qua A . Lấy điểm S sao cho SI vuông góc với mặt phẳng (P) và $SI = 2a$. Tính bán kính R của mặt cầu qua đường tròn tâm O và điểm S .
- A. $R = \frac{a\sqrt{65}}{4}$. B. $R = \frac{a\sqrt{65}}{16}$. C. $R = a\sqrt{5}$. D. $R = \frac{7a}{4}$.
- Câu 67.** (LIÊN TRƯỜNG THPT TP VINH NGHỆ AN NĂM 2018-2019) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B , $AB = BC = 3a\sqrt{2}$, $\widehat{SAB} = \widehat{SCB} = 90^\circ$. Biết khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $2a\sqrt{3}$. Tính thể tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.
- A. $72\sqrt{18}\pi a^3$. B. $18\sqrt{18}\pi a^3$. C. $6\sqrt{18}\pi a^3$. D. $24\sqrt{18}\pi a^3$.
- Câu 68.** (CHUYÊN ĐHSPT HÀ NỘI NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho hình chóp $O.ABC$ có $OA = OB = OC = a$, $\widehat{AOB} = 60^\circ$, $\widehat{BOC} = 90^\circ$, $\widehat{AOC} = 120^\circ$. Gọi S là trung điểm cạnh OB . Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là
- A. $\frac{a}{4}$ B. $\frac{a\sqrt{7}}{4}$ C. $\frac{a\sqrt{7}}{2}$ D. $\frac{a}{2}$
- Câu 69.** (ĐỀ HỌC SINH GIỎI TỈNH BẮC NINH NĂM 2018-2019) Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = 6a$, $CD = 8a$ và các cạnh còn lại bằng $a\sqrt{74}$. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.
- A. $S = 25\pi a^2$. B. $S = 100\pi a^2$. C. $S = \frac{100}{3}\pi a^2$. D. $S = 96\pi a^2$.

Dạng 4. Bài toán thực tế, cực trị

- Câu 70.** (HSG BẮC NINH NĂM 2018-2019) Một cơ sở sản xuất đồ gia dụng được đặt hàng làm các chiếc hộp kín hình trụ bằng nhôm để đựng rượu có thể tích là $V = 28\pi a^3$ ($a > 0$). Để tiết kiệm sản xuất và mang lại lợi nhuận cao nhất thì cơ sở sẽ sản xuất những chiếc hộp hình trụ có bán kính là R sao cho diện tích nhôm cần dùng là ít nhất. Tìm R
- A. $R = a\sqrt[3]{7}$ B. $R = 2a\sqrt[3]{7}$ C. $R = 2a\sqrt[3]{14}$ D. $R = a\sqrt[3]{14}$
- Câu 71.** (MĐ 104 BGD&ĐT NĂM 2017) Trong tất cả các hình chóp tứ giác đều nội tiếp mặt cầu có bán kính bằng 9, tính thể tích V của khối chóp có thể tích lớn nhất.
- A. $V = 576\sqrt{2}$ B. $V = 144\sqrt{6}$ C. $V = 144$ D. $V = 576$
- Câu 72.** (SỞ GIÁO DỤC ĐÀO TẠO VĨNH PHÚC NĂM 2018 - 2019 LẦN 01) Trong tất cả các hình chóp tứ giác đều nội tiếp mặt cầu có bán kính bằng 9, khối chóp có thể tích lớn nhất bằng bao nhiêu?
- A. $576\sqrt{2}$. B. 144. C. 576. D. $144\sqrt{6}$.

Câu 73. (THPT CHUYÊN VĨNH PHÚC NĂM 2018-2019 LẦN 3) Trong không gian $Oxyz$, lấy điểm C trên tia Oz sao cho $OC=1$. Trên hai tia Ox, Oy lần lượt lấy hai điểm A, B thay đổi sao cho $OA+OB=OC$. Tìm giá trị nhỏ nhất của bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $O.ABC$?

- A. $\frac{\sqrt{6}}{4}$ B. $\sqrt{6}$ C. $\frac{\sqrt{6}}{3}$ D. $\frac{\sqrt{6}}{2}$

Câu 74. (KTNL GV THPT LÝ THÁI TÔ NĂM 2018-2019) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, các cạnh bên của hình chóp bằng $\sqrt{6} \text{ cm}$, $AB=4 \text{ cm}$. Khi thể tích khối chóp $S.ABCD$ đạt giá trị lớn nhất, tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp $S.ABCD$.

- A. $12\pi \text{ cm}^2$. B. $4\pi \text{ cm}^2$. C. $9\pi \text{ cm}^2$. D. $36\pi \text{ cm}^2$.

PHẦN B. ĐÁP ÁN THAM KHẢO

Dạng 1. Diện tích xung quanh, bán kính

Câu 1. Chọn D

Câu 2. Chọn C

Ta có: $S = 4\pi R^2 = 16\pi a^2 \Rightarrow R = 2a$

Câu 3. Ta có: $S = 4\pi R^2 = 4\pi (2a)^2 = 16\pi a^2$.

Câu 4. Ta có: $4\pi R^2 = 16\pi \Leftrightarrow R^2 = 4 \Rightarrow R = 2(\text{cm})$.

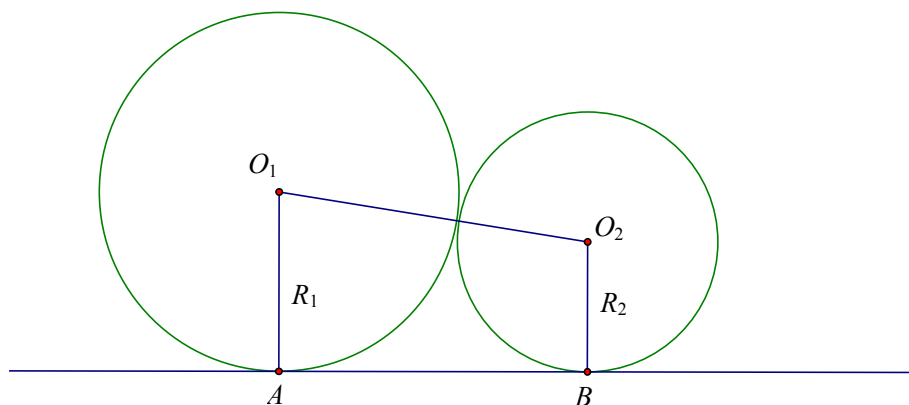
Câu 5. Chọn B

Nhận xét : Đường tròn lớn của mặt cầu (S) là đường tròn đi qua tâm của mặt cầu (S) nên bán kính của đường tròn lớn cũng là bán kính của mặt cầu (S) .

Chu vi đường tròn lớn của mặt cầu (S) bằng $4\pi \Rightarrow 2\pi R = 4\pi \Leftrightarrow R = 2$.

Vậy diện tích mặt cầu (S) là $S = 4\pi R^2 = 16\pi$.

Câu 6. Chọn B



Nhận xét: Đường tròn $(O_1; R_1)$, $(O_2; R_2)$ tiếp xúc ngoài, cùng tiếp xúc với một đường thẳng tại hai điểm A và B . Khi đó ta có: $AB = 2\sqrt{R_1 R_2}$.

Gọi tâm các mặt cầu lần lượt là O_1, O_2, O_3 có bán kính lần lượt là R_1, R_2, R_3 .

Vì các tiếp điểm của các mặt cầu với mặt phẳng tiếp xúc lập thành tam giác có các cạnh bằng 4, 2

$$\text{và } 3 \text{ nên ta có hệ phương trình: } \begin{cases} 2\sqrt{R_1 R_2} = 4 \\ 2\sqrt{R_2 R_3} = 2 \Rightarrow 8R_1 R_2 R_3 = 2.4.3 \text{ hay } R_1 R_2 R_3 = 3. \\ 2\sqrt{R_3 R_1} = 3 \end{cases}$$

Dạng 2. Thể tích

Câu 7. Chọn B

Câu 8. Chọn C

Câu 9. Thể tích khối cầu là: $V = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \pi 3^3 = 36\pi (\text{cm}^3)$.

Câu 10. Gọi mặt cầu có bán kính R . Theo đề ta có $4\pi R^2 = 4\pi a^2$. Vậy $R = a(\text{cm})$.

Khi đó, thể tích khối cầu (S) là: $V = \frac{4\pi R^3}{3} = \frac{4\pi a^3}{3} (\text{cm}^3)$.

Câu 11. Gọi R là bán kính mặt cầu.

Mặt cầu có diện tích bằng $36\pi a^2$ nên $4\pi R^2 = 36\pi a^2 \Leftrightarrow R^2 = 9a^2 \Rightarrow R = 3a$

Thể tích khối cầu là $V = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \pi (3a)^3 = 36\pi a^3$

Câu 12. Gọi I và R lần lượt là tâm và bán kính mặt cầu (S).

Gọi (P) là mặt phẳng cách tâm một khoảng bằng 4cm . Ta có $h = d(I, (P)) = 4\text{cm}$.

(P) cắt mặt cầu (S) theo được thiết diện là một hình tròn có bán kính r .

Theo giả thiết ta có $\pi r^2 = 9\pi \Leftrightarrow r = 3\text{cm}$.

Ta có $R = \sqrt{r^2 + h^2} = 5\text{cm}$. Suy ra thể tích khối cầu (S) là $V = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{500\pi}{3} \text{cm}^3$.

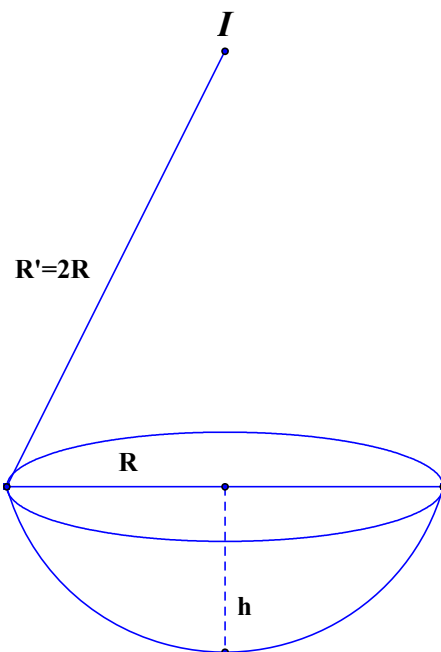
Câu 13. Chọn C

➤ Thể tích khối (H_1) là $V_1 = \frac{4}{3} \pi r_1^3$

➤ Thể tích khối (H_2) là $V_2 = \frac{4}{3} \pi r_2^3$

➤ Tổng thể tích 2 khối là $V = V_1 + V_2 = \frac{4}{3} \pi r_1^3 + \frac{4}{3} \pi r_2^3 = \frac{4}{3} \pi r_1^3 + \frac{4}{3} \pi \left(\frac{1}{2} r_1\right)^3 = \frac{9}{8} \left(\frac{4}{3} \pi r_1^3\right) = \frac{9}{8} V_1$

➤ Suy ra $\frac{9}{8} V_1 = 180 \Rightarrow V_1 = 160$



Câu 14.

Khi đặt khối cầu có bán kính $R' = 2R$ vào khối cầu có bán kính R ta được phần chung của hai khối cầu. phần chung đó gọi là chỏm cầu. Gọi h là chiều cao chỏm cầu. Thể tích khối chỏm cầu

$$\text{là } V_c = \pi h^2 \left(R' - \frac{h}{3} \right).$$

$$\text{với } h = R' - \sqrt{R'^2 - R^2} = 4 - \sqrt{4^2 - 2^2} = 4 - 2\sqrt{3}.$$

$$\Rightarrow V_c = \pi (4 - 2\sqrt{3})^2 \left(4 - \frac{4 - 2\sqrt{3}}{3} \right) = \frac{2\pi}{3} (64 - 36\sqrt{3}).$$

$$\text{Thể tích một nửa khối cầu } V = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{16\pi}{3}.$$

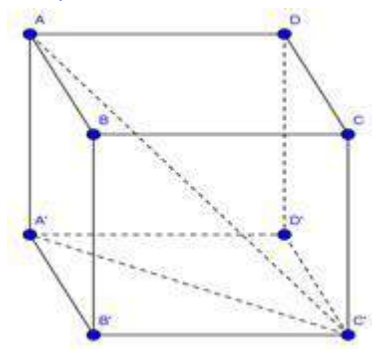
Thể tích khối nước còn lại trong nửa khối cầu:

$$V_n = V - V_c = \frac{16\pi}{3} - \frac{2\pi}{3} (64 - 36\sqrt{3}) = \left(24\sqrt{3} - \frac{112}{3} \right) \pi.$$

Dạng 3. Khối cầu nội tiếp, ngoại tiếp khối đa diện

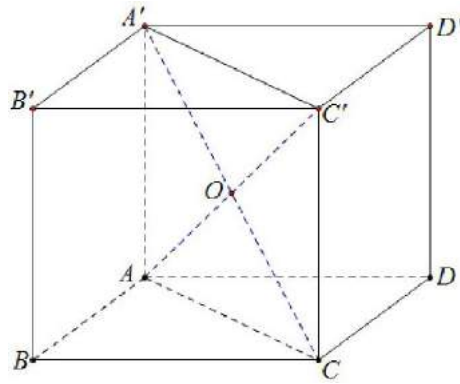
Dạng 3.1 Khối cầu nội tiếp, ngoại tiếp khối lăng trụ

Câu 15. Chọn A



$$\text{Đường chéo của hình lập phương: } AC' = 2\sqrt{3}a. \text{ Bán kính } R = \frac{AC'}{2} = a\sqrt{3}.$$

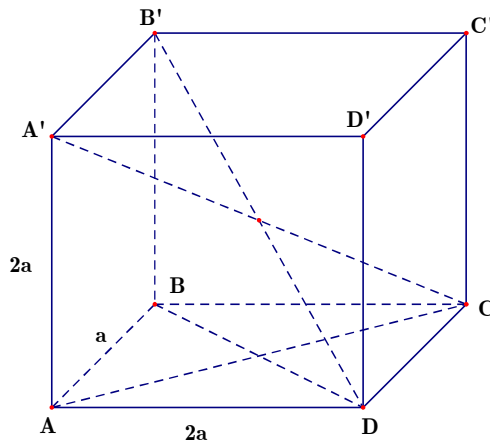
Câu 16. Chọn B



Gọi $O = AC' \cap A'C \Rightarrow O$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình lập phương.

$$\text{Bán kính mặt cầu: } R = OA = \frac{1}{2} AC' = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a = \frac{2R}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}R}{3}$$

Câu 17. Chọn A

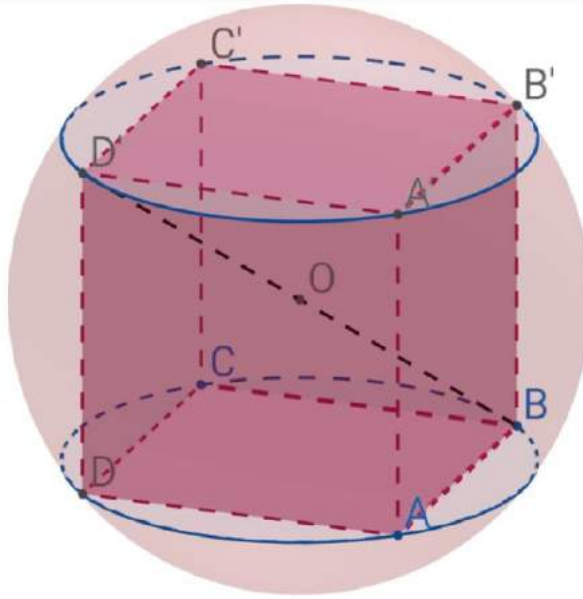


Bán kính khối cầu là một nửa đường chéo của hình hộp chữ nhật:

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 + AD^2 + BB'^2} = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + (2a)^2 + (2a)^2} = \frac{3}{2} a.$$

Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình hộp chữ nhật là:

$$S = 4\pi R^2 = 4\pi \left(\frac{3a}{2} \right)^2 = 9\pi a^2.$$

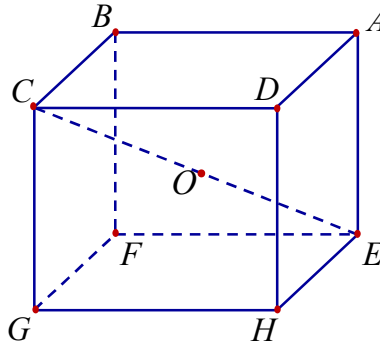


Câu 18.

Gọi R là bán kính khối cầu ngoại tiếp hình hộp chữ nhật.

$$\text{Ta có } R = \frac{1}{2}BD' = \frac{1}{2}\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \frac{\sqrt{14}}{2}.$$

$$\text{Vậy thể tích khối cầu là: } V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{\sqrt{14}}{2}\right)^3 = \frac{7\pi\sqrt{14}}{3}.$$

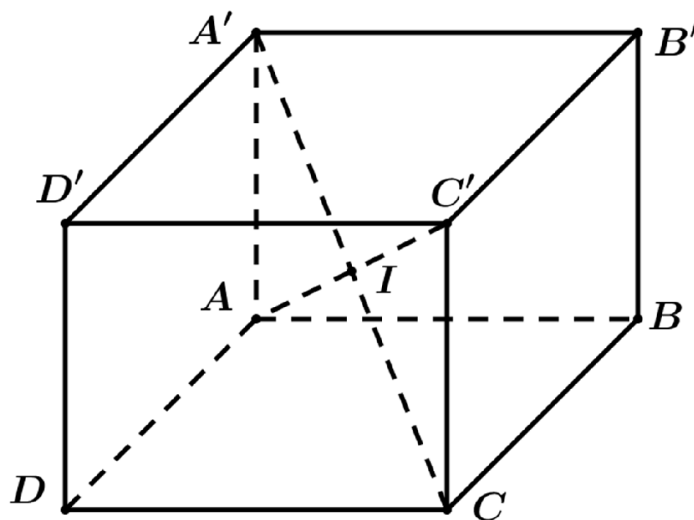


Câu 19.

Gọi R là bán kính khối cầu ngoại tiếp hình lập phương $ABCD.EFGH$.

$$\text{Ta có } CE = AB\sqrt{3} = 3\sqrt{3} \text{ cm. Suy ra } R = \frac{1}{2}CE = \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ cm.}$$

$$\text{Thể tích khối cầu là: } V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{27\sqrt{3}}{2}\pi \text{ cm}^3.$$



Câu 20.

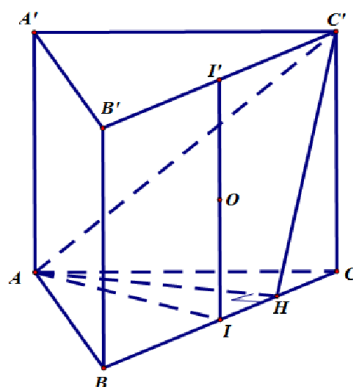
Xét hình hộp chữ nhật là $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$, $AA' = 2a$.

Gọi I là trung điểm $A'C'$, suy ra I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$.

Ta có bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ là:

$$R = \frac{1}{2} AC' = \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 + AD^2 + AA'^2} = a\sqrt{2}.$$

Vậy diện tích mặt cầu là: $S = 4\pi R^2 = 8\pi a^2$.



Câu 21.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên $BC \Rightarrow AH \perp (BCC'B')$.

$$\Rightarrow \widehat{(AC', (BCC'B'))} = \widehat{HC'A} = 30^\circ.$$

ABC là tam giác vuông tại A , $AB = a\sqrt{3}$, $BC = 2a$ suy ra $AC = a$.

$$\text{Ta có: } AH = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AC' = 2AH = a\sqrt{3} \Rightarrow AA' = \sqrt{AC'^2 - AC^2} = a\sqrt{2}.$$

Gọi I , I' lần lượt là trung điểm BC , $B'C'$. Dễ thấy I , I' lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$.

Gọi O là trung điểm của II' suy ra O là tâm mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ đã cho.

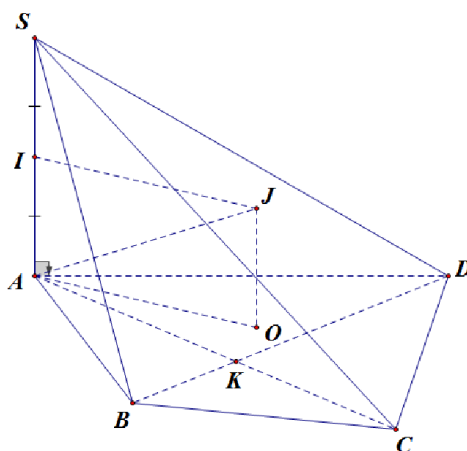
$$\text{Bán kính mặt cầu là: } R = OB = \sqrt{\left(\frac{BC}{2}\right)^2 + \left(\frac{BB'}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

Diện tích của mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ đã cho bằng: $S = 4\pi R^2 = 6\pi a^2$.

Dạng 3.2 Khối cầu nội tiếp, ngoại tiếp khối chóp

Dạng 3.2.1 Khối chóp có cạnh bên vuông góc với đáy

Câu 22. Gọi điểm O là tâm đường tròn ngoại tiếp đáy. I là trung điểm SA . J là tâm mặt cầu ngoại tiếp.



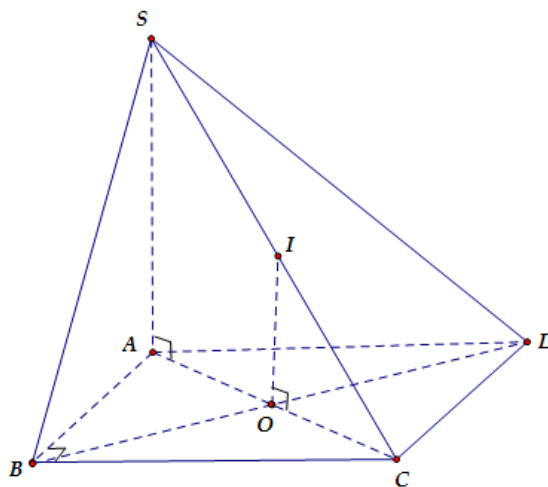
Dễ thấy $AIJO$ là hình chữ nhật. Do đó $JA = \sqrt{AO^2 + AI^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Câu 23. Chọn A

Theo giả thiết: $\widehat{SCA} = 60^\circ \Rightarrow SC = 2a\sqrt{2}$.

Bán kính mặt cầu $R = \frac{SC}{2} = a\sqrt{2}$.

Diện tích $S = 4\pi R^2 = 8a^2\pi$.



Câu 24.

Gọi $O = AC \cap BD$, đường chéo $AC = a\sqrt{2}$.

Gọi I là trung điểm của SC .

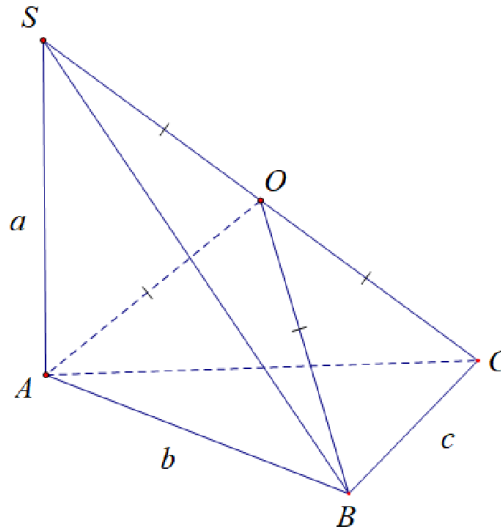
Suy ra OI là đường trung bình của tam giác SAC . Suy ra $OI \parallel SA \Rightarrow OI \perp (ABCD)$.

Hay OI là trục đường tròn ngoại tiếp đáy $ABCD$.

Mà $IS = IC \Rightarrow IA = IB = IC = ID = IS$. Suy ra I là tâm mặt cầu ngoại tiếp chóp $S.ABCD$.

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp chóp $S.ABCD$: $R = SI = \frac{SC}{2} = \frac{\sqrt{SA^2 + AC^2}}{2} = a\sqrt{2}$.

Diện tích mặt cầu: $S = 4\pi R^2 = 8\pi a^2$.



Câu 25.

Ta có: $\begin{cases} SA \perp AB \\ SA \perp BC \end{cases} \Rightarrow SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp AC.$

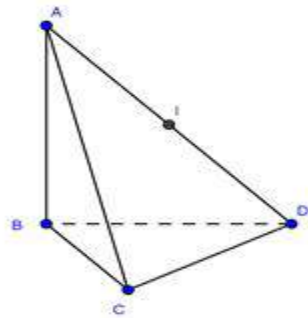
Ta có: $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB.$

Gọi O là trung điểm SC , ta có tam giác SAC, SBC vuông lần lượt tại A và B nên:

$OA = OB = OC = OS = \frac{SC}{2}$. Do đó mặt cầu đi qua S, A, B, C có tâm O và bán kính $R = \frac{SC}{2}$.

Ta có: $SC^2 = SB^2 + BC^2 = SA^2 + AB^2 + BC^2 = a^2 + b^2 + c^2$. suy ra $R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

Câu 26. Chọn C



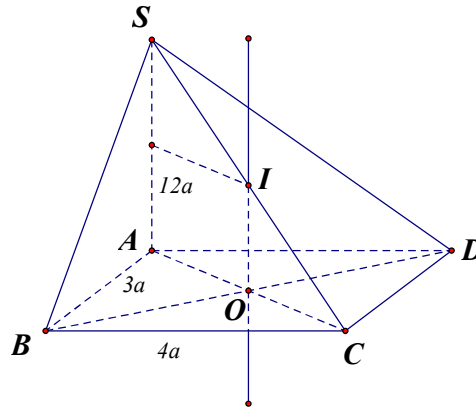
Tam giác BCD vuông tại C nên áp dụng định lý Pitago, ta được $BD = 5a$.

Tam giác ABD vuông tại B nên áp dụng định lý Pitago, ta được $AD = 5a\sqrt{2}$.

Vì B và C cùng nhìn AD dưới một góc vuông nên tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ là

trung điểm I của AD . Bán kính mặt cầu này là: $R = \frac{AD}{2} = \frac{5a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 27. Chọn A



Ta có: $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 5a$

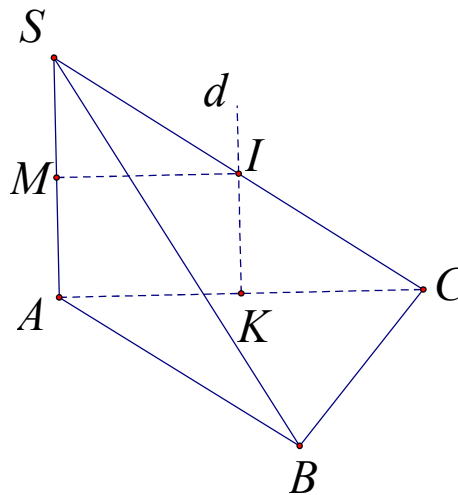
Vì $SA \perp AC$ nên $SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = 13a$

Nhận thấy: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp SB$. Tương tự: $CD \perp SD$

Do các điểm A, B, D đều nhìn đoạn thẳng SC dưới một góc vuông nên gọi I là trung điểm của đoạn thẳng SC thì I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

Vậy $R = \frac{SC}{2} = \frac{13a}{2}$.

Câu 28. Chọn A



Gọi K là trung điểm AC . Gọi M là trung điểm SA .

Vì tam giác ABC vuông tại B nên K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Từ K dựng đường thẳng d vuông góc với $mp(ABC)$.

Trong $mp(SAC)$ dựng MI là đường trung trực đoạn SA cắt d tại I .

Khi đó điểm I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ và bán kính mặt cầu là $R = AI$.

Ta có $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 5 \Rightarrow AK = \frac{5}{2}$. Có $IK = MA = \frac{SA}{2} = \frac{5}{2}$.

Vậy $R = AI = \sqrt{AK^2 + IK^2} = \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{25}{4}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$. Gọi I là trung điểm của SC . Tam giác SAC vuông tại A

nên $IS = IC = IA$ (1)

Ta có $BC \perp AB; BC \perp SA \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB \Rightarrow \Delta SBC$ vuông tại B .

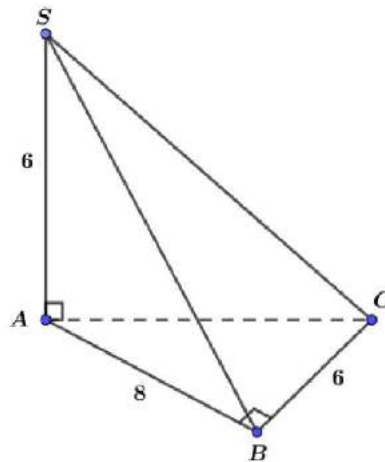
Nên $IS = IC = IB$ (2)

Từ (1) và (2) ta có I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ bán kính $R = \frac{1}{2}SC$.

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 5; SC = \sqrt{AS^2 + AC^2} = 5\sqrt{2}$$

$$\text{Vậy } R = \frac{5\sqrt{2}}{2}.$$

Câu 29. Chọn C



Gọi r là bán kính khối cầu nội tiếp chóp $S.ABC$, ta có $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}S_{tp}.r \Rightarrow r = \frac{3V_{S.ABC}}{S_{tp}}$

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SA.S_{ABC} = 48$$

Ta dễ dàng có $\Delta SAB, \Delta SAC$ vuông tại S

$$\text{Tính được } AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 10$$

$$S_{tp} = S_{SAB} + S_{SAC} + S_{ABC} = 108 \text{ (đvdt)} \Rightarrow r = \frac{3V_{S.ABC}}{S_{tp}} = \frac{4}{3}$$

$$\text{Vậy thể tích khối cầu nội tiếp chóp } S.ABC \text{ là } V = \frac{4}{3}\pi.r^3 = \frac{256\pi}{81}.$$

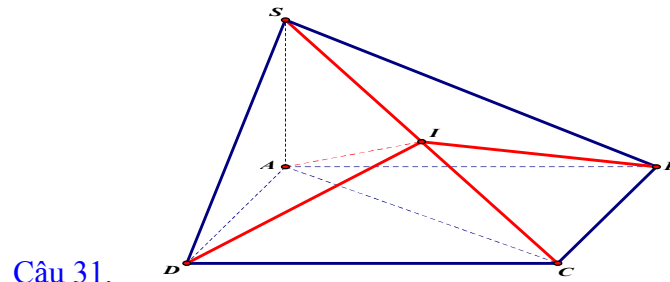
Câu 30. Chọn B

Ta có

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{4a^2 + 16a^2} = 2a\sqrt{5}$$

$$R_d = a\sqrt{5}$$

$$R = \sqrt{R_d^2 + \frac{SA^2}{4}} = \sqrt{5a^2 + 9a^2} = a\sqrt{14}.$$



Câu 31.

*) Ta có $\triangle SAC$ vuông tại A (1).

*) CM $\triangle SDC$ vuông tại D . Ta có:

$AD \perp CD$ (vì $ABCD$ là hình chữ nhật).

$SA \perp CD$ (vì cạnh SA vuông góc với mặt phẳng đáy).

Ta suy ra: $CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp SD \Rightarrow \triangle SDC$ vuông tại D (2).

*) Chứng minh tương tự, ta được $\triangle SBC$ vuông tại B (3).

Từ (1), (2), (3): Ta suy ra: mặt cầu (S) ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ có đường kính SC .

Ta có: $SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = \sqrt{4a^2 + 2a^2} = a\sqrt{6}$.

Vậy mặt cầu (S) ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ có bán kính bằng $R = \frac{SC}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Câu 32.

• Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$

$\Rightarrow IA = IB = IC$ (1).

• Kẻ IH là trung trực của AC .

$\left. \begin{array}{l} IH \perp AC \\ IH \perp SA \end{array} \right\} \Leftrightarrow IH \perp (SAC) \Leftrightarrow IH \perp (ANC)$.

Mà $\triangle ANC$ vuông tại N có AC là cạnh huyền và H là trung điểm $AC \Rightarrow IH$ là trục của $\triangle ANC \Rightarrow IA = IC = IN$ (2).

• Tương tự kẻ IK là trung trực của $AB \Rightarrow IK$ là trục của $\triangle AMB \Rightarrow IA = IB = IM$ (3).

(1), (2), (3) $\Rightarrow IA = IB = IC = IM = IN \Rightarrow I$ là tâm đường tròn ngoại tiếp chóp $A.BCMN$.

Định lí hàm sin trong $\triangle ABC$: $IA = \frac{BC}{2 \sin \widehat{BAC}} = \frac{a}{2 \sin 60^\circ} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 33. Chọn D

Gọi O là tâm của hình chữ nhật $ABCD$; I là trung điểm đoạn SC .

$\left\{ \begin{array}{l} BC \perp SA \\ BC \perp AB \end{array} \right. \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB$.

$\left\{ \begin{array}{l} CD \perp SA \\ CD \perp AD \end{array} \right. \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp SD$

Các điểm A, B, D cùng nhìn SC dưới một góc vuông nên I chính là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

Mặt khác AC là hình chiếu của SC trên mặt phẳng đáy nên góc giữa SC và mặt phẳng đáy là góc ACS bằng 45° . Do đó tam giác SAC vuông cân tại $A \Rightarrow SA = AC = 2a$.

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SA.S_{ABCD} = \frac{1}{3} . 2a.a.a\sqrt{3} = \frac{2a^3\sqrt{3}}{3}.$$

Câu 34.

Gọi $O = AC \cap BD$. Dựng (d) đi qua O và vuông góc với $mp(ABCD)$.

Dựng Δ là đường trung trực của cạnh SA cắt SA tại E .

$I = d \cap \Delta \Rightarrow I$ là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD \Rightarrow$ Bán kính là: IA .

$$\text{Ta có } AO = \frac{a\sqrt{2}}{2}, AE = \frac{a\sqrt{3}}{2}. AI = \sqrt{AO^2 + AE^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

Câu 35.

Gọi M là trung điểm BC .

$$\Delta ABC \text{ vuông cân tại } B \Rightarrow MB = MA = MC = \frac{1}{2} AC. (1)$$

$$\Delta KAC \text{ vuông tại } K \Rightarrow MK = \frac{1}{2} AC. (2)$$

$$\left. \begin{array}{l} BC \perp AB \\ BC \perp SA \\ AH \perp SB \end{array} \right\} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH \left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp HC. \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \Delta AHC \text{ vuông tại } H \Rightarrow MH = \frac{1}{2} AC. (3)$$

Từ (1) $\rightarrow$ (3) $\Rightarrow M$ là tâm khối cầu ngoại tiếp hình chóp $AHKCB$.

$$\text{Bán kính khối cầu cần tìm: } R = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 + BC^2} = a\sqrt{2}.$$

$$\text{Thể tích khối cầu: } V = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{8\sqrt{2}\pi a^3}{3}.$$

Câu 36.

Gọi I và R lần lượt là tâm và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

$$\text{Vì } ABC \text{ là tam giác đều cạnh nên ta có: } IA = IB = IC = R = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và AC .

Ta có: $IM \perp AB$ và $IM \perp SA$ (do $SA \perp (ABC)$) suy ra $IM \perp (SAB)$; Mà $AH \perp HB$ nên M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AHB ; Do đó IM là trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác $AHB \Rightarrow IA = IH = IB$ (1)

Lại có: $IN \perp AC$ và $IN \perp SA$ (do $SA \perp (ABC)$) suy ra $IN \perp (SAC)$; Mà $AK \perp KC$ nên N là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AKC ; Do đó IN là trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác $AKC \Rightarrow IA = IK = IC$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra I là tâm mặt cầu đi qua 5 điểm A, B, C, K, H và bán kính mặt cầu đó là

$$R = \frac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow S_{mc} = 4\pi R^2 = \frac{4\pi a^2}{3}.$$

Câu 37. Chọn B

Gọi K, M lần lượt là trung điểm của AC, AS

Tam giác ABC là tam giác vuông cân tại B nên K là tâm đường tròn ngoại tiếp

Từ K dựng đường thẳng d vuông góc mặt phẳng (ABC) .

Trong (SAC) , dựng đường trung trực của SA cắt d tại I

Khi đó I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $SABC$ và bán kính mặt cầu là $R = IA$

$$\text{Ta có } AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = a\sqrt{2} \Rightarrow AK = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$SA = AC \cdot \tan \widehat{SCA} = a\sqrt{6} \Rightarrow MA = \frac{SA}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$

$$\Rightarrow R = IA = \sqrt{MA^2 + AK^2} = a\sqrt{2}. \text{ Diện tích mặt cầu là } S = 4\pi R^2 = 8a^2\pi$$

Câu 38. Chọn C

$$\text{Ta có } \left. \begin{array}{l} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{array} \right\} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB, \text{ lại có } CA \perp SA.$$

Do đó 2 điểm A, B nhìn đoạn SC dưới một góc vuông. Suy ra mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S. ABC$ là mặt cầu đường kính SC .

$$\text{Xét tam giác } ABC \text{ có } AC = \sqrt{BC^2 + BA^2} = 2a \text{ suy ra } SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = 2a\sqrt{2}.$$

$$\text{Vậy } R = a\sqrt{2}.$$

Câu 39. Chọn A

$$\text{Cách 1. Áp dụng công thức: } r = \frac{3V}{S_{tp}} (*) \text{ và tam giác đều cạnh } x \text{ có diện tích } S = \frac{x^2\sqrt{3}}{4}.$$

Từ giả thiết $S. ABC$ đều có $SA = SB = SC$. Lại có SA, SB, SC đôi một vuông góc và thể tích khối chóp $S. ABC$ bằng $\frac{a^3}{6}$ nên ta có $SA = SB = SC = a$.

Suy ra $AB = BC = CA = a\sqrt{2}$ và tam giác ABC đều cạnh có độ dài $a\sqrt{2}$. Do đó diện tích toàn phần của khối chóp $S. ABC$ là

$$S_{tp} = S_{SAB} + S_{SBC} + S_{SCA} + S_{ABC} = 3 \cdot \frac{a^2}{2} + \frac{(a\sqrt{2})^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{a^2(3 + \sqrt{3})}{2}.$$

Thay vào (*) ta được:

$$r = \frac{3V}{S_{tp}} = \frac{3 \cdot \frac{a^3}{6}}{\frac{a^2(3 + \sqrt{3})}{2}} = \frac{a}{3 + \sqrt{3}}.$$

Cách 2. Xác định tâm và tính bán kính

Từ giả thiết suy ra $SA = SB = SC = a$.

Kẻ $SH \perp (ABC)$, ta có H là trực tâm của tam giác ABC.

Gọi $M = AH \cap BC$, dựng tia phân giác trong của góc $\widehat{AMB}$ cắt SH tại I, kẻ $IE \perp (SBC)$ tại E. Dễ thấy $E \in SM$. Khi đó ta có $IH = IE$ hay $d(I, ABC) = d(I, SBC)$ do S.ABC là chóp tam giác đều nên hoàn toàn có $d(I, ABC) = d(I, SAB) = d(I, SAC)$ tức là I là tâm mặt cầu nội tiếp khối chóp S.ABC.

Ta có $r = IH = IE$.

Xét ΔSAM vuông tại S, đường cao SH , tính được $SM = \frac{BC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

$$AM = \sqrt{SA^2 + SM^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{2}} = \frac{a\sqrt{6}}{2}; \quad MH = \frac{SM^2}{AM} = \frac{a^2}{2} : \frac{a\sqrt{6}}{2} = \frac{a}{\sqrt{6}}.$$

$$\frac{1}{SH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{SB^2} + \frac{1}{SC^2} = \frac{3}{a^2} \Rightarrow SH = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

Áp dụng tính chất đường phân giác ta có

$$\frac{IH}{IS} = \frac{MH}{MS} \Rightarrow \frac{IH}{IH + IS} = \frac{MH}{MH + MS} \Leftrightarrow \frac{IH}{SH} = \frac{MH}{MH + MS}$$

$$\Rightarrow IH = \frac{MH \cdot SH}{MH + MS} = \frac{a}{\sqrt{6}} \cdot \frac{a}{\sqrt{3}} : \left(\frac{a}{\sqrt{6}} + \frac{a}{\sqrt{2}} \right) = \frac{a}{3 + \sqrt{3}}$$

$$\text{Vậy } r = IH = \frac{a}{3 + \sqrt{3}}.$$

Câu 40. Chọn C

Ta có $\begin{cases} (\alpha) \parallel BD \\ (SBD) \cap (\alpha) = FE \end{cases} \Rightarrow BD \parallel EF$. Gọi I là giao điểm của AM và SO

Dễ thấy I là trọng tâm tam giác SAC

$$\frac{SF}{SD} = \frac{SI}{SO} = \frac{2}{3} \Rightarrow SF = \frac{2}{3}SD \Rightarrow SF \cdot SD = \frac{2}{3}SD^2 = \frac{2}{3}(SA^2 + AD^2) = 2a^2 \Rightarrow SF \cdot SD = SA^2$$

Xét tam giác vuông SAD và $SF \cdot SD = SA^2 \Rightarrow AF$ là đường cao của tam giác $\Rightarrow AF \perp SF$, chứng minh tương tự ta có $\Rightarrow AE \perp SB$

Tam giác $SA = AC = a\sqrt{2}$ nên AM vừa là trung tuyến vừa là đường cao của tam giác SAC $\Rightarrow AM \perp SM$

Ta có $\begin{cases} AF \perp SF \\ AE \perp SE \\ AM \perp SM \end{cases}$ nên mặt cầu đi qua năm điểm S, A, E, M, F có tâm là trung điểm của

$$SA \text{ và bán kính bằng } \frac{SA}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Câu 41.

Gọi H, G, F lần lượt là trung điểm AB, SC, SE; $M = AC \cap BD$.

Dễ thấy AFGH là hình bình hành.

$$\text{Ta có } \begin{cases} AF \perp SE (SA = AE) \\ GF \perp SE (GF // AB // CE, AB \perp SE) \end{cases}$$

Khi đó, $(AFGH)$ là mặt phẳng trung trực của SE .

Theo giả thiết: tứ giác $ABCE$ là hình vuông $\Rightarrow CE \perp AD \Rightarrow \triangle CED$ vuông tại E .

Gọi I là trung điểm của CD , ta có I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CDE .

Đường thẳng d đi qua I và song song SA là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác CDE .

GH cắt d tại O , ta có O là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.CDE$, bán kính: $R = OC$

$$\text{Vi } \begin{cases} O \in d \Rightarrow OE = OC = OD \\ O \in GH \subset (AFGH) \Rightarrow OS = OE \end{cases} \Rightarrow OS = OC = OD = OE$$

$$IC = \frac{1}{2}CD = \frac{\sqrt{2}}{2}, \triangle OIH \text{ đồng dạng } \triangle GMH \text{ nên } \frac{GM}{MH} = \frac{OI}{IH} \Rightarrow OI = \frac{3}{2}.$$

$$\text{Áp dụng định lý Pitago vào tam giác } OIC, \text{ suy ra } R = OC = \frac{\sqrt{11}}{2}.$$

$$\text{Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp } S.CDE \text{ là } S_{mc} = 4\pi R^2 = 11\pi.$$

Câu 42.

Cách 1.

Gọi M, H lần lượt là trung điểm BC, SA .

Ta có tam giác ABC vuông tại A suy ra M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Qua M kẻ đường thẳng d sao cho $d \perp (ABC) \Rightarrow d$ là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Trong mặt phẳng (SAM) kẻ đường trung trực Δ của đoạn SA , cắt d tại I

$$\Rightarrow \begin{cases} IA = IB = IC \\ IA = IS \end{cases} \Rightarrow IA = IB = IC = IS \Rightarrow I \text{ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp } S.ABC.$$

$$\bullet \begin{cases} HA \perp (ABC) \\ IM \perp (ABC) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} HA \perp AM \\ HA // IM \end{cases}.$$

$$\bullet \begin{cases} HI \perp SA \\ AM \perp SA \\ HI, SA, AM \subset (SAM) \end{cases} \Rightarrow HI // AM.$$

Suy ra tứ giác $HAMI$ là hình chữ nhật.

$$\text{Ta có } AM = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}\sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{5}, IM = \frac{1}{2}SA = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

$$\text{Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp } S.ABC \text{ là: } R = AI = \sqrt{AM^2 + IM^2} = \sqrt{5 + \frac{5}{4}} = \frac{5}{2}.$$

Cách 2. Sử dụng kết quả: Nếu $SABC$ là một tứ diện vuông đỉnh A thì bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $SABC$ được tính bởi công thức: $R = \frac{1}{2}\sqrt{AS^2 + AB^2 + AC^2}$

$$\text{Áp dụng công thức trên, ta có } R = \frac{1}{2}\sqrt{(\sqrt{5})^2 + 2^2 + 4^2} = \frac{5}{2}.$$

Dạng 3.2.2 Khối chóp có mặt bên vuông góc với đáy

Câu 43.

Gọi O là trung điểm AD .

$$\begin{cases} (ABD) \perp (ACD) \\ (ABD) \cap (ACD) = AD \Rightarrow CO \perp (ABD) \\ CO \perp AD \end{cases}$$

ΔCOB vuông cân tại O và $CB = 2$ suy ra $OB = OC = \sqrt{2}$.

$$OD = OA = \sqrt{AC^2 - OC^2} = \sqrt{2}.$$

Vậy O là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ và bán kính bằng $\sqrt{2}$.

Câu 44. Chọn B

Gọi M, G, H lần lượt là trung điểm của AB , trọng tâm $\Delta ABC, \Delta SAB$.

Vì $\Delta ABC, \Delta SAB$ là hai tam giác đều nên $CM \perp AB; SM \perp AB$.

$$\text{Mà } \begin{cases} (SAB) \perp (ABC) \\ (SAB) \cap (ABC) = AB \Rightarrow \begin{cases} CM \perp (SAB) \\ SM \perp (ABC) \end{cases} \\ CM \perp AB; SM \perp AB \end{cases}$$

Trong (SMC) từ G, H lần lượt kẻ các đường thẳng song song với SM, MC và cắt nhau tại I .

Khi đó I là tâm mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABC$.

Ta có

$$SI^2 = SH^2 + HI^2 = SH^2 + MG^2 = \left(\frac{2}{3}SM\right)^2 + \left(\frac{1}{3}SM\right)^2$$

$$= \frac{5}{9}SM^2 = \frac{5}{9} \cdot \frac{3}{4} = \frac{5}{12}$$

$$\Rightarrow V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot SI^3 = \frac{4}{3}\pi \left(\sqrt{\frac{5}{12}}\right)^3 = \frac{5\sqrt{15}\pi}{54}$$

(Với V là thể tích khối cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABC$)

Câu 45. Chọn C

Do AB và CD không bằng nhau nên hai đáy của hình thang là AB và CD . Gọi H là trung điểm của AB . Khi đó SH vuông góc với AB nên SH vuông góc với $(ABCD)$.

Gọi I là chân đường cao của hình thang $ABCD$ từ đỉnh C của hình thang $ABCD$.

$$\text{Ta có } BI = \frac{AB - CD}{2} = \frac{a}{2}$$

Do $\widehat{ABC} = 60^\circ$ nên $BC = a$. Từ đó ta có tam giác ABC vuông tại C .

Do đó SH chính là trục của tam giác ABC .

Mặt khác do tam giác SAB đều nên tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ chính là trọng tâm G của tam giác SAB .

$$\text{Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp } S.ABC \text{ là } R = \frac{AB\sqrt{3}}{3} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$$

Câu 46.

Gọi H là trung điểm của AD . Tam giác SAD đều và $(SAD) \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.

Ta có $AH = a, SH = a\sqrt{3}$ và tứ giác $ABCH$ là hình vuông cạnh $a \Rightarrow BH = a\sqrt{2}$.

Mặt khác $\begin{cases} AB \perp AD \\ AB \perp S \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SAD) \Rightarrow AB \perp SA$ hay $\widehat{SAB} = 90^\circ$ (1).

Chứng minh tương tự ta có $BC \perp SC$ hay $\widehat{SCB} = 90^\circ$ (2).

Từ (1) và (2) ta thấy hai đỉnh A và C của hình chóp $S.ABC$ cùng nhìn SB dưới một góc vuông. Do đó bốn điểm S, A, B, C cùng nằm trên mặt cầu đường kính SB .

Xét tam giác vuông SHB , ta có $SB = \sqrt{BH^2 + SH^2} = a\sqrt{5}$.

Vậy diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là $S = 4\pi \left(\frac{SB}{2}\right)^2 = 5\pi a^2$.

Câu 47.

Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta ABC \Rightarrow IA = IB = IC = R = \frac{AB}{2\sin 30^\circ} = a$.

Dựng đường thẳng d qua I và vuông góc với (ABC) .

Gọi M là trung điểm của AB .

Gọi G là trọng tâm $\Delta ABC \Rightarrow GA = GB = GC$

Kẻ đường thẳng đi qua G và vuông góc với (SAB) cắt d tại $O \Rightarrow OA = OB = OC = OS$.

Suy ra O là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ bán kính là $r = OA = OB = OC = OS$.

Khi đó $SM = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow GM = \frac{1}{3}SM = \frac{a\sqrt{3}}{6} = OI$.

$$r^2 = OB^2 = OI^2 + IB^2 = \frac{a^2}{12} + a^2 = \frac{13a^2}{12}.$$

Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là $S_{mc} = 4\pi.r^2 = 4\pi \frac{13a^2}{12} = \frac{13\pi a^2}{3}$.

Câu 48. Chọn C.

+) Xác định mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$

Gọi SH là đường cao của tam giác SAB . Vì SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy nên SH là đường cao của hình chóp $S.ABCD$.

Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$, từ O dựng $Ox \perp (ABCD)$.

Từ trọng tâm G của tam giác SAB dựng $Gy \perp (SAB)$.

Gọi $I = Ox \cap Gy$. Vậy I là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

+) Chứng minh I là tâm mặt cầu cần tìm

Vì $I \in Ox$, mà $Ox \perp (ABCD)$, O là tâm hình vuông $ABCD$ nên I cách đều A, B, C, D (1).

Mặt khác G là trọng tâm của tam giác đều SAB , $I \in Gy$, mà $Gy \perp (SAB)$ nên I cách đều S, A, B (2).

Từ (1) và (2) suy ra I cách đều S, A, B, C ,

D. Nên I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp

$S.ABCD$, bán kính $R = IB$

+) Tìm độ dài bán kính mặt cầu

Vì $OI \perp (ABCD)$, $SH \perp (ABCD)$ nên $OI \parallel GH$ vì $G \in SH$ (3)

Mặt khác $Gy \perp (SAB)$, $I \in Gy$ mà $OH \perp (SAB)$ (vì $OH \perp AB, OH \perp SH$) nên $GI \parallel OH$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $GHOI$ là hình bình hành $OI = GH = \frac{1}{3}SH = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Vì $OI \perp (ABCD) \Rightarrow OI \perp OB \Rightarrow \triangle BOI$ vuông tại B

Xét $\triangle BOI$ vuông tại B ta có

$$IB^2 = IO^2 + OB^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{7}{12}a^2 \Rightarrow IB = \frac{\sqrt{21}}{6}a = R.$$

$$\Rightarrow \text{Diện tích mặt cầu là } S = 4\pi R^2 = \frac{7}{3}\pi a^2.$$

Câu 49. Chọn A

*) Xác định tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$:

Gọi G là trọng tâm tam giác SAB , O là tâm của hình vuông $ABCD$, M là trung điểm của AB .

Do $\triangle SAB$ đều $\Rightarrow SM \perp AB$

Mà $(SAB) \perp (ABCD) \Rightarrow SM \perp (ABCD) \Rightarrow SM \perp OM$

OM là đường trung bình của $\triangle ABC \Rightarrow OM \parallel AD \Rightarrow OM \perp AB$ (do $AD \perp AB$)

$\Rightarrow OM \perp (SAB)$

Dựng các đường thẳng qua G, O lần lượt song song với MO, SM , hai đường thẳng này cắt nhau tại I

Ta có: $IO \parallel SM, SM \perp (ABCD) \Rightarrow IO \perp (ABCD)$, mà O là tâm của hình vuông $ABCD$

$$\Rightarrow IA = IB = IC = ID \quad (1)$$

Ta có: $GI \parallel OM, OM \perp (SAB) \Rightarrow GI \perp (SAB)$, mà G là trọng tâm tam giác đều SAB

$$\Rightarrow IS = IA = IB \quad (2)$$

Từ (1), (2) suy ra: I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

*) Tính bán kính, thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$:

Ta có: $OM = \frac{1}{2}AD = \frac{a}{2} \Rightarrow GI = OM = \frac{a}{2}$ (do tứ giác $OMIG$ là hình chữ nhật)

$$\triangle SAB \text{ đều cạnh bằng } a \text{ có } G \text{ là trọng tâm} \Rightarrow BG = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Do $GI \perp (SAB) \Rightarrow GI \perp BG \Rightarrow \triangle BGI$ vuông tại G

$$\Rightarrow IB = \sqrt{IG^2 + GB^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{3}} = a\sqrt{\frac{7}{12}}$$

$$\text{Bán kính khối cầu ngoại tiếp hình chóp } S.ABCD \text{ là: } R = IB = a\sqrt{\frac{7}{12}}$$

Thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ là:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot \left(a\sqrt{\frac{7}{12}}\right)^3 = \frac{7\sqrt{21}\pi a^3}{54}.$$

Câu 50. Chọn D

Gọi H là trung điểm $CD \Rightarrow BH \perp (ACD)$ và tam giác ACD vuông tại A .

$$\Rightarrow CD = \sqrt{CA^2 + AD^2} = a\sqrt{7} \text{ và } BH = \sqrt{BD^2 - HD^2} = \frac{3}{2}a.$$

Trong mặt phẳng (BHA) kẻ đường trung trực Δ của cạnh BA và gọi $I = \Delta \cap SH$

Khi đó ta có I là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

Ta có

$$\Delta BIK \sim \Delta BAH \Rightarrow BI = \frac{BK \cdot BA}{BH} = \frac{BA^2}{2BH} = \frac{4}{3}a.$$

Suy ra bán kính mặt cầu là $R = BI = \frac{4}{3}a$.

Vậy diện tích của mặt cầu là $S = 4\pi R^2 = \frac{64\pi a^2}{9}$.

Câu 51.

Gọi I, J là tâm đường tròn ngoại tiếp của tứ giác $ABCD$ và tam giác SAB . M là trung điểm của AB và O là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

Ta có: $JM \perp AB$ và $IM \perp AB$ và $mp(SAB) \perp mp(ABCD)$ nên $IM \perp JM$, ngoài ra O là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp nên $OI \perp (ABCD) \Rightarrow OI \perp IM$; $OJ \perp (SAB) \Rightarrow OJ \perp JM$.

Do đó O, J, M, I đồng phẳng và tứ giác $OJMI$ là hình chữ nhật (do có 3 góc ở đỉnh vuông).

Gọi R, R_b lần lượt là bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác SAB .

$$\text{Ta có: } R = SO = \sqrt{SJ^2 + OJ^2} = \sqrt{R_b^2 + IM^2} = \sqrt{R_b^2 + IA^2 - AM^2} = \sqrt{R_b^2 + IA^2 - \frac{AB^2}{4}}$$

$$\text{Áp dụng định lý Pytago: } IA^2 = \frac{BD^2}{4} = \frac{AB^2 + AD^2}{4} = \frac{a^2 + 3a^2}{4} = a^2 \Rightarrow IA = a.$$

$$\text{Áp dụng định lý sin trong tam giác } SAB: R_b = \frac{AB}{2 \sin \widehat{ASB}} = \frac{a}{2 \cdot \sin 60^\circ} = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

$$\text{Do đó: } R = \sqrt{\frac{a^2}{3} + a^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{13}{12}a^2} \Rightarrow S = 4\pi R^2 = \frac{13}{3}\pi a^2.$$

Nhận xét: Bài toán này áp dụng một bổ đề quan trọng sau:

Xét hình chóp đỉnh S , có mặt bên (SAB) vuông góc với mặt phẳng đáy, mặt phẳng đáy nội tiếp trong đường tròn bán kính R_d , bán kính mặt cầu ngoại tiếp tam giác SAB là R_b . Khi đó hình

chóp này nội tiếp trong 1 mặt cầu có bán kính $R = \sqrt{R_d^2 + R_b^2 - \frac{AB^2}{4}}$

Dạng 3.2.3 Khối chóp đều

Câu 52.

Gọi tứ diện đều là $ABCD$, O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD thì ta có $AO \perp (BCD)$. Trong mặt phẳng (AOD) dựng đường trung trực của AD cắt AO tại I , vậy I là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ với AI là bán kính.

Gọi E là trung điểm AD . Ta có $\triangle AEI \sim \triangle AOD \Rightarrow \frac{AO}{AE} = \frac{AD}{AI} \Rightarrow R = AI = \frac{AD \cdot AE}{AO} = \frac{AD^2}{2AO}$.

$$AO = \sqrt{AD^2 - DO^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow R = \frac{a^2}{2 \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{4}.$$

Công thức tính nhanh: Tứ diện đều $ABCD$ có: độ dài cạnh bên $AB = AC = AD = x$ và chiều cao h . Khi đó, bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ là $R = \frac{x^2}{2h}$.

Câu 53. Chọn C

Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$, G là trung điểm SD , $GI \perp SD, I \in SO$.

Ta có cạnh đáy bằng $3\sqrt{2}a$ nên $BD = 3\sqrt{2}a \cdot \sqrt{2} = 6a$, $OD = 3a$.

Xét $\triangle SOD$ vuông tại O ta có: $SO = \sqrt{SD^2 - OD^2} = 4a$

Ta có $\triangle SOD \sim \triangle SGI$, suy ra $\frac{SO}{SG} = \frac{SD}{SI} \Rightarrow 4a \cdot R = \frac{1}{2}(5a)^2 \Rightarrow R = \frac{25a}{8}$

Câu 54.

Gọi $O = AC \cap BD$; M là trung điểm SA .

Trong mặt phẳng (SAC) gọi I là giao điểm của trung trực đoạn SA với SO .

Khi đó I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

Tam giác SAO đồng dạng với tam giác SIM .

$$\Rightarrow \frac{SI}{SA} = \frac{SM}{AO} \Rightarrow R = SI = \frac{SM \cdot SA}{AO} = \frac{\frac{a}{2} \cdot a}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp là } S = 4\pi \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 2\pi a^2.$$

Cách 2:

Gọi $O = AC \cap BD$.

Vì $\triangle SBD = \triangle ABD$ nên $OS = OA$.

Mà $OA = OB = OC = OD \Rightarrow O$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

$$\text{Bán kính mặt cầu } R = OA = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp là $S = 4\pi \left(\frac{a\sqrt{2}}{2} \right)^2 = 2\pi a^2$.

Câu 55.

Lời giải

Gọi các điểm như hình vẽ.

Ta có $SI = a\sqrt{3}$. Góc $SMO = 60^\circ$.

Gọi cạnh đáy bằng x thì $SO = OM \cdot \tan 60^\circ = \frac{x\sqrt{3}}{2}$.

$$SA = \sqrt{SO^2 + AO^2} = \frac{x\sqrt{5}}{2}$$

$$\triangle SNI \sim \triangle SOA \text{ nên } \frac{SN}{SI} = \frac{SO}{SA} \Leftrightarrow \frac{5x^2}{8} = \frac{3a \cdot x}{2} \Leftrightarrow x = \frac{12}{5}a (x > 0)$$

Câu 56. Chọn B

Gọi M là trung điểm của BC , H là trọng tâm tam giác ABC

Khi đó $SH \perp (ABC) \Rightarrow (\widehat{SBC}, (\widehat{ABC})) = \widehat{SMA} = 60^\circ$

Gọi N là trung điểm của SA , kẻ $NI \perp SA (I \in SH)$

Khi đó ta có $IS = IA = IB = IC$, nên I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$

$$\triangle ABC \text{ đều cạnh } a \text{ nên } AM = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow HM = \frac{a\sqrt{3}}{6}, AH = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

$$\tan \widehat{SMA} = \frac{SH}{HM} \Rightarrow SH = \frac{a\sqrt{3}}{6} \cdot \sqrt{3} = \frac{1}{2}a$$

$$SA^2 = SH^2 + AH^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{3} = \frac{7a^2}{12}$$

$$\triangle SAH \sim \triangle SIN \Rightarrow \frac{SA}{SI} = \frac{SH}{SN} \Rightarrow SI = \frac{SA \cdot SN}{SH} = \frac{SA^2}{2SH} = \frac{7a^2}{12 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2}a} = \frac{7a}{12}.$$

Câu 57. Chọn A

Gọi M là trung điểm $BC \Rightarrow (\widehat{SBC}, (\widehat{ABCD})) = \widehat{SMO} = 60^\circ$.

Gọi N là trung điểm SA , dựng mp trung trực của SA , cắt SO tại $I \Rightarrow I$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

$$\Rightarrow R = IA = IS = a\sqrt{3}$$

Gọi $AB = x$

$$\text{Có } SO = OM \cdot \tan 60^\circ = \frac{x\sqrt{3}}{2}, OA = \frac{1}{2}AC = \frac{x\sqrt{2}}{2}, SA = \sqrt{SO^2 + OA^2} = \frac{x\sqrt{5}}{2}$$

$$\triangle SNI \text{ đồng dạng } \triangle SOA \Rightarrow SN \cdot SA = SO \cdot SI$$

$$\Leftrightarrow \frac{x\sqrt{5}}{4} \cdot \frac{x\sqrt{5}}{2} = \frac{x\sqrt{3}}{2} \cdot a\sqrt{3} \Leftrightarrow x = \frac{12a}{5}.$$

Dạng 3.2.4 Khối chóp khác

Câu 58.

Gọi H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC , khi đó $SH \perp (ABC)$ và SH là trục đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy.

Góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC) là $\widehat{SAH} = 60^\circ$.

Gọi N là trung điểm SA , mặt phẳng trung trực của cạnh SA cắt SH tại O . Khi đó $OS = OA = OB = OC$ nên O là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

Khi đó bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $AH = \frac{BC}{2 \sin 30^\circ} = a$.

$$SH = AH \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3}, \quad SA = \sqrt{SH^2 + AH^2} = 2a.$$

$$\text{Bán kính mặt cầu là } R = SO = \frac{SN \cdot SA}{SH} = \frac{SA^2}{2SH} = \frac{2\sqrt{3}}{3}a.$$

$$\text{Thể tích của khối cầu tâm } O \text{ là } V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{32\sqrt{3}}{27}\pi a^3.$$

Câu 59. Chọn D

Ta có $SM = AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $SA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, do đó tam giác SAM đều.

Gọi M là trung điểm đoạn BC . Ta có (SAM) là mặt phẳng trung trực đoạn BC .

Gọi G là trọng tâm tam giác SBC , Δ là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác SBC .

Gọi E là trung điểm SA , ta có $I = \Delta \cap EM$, khi đó I là tâm đường tròn ngoại tiếp $S.ABC$.

$$IG = GM \cdot \tan 30^\circ = \frac{a}{6}, \quad SG = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{Do đó } R = SI = \sqrt{IG^2 + GS^2} = \sqrt{\frac{a^2}{36} + \frac{a^2}{36}} \Rightarrow R = \frac{a\sqrt{13}}{6}.$$

Câu 60. Chọn C

Theo giả thiết ta có: $\begin{cases} SA \perp SB \\ SA \perp SC \end{cases} \Rightarrow SA \perp (SBC); \Delta SBC \text{ có } SB = SC = a, \widehat{BSC} = 60^\circ \Rightarrow \Delta SBC \text{ đều.}$

Gọi M là trung điểm của BC .

Gọi G là trọng tâm của tam giác $SBC \Rightarrow G$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác SBC .

+ Dựng đường thẳng Δ đi qua G và vuông góc với (SBC) thì Δ là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác SBC .

+ Dựng mặt phẳng (α) là mặt phẳng trung trực của cạnh bên SA .

+ Gọi I là giao điểm của Δ và (α) . Khi đó: $\begin{cases} I \in \Delta \Rightarrow IB = IS = IC \\ I \in (\alpha) \Rightarrow IS = IA \end{cases} \Rightarrow IA = IS = IB = IC \text{ hay } I$

là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $A.SBC$ và bán kính của mặt cầu này là $R = IS$.

Ta có tứ giác $SNIG$ là hình chữ nhật nên $IG = NS = \frac{SA}{2} = \frac{a}{2}$.

Lại có: $SG = \frac{2}{3} \cdot SM = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Xét $\triangle SGI$ vuông tại G ta có: $R^2 = IS^2 = IG^2 + SG^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{21a^2}{36}$.

Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp là: $S_{mc} = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot \frac{21a^2}{36} = \frac{7\pi a^2}{3}$.

Chú ý: Trên đây là lời giải đã được thực hiện bằng phương pháp đổi đỉnh dựa trên yếu tố đặc biệt của bài toán để từ đó có những tính toán đơn giản hơn, tuy nhiên với giả thiết có quá nhiều sự đặc biệt như đề bài thì học sinh vẫn không cần đổi đỉnh mà vẫn tính toán tốt. Học sinh chỉ cần chú ý dữ kiện $SA = SB = SC$ sẽ cho ta được hình chiếu vuông góc của đỉnh S xuống mặt phẳng đáy chính là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Mời các em tìm hiểu và tìm tòi lời giải.

Câu 61.

Gọi I là tâm mặt cầu nội tiếp hình chóp $S.ABCD$ và r là bán kính mặt cầu nội tiếp hình chóp $S.ABCD$.

Ta có $d(I, (ABCD)) = d(I, (SAD)) = d(I, (SAB)) = d(I, (SBC)) = d(I, (SCD)) = r$

Mặt khác, ta lại có: $V_{S.ABCD} = V_{I.ABCD} + V_{I.SAD} + V_{I.SAB} + V_{I.SBC} + V_{I.SCD}$ (*)

$V_{S.ABCD} = r \cdot S_{ABCD} + r \cdot S_{\triangle SAD} + r \cdot S_{\triangle SAB} + r \cdot S_{\triangle SBC} + r \cdot S_{\triangle SCD}$ (*)

Suy ra $r = \frac{3V_{S.ABCD}}{S_{ABCD} + S_{\triangle SAD} + S_{\triangle SAB} + S_{\triangle SBC} + S_{\triangle SCD}}$.

Ta tính được thể tích khối tứ diện đều là $V_{S.ABCD} = \frac{a^3}{3}$.

Từ H ta dựng đường thẳng song song với AB cắt BC, AD lần lượt tại I và J

Từ H ta dựng đường thẳng song song với AD cắt AB, CD lần lượt tại M và N .

Ta có $HI = HN = \frac{3a}{4}$ và $HM = HJ = \frac{a}{4}$

Suy ra $SI = SN = \frac{5a}{4}$ và $SM = SI = \frac{\sqrt{17}a}{4}$

Do đó $S_{\triangle SBC} = S_{\triangle SCD} = \frac{5a^2}{8}$ và $S_{\triangle SAD} = S_{\triangle SAB} = \frac{\sqrt{17}a^2}{8}$

Do đó, từ (*) ta suy ra: $r = \frac{9 - \sqrt{17}}{16}a = \frac{4a}{9 + \sqrt{17}}$.

Câu 62.

Gọi O là hình chiếu vuông góc của điểm S xuống mặt phẳng đáy. Ta có $\triangle SBO = \triangle SDO$ nên $SD = SB$. Chứng minh tương tự, $SC = SA$, hay O là tâm của hình chữ nhật $ABCD$. Do tam giác

SAC đều nên $SA = SC = AC = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 5$. Trong mặt phẳng (SAC) kẻ đường trung trực

của cạnh SA đi qua trung điểm K và cắt SO tại điểm I . Suy ra $R = SI = \frac{SA^2}{2 \cdot SO} = \frac{25}{5\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$.

$$\text{Suy ra, } V = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \pi \left(\frac{5\sqrt{3}}{3} \right)^3 = \frac{500\sqrt{3}}{27} \pi.$$

Câu 63.

+ Gọi M, N lần lượt là trung điểm AB, CD . Kẻ $SH \perp MN$ tại $H \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.

$$\Rightarrow SM = \frac{a\sqrt{3}}{2}; SN = \frac{a}{2}; MN = a \Rightarrow \triangle SMN \text{ vuông tại } S \Rightarrow SH = \frac{a\sqrt{3}}{4}, OH = \frac{a}{4}.$$

+ Gọi I, J là hình chiếu vuông góc của H lên $OC, OD \Rightarrow OI = OJ = \frac{a\sqrt{2}}{8}$.

+ Gọi $O = AC \cap BD$. Qua O dựng đường thẳng $\Delta \perp (ABCD)$.

Cách 1:

+ Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho: $A\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}; 0; 0\right) \in Ox$, $B\left(0; \frac{a\sqrt{2}}{2}; 0\right) \in Oy$ và $\Delta \equiv Oz$.

$$\Rightarrow C\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2}; 0; 0\right), S\left(\frac{-a\sqrt{2}}{8}; \frac{-a\sqrt{2}}{8}; \frac{a\sqrt{3}}{4}\right)$$

+ Mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ là mặt cầu đi qua 4 điểm S, A, B, C

$$\text{Suy ra phương trình mặt cầu là: } x^2 + y^2 + z^2 + \frac{\sqrt{3}a}{3}z - \frac{a^2}{2} = 0.$$

$$\Rightarrow r = \frac{a\sqrt{21}}{6} \Rightarrow S = 4\pi r^2 = \frac{7\pi a^2}{3}.$$

Cách 2:

Trên 2 tia OM, ON lấy hai điểm P, P' sao cho $OP = OP' = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow PP' = a\sqrt{2}$.

$$+ SP = \sqrt{SH^2 + HP^2} = \frac{a\sqrt{3+\sqrt{2}}}{2}; SP' = \sqrt{SH^2 + HP'^2} = \frac{a\sqrt{3-\sqrt{2}}}{2}.$$

$$+ \text{Trong tam giác } SPP' \text{ có: } S_{\triangle SPP'} = \frac{1}{2} PP' \cdot SH = \frac{SP \cdot SP' \cdot PP'}{4 \cdot R} \Rightarrow R = \frac{SP \cdot SP'}{2 \cdot SH} = \frac{a\sqrt{21}}{6}.$$

$$\text{Vậy diện tích mặt cầu là: } S = 4\pi R^2 = \frac{7\pi a^2}{3}$$

Câu 64.

Gọi E là trung điểm của ID , F là trung điểm của SB . Trong mặt phẳng (SBD) , vẽ IT song song với SE và cắt EF tại T .

Ta có $SE \perp (ABCD)$, suy ra $\widehat{SBE} = [SB; (ABCD)] = 45^\circ$. Suy ra $\triangle SBE$ vuông cân tại E . Suy ra EF là trung trực của SB . Suy ra $TS = TB$. (1)

Ta có $IT \parallel SE$, suy ra $IT \perp (ABCD)$. Suy ra IT là trục đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật $ABCD$. Suy ra $TA = TB = TC = TD$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra T là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

Do $ABCD$ là hình chữ nhật nên $BD = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 5a$, suy ra $IB = ID = \frac{5}{2}a$.

Do E là trung điểm của ID nên $IE = \frac{1}{2}ID = \frac{5}{4}a$.

$\triangle BEF$ vuông tại F có $\widehat{EBF} = 45^\circ$ nên $\triangle BEF$ vuông cân tại F .

$\triangle EIT$ vuông tại I có $\widehat{IET} = 45^\circ$ nên $\triangle EIT$ vuông cân tại I . Suy ra $IT = IE = \frac{5}{4}a$.

Do $\triangle BIT$ vuông tại I nên $TB = \sqrt{IB^2 + IT^2} = \frac{5\sqrt{5}}{4}a$.

Vậy diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ là $S = 4\pi TB^2 = \frac{125\pi}{4}a^2$.

Câu 65.

Gọi M, N, I lần lượt là trung điểm của AB, CD và MN .

Ta có $\triangle ACD = \triangle BCD \Rightarrow AN = BN \Rightarrow \triangle ABN$ cân tại N , mà AM là đường trung tuyến

$\Rightarrow AM$ là đường trung trực của $AB \Rightarrow IA = IB = \frac{MN}{2}$ (1).

Chứng minh tương tự ta có $\Rightarrow IC = ID = \frac{MN}{2}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra I là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

Áp dụng công thức trung tuyến cho tam giác ACD ta có $AN^2 = \frac{36+25}{2} - \frac{9}{4} = \frac{113}{4}$.

Xét tam giác vuông AMI có: $AI^2 = AM^2 + MI^2 = AM^2 + \frac{MN^2}{4} = AN^2 - MN^2 + \frac{MN^2}{4}$

$$= AN^2 - \frac{3MN^2}{4} = AN^2 - \frac{3}{4}(AN^2 - AM^2) = \frac{1}{4}(AN^2 + 3AM^2) = \frac{1}{4}\left(\frac{113}{4} + 3 \cdot \frac{9}{4}\right) = \frac{35}{4}.$$

Suy ra bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ là $R = AI = \frac{\sqrt{35}}{2}$.

Vậy thể tích khối cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ là: $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{35\sqrt{35}}{6}\pi$.

Câu 66. Chọn A

* Gọi J là tâm mặt cầu qua đường tròn tâm O và điểm $S \Rightarrow J$ nằm trên đường trung trực của AB và SA .

$$* \triangle SIA \text{ vuông tại } I \Rightarrow \begin{cases} SA = \sqrt{a^2 + 4a^2} = a\sqrt{5} \Rightarrow AK = \frac{a\sqrt{5}}{2} \\ \sin S = \frac{AI}{SA} = \frac{1}{\sqrt{5}}; \tan S = \frac{AI}{SI} = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

*Ta có: Góc N và S bằng nhau vì cùng phụ với góc $\widehat{SAN}$.

$$\begin{aligned}
 * \Delta AKN \text{ vuông tại } K &\Rightarrow \sin N = \frac{AK}{AN} \Leftrightarrow \frac{\frac{a\sqrt{5}}{2}}{AN} = \sin S = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow AN = \frac{5a}{2} \Rightarrow ON = \frac{7a}{2}. \\
 * \Delta OJN \text{ vuông tại } O &\Rightarrow \frac{OJ}{ON} = \tan N = \tan S = \frac{1}{2} \Rightarrow OJ = \frac{7a}{4}. \\
 * \Delta OAJ \text{ vuông tại } O &\Rightarrow R = JA = \sqrt{OJ^2 + OA^2} = \frac{a\sqrt{65}}{4}.
 \end{aligned}$$

Cách 2

Gắn hệ trục tọa độ Ixy sao cho A, B, O thuộc tia Ix, S thuộc tia Iy và giả sử $a = 1$.

Khi đó: $A(1;0); S(0;2); B(3;0)$.

Gọi $(C): x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ là đường tròn tâm J qua 3 điểm A, S, B

$$\Rightarrow \begin{cases} -2a + c = -1 \\ -6a + c = -9 \\ -4b + c = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = \frac{7}{4} \\ c = 3 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra: } J\left(2; \frac{7}{4}\right) \Rightarrow R = JA = \frac{\sqrt{65}}{4} \text{ Vậy } R = \frac{a\sqrt{65}}{4}.$$

Câu 67.

Gọi I, H lần lượt là trung điểm của cạnh SB và AC

Mặt khác, theo giả thiết ta có $\Delta SAB, \Delta SCB$ lần lượt là các tam giác vuông tại A và C

$$\Rightarrow IA = IB = IC = IS$$

$\Rightarrow I$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$

Mặt khác: ΔABC vuông tại $B \Rightarrow H$ là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC

$$\Rightarrow IH \perp (ABC)$$

$$\text{Ta có: } \frac{d(A; (SBC))}{d(H; (SBC))} = \frac{AC}{HC} = 2 \Rightarrow d(H; (SBC)) = a\sqrt{3}$$

Gọi K là trung điểm của cạnh $BC \Rightarrow HK \perp BC (HK // AB, AB \perp BC)$

$$\text{Lại có: } BC \perp IH (IH \perp (ABC)) \Rightarrow BC \perp (IHK)$$

Mặt khác: $BC \subset (SBC) \Rightarrow (SBC) \perp (IHK)$ theo giao tuyến IK

$$\text{Trong } (IHK), \text{ gọi } HP \perp IK \Rightarrow HP \perp (SBC) \text{ tại } P \Rightarrow HP = d(H; (SBC)) = a\sqrt{3}$$

$$\text{Xét } \Delta IHK: \frac{1}{HP^2} = \frac{1}{HI^2} + \frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HI^2} + \frac{1}{\frac{AB^2}{4}} \Rightarrow HI = 3a$$

$$\text{Xét } \Delta IHB: IB = \sqrt{IH^2 + HB^2} = 3a\sqrt{2} = R. \text{ Vậy } V = \frac{4}{3}\pi R^3 = 24\sqrt{18}\pi a^3$$

Câu 68.

Xét ΔAOB đều nên cạnh $AB = a$.

Xét ΔBOC vuông tại O nên $BC = a\sqrt{2}$.

Xét $\triangle AOC$ có $AC = \sqrt{AO^2 + CO^2 - 2 \cdot AO \cdot CO \cdot \cos 120^\circ} = a\sqrt{3}$.

Xét $\triangle ABC$ có $AB^2 + BC^2 = AC^2$ nên tam giác ABC vuông tại $B \Rightarrow$ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác là trung điểm H của cạnh AC .

Lại có hình chóp $O.ABC$ có $OA = OB = OC = a$ nên $OH \perp (ABC)$.

Xét hình chóp $S.ABC$ có OH là trục đường tròn ngoại tiếp đáy, trong tam giác OHB kẻ trung trực của cạnh SB cắt OH tại I thì I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp, bán kính $R = IS$.

Xét $\triangle OHB$ có $\widehat{HOB} = 60^\circ$, cạnh $OB = a \Rightarrow OE = \frac{3a}{4}$.

$$\Rightarrow IE = OE \cdot \tan 60^\circ = \frac{3a\sqrt{3}}{4}.$$

Xét $\triangle IES$ vuông tại E : $IS = \sqrt{IE^2 + ES^2} = \sqrt{\left(\frac{3a\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \left(\frac{a}{4}\right)^2} = \frac{a\sqrt{7}}{2}$.

Câu 69.

Gọi E, F thứ tự là trung điểm của AB, CD . Coi $a = 1$, từ giả thiết ta có

$AC = AD = BC = BD = \sqrt{74}$ nên $AF \perp CD, BF \perp CD \Rightarrow (ABF) \perp CD \Rightarrow EF \perp CD$. Chứng minh tương tự $EF \perp AB$.

Khi đó EF là đường trung trực của CD và AB . Gọi I là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ ta có $IA = IB = IC = ID = R$ nên I thuộc đoạn thẳng EF .

$$EF = \sqrt{AF^2 - AE^2} = \sqrt{AD^2 - DF^2 - AE^2} = \sqrt{74 - 16 - 9} = 7.$$

Đặt $EI = x \Rightarrow FI = 7 - x$ (với $0 < x < 7$).

$$\begin{cases} IA = \sqrt{EA^2 + EI^2} = \sqrt{x^2 + 9} \\ ID = \sqrt{FI^2 + FD^2} = \sqrt{16 + (7 - x)^2} = \sqrt{x^2 - 14x + 65} \end{cases}$$

$$\text{Ta có } IA = ID \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 9} = \sqrt{x^2 - 14x + 65} \Leftrightarrow 9 = -14x + 65 \Leftrightarrow x = 4$$

Khi đó $IA = \sqrt{x^2 + 9} = 5$. Do đó bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện là $R = 5a$.

Vậy diện tích mặt cầu ngoại tiếp tứ diện là $S = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot 25a^2 = 100\pi a^2$.

Dạng 4. Bài toán thực tế, cực trị

Câu 70. Diện tích nhôm cần dùng để sản xuất là diện tích toàn phần S

$$\text{Ta có } l = h; \text{ mà } V = 28\pi a^3 \Leftrightarrow \pi R^2 h = 28\pi a^3 \Leftrightarrow h = \frac{28a^3}{R^2}$$

$$S = 2\pi Rl + 2\pi R^2 = 2\pi \frac{28a^3}{R} + 2\pi R^2 \text{ với } R > 0$$

$$S' = 2\pi \left(-\frac{28a^3}{R^2} + 2R \right) = 0 \Leftrightarrow R = a\sqrt[3]{14}$$

Bảng biến thiên

$$\text{Vậy } S_{\min} \Leftrightarrow R = a\sqrt[3]{14}$$

Câu 71. Chọn D

Xét hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ nội tiếp mặt cầu có tâm I và bán kính $R = 9$.

Gọi $H = AC \cap BD$, K là trung điểm SC .

Đặt $AB = x$; $SH = h$, $(x, h > 0)$.

$$\text{Ta có } HC = \frac{x}{\sqrt{2}} \Rightarrow l = SC = \sqrt{h^2 + \frac{x^2}{2}}.$$

$$\text{Do } \triangle SHI \sim \triangle SHC \Rightarrow \frac{SK}{SH} = \frac{SI}{SC} \Rightarrow l^2 = 2h.R \Rightarrow x^2 = 36h - 2h^2.$$

$$\text{Diện tích đáy của hình chóp } S_{ABCD} = x^2 \text{ nên } V = \frac{1}{3}h.x^2 = \frac{1}{3}h(36h - 2h^2).$$

$$\text{Ta có } \frac{1}{3}h(36h - 2h^2) = \frac{1}{3}.h.h(36 - 2h) \leq \frac{1}{3} \left(\frac{h + h + 36 - 2h}{3} \right)^3 = 576 \Rightarrow V \leq 576, \text{ dấu bằng xảy ra}$$

khi $h = 36 - 2h \Leftrightarrow h = 12, x = 12$. Vậy $V_{\max} = 576$.

Câu 72.

Giả sử khối chóp $S.ABCD$ là khối chóp tứ giác đều nội tiếp mặt cầu có bán kính bằng 9.

Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$ thì $SO \perp (ABCD)$. M là trung điểm của SA , kẻ MI vuông góc với SA và cắt SO tại I thì I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$, bán kính của mặt cầu là $IA = IS = 9$.

Đặt $IO = x$, $0 \leq x \leq 9$, do $\triangle IAO$ vuông tại O nên $AO = \sqrt{AI^2 - IO^2} = \sqrt{81 - x^2}$, suy ra

$$AC = 2\sqrt{81 - x^2}.$$

Do tứ giác $ABCD$ là hình vuông nên $AB = \frac{AC}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{81 - x^2}$, suy ra $S_{\square ABCD} = AB^2 = 2(81 - x^2)$.

$$\text{Vậy } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}S_{\square ABCD}.SO = \frac{2}{3}(81 - x^2).(9 + x) = \frac{2}{3}(-x^3 - 9x^2 + 81x + 729).$$

Xét hàm số $f(x) = \frac{2}{3}(-x^3 - 9x^2 + 81x + 729)$ với $x \in [0; 9]$.

$$f'(x) = 2(-x^2 - 6x + 27); f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -9 \end{cases}$$

Bảng biến thiên :

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy : $\max_{x \in [0; 9]} f(x) = f(3) = 576$.

Vậy khối chóp có thể tích lớn nhất bằng 576.

Câu 73.

Bốn điểm O, A, B, C tạo thành 1 tam diện vuông.

$$\text{Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện } O.ABC \text{ là } R = \frac{\sqrt{OA^2 + OB^2 + OC^2}}{2}.$$

Đặt $OA = a; OB = b, a, b > 0$. Ta có $a + b = 1 \Leftrightarrow b = 1 - a$.

$$\begin{aligned} \text{Vậy } R &= \frac{\sqrt{OA^2 + OB^2 + OC^2}}{2} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + 1^2}}{2} = \frac{\sqrt{a^2 + (1-a)^2 + 1^2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2\left(\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right)}}{2} \geq \frac{\sqrt{6}}{4}. \end{aligned}$$

Vậy $R_{\min} = \frac{\sqrt{6}}{4}$, tại $a = b = \frac{1}{2}$.

Câu 74. Chọn D

Gọi O là giao điểm của AC và BD .

Ta có ΔSAC cân tại S nên $SO \perp AC$ và ΔSBD cân tại S nên $SO \perp BD$.

Khi đó $SO \perp (ABCD)$.

Ta có: $\Delta SAO = \Delta SBO = \Delta SCO = \Delta SDO \Rightarrow OA = OB = OC = OD$

Vậy hình bình hành $ABCD$ là hình chữ nhật.

$$\text{Đặt } BC = x \Rightarrow AC = \sqrt{4^2 + x^2} \Rightarrow AO = \frac{AC}{2} = \frac{\sqrt{16 + x^2}}{2}.$$

$$\text{Xét } \Delta SAO \text{ vuông tại } O, \text{ ta có: } SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{6 - \frac{16 + x^2}{4}} = \frac{\sqrt{8 - x^2}}{2}$$

$$\text{Thể tích khối chóp } S.ABCD \text{ là: } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SO.S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{8 - x^2}}{2} \cdot 4x = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{8 - x^2} \cdot x$$

$$\text{Áp dụng bất đẳng thức: } ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2} \text{ ta có: } V = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{8 - x^2} \cdot x \leq \frac{2}{3} \cdot \frac{8 - x^2 + x^2}{2} = \frac{8}{3}.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \sqrt{8 - x^2} = x \Leftrightarrow x = 2$. Do đó: $BC = 2, SO = 1$.

Gọi M là trung điểm của SA , trong (SAO) kẻ đường trung trực của SA cắt SO tại I .

Khi đó mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABCD$ có tâm I và bán kính $R = IS$.

$$\text{Vì } \Delta SMI \sim \Delta SOA(g.g) \text{ nên } \frac{SI}{SA} = \frac{SM}{SO} \Rightarrow SI = \frac{SA^2}{2 \cdot SO} = \frac{6}{2 \cdot 1} = 3 \Rightarrow R = 3(cm).$$

Diện tích mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABCD$ là: $4\pi R^2 = 4\pi \cdot 3^2 = 36\pi (cm^2)$.

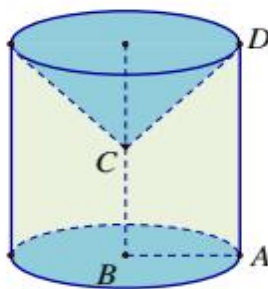
MỤC LỤC

PHẦN A. CÂU HỎI..... 1

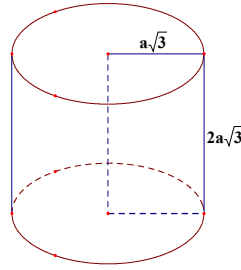
PHẦN B. ĐÁP ÁN THAM KHẢO 9

PHẦN A. CÂU HỎI

- Câu 1.** (THPT BẠCH ĐẲNG QUẢNG NINH NĂM 2018-2019) Cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và B với $AB = BC = \frac{AD}{2} = a$. Quay hình thang và miền trong của nó quanh đường thẳng chứa cạnh BC . Tính thể tích V của khối tròn xoay được tạo thành.



- A. $V = \frac{4\pi a^3}{3}$. B. $V = \frac{5\pi a^3}{3}$. C. $V = \pi a^3$. D. $V = \frac{7\pi a^3}{3}$.
- Câu 2.** (THPT GIA LỘC HẢI DƯƠNG NĂM 2018-2019 LẦN 01) Một hình nón có chiều cao 9 (cm) nội tiếp trong một hình cầu có bán kính 5 (cm). Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích của khối nón và khối cầu. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.
- A. $\frac{81}{125}$. B. $\frac{81}{500}$. C. $\frac{27}{125}$. D. $\frac{27}{500}$.
- Câu 3.** (SỞ GD&ĐT NINH BÌNH LẦN 01 NĂM 2018-2019) Một khối gỗ hình trụ tròn xoay có bán kính đáy bằng 1, chiều cao bằng 2. Người ta khoét từ hai đầu khối gỗ hai nửa khối cầu mà đường tròn đáy của khối gỗ là đường tròn lớn của mỗi nửa khối cầu. Tỉ số thể tích phần còn lại của khối gỗ và cả khối gỗ ban đầu là
- A. $\frac{2}{3}$. B. $\frac{1}{4}$. C. $\frac{1}{3}$. D. $\frac{1}{2}$.
- Câu 4.** (CHUYÊN LAM SƠN THANH HÓA LẦN 2 NĂM 2018-2019) Một khối trụ bán kính đáy là $a\sqrt{3}$, chiều cao là $2a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối cầu ngoại tiếp khối trụ.



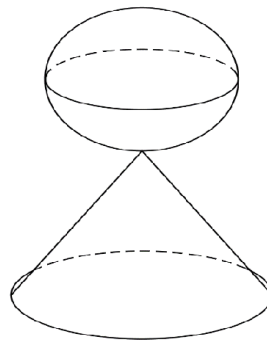
A. $8\sqrt{6}\pi a^3$.

B. $6\sqrt{6}\pi a^3$.

C. $4\sqrt{3}\pi a^3$.

D. $\frac{4\sqrt{6}}{3}\pi a^3$.

- Câu 5. (THPT CHUYÊN THÁI NGUYÊN LẦN 01 NĂM 2018-2019) Một khối cầu pha lê gồm một hình cầu (H_1) bán kính R và một hình nón (H_2) có bán kính đáy và đường sinh lần lượt là r, l thỏa mãn $r = \frac{1}{2}l$ và $l = \frac{3}{2}R$ xếp chồng lên nhau (hình vẽ). Biết tổng diện tích mặt cầu (H_1) và diện tích toàn phần của hình nón (H_2) là 91cm^2 . Tính diện tích của mặt cầu (H_1)



A. $\frac{104}{5}\text{cm}^2$

B. 16cm^2

C. 64cm^2

D. $\frac{26}{5}\text{cm}^2$

- Câu 6. (KTNL GV THUẬN THÀNH 2 BẮC NINH NĂM 2018-2019) Cho hình thang cân $ABCD$ có đáy nhỏ $AB = 1$, đáy lớn $CD = 3$, cạnh bên $BC = DA = \sqrt{2}$. Cho hình thang đó quay quanh AB thì được vật tròn xoay có thể tích bằng

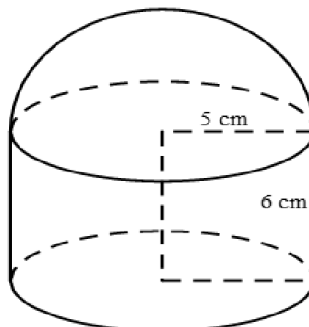
A. $\frac{5}{3}\pi$.

B. $\frac{4}{3}\pi$.

C. $\frac{7}{3}\pi$.

D. $\frac{2}{3}\pi$.

- Câu 7. (SỞ GD&ĐT THANH HÓA NĂM 2018 - 2019) Một hộp đựng mỹ phẩm được thiết kế (tham khảo hình vẽ) có thân hộp là hình trụ có bán kính hình tròn đáy $r = 5\text{cm}$, chiều cao $h = 6\text{cm}$ và nắp hộp là một nửa hình cầu. Người ta cần sơn mặt ngoài của cái hộp đó (không sơn đáy) thì diện tích S cần sơn là



A. $S = 110\pi \text{ cm}^2$.

B. $S = 130\pi \text{ cm}^2$.

C. $S = 160\pi \text{ cm}^2$.

D. $S = 80\pi \text{ cm}^2$.

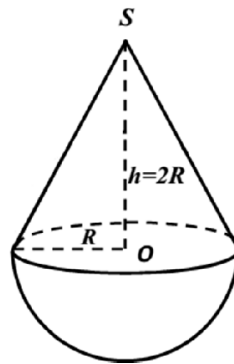
Câu 8. (THPT BẠCH ĐẰNG QUẢNG NINH NĂM 2018-2019) Cho hình trụ có hai đáy là hai hình tròn (O) và (O') chiều cao $R\sqrt{3}$ và bán kính R . Một hình nón đỉnh O' và đáy là hình tròn $(O; R)$. Tỷ lệ thể tích xung quanh của hình trụ và hình nón bằng.

- A. 3 B. $\sqrt{2}$ C. 2 D. $\sqrt{3}$

Câu 9. (ĐỀ HỌC SINH GIỎI TỈNH BẮC NINH NĂM 2018-2019) Cho hình trụ có bán kính đáy r , gọi O và O' là tâm của hai đường tròn đáy với $OO' = 2r$. Một mặt cầu tiếp xúc với hai đáy của hình trụ tại O và O' . Gọi V_C và V_T lần lượt là thể tích của khối cầu và khối trụ. Khi đó $\frac{V_C}{V_T}$ bằng

- A. $\frac{3}{5}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{2}{3}$

Câu 10. (SỞ GD&ĐT BÌNH PHƯỚC NĂM 2018-2019 LẦN 01) Một đồ vật được thiết kế bởi một nửa khối cầu và một khối nón úp vào nhau sao cho đáy của khối nón và thiết diện của nửa mặt cầu chồng khít lên nhau như hình vẽ bên. Biết khối nón có đường cao gấp đôi bán kính đáy, thể tích của toàn bộ khối đồ vật bằng $36\pi \text{ cm}^3$. Diện tích bề mặt của toàn bộ đồ vật đó bằng

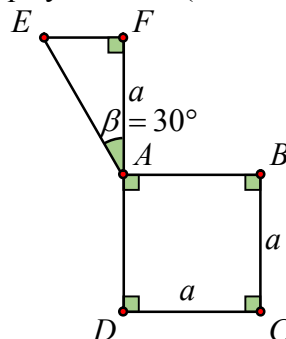


- A. $\pi(\sqrt{5} + 3) \text{ cm}^2$ B. $9\pi(\sqrt{5} + 2) \text{ cm}^2$
C. $9\pi(\sqrt{5} + 3) \text{ cm}^2$ D. $\pi(\sqrt{5} + 2) \text{ cm}^2$

Câu 11. (SỞ GD&ĐT HÀ NỘI NĂM 2018-2019) Cho khối cầu (S) có bán kính R . Một khối trụ có thể tích bằng $\frac{4\pi\sqrt{3}}{9}R^3$ và nội tiếp khối cầu (S) . Chiều cao của khối trụ bằng

- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}R$ B. $R\sqrt{2}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}R$ D. $\frac{2\sqrt{3}}{3}R$

Câu 12. Tính thể tích của vật thể tròn xoay khi quay mô hình (như hình vẽ) quanh trục DF .



A. $\frac{10\pi}{7}a^3$.

B. $\frac{\pi}{3}a^3$.

C. $\frac{5\pi}{2}a^3$.

D. $\frac{10\pi}{9}a^3$.

Câu 13. (SỞ GD&ĐT NINH BÌNH LẦN 01 NĂM 2018-2019) Cho mặt cầu (S) tâm O , bán kính bằng 2. (P) là mặt phẳng cách O một khoảng bằng 1 và cắt (S) theo một đường tròn (C) . Hình nón (N) có đáy là (C) , đỉnh thuộc (S) , đỉnh cách (P) một khoảng lớn hơn 2. Kí hiệu V_1, V_2 lần lượt là thể tích của khối cầu (S) và khối nón (N) . Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ là

A. $\frac{1}{3}$.

B. $\frac{2}{3}$.

C. $\frac{16}{9}$.

D. $\frac{32}{9}$.

Câu 14. (MĐ 104 BGD&ĐT NĂM 2017) Cho mặt cầu (S) tâm O , bán kính $R=3$. Mặt phẳng (P) cách O một khoảng bằng 1 và cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn (C) có tâm H . Gọi T là giao điểm của tia HO với (S) , tính thể tích V của khối nón có đỉnh T và đáy là hình tròn (C) .

A. $V = \frac{32\pi}{3}$

B. $V = 16\pi$

C. $V = \frac{16\pi}{3}$

D. $V = 32\pi$

Câu 15. (PEN I - THẦY LÊ ANH TUẤN - ĐỀ 3 - NĂM 2019) Một hình trụ có hai đường tròn đáy nằm trên một mặt cầu bán kính R và có đường cao bằng bán kính mặt cầu. Diện tích toàn phần của hình trụ đó bằng

A. $\frac{(3+2\sqrt{3})\pi R^2}{3}$.

B. $\frac{(3+2\sqrt{3})\pi R^2}{2}$.

C. $\frac{(3+2\sqrt{2})\pi R^2}{2}$.

D. $\frac{(3+2\sqrt{2})\pi R^2}{3}$.

Câu 16. (MÃ ĐỀ 110 BGD&ĐT NĂM 2017) Cho mặt cầu (S) có bán kính bằng 4, hình trụ (H) có chiều cao bằng 4 và hai đường tròn đáy nằm trên (S) . Gọi V_1 là thể tích của khối trụ (H) và V_2 là thể tích của khối cầu (S) . Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$

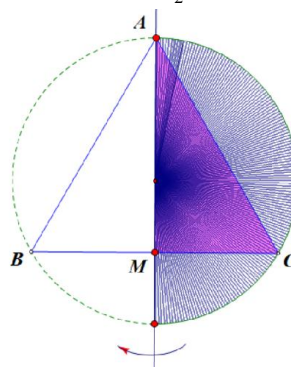
A. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{9}{16}$

B. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{2}{3}$

C. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{3}$

D. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{3}{16}$

Câu 17. (THPT CHUYÊN LAM SƠN THANH HÓA NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn tâm I đường kính AA' , M là trung điểm BC . Khi quay tam giác ABM với nửa hình tròn đường kính AA' xung quanh đường thẳng AM (như hình vẽ minh họa), ta được khối nón và khối cầu có thể tích lần lượt V_1, V_2 . Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng:



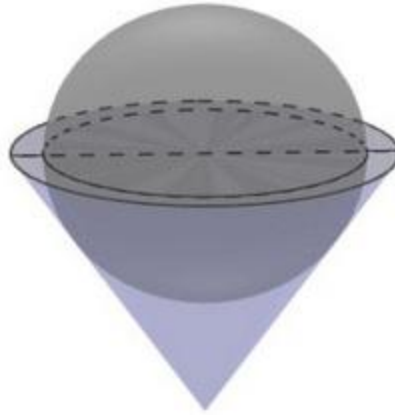
A. $\frac{9}{4}$

B. $\frac{4}{9}$

C. $\frac{27}{32}$

D. $\frac{9}{32}$

- Câu 18. (CHUYÊN ĐHSPT HÀ NỘI NĂM 2018-2019 LẦN 01) Một bình đựng nước dạng hình nón (không có đáy), đựng đầy nước. Người ta thả vào đó một khối cầu có đường kính bằng chiều cao của bình nước và đo được thể tích nước tràn ra ngoài là $18\pi \text{ dm}^3$. Biết rằng khối cầu tiếp xúc với tất cả các đường sinh của hình nón và đúng một nửa của khối cầu chìm trong nước (hình bên). Thể tích V của nước còn lại trong bình bằng



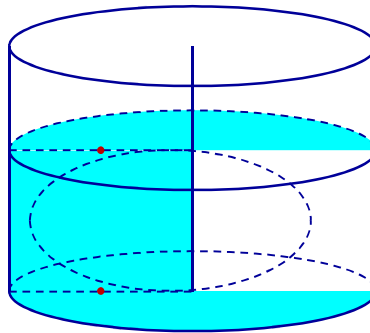
A. $24\pi \text{ dm}^3$.

B. $6\pi \text{ dm}^3$.

C. $54\pi \text{ dm}^3$.

D. $12\pi \text{ dm}^3$.

- Câu 19. (CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN ĐIỆN BIÊN NĂM 2018-2019 LẦN 02) Người ta thả một viên billiards snooker có dạng hình cầu với bán kính nhỏ hơn 4,5 cm vào một chiếc cốc hình trụ đang chứa nước thì viên billiards đó tiếp xúc với đáy cốc và tiếp xúc với mặt nước sau khi dâng (tham khảo hình vẽ bên). Biết rằng bán kính của phần trong đáy cốc bằng 5,4 cm và chiều cao của mực nước ban đầu trong cốc bằng 4,5 cm. Bán kính của viên billiards đó bằng?



A. 4,2 cm.

B. 3,6 cm.

C. 2,7 cm.

D. 2,6 cm.

- Câu 20. (CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU NGHỆ AN NĂM 2018-2019 LẦN 02) Cho tam giác đều ABC có đường tròn nội tiếp $(O; r)$, cắt bỏ phần hình tròn và cho hình phẳng thu được quay quanh AO . Tính thể tích khối tròn xoay thu được theo r .

A. $\frac{5}{3}\pi r^3$.

B. $\frac{4}{3}\pi r^3$.

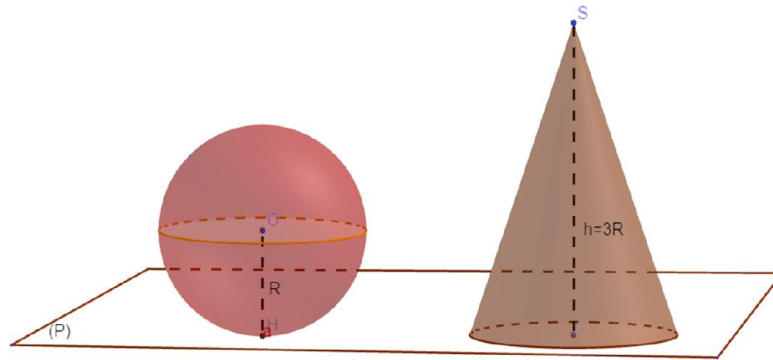
C. $\pi r^3 \sqrt{3}$.

D. πr^3 .

- Câu 21. (THCS - THPT NGUYỄN KHUYẾN NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho một cái bình hình trụ có bán kính đáy bằng R và có 4 quả cam hình cầu, trong đó có 3 quả cam có cùng bán kính và một quả cam cùng bán kính với đáy bình. Lần lượt bỏ vào bình 3 quả cam cùng bán kính sao cho chúng đôi một tiếp xúc với nhau, mỗi quả cam đều tiếp xúc với đáy bình và tiếp xúc với một đường sinh của bình; Bỏ tiếp quả cam thứ tư còn lại vào bình và tiếp xúc với mặt nắp của bình. Chiều cao của bình bằng

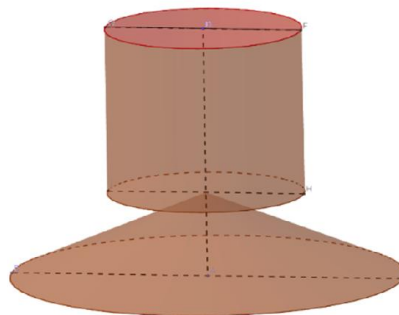
- A. $R\left(\sqrt{2\sqrt{3}-3}+1\right)^2$. B. $R\left(\sqrt{2\sqrt{3}-3}-1\right)^2$.
C. $R\left(\sqrt{2\sqrt{3}+3}+1\right)^2$. D. $R\left(\sqrt{2\sqrt{3}+3}-1\right)^2$.

Câu 22. (LIÊN TRƯỜNG THPT TP VINH NGHỆ AN NĂM 2018-2019) Cho hình cầu tâm O bán kính $R=5$, tiếp xúc với mặt phẳng (P) . Một hình nón tròn xoay có đáy nằm trên (P) , có chiều cao $h=15$, có bán kính đáy bằng R . Hình cầu và hình nón nằm về một phía đối với mặt phẳng (P) . Người ta cắt hai hình đó bởi mặt phẳng (Q) song song với (P) và thu được hai thiết diện có tổng diện tích là S . Gọi x là khoảng cách giữa (P) và (Q) , $(0 < x \leq 5)$. Biết rằng S đạt giá trị lớn nhất khi $x = \frac{a}{b}$ (phân số $\frac{a}{b}$ tối giản). Tính giá trị $T = a + b$.



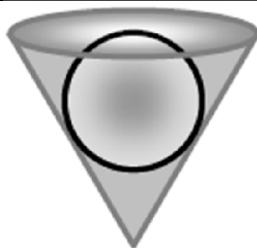
- A. $T = 17$ B. $T = 19$ C. $T = 18$ D. $T = 23$

Câu 23. (LIÊN TRƯỜNG THPT TP VINH NGHỆ AN NĂM 2018-2019) Một khối đồ chơi gồm một khối hình trụ (T) gắn chồng lên một khối hình nón (N) , lần lượt có bán kính đáy và chiều cao tương ứng là r_1, h_1, r_2, h_2 thỏa mãn $r_2 = 2r_1, h_1 = 2h_2$ (hình vẽ). Biết rằng thể tích của khối nón (N) bằng 20cm^3 . Thể tích của toàn bộ khối đồ chơi bằng



- A. 140cm^3 B. 120cm^3 C. 30cm^3 D. 50cm^3

Câu 24. (THPT LÊ QUÝ ĐÔN ĐÀ NẴNG NĂM 2018-2019) Thả một quả cầu đặc có bán kính 3 (cm) vào một vật hình nón (có đáy nón không kín) (như hình vẽ bên). Cho biết khoảng cách từ tâm quả cầu đến đỉnh nón là 5 (cm). Tính thể tích (theo đơn vị cm^3) phần không gian kín giới hạn bởi bề mặt quả cầu và bề mặt trong của vật hình nón.



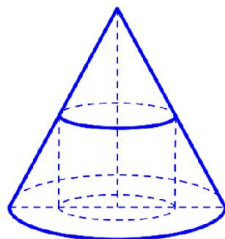
A. $\frac{12\pi}{5}$.

B. $\frac{14\pi}{5}$.

C. $\frac{16\pi}{5}$.

D. $\frac{18\pi}{5}$.

- Câu 25. (SỞ GD&ĐT HÀ NỘI NĂM 2018-2019) Cho hình nón có chiều cao $2R$ và bán kính đáy là R . Xét hình trụ nội tiếp hình nón sao cho thể tích trụ lớn nhất. Khi đó bán kính đáy của trụ là



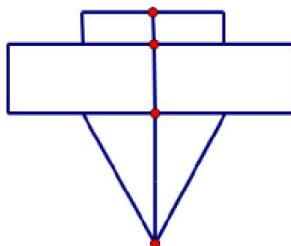
A. $\frac{2R}{3}$.

B. $\frac{R}{3}$.

C. $\frac{3R}{4}$.

D. $\frac{R}{2}$.

- Câu 26. (TT THANH TƯỜNG NGHỆ AN NĂM 2018-2019 LẦN 02) Một con xoay được thiết kế gồm hai khối trụ (T_1) , (T_2) chồng lên khối nón (N) (Tham khảo mặt cắt ngang qua trục như hình vẽ). Khối trụ (T_1) có bán kính đáy $r(\text{cm})$, chiều cao $h_1(\text{cm})$. Khối trụ (T_2) có bán kính đáy $2r(\text{cm})$, chiều cao $h_2 = 2h_1(\text{cm})$. Khối nón (N) có bán kính đáy $r(\text{cm})$, chiều cao $h_n = 4h_1(\text{cm})$. Biết rằng thể tích toàn bộ con xoay bằng $31(\text{cm}^3)$. Thể tích khối nón (N) bằng



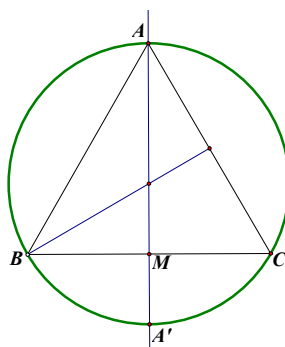
A. $5(\text{cm}^3)$.

B. $3(\text{cm}^3)$.

C. $4(\text{cm}^3)$.

D. $6(\text{cm}^3)$.

- Câu 27. Cho tam giác đều ABC có đỉnh $A(5;5)$ nội tiếp đường tròn tâm I đường kính AA' , M là trung điểm BC . Khi quay tam giác ABM cùng với nửa hình tròn đường kính AA' xung quanh đường thẳng AM (như hình vẽ minh họa), ta được khối nón và khối cầu có thể tích lần lượt là V_1 và V_2 .



Tỷ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng

A. $\frac{9}{32}$.

B. $\frac{9}{4}$.

C. $\frac{27}{32}$.

D. $\frac{4}{9}$.

Câu 28. (ĐỀ THAM KHẢO BGD&ĐT NĂM 2017) Cho mặt cầu tâm O bán kính R . Xét mặt phẳng (P) thay đổi cắt mặt cầu theo giao tuyến là đường tròn (C) . Hình nón (N) có đỉnh S nằm trên mặt cầu, có đáy là đường tròn (C) và có chiều cao $h (h > R)$. Tính h để thể tích khối nón được tạo nên bởi (N) có giá trị lớn nhất.

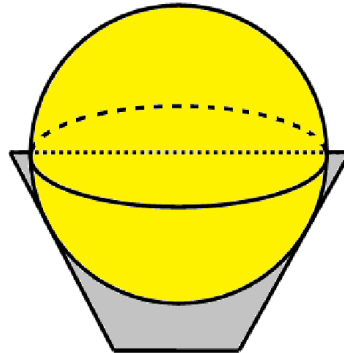
A. $h = \sqrt{2}R$

B. $h = \frac{4R}{3}$

C. $h = \frac{3R}{2}$

D. $h = \sqrt{3}R$

Câu 29. (TRƯỜNG THPT HOÀNG HOA THÁM HƯNG YÊN NĂM 2018-2019) Một cái thùng đựng đầy nước được tạo thành từ việc cắt mặt xung quanh của một hình nón bởi một mặt phẳng vuông góc với trục của hình nón. Miệng thùng là đường tròn có bán kính bằng ba lần bán kính mặt đáy của thùng. Người ta thả vào đó một khối cầu có đường kính bằng $\frac{3}{2}$ chiều cao của thùng nước và đo được thể tích nước tràn ra ngoài là $54\sqrt{3}\pi$ (dm³). Biết rằng khối cầu tiếp xúc với mặt trong của thùng và đúng một nửa của khối cầu đã chìm trong nước (hình vẽ). Thể tích nước còn lại trong thùng có giá trị nào sau đây?



A. $\frac{46}{5}\sqrt{3}\pi$ (dm³).

B. $18\sqrt{3}\pi$ (dm³).

C. $\frac{46}{3}\sqrt{3}\pi$ (dm³).

D. 18π (dm³).

Câu 30. (THPT ĐOÀN THƯỢNG - HẢI DƯƠNG - 2018 2019) Chiều cao của khối trụ có thể tích lớn nhất nội tiếp trong hình cầu có bán kính R là

A. $\frac{4R\sqrt{3}}{3}$.

B. $R\sqrt{3}$.

C. $\frac{R\sqrt{3}}{3}$.

D. $\frac{2R\sqrt{3}}{3}$.

Câu 31. Một bình đựng nước dạng hình nón (không có đáy) đựng đầy nước. Người ta thả vào đó một khối cầu có đường kính bằng chiều cao của bình nước và đo được thể tích nước tràn ra ngoài là 18π dm³. Biết khối cầu tiếp xúc với tất cả các đường sinh của hình nón và đúng một nửa khối cầu chìm trong nước. Tính thể tích nước còn lại trong bình.

A. 27π dm³.

B. 6π dm³.

C. 9π dm³.

D. 24π dm³.

Câu 32. (THPT CHUYÊN THÁI NGUYÊN LẦN 01 NĂM 2018-2019) Cho khối nón có độ lớn góc ở đỉnh là $\frac{\pi}{3}$. Một khối cầu (S_1) nội tiếp trong khối nón. Gọi (S_2) là khối cầu tiếp xúc với tất cả các đường sinh của nón và với S_1 ; S_3 là khối cầu tiếp xúc với tất cả các đường sinh của khối nón và

với $S_2, \dots, S_n$ là khối cầu tiếp xúc với tất cả các đường sinh của nón và với S_{n-1} . Gọi $V_1, V_2, \dots, V_{n-1}, V_n$ lần lượt là thể tích của khối cầu $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n$ và V là thể tích của khối nón. Tính giá trị

của biểu thức $T = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{V_1 + V_2 + \dots + V_n}{V}$

A. $T = \frac{3}{5}$.

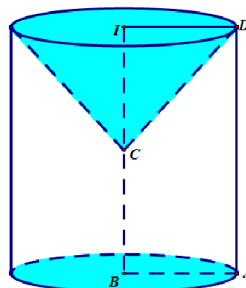
B. $T = \frac{6}{13}$.

C. $T = \frac{7}{9}$.

D. $T = \frac{1}{2}$.

PHẦN B. ĐÁP ÁN THAM KHẢO

Câu 1.



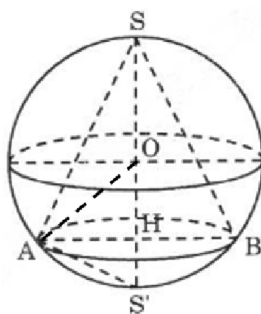
Thể tích của khối trụ sinh bởi hình chữ nhật $ABID$ khi quay cạnh BI là:

$$V_1 = \pi \cdot AB^2 \cdot AD = 2\pi a^3.$$

Thể tích của khối nón sinh bởi tam giác CID khi quay cạnh CI là:

$$V_2 = \frac{1}{3} \pi \cdot ID^2 \cdot CI = \frac{\pi a^3}{3}.$$

Vậy $V = V_1 - V_2 = \frac{5\pi a^3}{3}$.



Câu 2.

Gọi hình cầu có tâm O bán kính R .

Gọi hình nón có đỉnh S , tâm đáy là H , bán kính đáy $r = HA$.

Vì hình nón nội tiếp hình cầu nên đỉnh S thuộc hình cầu, chiều cao SH của hình nón đi qua tâm O của hình cầu, đồng thời cắt hình cầu tại điểm S' .

Theo đề chiều cao hình nón $SH = 9$, bán kính hình cầu $OS = 5 \Rightarrow OH = 4$, từ đó ta có

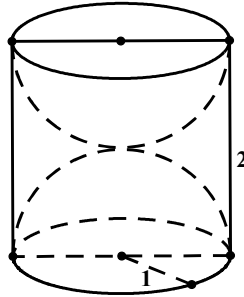
$$HA = \sqrt{OA^2 - OH^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3.$$

Thể tích khối nón $V_1 = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot SH = \frac{1}{3} \pi \cdot HA^2 \cdot SH = \frac{1}{3} \cdot 9\pi \cdot 3^2 = 27\pi$.

Thể tích khối cầu $V_2 = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \pi 5^3 = \frac{500\pi}{3}$.

$$\text{Tỉ số } \frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{27\pi}{3}}{\frac{500\pi}{3}} = \frac{81}{500}.$$

Câu 3. Theo bài toán ta có hình vẽ



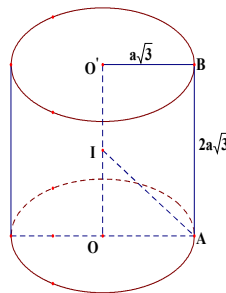
Thể tích của khối trụ là $V = \pi \cdot 1^2 \cdot 2 = 2\pi$.

Vì đường tròn đáy của khối trụ là đường tròn lớn của mỗi nửa khối cầu nên bán kính của mỗi nửa khối cầu là $R = 1$.

Thể tích của hai nửa khối cầu bị khoét đi là $V_1 = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4\pi \cdot 1^3}{3} = \frac{4\pi}{3}$.

Thể tích của phần còn lại của khối gỗ là $V_2 = V - V_1 = 2\pi - \frac{4\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$.

Vậy tỉ số thể tích cần tìm là $\frac{V_2}{V} = \frac{\frac{2\pi}{3}}{2\pi} = \frac{1}{3}$.



Câu 4.

Xét hình hình chữ nhật $OABO'$ như hình vẽ, với O, O' lần lượt là tâm hai đáy của khối trụ. Gọi I là trung điểm đoạn thẳng OO' . Khi đó IA là bán kính khối cầu ngoại tiếp khối trụ.

Ta có: $IA^2 = OA^2 + OI^2 = 3a^2 + 3a^2 = 6a^2 \Rightarrow IA = \sqrt{6}a$.

Thể tích khối cầu ngoại tiếp khối trụ là: $V = \frac{4}{3}\pi(\sqrt{6}a)^3 = 8\sqrt{6}\pi a^3$

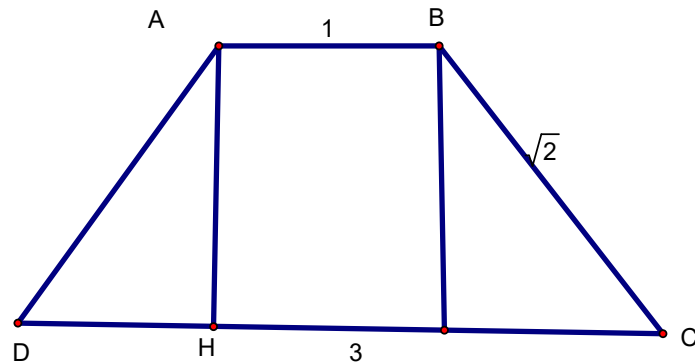
Câu 5. $r = \frac{1}{2}l = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}R = \frac{3}{4}R$. Diện tích mặt cầu $S_1 = 4\pi R^2$

Diện tích toàn phần của hình nón $S_2 = \pi rl + \pi r^2 = \pi \cdot \frac{3}{4}R \cdot \frac{3}{2}R + \pi \cdot \frac{9}{16}R^2 = \frac{27\pi R^2}{16}$

Theo giả thiết: $4\pi R^2 + \frac{27\pi R^2}{16} = 91 \Leftrightarrow \frac{91\pi R^2}{16} = 91 \Leftrightarrow \pi R^2 = 16$

Vậy $S_1 = 4\pi R^2 = 64\text{cm}^2$

Câu 6. Chọn C



Thể tích của khối tròn xoay bằng thể tích của hình trụ đường cao DC và bán kính đường tròn đáy AH . $AH = DH = 1$

Trừ đi thể tích hai khối nón tròn xoay chiều cao DH bán kính đường tròn đáy AH

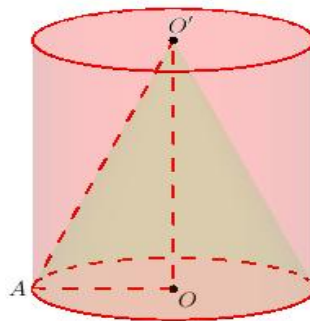
Ta có thể tích khối tròn xoay cần tìm là:

$$V = 3.\pi.1^2 - 2.\frac{1}{3}.1.\pi.1^2 = \frac{7}{3}\pi$$

Câu 7. Diện tích nắp hộp cần sơn là: $S_1 = \frac{4\pi r^2}{2} = 50\pi \text{ cm}^2$.

Diện tích thân hộp cần sơn là: $S_2 = 2\pi rh = 60\pi \text{ cm}^2$.

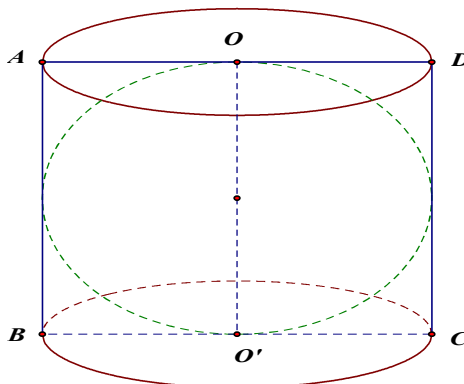
Diện tích S cần sơn là: $S = S_1 + S_2 = 50\pi + 60\pi = 110\pi \text{ cm}^2$.



Câu 8.

Ta có diện tích xung quanh hình trụ là: $S_1 = 2\pi R.R\sqrt{3} = 2\pi R^2\sqrt{3}$

Ta có diện tích xung quanh hình nón là: $S_1 = \pi R\sqrt{(R\sqrt{3})^2 + R^2} = 2\pi R^2$. Suy ra $\frac{S_1}{S_2} = \sqrt{3}$



Câu 9.

$$\frac{V_C}{V_T} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\pi r^2 \cdot 2r} = \frac{2}{3}$$

Câu 10. Chọn B

Thể tích khối nón là $V_1 = \frac{1}{3}\pi \cdot R^2 \cdot 2R = \frac{2}{3}\pi \cdot R^3$

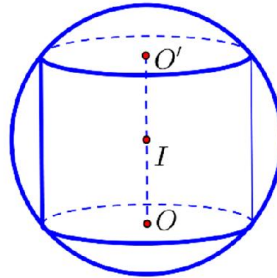
Thể tích nửa khối cầu là $V_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot R^3 = \frac{2}{3}\pi \cdot R^3$

Thể tích của toàn bộ khối đồ vật là $V_1 + V_2 = 36\pi \Leftrightarrow \frac{4}{3}\pi \cdot R^3 = 36\pi \Leftrightarrow R = 3$

Diện tích xung quanh của mặt nón là $S_1 = \pi R \cdot \sqrt{4R^2 + R^2} = \pi R^2 \sqrt{5} = 9\sqrt{5}\pi$

Diện tích của nửa mặt cầu là $S_2 = \frac{1}{2} \cdot 4\pi R^2 = 18\pi$

Diện tích bề mặt của toàn bộ đồ vật bằng $S_1 + S_2 = 9\pi(\sqrt{5} + 2) \text{ cm}^2$.



Câu 11.

Gọi r là bán kính của khối trụ và h là chiều cao của khối trụ, khi đó ta có $r^2 = R^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2 = R^2 - \frac{h^2}{4}$

Thể tích của khối trụ là $V = \pi r^2 h = \pi \left(R^2 - \frac{h^2}{4} \right) h$.

Theo đề bài thể tích khối trụ bằng $\frac{4\pi\sqrt{3}}{9}R^3$ nên ta có phương trình

$$\frac{4\pi\sqrt{3}}{9}R^3 = \pi \left(R^2 - \frac{h^2}{4} \right) h \Leftrightarrow 9h^3 - 36R^2h + 16\sqrt{3}R^3 = 0 \Leftrightarrow 9\left(\frac{h}{R}\right)^3 - 36\left(\frac{h}{R}\right) + 16\sqrt{3} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{h}{R} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow h = \frac{2\sqrt{3}}{3}R.$$

Vậy chiều cao khối trụ là $h = \frac{2\sqrt{3}}{3}R$.

Câu 12. Lời giải

Chọn D

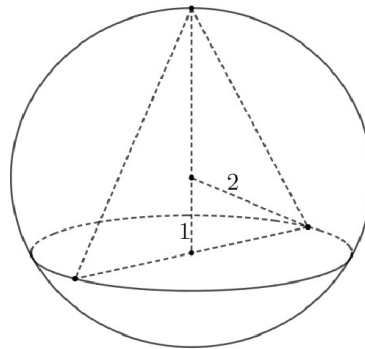
Khi quay mô hình trên quanh trục DF . Tam giác AFE tạo ra khối nón tròn xoay (N) và hình vuông $ABCD$ tạo ra khối trụ tròn xoay (T) .

(N) có chiều cao $AF = a$, bán kính đáy

$$EF = AF \cdot \tan 30^\circ = \frac{a}{\sqrt{3}} \Rightarrow V_{(N)} = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{a}{\sqrt{3}} \right)^2 a = \frac{\pi a^3}{9}.$$

(T) có chiều cao $AD = a$, bán kính đáy $AB = a \Rightarrow V_{(T)} = \pi a^2 \cdot a = \pi a^3$.

Vậy thể tích cần tính là: $V = V_{(N)} + V_{(T)} = \pi a^3 + \frac{\pi a^3}{9} = \frac{10\pi a^3}{9}$.



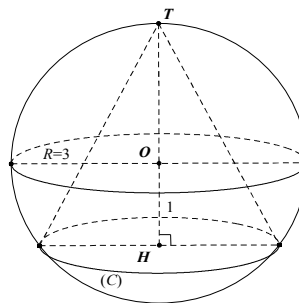
Câu 13.

Thể tích khối cầu (S) là $V_1 = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \pi \cdot 2^3 = \frac{32}{3} \pi$

Khối nón (N) có bán kính đáy $r = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$, chiều cao $h = 3$

Thể tích khối nón (N) là $V_2 = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi \cdot (\sqrt{3})^2 \cdot 3 = 3\pi$. Do đó $\frac{V_1}{V_2} = \frac{32}{9}$.

Câu 14. Chọn A

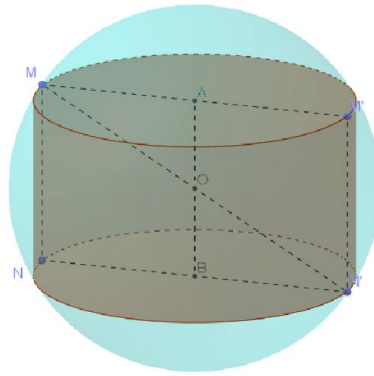


Gọi r là bán kính đường tròn (C) thì r là bán kính đáy của hình nón ta có: $r^2 = R^2 - OH^2 = 8$;

$HT = HO + OT = 1 + 3 = 4 = h$ là chiều cao của hình nón.

Suy ra: $V_n = \frac{1}{3} h \cdot S_{(C)} = \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot \pi \cdot 8 = \frac{32\pi}{3}$.

Câu 15. Chọn B

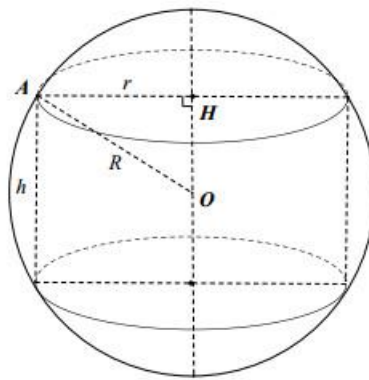


Đường cao hình trụ $h = R$ nên ta có bán kính của đáy hình trụ $r = \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{4}} = \frac{R\sqrt{3}}{2}$.

$$S_{xq} = 2\pi rh = 2\pi \frac{R\sqrt{3}}{2} R = \pi R^2 \sqrt{3}.$$

$$\text{Vậy } S_{tp} = S_{xq} + 2S_{đáy} = \pi R^2 \sqrt{3} + 2\pi \left(\frac{R\sqrt{3}}{2} \right)^2 = \frac{(3 + 2\sqrt{3})\pi R^2}{2}.$$

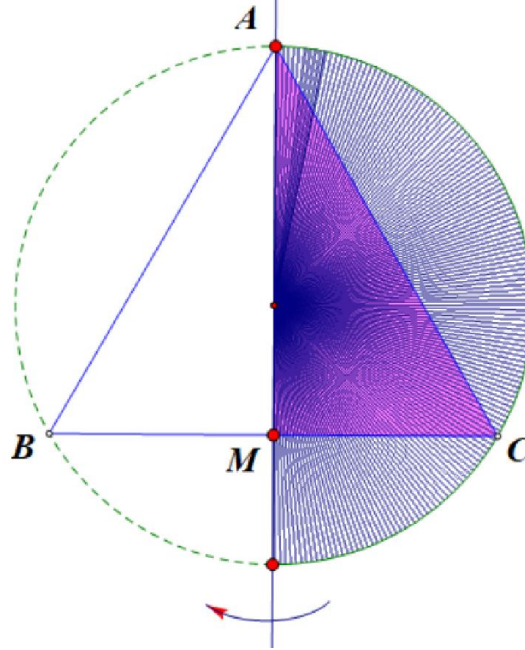
Câu 16. Chọn A



Ta có $r = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}$. Thể tích của khối trụ (H) là $V_1 = \pi r^2 h = \pi \cdot 12 \cdot 4 = 48\pi$.

Thể tích của khối cầu (S) là $V_2 = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 4^3 = \frac{256\pi}{3}$. Vậy $\frac{V_1}{V_2} = \frac{9}{16}$.

Câu 17. Chọn D



Gọi tam giác đều cạnh a . Ta có

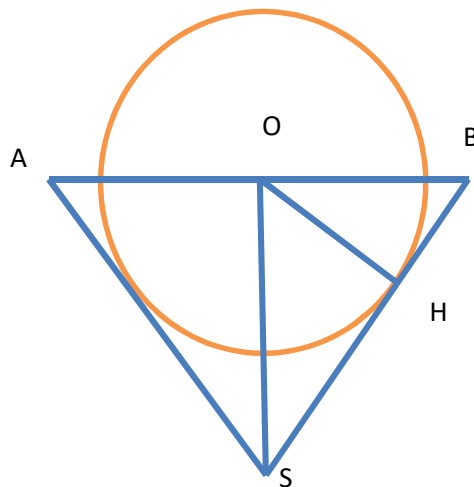
$r = \frac{a}{2}$ là bán kính đường tròn đáy của khối nón.

$R = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{a\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ là bán kính khối cầu.

$$V_1 = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{a}{2} \right)^2 \cdot \left(\frac{a\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{\sqrt{3} \pi a^3}{24}$$

$$V_2 = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \pi \left(\frac{a\sqrt{3}}{3} \right)^3 = \frac{4\sqrt{3} \pi a^3}{27}$$

$$\Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{9}{32}$$



Câu 18.

Đường kính của khối cầu bằng chiều cao của bình nước nên $OS = 2OH$.

Ta có thể tích nước tràn ra ngoài là thể tích của nửa quả cầu chìm trong bình nước:

$$18\pi = \frac{V_C}{2} = \frac{2\pi OH^3}{3} \Leftrightarrow OH = 3.$$

$$\text{Lại có: } \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OS^2} + \frac{1}{OB^2} \Leftrightarrow OB^2 = 12.$$

$$\text{Thể tích bình nước (thể tích nước ban đầu): } V_n = \frac{\pi \cdot OS \cdot OB^2}{3} = 24\pi \text{ (dm}^3\text{)}.$$

$$\text{Thể tích nước còn lại là: } 24\pi - 18\pi = 6\pi \text{ (dm}^3\text{)}.$$

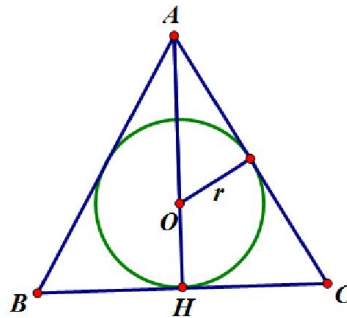
Câu 19. Gọi r là bán kính của viên billiards snooker.

$$\text{Thể tích viên billiards là } V_{bi} = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

$$\text{Phần thể tích nước dâng lên sau khi bỏ viên billiards vào là } V = \pi \cdot (5,4)^2 \cdot (2r - 4,5).$$

$$\text{Vì thể tích nước dâng lên chính là thể tích của viên billiards nên ta có } V_{bi} = V_n.$$

$$\text{Ta có phương trình } \frac{4}{3}\pi r^3 = \pi \cdot (5,4)^2 \cdot (2r - 4,5) \Leftrightarrow r = 2,7.$$



Câu 20.

Gọi H là chân đường cao AH của tam giác ABC

$$\text{Vì tam giác } ABC \text{ đều nên ta có: } AH = 3OH = 3r, \quad AH = BC \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow BC = \frac{2}{\sqrt{3}} AH = r2\sqrt{3}$$

Khi quay tam giác ABC quanh trục AO ta được hình nón có thể tích là: V_N , có đáy là đường tròn đường kính BC khi đó: $S_N = \pi HC^2 = \pi r^2 3$, chiều cao của hình nón là: $AH = 3r$, khi đó thể tích

$$\text{hình nón là: } V_N = \frac{1}{3} AH \cdot S_N = \frac{1}{3} 3r \cdot \pi r^2 3 = 3\pi r^3 \text{ (đvtt)}$$

$$\text{Thể tích khối cầu khi quay hình tròn } (O; r) \text{ quanh trục } AO \text{ là: } V_C = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\text{Vậy thể tích } V \text{ của khối tròn xoay thu được khi quay tam giác } ABC \text{ đã cắt bỏ phần hình tròn quanh trục } AO \text{ là: } V = V_N - V_C = 3\pi r^3 - \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{5}{3}\pi r^3$$

Câu 21. Gọi A, B, C là tâm ba quả cam có cùng bán kính r . K là tâm quả cam có bán kính R . IJ là chiều cao của hình trụ.

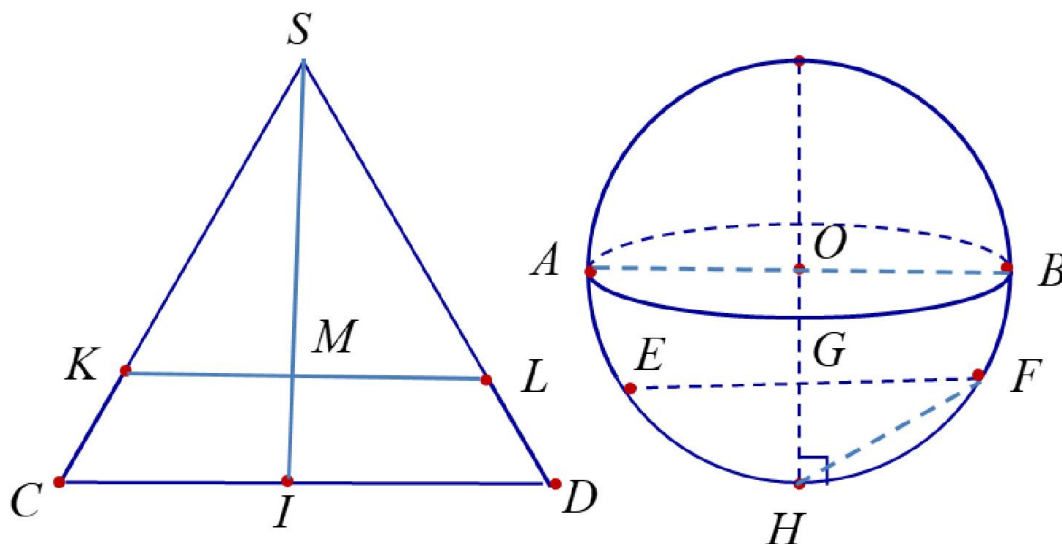
$$\text{Khi đó } OA = \frac{2}{3} \cdot \frac{2r\sqrt{3}}{2} = \frac{2r\sqrt{3}}{3}. \text{ Do ba quả cam tiếp xúc với ba đường sinh của hình trụ nên ta có}$$

$$R = OA + r = \frac{2r\sqrt{3}}{3} + r \Rightarrow r = R(2\sqrt{3} - 3) \text{ và } OA = 2R(2 - \sqrt{3}).$$

Do quả cam có bán kính R tiếp xúc với ba quả cam có bán kính r nên khoảng cách từ tâm K đến mặt phẳng (ABC) là $OK = \sqrt{KA^2 - OA^2} = \sqrt{(R+r)^2 - (2R(2-\sqrt{3}))^2} = 2R\sqrt{2\sqrt{3}-3}$.

Vậy chiều cao của hình trụ là

$$IJ = IO + OK + KJ = R(2\sqrt{3}-3) + 2R\sqrt{2\sqrt{3}-3} + R = R(\sqrt{2\sqrt{3}-3} + 1)^2.$$



Câu 22.

Gọi G là tâm của thiết diện cắt bởi mặt phẳng (Q) và mặt cầu.

Theo giả thiết ta có $OA = OB = OH = R = 5$ và $HG = x$. GF là bán kính của đường tròn thiết diện.

$$\text{Khi đó } GF = \sqrt{5^2 - (5-x)^2} = \sqrt{10x - x^2}.$$

Gọi S_1 là tâm của thiết diện cắt bởi mặt phẳng (Q) và mặt cầu.

Gọi M là tâm của thiết diện cắt bởi (Q) và hình nón. Theo giả thiết ta có $MI = x$ và

$$\frac{SM}{SI} = \frac{ML}{ID} \Rightarrow ML = \frac{SM \cdot ID}{SI} = \frac{(15-x)5}{15} = 5 - \frac{x}{3}.$$

Gọi S_2 là diện tích thiết diện của mặt phẳng (Q) và hình nón.

$$\text{Ta có } S_2 = \pi \left(5 - \frac{x}{3} \right)^2$$

$$\text{Vậy } S = S_1 + S_2 = \pi \left[10x - x^2 + \left(5 - \frac{x}{3} \right)^2 \right] = \pi \left(-\frac{8}{9}x^2 + \frac{20}{3}x + 25 \right)$$

$$S \text{ đạt giá trị lớn nhất khi } f(x) = -\frac{8}{9}x^2 + \frac{20}{3}x + 25 \text{ đạt giá trị lớn nhất} \Leftrightarrow x = \frac{15}{4}.$$

$$\text{Theo đề ra ta có } x = \frac{a}{b} = \frac{15}{4} \Rightarrow T = a + b = 19$$

Câu 23. Ta có thể tích khối trụ là $V_1 = \pi r_1^2 h_1$, mà $r_2 = 2r_1$, $h_1 = 2h_2$

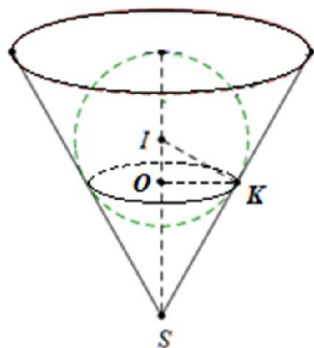
$$V_1 = \pi \cdot \left(\frac{r_2}{2}\right)^2 \cdot 2h_2 = \frac{1}{2} \pi r_2^2 h_2.$$

$$\text{Mặt khác thể tích khối nón là } V_2 = \frac{1}{3} \pi r_2^2 h_2 = 20 \Rightarrow \pi r_2^2 h_2 = 60 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

$$\text{Suy ra } V_1 = \frac{1}{2} \cdot 60 = 30 \text{ cm}^3.$$

$$\text{Vậy thể tích toàn bộ khối đồ chơi bằng } V_1 + V_2 = 30 + 20 = 50 \text{ cm}^3.$$

Câu 24. Xét hình nón và quả cầu như hình vẽ bên dưới.



$$OI = \frac{IK^2}{SI} = \frac{3^2}{5} = \frac{9}{5} \text{ (cm)}.$$

Thể tích chỏm cầu tâm I có bán kính OK là:

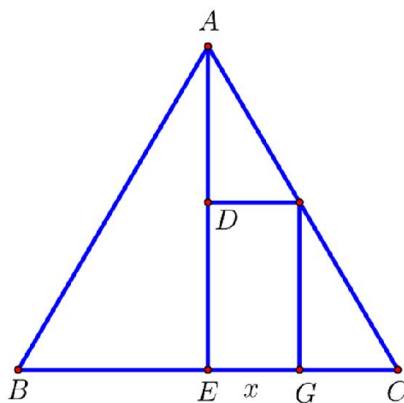
$$V_2 = \pi \cdot (IK - OI)^2 \cdot \left(IK - \frac{IK - OI}{3} \right) = \pi \cdot \left(3 - \frac{9}{5} \right)^2 \cdot \left(3 - \frac{3 - \frac{9}{5}}{3} \right) = \frac{468\pi}{125} \text{ (cm}^3\text{)}.$$

Thể tích hình nón có đỉnh S , đáy hình tròn tâm O , bán kính đáy OK là:

$$V_1 = \frac{1}{3} \cdot SO \cdot S_{(O,OK)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{16}{5} \cdot \pi \left(\frac{12}{5} \right)^2 = \frac{768\pi}{125} \text{ (cm}^3\text{)}.$$

Thể tích phần không gian kín giới hạn bởi bề mặt quả cầu và bề mặt trong của vật hình nón là:

$$V_1 - V_2 = \frac{768\pi}{125} - \frac{468\pi}{125} = \frac{12\pi}{5} \text{ (cm}^3\text{)}.$$



Câu 25.

Gọi D, E lần lượt là tâm đáy như hình vẽ. Đặt bán kính đáy là $r = x \in (0; R)$.

$$\text{Ta có } \frac{GC}{CE} = \frac{FG}{AE} \Rightarrow \frac{R-x}{R} = \frac{FG}{2R} \Rightarrow FG = 2(R-x) = h$$

Ta có thể tích trụ là:

$$V = \pi r^2 h = 2\pi x^2 (R - x) = 8\pi \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2} (R - x) \leq 8\pi \left(\frac{\frac{x}{2} + \frac{x}{2} + R - x}{3} \right)^3 = \frac{8\pi R^3}{27}.$$

Dấu "=" xảy ra khi $\frac{x}{2} = R - x \Leftrightarrow x = \frac{2R}{3}$.

Câu 26. Theo bài ta có $h_n = 4h_1 \Rightarrow h_1 = \frac{1}{4}h_n$; $h_2 = 2h_1 = \frac{1}{2}h_n$.

Thể tích toàn bộ con xoay là

$$V = V_{(T_1)} + V_{(T_2)} + V_{(N)} = \pi \cdot r^2 \cdot h_1 + \pi \cdot (2r)^2 \cdot h_2 + \frac{1}{3} \pi \cdot r^2 \cdot h_n$$

$$\Leftrightarrow 31 = \pi \cdot r^2 \cdot \frac{1}{4}h_n + \pi \cdot 4r^2 \cdot \frac{1}{2}h_n + \frac{1}{3} \pi \cdot r^2 \cdot h_n$$

$$\Leftrightarrow 31 = \frac{3}{4} \left(\frac{1}{3} \pi \cdot r^2 \cdot h_n \right) + 6 \left(\frac{1}{3} \pi \cdot r^2 \cdot h_n \right) + \frac{1}{3} \pi \cdot r^2 \cdot h_n \Leftrightarrow 31 = \frac{31}{4} \left(\frac{1}{3} \pi \cdot r^2 \cdot h_n \right) \Leftrightarrow \frac{1}{3} \pi \cdot r^2 \cdot h_n = 4$$

Vậy thể tích khối nón (N) là: $V_{(N)} = 4(\text{cm}^3)$.

Câu 27. Gọi độ dài cạnh của tam giác ABC là a .

Khi đó khối nón tạo thành có bán kính đáy là: $r = BM = \frac{a}{2}$; chiều cao $h = AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

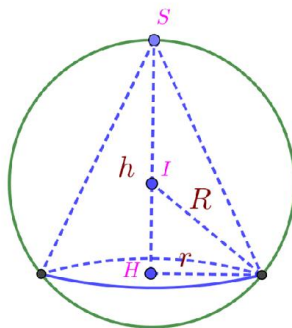
$$\text{Thể tích khối nón là } V_1 = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi \cdot \left(\frac{a}{2} \right)^2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{24}$$

$$\text{Khối cầu tạo thành có bán kính là } R = \frac{2}{3} AM = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{Thể tích khối cầu là: } V_2 = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \pi \cdot \left(\frac{a\sqrt{3}}{3} \right)^3 = \frac{4\pi a^3 \sqrt{3}}{27}$$

$$\text{Suy ra: } \frac{V_1}{V_2} = \frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{24} : \frac{4\pi a^3 \sqrt{3}}{27} = \frac{9}{32}.$$

Câu 28. Chọn B



Cách 1:

Gọi I là tâm mặt cầu và H, r là tâm và bán kính của (C).

$$\text{Ta có } IH = h - R \text{ và } r^2 = R^2 - IH^2 = R^2 - (h - R)^2 = 2Rh - h^2.$$

$$\text{Thể tích khối nón } V = \frac{1}{3} h \pi r^2 = \frac{\pi}{3} h (2Rh - h^2).$$

$$\text{Ta có } h \cdot h \cdot (4R - 2h) \leq \left(\frac{h + h + 4R - 2h}{3} \right)^3 = \left(\frac{4R}{3} \right)^3 \Rightarrow h^2 (2R - h) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{4R}{3} \right)^3.$$

$$\text{Do đó } V \text{ lớn nhất khi } h = 4R - 2h \Leftrightarrow h = \frac{4R}{3}.$$

Cách 2:

Gọi I là tâm mặt cầu và H , r là tâm và bán kính của (C) .

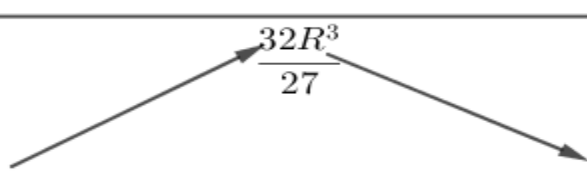
$$\text{Ta có } IH = h - R \text{ và } r^2 = R^2 - IH^2 = R^2 - (h - R)^2 = 2Rh - h^2.$$

$$\text{Thể tích khối nón } V = \frac{1}{3} h \pi r^2 = \frac{\pi}{3} h (2Rh - h^2) = \frac{\pi}{3} (2h^2 R - h^3)$$

$$\text{Xét hàm } f(h) = -h^3 + 2h^2 R, h \in (R, 2R), \text{ có } f'(h) = -3h^2 + 4hR.$$

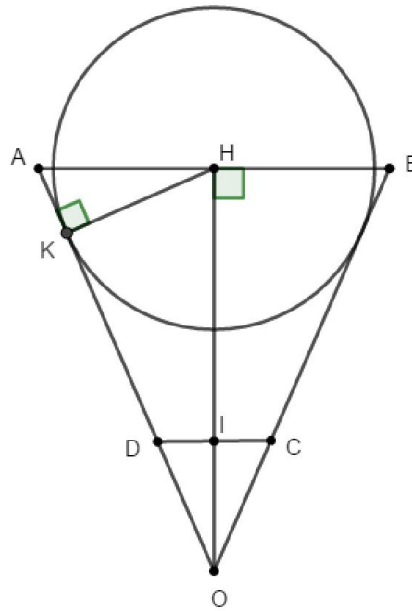
$$f'(h) = 0 \Leftrightarrow -3h^2 + 4hR = 0 \Leftrightarrow h = 0 \text{ hoặc } h = \frac{4R}{3}.$$

Bảng biến thiên

h	R	$\frac{4R}{3}$	$2R$
$f'(h)$	+	0	-
$f(h)$			

$\max f(h) = \frac{32}{27} R^3$, tại $h = \frac{4R}{3}$. Vậy thể tích khối nón được tạo nên bởi (N) có giá trị lớn nhất là

$$V = \frac{1}{3} \pi \frac{32}{27} R^3 = \frac{32}{81} \pi R^3 \text{ khi } h = \frac{4R}{3}.$$

**Câu 29.**

Gọi R là bán kính của khối cầu. Khi đó thể tích nước tràn ra ngoài là thể tích của một nửa khối cầu nên $\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi R^3 = 54\sqrt{3}\pi \Leftrightarrow R = 3\sqrt{3}$.

Do đó chiều cao của thùng nước là $h = \frac{2}{3} \cdot 2R = 4\sqrt{3}$.

Cắt thùng nước bởi thiết diện qua trục ta được hình thang cân $ABCD$ với $AB = 3CD$. Gọi O là giao điểm của AD và BC thì tam giác OAB cân tại O .

Gọi H là trung điểm của đoạn thẳng AB và I là giao điểm của OH và $CD \rightarrow I$ là trung điểm của DC nên $DI = \frac{1}{3}AH$.

Ta có $\frac{OI}{OH} = \frac{DI}{AH} = \frac{1}{3} \rightarrow OH = \frac{3}{2}HI = 6\sqrt{3}$

Gọi K là hình chiếu của H trên OA thì $HK = R = 3\sqrt{3}$

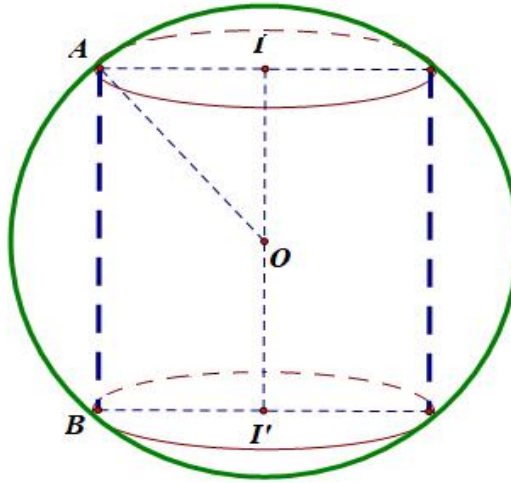
Tam giác OHA vuông tại H có đường cao HK nên

$$\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HO^2} + \frac{1}{AH^2} \rightarrow \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{HK^2} - \frac{1}{HO^2} = \frac{1}{36} \rightarrow AH = 6 \rightarrow DI = 2$$

Thể tích thùng đầy nước là $\frac{h\pi(AH^2 + DI^2 + AH \cdot DI)}{3} = \frac{4\sqrt{3}\pi(6^2 + 2^2 + 6 \cdot 2)}{3} = \frac{208\sqrt{3}\pi}{3}$

Do đó thể tích nước còn lại là $\frac{208\sqrt{3}\pi}{3} - 54\sqrt{3}\pi = \frac{46\sqrt{3}\pi}{3} (dm^3)$.

Câu 30. Gọi O là tâm hình cầu bán kính R và I, I' lần lượt là tâm hai hình tròn đáy của khối trụ với AB là một đường cao của khối trụ như hình vẽ.



Dễ thấy O là trung điểm II' .

Đặt x là chiều cao của khối trụ ta có $0 < x < 2R$ và $AB = II' = x$

Tam giác OAI có $AI = \sqrt{AO^2 - OI^2} = \sqrt{R^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4}}$.

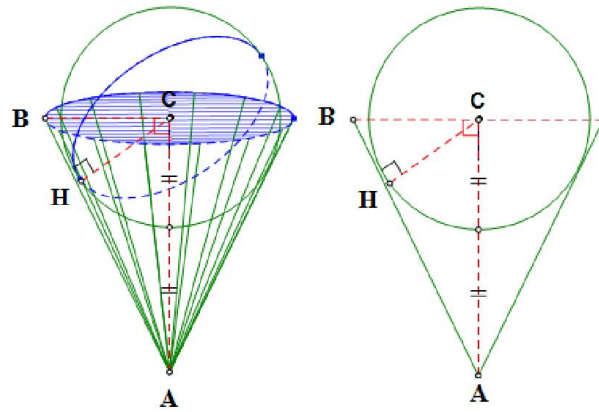
Thể tích khối trụ là $f(x) = \pi I A^2 \cdot AB = \pi \left(R^2 - \frac{x^2}{4}\right)x = \pi \left(R^2x - \frac{x^3}{4}\right)$.

$$f'(x) = \pi \left(R^2 - \frac{3}{4}x^2\right), f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2R\sqrt{3}}{3} \\ x = -\frac{2R\sqrt{3}}{3} \end{cases} \text{ với } x > 0 \text{ nên } x = \frac{2R\sqrt{3}}{3} \in (0; 2R)$$

Ta có bảng biến thiên:

x	0	$\frac{2R\sqrt{3}}{3}$	$2R$	
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$				

Từ bảng biến thiên ta thấy thể tích khối trụ lớn nhất khi chiều cao $x = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$



Câu 31.

Vì đúng một nửa khối cầu chìm trong nước nên thể tích khối cầu gấp 2 lần thể tích nước tràn ra ngoài.

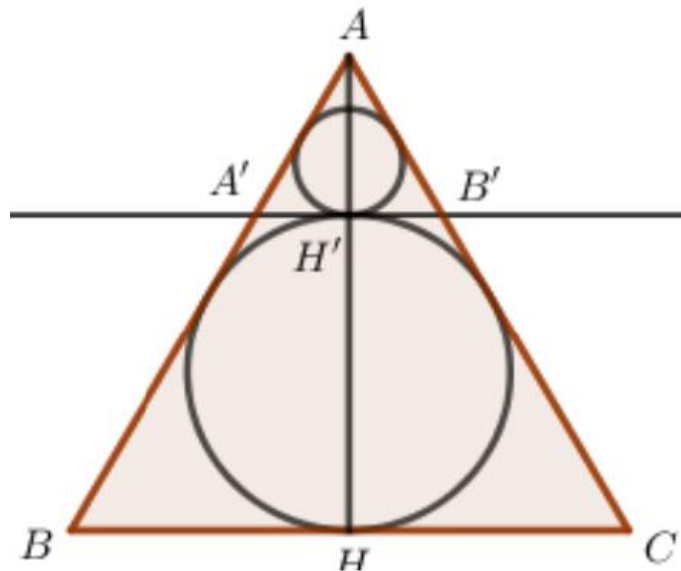
Gọi bán kính khối cầu là R , lúc đó: $\frac{4}{3}\pi R^3 = 36\pi \Leftrightarrow R^3 = 27$.

Xét tam giác ABC có AC là chiều cao bình nước nên $AC = 2R$ (Vì khối cầu có đường kính bằng chiều cao của bình nước)

Trong tam giác ABC có: $\frac{1}{CH^2} = \frac{1}{CA^2} + \frac{1}{CB^2} \Leftrightarrow \frac{1}{R^2} = \frac{1}{4R^2} + \frac{1}{CB^2} \Leftrightarrow CB^2 = \frac{4R^2}{3}$.

Thể tích khối nón: $V_n = \frac{1}{3}\pi \cdot CB^2 \cdot AC = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{4R^2}{3} \cdot 2R = \frac{8\pi}{9} \cdot R^3 = 24\pi \text{ dm}^3$.

Vậy thể tích nước còn lại trong bình: $24\pi - 18\pi = 6\pi \text{ dm}^3$



Câu 32.

Thiết diện qua trục của hình nón là một tam giác đều cạnh l . Do đó bán kính đường tròn nội tiếp

tam giác cũng chính là bán kính mặt cầu nội tiếp chóp là $r_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{l\sqrt{3}}{2} = \frac{l\sqrt{3}}{6}$

Áp dụng định lý Ta-Let ta có:

$$\frac{AA'}{AB} = \frac{AH'}{AH} = \frac{AH - HH'}{AH} = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2} - \frac{l\sqrt{3}}{3}}{\frac{l\sqrt{3}}{3}} = \frac{1}{3} \Rightarrow AA' = \frac{1}{3}$$

Tương tự ta tìm được $r_2 = \frac{l}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{l\sqrt{3}}{18} = \frac{r_1}{3}$.

Tiếp tục như vậy ta có $r_3 = \frac{1}{3}r_2, r_4 = \frac{1}{3}r_3, \dots, r_n = \frac{1}{3}r_{n-1}$

Ta có $V_1 = \frac{4}{3}\pi r_1^3, V_2 = \frac{4}{3}\pi r_2^3 = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{r_1}{3}\right)^3 = \frac{1}{3^3}V_1, V_3 = \frac{1}{(3^3)^2}V_1, \dots, V_n = \frac{4}{3}\pi r_{n-1}^3 = \frac{1}{(3^3)^{n-1}}V_1$

Do đó $T = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{V_1 + V_2 + \dots + V_n}{V} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{V_1 \left[1 + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{(3^3)^2} + \dots + \frac{1}{(3^3)^{n-1}} \right]}{V} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{V_1 \cdot S}{V}$

Đặt $S = 1 + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{(3^3)^2} + \dots + \frac{1}{(3^3)^{n-1}}$

Đây là tổng của CSN lùi vô hạn với công bội $q = \frac{1}{3^3} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} S = \frac{1}{1 - \frac{1}{3^3}} = \frac{27}{26}$

$\Rightarrow V_1 + V_2 + \dots + V_n = \frac{27}{26} V_1 = \frac{27}{26} \frac{4}{3} \pi \left(\frac{l\sqrt{3}}{6} \right)^3 = \frac{\sqrt{3}}{52} \pi l^3$

$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{l}{2} \right)^2 \frac{l\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3} \pi l^3}{24}$

Vậy $T = \frac{\frac{\sqrt{3}}{52} \pi l^3}{\frac{\sqrt{3}}{24} \pi l^3} = \frac{6}{13}$