

MỤC LỤC

1	Số phức và một vài ứng dụng	1
A	Lý thuyết	1
B	Ví dụ giải toán	5
C	Bài tập	14
1	Đề bài	14
2	Lời giải	16
D	Sử dụng số phức chứng minh bất đẳng thức	23
E	Sử dụng số phức giải phương trình, hệ phương trình	29
F	Hệ lập sinh bởi các đa thức đối xứng ba biến	36
2	Sử dụng số phức để giải phương trình hàm đa thức	39

BÀI 1. SỐ PHỨC VÀ MỘT VÀI ỨNG DỤNG

A. LÝ THUYẾT

1. Một số định nghĩa.

☑ Một số phức z là một biểu thức dạng $z = a + bi$, trong đó a và b là những số thực và i là số thỏa mãn $i^2 = -1$. Số a gọi là phần thực, b gọi là phần ảo của số phức $z = a + bi$, còn i gọi là đơn vị ảo.

☑ Cho hai số phức $z = a + bi$ và $z' = a' + b'i$. Khi đó:

$$z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$$

☑ Tập hợp tất cả các số phức thường được ký hiệu là $\mathbb{C}$. Vậy:

$$\mathbb{C} = \{a + bi | a, b \in \mathbb{R}\}.$$

☑ Số phức $z = a + 0i$ có phần ảo bằng 0 được coi là số thực và viết là:

$$a + 0i = a \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

☑ Số phức $z = 0 + bi$ có phần thực bằng 0 được gọi là số ảo (còn gọi là số thuần ảo) và viết là $z = bi$.

☑ Số $0 = 0 + 0i = 0i$ vừa là số thực vừa là số ảo.

2. Môđun của số phức. Cho số phức $z = a + bi$, khi đó $\sqrt{a^2 + b^2}$ được gọi là môđun (độ dài) của z , ký hiệu là $|z|$. Vậy $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

3. Số phức liên hợp. Cho $z = a + bi \in \mathbb{C}$, khi đó số phức liên hợp với z là $\bar{z} = a - bi$.

4. Biểu diễn hình học của số phức. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , mỗi số phức $z = a + bi$ được biểu diễn bởi điểm $M(a; b)$. Ngược lại mỗi điểm $M(a; b)$ biểu diễn một số phức là $z = a + bi$. Ta còn viết là $M(a + bi)$ hay $M(z)$.

5. Các phép toán trên số phức. Cho hai số phức $z = a + bi$ và $z' = a' + b'i$. Khi đó:

☑ Tổng của hai số phức z và z' là: $z + z' = (a + a') + (b + b')i$.

☑ Số đối của số phức $z = a + bi$ là số phức $-z = -a - bi$.

☑ Hiệu của hai số phức z và z' là: $z - z' = (a - a') + (b - b')i$.

☑ Tích của hai số phức z và z' là: $zz' = (aa' - bb') + (ab' + a'b)i$.

☑ Nghịch đảo của số phức $z = a + bi \neq 0$ là:

$$z^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2} (a - bi) \quad \left(= \frac{\bar{z}}{|z|^2} \right).$$

☑ Thương của hai số phức z và $z' \neq 0$ là:

$$\begin{aligned} \frac{z}{z'} &= z \cdot z'^{-1} = (a + bi) \left(\frac{a'}{a'^2 + b'^2} - \frac{b'}{a'^2 + b'^2}i \right) \\ &= \frac{aa' + bb'}{a'^2 + b'^2} - \frac{ab' - a'b}{a'^2 + b'^2}i. \end{aligned}$$

☑ Lũy thừa của số phức z được định nghĩa như sau:

$$\begin{aligned} z^0 &= 1, \quad z^n = \underbrace{z \cdot z \cdots z}_{n \text{ chữ } z} \text{ với } n \in \mathbb{N}^*. \\ z^n &= \frac{1}{z^{-n}}, \text{ với } z \neq 0, n = -1, -2, -3, \dots \end{aligned}$$

☑ Căn bậc n ($n \in \mathbb{N}^*$) của số phức z , ký hiệu $\sqrt[n]{z}$, là số phức z_1 sao cho $z_1^n = z$.

Chú ý 1. Để chia hai số phức được nhanh chóng ta làm như sau:

$$\frac{z}{z'} = \frac{z \cdot \bar{z'}}{z' \cdot \bar{z'}} = \frac{z \cdot \bar{z'}}{|z'|^2}.$$

Tức là để tìm $\frac{z}{z'}$ ta chỉ cần nhân tử và mẫu cho số phức liên hợp của z' .

6. Tìm căn bậc hai của số phức z .

- ☑ Nếu $z = 0$ thì z có một căn bậc hai là 0.
- ☑ Nếu $z = a > 0$ thì z có hai căn bậc hai là $\sqrt{a}$ và $-\sqrt{a}$.
- ☑ Nếu $z = a < 0$ thì z có hai căn bậc hai là $\sqrt{-a}i$ và $-\sqrt{-a}i$.
- ☑ Nếu $z = a + bi$ ($b \neq 0$) thì ta tìm căn bậc hai của z như sau: Ta cần tìm số phức $x + yi$ sao cho:

$$(x + yi)^2 = a + bi \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = a + bi \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b. \end{cases}$$

Giải hệ này ta tìm được x và y , tức là tìm được $x + yi$.

7. Dạng lượng giác của số phức. Cho số phức $z = a + bi \neq 0$. Trong mặt phẳng Oxy , số phức $z = a + bi$ được biểu diễn bởi một điểm duy nhất $M(a; b)$. Ta có:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = |\overrightarrow{OM}|.$$

Số đo (radian) của mỗi góc lượng giác $\phi = (Ox, OM)$ gọi là argumen của số phức z . Vậy ta có: $a = r \cos \phi$, $b = r \sin \phi$,

$$z = r(\cos \phi + i \sin \phi), \text{ với } r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = |\overrightarrow{OM}|$$

và $z = r(\cos \phi + i \sin \phi)$ được gọi là dạng lượng giác của số phức $z = a + bi$.

Lưu ý. Nếu ϕ là một argumen của z thì mọi argumen của z có dạng $\phi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ (người ta thường nói argumen của $z \neq 0$ sai khác $k2\pi, k \in \mathbb{Z}$).

8. Các công thức thường dùng của dạng lượng giác. Cho hai số phức:

$$z = r(\cos \phi + i \sin \phi) \neq 0, z' = r'(\cos \beta + i \sin \beta) \neq 0.$$

Khi đó:

$$\begin{aligned} zz' &= rr' [\cos(\phi + \beta) + i \sin(\phi + \beta)] \\ \frac{z}{z'} &= \frac{r}{r'} [\cos(\phi - \beta) + i \sin(\phi - \beta)] \\ z^n &= [r(\cos \phi + i \sin \phi)]^n = r^n (\cos n\phi + i \sin n\phi), \forall n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Công thức sau cùng gọi là công thức Moa-vơ.

9. Căn bậc n của số phức. Cho số phức $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, $r > 0$.

Khi đó các căn bậc n của z là

$$z_k = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right), k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

- ☑ Các căn bậc hai của số phức $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, $r > 0$ là

$$z_0 = \sqrt{r} \left(\cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2} \right), z_1 = -\sqrt{r} \left(\cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2} \right).$$

☑ Các căn bậc ba của số phức $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, $r > 0$ là

$$\begin{aligned} z_0 &= \sqrt[3]{r} \left(\cos \frac{\varphi}{3} + i \sin \frac{\varphi}{3} \right), \\ z_1 &= \sqrt[3]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi}{3} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi}{3} \right), \\ z_2 &= \sqrt[3]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 4\pi}{3} + i \sin \frac{\varphi + 4\pi}{3} \right). \end{aligned}$$

Chú ý 2. Một phương trình nghiệm phức $f(z) = 0$, với $z = x + iy$, ta biến đổi thành

$$h(x, y) + ig(x, y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} h(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0. \end{cases}$$

Nghĩa là một phương trình nghiệm phức, bằng cách tách phần thực và phần ảo luôn có thể đưa về hệ phương trình.

10. Đa thức với hệ số phức.

Định nghĩa 1. $P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n$ với các hệ số $a_i \in \mathbb{C}$ và biến $z \in \mathbb{C}$.

Ta cũng định nghĩa bậc, nghiệm... như đa thức với hệ số thực. Định lý Viet cũng được Phát biểu thuận và đảo như đa thức hệ số thực.

Định lý 1 (D'ALEMBERT). Mọi đa thức bậc n hệ số phức:

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n \quad (a_0 \neq 0)$$

đều có đủ n nghiệm phức phân biệt hay trùng nhau.

Hệ quả 1. Nếu $z_1, z_2, \dots, z_n$ là n nghiệm của

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n \quad (a_0 \neq 0)$$

thì ta có phân tích:

$$P(z) = a_0 (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n).$$

11. Giải phương trình bậc hai trên $\mathbb{C}$:

$$Az^2 + Bz + C = 0 \quad (\text{với } A \neq 0)$$

Phương pháp. Tính $\Delta = B^2 - 4AC$.

☑ Nếu $\Delta = 0$ thì phương trình có nghiệm kép $z_1 = z_2 = \frac{-B}{2A}$.

☑ Nếu $\Delta \neq 0$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$z_1 = \frac{-B + \delta}{2A}, \quad z_2 = \frac{-B - \delta}{2A}$$

trong đó δ là một căn bậc hai của Δ .

B. VÍ DỤ GIẢI TOÁN

BÀI 1 (ĐH 2013D). Cho số phức z thỏa mãn điều kiện

$$(1+i)(z-i) + 2z = 2i.$$

Tìm môđun của số phức: $w = \frac{\bar{z} - 2z + 1}{z^2}$.

 **Lời giải**

Ta có

$$\begin{aligned}(1+i)(z-i) + 2z &= 2i \Leftrightarrow z - i + iz - i^2 + 2z = 2i \\ \Leftrightarrow 3z + iz &= 3i - 1 \Leftrightarrow (3+i)z = -1 + 3i \Leftrightarrow z = \frac{-1+3i}{3+i} \\ \Leftrightarrow z &= \frac{(-1+3i)(3-i)}{3^2 - i^2} \Leftrightarrow z = \frac{10i}{10} \Leftrightarrow z = i.\end{aligned}$$

Do đó

$$w = \frac{\bar{z} - 2z + 1}{z^2} = \frac{-i - 2i + 1}{i^2} = \frac{1-3i}{-1} = -1 + 3i \Rightarrow |w| = \sqrt{10}.$$

□

BÀI 2. Cho $\varepsilon = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Hãy tính:

- ① $(a + b\varepsilon + c\varepsilon^2)(a + b\varepsilon^2 + c\varepsilon)$; ② $(a+b)(a+b\varepsilon)(a+b\varepsilon^2)$;
③ $(a\varepsilon^2 + b\varepsilon)(a\varepsilon + b\varepsilon^2)$.

 **Lời giải**

Ta có: $\varepsilon = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Do đó:

$$\begin{aligned}\varepsilon^2 &= \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{3}{4}i^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \\ \varepsilon^3 &= \varepsilon \cdot \varepsilon^2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{1}{4} - \frac{3}{4}i^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1, \\ \varepsilon^4 &= \varepsilon^3 \cdot \varepsilon = \varepsilon.\end{aligned}$$

① Theo trên ta có:

$$\begin{aligned}&(a + b\varepsilon + c\varepsilon^2)(a + b\varepsilon^2 + c\varepsilon) \\ &= a^2 + b^2\varepsilon^3 + c^2\varepsilon^3 + ab\varepsilon^2 + ac\varepsilon + ba\varepsilon + bc\varepsilon^2 + ca\varepsilon^2 + cb\varepsilon^4 \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + (ab + bc + ca)\varepsilon^2 + (ab + bc + ca)\varepsilon \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + (ab + bc + ca)(\varepsilon + \varepsilon^2) \\ &= a^2 + b^2 + c^2 - (ab + bc + ca) \text{ (do } \varepsilon + \varepsilon^2 = -1\text{)}.\end{aligned}$$

② Ta có:

$$\begin{aligned}&(a+b)(a+b\varepsilon)(a+b\varepsilon^2) = (a+b)(a^2 + ab\varepsilon^2 + ba\varepsilon + b^2\varepsilon^3) \\ &= (a+b)[a^2 + ab(\varepsilon^2 + \varepsilon) + b^2] = (a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3.\end{aligned}$$

③ Ta có:

$$\begin{aligned} (a\varepsilon^2 + b\varepsilon)(a\varepsilon + b\varepsilon^2) &= a^2\varepsilon^3 + ab\varepsilon^4 + ab\varepsilon^2 + b^2\varepsilon^3 \\ &= a^2 + ab\varepsilon + ab\varepsilon^2 + b^2 = a^2 + ab(\varepsilon + \varepsilon^2) + b^2 = a^2 - ab + b^2. \end{aligned}$$

□

BÀI 3 (Kosovo National Mathematical Olympiad 2013, Grade 11). Cho z_1 và z_2 là hai số phức thoả mãn $|z_1 + 2z_2| = |2z_1 + z_2|$. Chứng minh rằng với mọi số thực a , ta có:

$$|z_1 + az_2| = |az_1 + z_2|.$$

✍️ Lời giải

Giả sử $z_1 = p + qi$, $z_2 = r + si$ (với $p, q, r, s \in \mathbb{R}$). Khi đó

$$\begin{aligned} |z_1 + 2z_2| &= |2z_1 + z_2| \\ \Leftrightarrow |(p + 2r) + i(q + 2s)| &= |(2p + r) + i(2q + s)| \\ \Leftrightarrow \sqrt{(p + 2r)^2 + (q + 2s)^2} &= \sqrt{(2p + r)^2 + (2q + s)^2} \\ \Leftrightarrow (p + 2r)^2 + (q + 2s)^2 &= (2p + r)^2 + (2q + s)^2 \\ \Leftrightarrow p^2 + 4pr + 4r^2 + q^2 + 2qs + 4s^2 &= 4p^2 + 4pr + r^2 + 4q^2 + 4qs + s^2 \\ \Leftrightarrow r^2 + s^2 = p^2 + q^2 &\Leftrightarrow |z_1| = |z_2|. \end{aligned} \quad (1)$$

Ta có sự tương đương sau:

$$\begin{aligned} |z_1 + az_2| &= |az_1 + z_2| \\ \Leftrightarrow |p + qi + a(r + si)| &= |a(p + qi) + r + si| \\ \Leftrightarrow |(p + ar) + (q + as)i| &= |(ap + r) + (aq + s)i| \\ \Leftrightarrow \sqrt{(p + ar)^2 + (q + as)^2} &= \sqrt{(ap + r)^2 + (aq + s)^2} \\ \Leftrightarrow (p^2 + 2apr + a^2r^2) + (q^2 + 2asq + a^2s^2) &= (a^2p^2 + 2apr + r^2) + (a^2q^2 + 2aqs + s^2) \\ \Leftrightarrow p^2 + a^2r^2 + q^2 + a^2s^2 &= a^2p^2 + r^2 + a^2q^2 + s^2 \\ \Leftrightarrow p^2 + q^2 - a^2(p^2 + q^2) &= r^2 + s^2 - a^2(s^2 + r^2) \\ \Leftrightarrow (a^2 - 1)(p^2 + q^2) &= (a^2 - 1)(r^2 + s^2) \quad (\text{đúng, do (1)}). \end{aligned}$$

Ta có điều phải chứng minh. □

BÀI 4 (ĐH-2012D). Giải phương trình $z^2 + 3(1 + i)z + 5i = 0$ trên tập hợp các số phức.

✍️ Lời giải

Ta có $\Delta = 9(1 + i)^2 - 20i = 9(2i) - 20i = -2i = (1 - i)^2$. Vậy nghiệm là

$$\begin{cases} z = \frac{-3 - 3i + 1 - i}{2} \\ z = \frac{-3 - 3i - 1 + i}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -1 - 2i \\ z = -2 - i. \end{cases}$$

□

BÀI 5. Giải các phương trình sau trên tập số phức:

① $(z + 3i)(z^2 - 2z + 5) = 0$; ② $z^3 + (2i - 3)z^2 + 5z - 2i - 3 = 0$.

 **Lời giải**

① Ta có $(z + 3i)(z^2 - 2z + 5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = -3i \\ z^2 - 2z + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -3i \\ z = -1 \pm 2i. \end{cases}$
 Vậy phương trình có ba nghiệm: $z = -3i, z = -1 - 2i, z = -1 + 2i$.

② Phương trình có một nghiệm đặc biệt $z = 1$ nên chia đa thức ta được

$$\begin{aligned} z^3 + (2i - 3)z^2 + 5z - 2i - 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow (z - 1)[z^2 + (2i - 2)z + 2i + 3] &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} z = 1 \\ z^2 + (2i - 2)z + 2i + 3 = 0 (*) \end{cases} \end{aligned}$$

Phương trình (*) có

$$\Delta' = (i - 1)^2 - (2i + 3) = i^2 - 2i + 1 - 2i - 3 = -3 - 4i = (1 - 2i)^2.$$

Do đó $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} z = i \\ z = 2 - 3i. \end{cases}$ Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm là

$$z = 1, z = i, z = 2 - 3i.$$

□

BÀI 6 (ĐH-2012B, phần riêng chương trình Nâng cao). Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2 - 2\sqrt{3}iz - 4 = 0$. Viết dạng lượng giác của z_1 và z_2 .

 **Lời giải**

Phương trình $z^2 - 2\sqrt{3}iz - 4 = 0$ có $\Delta' = (\sqrt{3}i)^2 + 4 = 3i^2 + 4 = 1$, có hai nghiệm là

$$z_1 = -1 + \sqrt{3}i = 2 \left(-\cos \frac{\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{3}i \right); z_2 = 1 + \sqrt{3}i = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{3}i \right).$$

Vậy dạng lượng giác của z_1, z_2 là:

$$z_1 = 2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right); z_2 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right).$$

□

BÀI 7. Tính $(1 + \varepsilon)^n$, với $\varepsilon = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$, n là một số tự nhiên.

 **Lời giải**

Ta có:

$$\begin{aligned} 1 + \varepsilon &= 1 + \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = 2\cos^2 \frac{\pi}{3} + 2\sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{3}i \\ &= 2\cos \frac{\pi}{3} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

Vậy: $(1 + \varepsilon)^n = \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)^n = \cos \frac{n\pi}{3} + i \sin \frac{n\pi}{3}$.

Lưu ý. Ta có các công thức lượng giác sau đây:

$$1 + \cos x = 2\cos^2 \frac{x}{2}, \quad 1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2}; \quad \sin 2x = 2 \sin x \cos x.$$

□

BÀI 8. Sử dụng số phức, chứng minh rằng: $\cos 5x = 16\cos^5 x - 20\cos^3 x + 5 \cos x$.

 **Lời giải**

Ta có $(\cos x + i \sin x)^5 = \cos 5x + i \sin 5x$. (1)

Mặt khác

$$\begin{aligned} & (\cos x + i \sin x)^5 \\ &= \cos^5 x + 5\cos^4 x(i \sin x) + 10\cos^3 x(i \sin x)^2 \\ &+ 10\cos^2 x(i \sin x)^3 + 5 \cos x(i \sin x)^4 + (i \sin x)^5 \\ &= (\cos^5 x - 10\cos^3 x \sin^2 x + 5 \cos x \sin^4 x) \\ &+ (5\cos^4 x \sin x - 10\cos^2 x \sin^3 x + \sin^5 x)i. \end{aligned} \quad (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra

$$\begin{aligned} \cos 5x &= \cos^5 x - 10\cos^3 x \sin^2 x + 5 \cos x \sin^4 x \\ &= \cos^5 x - 10\cos^3 x(1 - \cos^2 x) + 5 \cos x(1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x) \\ &= 16\cos^5 x - 20\cos^3 x + 5 \cos x. \end{aligned}$$

Ta có điều phải chứng minh.

Lưu ý. Qua lời giải bài tập 8 này ta còn thu được kết quả:

$$\sin 5x = 5\cos^4 x \sin x - 10\cos^2 x \sin^3 x + \sin^5 x.$$

□

BÀI 9. Cho $\sin a + \sin b = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos a + \cos b = \frac{\sqrt{6}}{2}$. Tính:

$$\cos(a + b), \quad \sin(a + b).$$

 **Lời giải**

Đặt $z_1 = \cos a + i \sin a$, $z_2 = \cos b + i \sin b$. Khi đó

$$z_1 \bar{z}_1 = |z_1|^2 = 1 \Rightarrow \bar{z}_1 = \frac{1}{z_1}.$$

Tương tự, $\bar{z}_2 = \frac{1}{z_2}$. Ta có $\bar{z}_1 + \bar{z}_2 = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \frac{z_1 + z_2}{z_1 z_2} \Rightarrow z_1 z_2 = \frac{z_1 + z_2}{\bar{z}_1 + \bar{z}_2}$. Mà

$$z_1 + z_2 = \frac{\sqrt{6}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right),$$

$$\bar{z}_1 + \bar{z}_2 = \frac{\sqrt{6}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \left(\cos \frac{-\pi}{6} + i \sin \frac{-\pi}{6} \right)$$

nên

$$z_1 z_2 = \frac{\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)}{\sqrt{2} \left(\cos \frac{-\pi}{6} + i \sin \frac{-\pi}{6} \right)} = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}.$$

Lại có $z_1 z_2 = \cos(a+b) + i \sin(a+b)$. Vậy

$$\cos(a+b) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \sin(a+b) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

□

BÀI 10. Cho a, b, c là các số thực thoả mãn điều kiện:

$$\sin a + \sin b + \sin c = 0, \cos a + \cos b + \cos c = 0.$$

Chứng minh rằng: $\sin 2a + \sin 2b + \sin 2c = 0, \cos 2a + \cos 2b + \cos 2c = 0$.

Lời giải

Đặt $z_1 = \cos a + i \sin a, z_2 = \cos b + i \sin b, z_3 = \cos c + i \sin c$. Theo giả thiết, ta có $z_1 + z_2 + z_3 = 0$. Vì $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ nên $\frac{1}{z_1} = \overline{z_1}, \frac{1}{z_2} = \overline{z_2}, \frac{1}{z_3} = \overline{z_3}$. Vì thế

$$\begin{aligned} z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 &= (z_1 + z_2 + z_3)^2 - 2(z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1) \\ &= 0^2 - 2z_1 z_2 z_3 \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} \right) = -2z_1 z_2 z_3 (\overline{z_1} + \overline{z_2} + \overline{z_3}) \\ &= -2z_1 z_2 z_3 (\overline{z_1 + z_2 + z_3}) = -2z_1 z_2 z_3 \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Do đó $\cos 2a + \cos 2b + \cos 2c + i(\sin 2a + \sin 2b + \sin 2c) = 0$. Vậy

$$\sin 2a + \sin 2b + \sin 2c = 0, \cos 2a + \cos 2b + \cos 2c = 0.$$

□

BÀI 11. Rút gọn tổng $S = \sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx$.

Lời giải

Khi $\sin \frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow x = 2k\pi$, ta có $S = 0$. Tiếp theo giả sử $x \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Ta có

$$\begin{aligned} &(1 + \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx) + (\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx) i \\ &= 1 + (\cos x + i \sin x) + (\cos 2x + i \sin 2x) + \dots + (\cos nx + i \sin nx) \\ &= 1 + (\cos x + i \sin x) + (\cos x + i \sin x)^2 + \dots + (\cos x + i \sin x)^n \\ &= \frac{1 - (\cos x + i \sin x)^{n+1}}{1 - (\cos x + i \sin x)} = \frac{[1 - \cos(n+1)x] - i \sin(n+1)x}{(1 - \cos x) - i \sin x} \\ &= \frac{[1 - \cos(n+1)x - i \sin(n+1)x] [(1 - \cos x) + i \sin x]}{(1 - \cos x)^2 - i^2 \sin^2 x} \\ &= \frac{[1 - \cos(n+1)x - i \sin(n+1)x] [(1 - \cos x) + i \sin x]}{1 - 2 \cos x + \cos^2 x + \sin^2 x} \\ &= \frac{[1 - \cos(n+1)x - i \sin(n+1)x] [(1 - \cos x) + i \sin x]}{2 - 2 \cos x} \\ &= \frac{[1 - \cos(n+1)x] (1 - \cos x) + \sin(n+1)x \sin x}{4 \sin^2 \frac{x}{2}} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{[(1 - \cos(n+1)x) \sin x - \sin(n+1)x (1 - \cos x)] i}{4\sin^2 \frac{x}{2}} \\
 & = \frac{1 - \cos x - \cos(n+1)x + \cos nx}{4\sin^2 \frac{x}{2}} + \frac{\sin nx + \sin x - \sin(n+1)x}{4\sin^2 \frac{x}{2}} i \\
 & = \frac{2\sin^2 \frac{x}{2} + 2\sin \frac{(2n+1)x}{2} \sin \frac{x}{2}}{4\sin^2 \frac{x}{2}} + \frac{2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} - 2\cos \frac{(2n+1)x}{2} \sin \frac{x}{2}}{4\sin^2 \frac{x}{2}} i \\
 & = \frac{\sin \frac{x}{2} + \sin \frac{(2n+1)x}{2}}{2\sin \frac{x}{2}} + \frac{\cos \frac{x}{2} - \cos \frac{(2n+1)x}{2}}{2\sin \frac{x}{2}} i \\
 & = \frac{\sin \frac{(n+1)x}{2} \cos \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}} + \frac{\sin \frac{(n+1)x}{2} \sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}} i.
 \end{aligned}$$

Vậy $S = \sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx = \frac{\sin \frac{(n+1)x}{2} \sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$. Tóm lại:

$$\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx = \begin{cases} \frac{\sin \frac{(n+1)x}{2} \sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}} & \text{khi } x \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{khi } x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Lưu ý. Qua lời giải này, ta còn rút gọn được tổng

$$\cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx.$$

□

BÀI 12. Rút gọn tổng $S = \cos x + \cos 3x + \dots + \cos(2n-1)x$ ($x \neq k\pi$).

 **Lời giải**

Ta có

$$\begin{aligned}
 & [\cos x + \cos 3x + \dots + \cos(2n-1)x] + [\sin x + \sin 3x + \dots + \sin(2n-1)x] i \\
 & = (\cos x + i \sin x) + (\cos 3x + i \sin 3x) + \dots + [\cos(2n-1)x + i \sin(2n-1)x] \\
 & = (\cos x + i \sin x) + (\cos x + i \sin x)^3 + \dots + (\cos x + i \sin x)^{2n-1} \\
 & = (\cos x + i \sin x) \frac{1 - (\cos x + i \sin x)^{2n}}{1 - (\cos x + i \sin x)^2} \\
 & = (\cos x + i \sin x) \frac{1 - (\cos x + i \sin x)^{2n}}{2 \sin x (\sin x - i \cos x)} \\
 & = (\cos x + i \sin x) (\sin x + i \cos x) \frac{1 - (\cos x + i \sin x)^{2n}}{2 \sin x (\sin^2 x - i^2 \cos^2 x)} \\
 & = i \cdot \frac{1 - (\cos x + i \sin x)^{2n}}{2 \sin x} = \frac{1 - (\cos 2nx + i \sin 2nx)}{2 \sin x} i
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{i - (i \cos 2nx + i^2 \sin 2nx)}{2 \sin x} = \frac{\sin 2nx + i(1 - \cos 2nx)}{2 \sin x} \\ &= \frac{\sin 2nx}{2 \sin x} + \frac{\sin^2 nx}{\sin x} i. \end{aligned}$$

Suy ra $S = \cos x + \cos 3x + \dots + \cos(2n-1)x = \frac{\sin 2nx}{2 \sin x}$.

Lưu ý. Qua lời giải này ta còn thu được kết quả

$$\sin x + \sin 3x + \dots + \sin(2n-1)x = \frac{\sin^2 nx}{\sin x}.$$

□

BÀI 13. Tìm đa thức dư khi chia đa thức $x^{2000} + 3x^{19} - x + 1$ cho đa thức $x^2 + 1$.

Lời giải

Vì đa thức $x^2 + 1$ có bậc là 2 nên đa thức dư có dạng $ax + b$, với a và b là các hằng số thực. Đa thức $x^2 + 1$ có hai nghiệm trong $\mathbb{C}$ là i và $-i$. Đặt $P(x) = x^{2000} + 3x^{19} - x + 1$. Khi đó

$$P(x) = x^{2000} + 3x^{19} - x + 1 = (x^2 + 1)Q(x) + ax + b, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (*)$$

Trong (*) lần lượt lấy $x = i$ và $x = -i$, ta được

$$\begin{aligned} &\begin{cases} i^{2000} + 3i^{19} - i + 1 = ai + b \\ (-i)^{2000} + 3(-i)^{19} + i + 1 = a(-i) + b \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} i^{2000} + 3i^{19} - i + 1 = ai + b \\ i^{2000} - 3i^{19} + i + 1 = -ai + b \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} (i^2)^{1000} + 3i \cdot (i^2)^9 - i + 1 = ai + b \\ (i^2)^{1000} - 3i \cdot (i^2)^9 + i + 1 = -ai + b \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} 1 - 3i - i + 1 = ai + b \\ 1 + 3i + i + 1 = -ai + b \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} 2 - 4i = ai + b \\ 2 + 4i = -ai + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 \\ 2ai = -8i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy dư khi chia đa thức $x^{2000} + 3x^{19} - x + 1$ cho đa thức $x^2 + 1$ là $-4x + 2$. □

BÀI 14. Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{N}$ thì đa thức $(x+1)^{2n+1} + x^{n+2}$ chia hết cho đa thức $x^2 + x + 1$.

Lời giải

Đa thức $x^2 + x + 1$ có hai nghiệm là

$$\begin{aligned} \alpha &= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}, \\ \beta &= -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos \left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin \left(-\frac{2\pi}{3}\right). \end{aligned}$$

Kí hiệu: $P(x) = (x+1)^{2n+1} + x^{n+2}$. Khi đó:

$$\alpha + 1 = 1 + \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = 2 \cos^2 \frac{\pi}{3} + 2i \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{3}$$

$$= 2 \cos \frac{\pi}{3} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right).$$

Tương tự:

$$\begin{aligned} \beta + 1 &= 1 + \cos \left(-\frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{2\pi}{3} \right) \\ &= 2 \cos^2 \left(-\frac{\pi}{3} \right) + 2i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) \\ &= 2 \cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) \left[\cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right]. \end{aligned}$$

Do đó:

$$\begin{aligned} P(\alpha) &= (\alpha + 1)^{2n+1} + \alpha^{n+2} \\ &= \left(2 \cos \frac{\pi}{3} \right)^{2n+1} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)^{2n+1} + \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)^{n+2} \\ &= \left[\cos \frac{(2n+1)\pi}{3} + i \sin \frac{(2n+1)\pi}{3} \right] + \left[\cos \frac{(2n+4)\pi}{3} + i \sin \frac{(2n+4)\pi}{3} \right] \\ &= \left[\cos \frac{(2n+4)\pi}{3} + \cos \frac{(2n+1)\pi}{3} \right] + i \left[\sin \frac{(2n+4)\pi}{3} + \sin \frac{(2n+1)\pi}{3} \right] \\ &= 2 \cos \frac{(4n+5)\pi}{6} \cos \frac{\pi}{2} + 2i \sin \frac{(4n+5)\pi}{6} \cos \frac{\pi}{2} = 0. \end{aligned}$$

Vậy α là nghiệm của đa thức $P(x)$. Tương tự ta cũng có $P(\beta) = 0$, hay β là nghiệm của $P(x)$. Vậy tất cả các nghiệm của đa thức $x^2 + x + 1$ đều là nghiệm của đa thức $P(x)$, ta có điều phải chứng minh. $\square$

BÀI 15. Cho đa thức $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ và $\deg f(x) > 0$ thỏa mãn $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng tồn tại $A(x), B(x) \in \mathbb{R}[x]$ sao cho $f(x) = A^2(x) + B^2(x)$.

Lời giải

Ta có hằng đẳng thức:

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2. \quad (1)$$

Dễ thấy, nếu z là nghiệm của đa thức thì $\bar{z}$ cũng là nghiệm của đa thức. Do $\deg f(x) > 0$ và $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên $f(x)$ không có nghiệm thực, suy ra $f(x)$ có phân tích

$$f(x) = c \prod (x - z_i)(x - \bar{z}_i), \quad z_i \in \mathbb{C}.$$

Đặt $z = a + bi$ thì $(x - z)(x - \bar{z}) = x^2 - 2ax + a^2 + b^2 = (x + a)^2 + b^2$.

Áp dụng hằng đẳng thức (1) ta suy ra đpcm. $\square$

BÀI 16. Tìm tất cả các đa thức hệ số nguyên $P(x)$, là monic bậc 2, sao cho tồn tại đa thức $Q(x) \in \mathbb{Z}[x]$ mà các hệ số của đa thức $R(x) = P(x)Q(x)$ đều thuộc tập $\{-1; 1\}$.

Lời giải

Theo giả thiết, $P(x)$ có dạng $P(x) = x^2 + ax \pm 1$, với a là số nguyên. Giả sử

$$R(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i; a_i \in \{-1; 1\}.$$

Gọi $z \in \mathbb{C}$ là một nghiệm của $R(x)$ sao cho $|z| > 1$. Khi đó ta có

$$|z|^n = |z^n| = \left| \sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_i}{a_n} z^i \right| \leq \sum_{i=0}^{n-1} |z^i| = \sum_{i=0}^{n-1} |z|^i = \frac{|z|^n - 1}{|z| - 1}.$$

Do đó ta có

$$|z|^n \leq \frac{|z|^n - 1}{|z| - 1} \Rightarrow |z| - 1 \leq \frac{|z|^n - 1}{|z|^n} = 1 - \frac{1}{|z|^n} < 1 \Rightarrow |z| < 2.$$

Vậy mọi nghiệm của $R(x)$, nếu có modul lớn hơn 1 thì sẽ có modul nhỏ hơn 2. Giả sử z_1, z_2 là 2 nghiệm của $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$, khi đó z_1, z_2 là 2 nghiệm của $R(x)$. Theo Viet ta có

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2| = 1.$$

Giả sử $|z_1| \geq |z_2|$, khi đó $\begin{cases} 1 \leq |z_1| < 2 \\ 0 \leq |z_2| \leq 1. \end{cases}$

Ta lại có $|a| = |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| < 3 \Rightarrow a \in \{\pm 2; \pm 1; 0\}$.

Trường hợp 1: Với $a = 0$ ta được $\begin{cases} Q(x) = x + 1 \\ P(x) = x^2 - 1 \end{cases} \vee \begin{cases} Q(x) = 1 \\ P(x) = x^2 + 1. \end{cases}$

Trường hợp 2: Với $a = \pm 1$ ta được $P(x) = x^2 \pm x \pm 1 \Rightarrow Q(x) = 1$.

Trường hợp 3: Với $a = \pm 2 \Rightarrow \begin{cases} P(x) = x^2 \pm 2x + 1 (\Rightarrow Q(x) = \pm 1) \\ P(x) = x^2 \pm 2x - 1 (\Rightarrow Q(x) = \pm 1). \end{cases}$

Thử lại, ta được các đa thức thỏa mãn yêu cầu đề bài là:

$$P(x) = x^2 - 1, P(x) = x^2 + 1, P(x) = x^2 \pm x \pm 1, P(x) = x^2 \pm 2x \pm 1.$$

□

BÀI 17. Tìm tất cả các đa thức $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ thỏa mãn

$$P(x)P(x^2) = P(x^3 + 2x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Lời giải

Xét $\deg P(x) = 0$ tức $P(x) = C$ thay vào (1) ta được $C = 0$ hoặc $C = 1$, hay $P(x) = 0$, $P(x) = 1$ là hai đa thức thỏa mãn yêu cầu đề bài. Giả sử $\deg P(x) > 0$. Gọi x_1 là nghiệm (thực hoặc phức) của đa thức $P(x)$ mà $|x_1|$ có giá trị lớn nhất. Nếu $x_1 = 0$ thì

$$P(x) = x^k Q(x), Q(0) \neq 0, k \in \mathbb{N}^*.$$

Suy ra $x^{2k} Q(x) Q(x^2) = (x^2 + 2)^k Q(x^3 + 2x)$, với mọi x . Thay $x = 0$ suy ra $Q(0) = 0$, gặp mâu thuẫn, vậy $x_1 \neq 0$. Đặt $x_1 = t^2$ (chú ý $t \in \mathbb{C}$) từ giả thiết suy ra $t^6 + 2t^2, t^3 + 2t$ cũng là nghiệm, suy ra

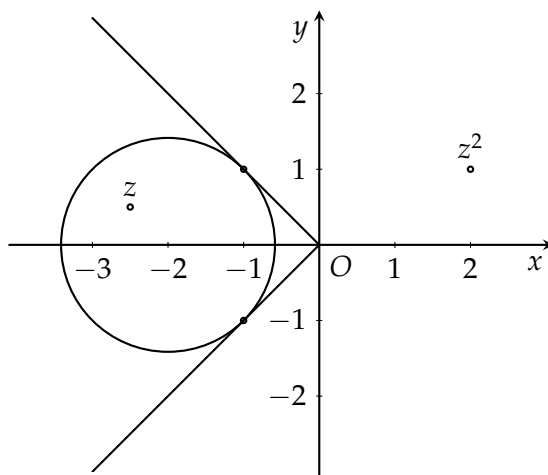
$$\begin{cases} |t^2| \geq |t^6 + 2t^2| \\ |t^2| \geq |t^3 + 2t| \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 \geq |t^4 + 2| \\ |t| \geq |t^2 + 2|. \end{cases}$$

Từ $1 \geq |t^4 + 2| \geq |t|^4 - 2$ suy ra $|t| \leq \sqrt[4]{3} < \sqrt{2}$.

Vậy ta có $|t^2 + 2| \leq |t| < \sqrt{2}$. Đặt $z = t^2$ ta được $|z + 2| < \sqrt{2}$ và $|z^2 + 2| \leq 1$ suy ra z nằm trong đường tròn tâm $(-2; 0)$ bán kính bằng $R = \sqrt{2}$ và z^2 nằm trong đường tròn tâm $(-2; 0)$ bán kính $R' = 1$.

Gọi $\varphi \in [0; 2\pi]$ là một acgumen của z , do z nằm trong đường tròn tâm $(-2; 0)$ bán kính $R = \sqrt{2}$, suy ra $\varphi \in \left(\frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right)$ suy ra

$2\varphi \in \left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$ là acgumen của z^2 điều này dẫn đến z^2 không nằm trong đường tròn tâm $(-2; 0)$ bán kính $R' = 1$ điều này vô lý. Vậy $P(x) = 0, P(x) = 1$ là hai đa thức cần tìm.



Nhận xét 1. Bài toán trên còn có thể giải theo cách đơn giản như sau: Xét $\deg P(x) = 0$ tức $P(x) = C$ thay vào (1) ta được $C = 0$ hoặc $C = 1$, hay $P(x) = 0, P(x) = 1$ là hai đa thức thỏa yêu cầu đề bài. Xét $\deg P(x) = n > 0$. Đặt

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0.$$

So sánh hệ số tự do hai vế ta có $a_0 = 0$ hoặc $a_0 = 1$.

☑ Nếu $a_0 = 0$ đặt tiếp $P(x) = x^m \cdot Q(x)$ với $\deg Q(x) = n - m$ và $Q(0) \neq 0$. Thay lại vào phương trình ta được $x^{2m} Q(x) Q(x^2) = (x^2 + 2)^m Q(x^3 + 2x)$, cho $x = 0$ suy ra $Q(0) = 0$, vô lý.

☑ Nếu $a_0 = 1$ đặt tiếp $P(x) = x^m \cdot Q(x) + 1$ với $\deg Q(x) = n - m$ và $Q(0) \neq 0$. Thay lại vào phương trình ta được

$$x^{2m} Q(x) Q(x^2) + Q(x) + x^m Q(x^2) = (x^2 + 2)^m Q(x^3 + 2x),$$

từ đây cho $x = 0$ suy ra $Q(0) = 2^m Q(0) \Leftrightarrow Q(0) = 0$, vô lý.

□

Chú ý 3. Sử dụng số phức để giải phương trình hàm đa thức sẽ được đề cập kĩ hơn ở bài 2 (ở trang 39).

C. BÀI TẬP

1. Đề bài

BÀI 18. Phân tích ra thừa số phức:

① $a^2 + 1;$

② $a^2 - a + 1;$

③ $2a^4 - 5;$

④ $4a^2 + 9b^2;$

⑤ $3a^2 + 5b^2;$

⑥ $3a^2 - 2ab + 7b^2.$

BÀI 19. Với x, y là hai số nguyên. Xét số phức $z = x + yi$.

① Chứng minh rằng $z^n = x_n + iy_n$, với x_n, y_n là những số nguyên ($n \in \mathbb{N}^*$).

- ② Chứng minh rằng nếu $A = x^2 + y^2$ thì $A^n = x_n^2 + y_n^2$ ($n \in \mathbb{Z}, n \geq 1$).
- ③ Chứng minh rằng nếu A là tổng bình phương của hai số nguyên thì A^n cũng là tổng bình phương của hai số nguyên ($n \in \mathbb{Z}, n \geq 1$).

BÀI 20. Giải phương trình sau trên tập số phức:

$$(z - 1)^4 + (z + 3)^4 + 128 = 0. \quad (1)$$

BÀI 21. Chứng minh rằng:

$$\begin{aligned} C_{2n}^0 - C_{2n}^2 + C_{2n}^4 - \cdots + C_{2n}^{2k}(-1)^k + \cdots + C_{2n}^{2n}(-1)^n &= 2^n \cos \frac{n\pi}{2}. \\ C_{2n}^1 - C_{2n}^3 + C_{2n}^5 - \cdots + C_{2n}^{2k-1}(-1)^{k-1} + \cdots + C_{2n}^{2n-1}(-1)^{n-1} &= 2^n \sin \frac{n\pi}{2}. \end{aligned}$$

BÀI 22. Thực hiện các yêu cầu sau:

- a) Tính tổng: $C_{2010}^0 + C_{2010}^1 + C_{2010}^2 + \cdots + C_{2010}^{2010}$.
- b) Chứng minh: $C_{2010}^0 + C_{2010}^2 + C_{2010}^4 + \cdots + C_{2010}^{2010} = 2^{2009}$.
- c) Tính tổng: $3C_{2010}^1 + 3^3C_{2010}^3 + 3^5C_{2010}^5 + \cdots + 3^{2009}C_{2010}^{2009}$.
- d) Chứng minh: $C_{2010}^0 + C_{2010}^3 + \cdots + C_{2010}^{2007} + C_{2010}^{2010} = \frac{1}{3}(2^{2010} + 2)$.

BÀI 23 (Chọn đội tuyển Romanian năm 1988). Cho các số thực x, y, z thỏa mãn điều kiện $x + y + z = 0$. Chứng minh rằng: $|\cos x| + |\cos y| + |\cos z| \geq 1$.

BÀI 24 (Đề nghị IMO năm 1989). Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn:

$$\frac{\cos a + \cos b + \cos c}{\cos(a + b + c)} = \frac{\sin a + \sin b + \sin c}{\sin(a + b + c)} = m.$$

Chứng minh rằng: $\cos(a + b) + \cos(b + c) + \cos(c + a) = m$.

BÀI 25. Với giá trị nào của số tự nhiên n thì đa thức $P(x) = x^{2n} + x^n + 1$ chia hết cho đa thức $Q(x) = x^2 + x + 1$.

BÀI 26 (Mathematica Excalibur 5.1996). Tìm $a \in \mathbb{Z}$ sao cho đa thức $x^2 - x + a$ chia hết đa thức $x^{13} + x + 90$ trong $\mathbb{Z}[x]$.

BÀI 27 (Việt Nam TST 2019). Với n là số nguyên dương, chứng minh rằng đa thức

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n 2^k C_{2n}^{2k} \cdot x^k \cdot (x - 1)^{n-k}$$

có đúng n nghiệm thực phân biệt.

2. Lời giải

18.

① Ta có $a^2 + 1 = a^2 - i^2 = (a - i)(a + i)$.② Ta có $\Delta = 1 - 4 = -3 = 3i^2$. Phương trình $a^2 - a + 1 = 0$ có hai nghiệm là

$$a_1 = \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}, a_2 = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}$$

Do đó

$$a^2 - a + 1 = \left(a - \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}\right) \left(a - \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}\right).$$

Cách khác. Ta có

$$\begin{aligned} a^2 - a + 1 &= a^2 - 2a \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3i^2}{4} \\ &= \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}i}{2}\right)^2 = \left(a - \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}\right) \left(a - \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}\right). \end{aligned}$$

③ Ta có

$$\begin{aligned} 2a^4 - 5 &= 2 \left(a^4 - \frac{5}{2}\right) = 2 \left(a^2 - \sqrt{\frac{5}{2}}\right) \left(a^2 + \sqrt{\frac{5}{2}}\right) \\ &= 2 \left(a - \sqrt[4]{\frac{5}{2}}\right) \left(a + \sqrt[4]{\frac{5}{2}}\right) \left(a^2 - \sqrt{\frac{5}{2}}i^2\right) \\ &= 2 \left(a - \sqrt[4]{\frac{5}{2}}\right) \left(a + \sqrt[4]{\frac{5}{2}}\right) \left(a - \sqrt[4]{\frac{5}{2}}i\right) \left(a + \sqrt[4]{\frac{5}{2}}i\right). \end{aligned}$$

④ Nếu $b = 0$ thì $4a^2 + 9b^2 = 4a^2$. Nếu $b \neq 0$ thì

$$\begin{aligned} 4a^2 + 9b^2 &= b^2 \left(4\frac{a^2}{b^2} + 9\right) = b^2 \left[\left(\frac{2a}{b}\right)^2 - 9i^2\right] \\ &= b \cdot b \left(\frac{2a}{b} - 3i\right) \left(\frac{2a}{b} + 3i\right) = (2a - 3ib)(2a + 3ib). \end{aligned}$$

Cách khác. Ta có

$$4a^2 + 9b^2 = 4a^2 - 9b^2i^2 = (2a)^2 - (3bi)^2 = (2a - 3bi)(2a + 3bi).$$

⑤ Tương tự câu (4).

⑥ Nếu $b = 0$ thì $3a^2 - 2ab + 7b^2 = 3a^2$. Nếu $b \neq 0$ thì

$$3a^2 - 2ab + 7b^2 = 3b^2 \left[\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 2 \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{3} + \frac{7}{3}\right]$$

$$\begin{aligned}
 &= 3b^2 \left[\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 2 \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{7}{3} - \frac{1}{9}\right) \right] \\
 &= 3b^2 \left[\left(\frac{a}{b} - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{20}{9} \right] = 3b^2 \left[\left(\frac{a}{b} - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{20}{9}i^2 \right] \\
 &= 3b^2 \left(\frac{a}{b} - \frac{1}{3} - \sqrt{\frac{20}{9}}i \right) \left(\frac{a}{b} - \frac{1}{3} + \sqrt{\frac{20}{9}}i \right) \\
 &= 3 \left(a - \frac{b}{3} - \frac{\sqrt{20}}{3}bi \right) \left(a - \frac{b}{3} + \frac{\sqrt{20}}{3}bi \right) \\
 &= (3a - b - \sqrt{20}bi) \left(a - \frac{b}{3} + \frac{\sqrt{20}}{3}bi \right).
 \end{aligned}$$

Kết luận: $3a^2 - 2ab + 7b^2 = (3a - b - \sqrt{20}bi) \left(a - \frac{b}{3} + \frac{\sqrt{20}}{3}bi \right).$

19.

① Ta chứng minh bằng phương pháp quy nạp.

Mệnh đề đúng khi $n = 1$ vì $z^1 = z = x + iy$, x, y là những số nguyên.

Giả sử $z^n = x_n + iy_n$, với x_n, y_n là những số nguyên. Ta có

$$z^{n+1} = z^n \cdot z = (x_n + iy_n)(x + iy) = (x \cdot x_n - y \cdot y_n) + i(x \cdot y_n + x_n \cdot y).$$

Đặt $x \cdot x_n - y \cdot y_n = x_{n+1}$, $x \cdot y_n + x_n \cdot y = y_{n+1}$, khi đó x_{n+1}, y_{n+1} là những số nguyên và $z^{n+1} = x_{n+1} + iy_{n+1}$. Theo nguyên lý quy nạp suy ra điều phải chứng minh.

② Ta có $A = x^2 + y^2 = (x + yi)(x - yi) = z \cdot \bar{z}$ (do $z = x + yi$). Suy ra

$$A^n = (z \cdot \bar{z})^n = z^n (\bar{z})^n = (x_n + iy_n)(x_n - iy_n) = x_n^2 + y_n^2.$$

③ Suy ra từ câu (2).

Lưu ý. Sử dụng kết quả bài toán trên ta trả lời được một số câu hỏi hóc búa, chẳng hạn: 25^{2011} có phải là tổng bình phương của hai số nguyên hay không? Câu trả lời là có, vì $25 = 3^2 + 4^2$.

20. Đặt $z = x - 1$. Thay vào phương trình (1), ta được

$$\begin{aligned}
 (x - 2)^4 + (x + 2)^4 + 128 &= 0 \Leftrightarrow x^4 + 24x^2 + 80 = 0 \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = -4 \\ x^2 = -20 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 4i^2 \\ x^2 = 20i^2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \{-2i, 2i, \sqrt{20}i, -\sqrt{20}i\}.
 \end{aligned}$$

Tập nghiệm của (1) là $\{-1 - 2i, -1 + 2i, -1 + \sqrt{20}i, -1 - \sqrt{20}i\}$.

21. Ta có

$$(1 + i)^{2n}$$

$$\begin{aligned}
 &= C_{2n}^0 + C_{2n}^1 i + C_{2n}^2 i^2 + C_{2n}^3 i^3 + C_{2n}^4 i^4 + \dots + C_{2n}^{2n-1} i^{2n-1} + C_{2n}^{2n} i^{2n} \\
 &= C_{2n}^0 + C_{2n}^1 i - C_{2n}^2 - C_{2n}^3 i + C_{2n}^4 + \dots + C_{2n}^{2n-1} (-1)^{n-1} i + C_{2n}^{2n} (-1)^n \\
 &= \left[C_{2n}^0 - C_{2n}^2 + C_{2n}^4 - \dots + C_{2n}^{2n} (-1)^n \right] \\
 &\quad + \left[C_{2n}^1 - C_{2n}^3 + C_{2n}^5 - \dots + C_{2n}^{2n-1} (-1)^{n-1} \right] i.
 \end{aligned}$$

Mặt khác: $1 + i = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i \right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$. Suy ra:

$$(1 + i)^{2n} = \sqrt{2}^{2n} \left(\cos \frac{2n\pi}{4} + i \sin \frac{2n\pi}{4} \right) = 2^n \left(\cos \frac{n\pi}{2} + i \sin \frac{n\pi}{2} \right).$$

Do đó đồng nhất phần thực và phần ảo ta được hai đẳng thức cần chứng minh.

22. Xét

$$\begin{aligned}
 f(x) &= (1 + x)^{2010} \\
 &= C_{2010}^0 + C_{2010}^1 x + C_{2010}^2 x^2 + \dots + C_{2010}^{2009} x^{2009} + C_{2010}^{2010} x^{2010}, \forall x \in \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

a) Ta có

$$C_{2010}^0 + C_{2010}^1 + C_{2010}^2 + \dots + C_{2010}^{2010} = f(1) = 2^{2010}.$$

b) Ta có

$$\begin{aligned}
 f(1) &= 2^{2010} = C_{2010}^0 + C_{2010}^1 + C_{2010}^2 + \dots + C_{2010}^{2009} + C_{2010}^{2010}. \\
 f(-1) &= 0 = C_{2010}^0 - C_{2010}^1 + C_{2010}^2 - \dots - C_{2010}^{2009} + C_{2010}^{2010}.
 \end{aligned}$$

Do đó

$$f(1) + f(-1) = 2^{2010} = 2(C_{2010}^0 + C_{2010}^2 + C_{2010}^4 + \dots + C_{2010}^{2010}).$$

Suy ra

$$C_{2010}^0 + C_{2010}^2 + C_{2010}^4 + \dots + C_{2010}^{2010} = 2^{2009}.$$

c) Tương tự câu b), xét $f(3) - f(-3)$.

d) Gọi $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$. Khi đó $z^2 + z + 1 = 0$ và $z^3 = 1$. Gọi

$$\begin{aligned}
 A &= C_{2010}^0 + C_{2010}^3 + \dots + C_{2010}^{2007} + C_{2010}^{2010} \\
 B &= C_{2010}^1 + C_{2010}^4 + \dots + C_{2010}^{2008} \\
 C &= C_{2010}^2 + C_{2010}^5 + \dots + C_{2010}^{2009}.
 \end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{aligned}
 (1 + 1)^{2010} &= A + B + C \\
 (1 + z)^{2010} &= C_{2010}^0 + C_{2010}^1 z + C_{2010}^2 z^2 + C_{2010}^3 z^3 + \dots + C_{2010}^{2010} z^{2010} \\
 &= A + zB + z^2 C \\
 (1 + z^2)^{2010} &= C_{2010}^0 + C_{2010}^1 z^2 + C_{2010}^2 z^4 + C_{2010}^3 z^6 + \dots + C_{2010}^{2010} z^{2 \cdot 2010} \\
 &= A + z^2 B + zC.
 \end{aligned}$$

Suy ra

$$3A = 2^{2010} + (1+z)^{2010} + (1+z^2)^{2010}. \quad (*)$$

Từ (*), dùng công thức Moivre ta tìm được

$$\begin{aligned} (1+z)^{2010} &= z^{4020} = \cos \frac{8040\pi}{3} + i \sin \frac{8040\pi}{3} \\ &= \cos 2680\pi + i \sin 2680\pi = 1. \\ (1+z^2)^{2010} &= z^{4020} = \cos \frac{4020\pi}{3} + i \sin \frac{4020\pi}{3} \\ &= \cos 1340\pi + i \sin 1340\pi = 1. \end{aligned}$$

Do đó $(1+z)^{2010} + (1+z^2)^{2010} = 2$. Bởi vậy từ (*) suy ra $A = \frac{1}{3}(2^{2010} + 2)$.

23. Vì $z = -(x+y)$ nên $\cos z = \cos(x+y)$. Xét số phức

$$a = \cos 2x + i \sin 2x, \quad b = \cos 2y + i \sin 2y.$$

Ta có

$$\begin{aligned} 1+a &= (1+\cos 2x) + i \sin 2x = 2\cos^2 x + 2i \sin x \cos x \\ &= 2\cos x (\cos x + i \sin x). \end{aligned}$$

Suy ra $|1+a| = 2|\cos x|$. Tương tự: $|1+b| = 2|\cos y|$. Ta có

$$\begin{aligned} 1+ab &= 1+\cos(2x+2y) + i \sin(2x+2y) \\ &= 2\cos^2(x+y) + 2i \sin(x+y) \cos(x+y) \\ &= 2\cos(x+y) [\cos(x+y) + i \sin(x+y)]. \end{aligned}$$

Suy ra $|1+ab| = 2|\cos(x+y)| = 2|\cos z|$. Vậy ta cần chứng minh:

$$|1+a| + |1+b| + |1+ab| \geq 2. \quad (*)$$

Ta có

$$\begin{aligned} |1+a| + |1+b| + |1+ab| &\geq |1+a| + |1+ab - (1+b)| \\ &= |1+a| + |b(1-a)| = |1+a| + |b| |1-a| \\ &= |1+a| + |1-a| \geq |1+a+1-a| = |2| = 2. \end{aligned}$$

Vậy (*) đúng, ta có điều phải chứng minh.

24. Đặt $x = \cos a + i \sin a$, $y = \cos b + i \sin b$, $z = \cos c + i \sin c$.

Khi đó $xyz = \cos(a+b+c) + i \sin(a+b+c)$.

Mặt khác

$$\begin{aligned} x+y+z &= (\cos a + \cos b + \cos c) + i(\sin a + \sin b + \sin c) \\ &= m \cos(a+b+c) + i m \sin(a+b+c) \\ &= m[\cos(a+b+c) + i \sin(a+b+c)] = mxyz. \end{aligned}$$

Vậy: $x + y + z = mxyz \Rightarrow \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} = m.$ (1)

Ta có $|x|^2 = |y|^2 = |z|^2 = 1$, suy ra

$$x.\bar{x} = y.\bar{y} = z.\bar{z} = 1 \Rightarrow \frac{1}{x} = \bar{x}, \frac{1}{y} = \bar{y}, \frac{1}{z} = \bar{z}. \quad (2)$$

Thay (2) vào (1) ta được: $\bar{x}.\bar{y} + \bar{y}.\bar{z} + \bar{z}.\bar{x} = m.$ (3)

Mà ta lại có

$$\begin{aligned} \bar{x}.\bar{y} &= (\cos a - i \sin a)(\cos b - i \sin b) \\ &= (\cos a \cos b - \sin a \sin b) - i(\sin a \cos b + \cos a \sin b) \\ &= \cos(a + b) - i \sin(a + b). \end{aligned}$$

Tương tự: $\bar{y}.\bar{z} = \cos(b + c) - i \sin(b + c)$, $\bar{z}.\bar{x} = \cos(c + a) - i \sin(c + a)$. Thay vào (3) ta được:

$$\begin{aligned} &\cos(a + b) + \cos(b + c) + \cos(c + a) \\ &- i[\sin(a + b) + \sin(b + c) + \sin(c + a)] = m. \end{aligned}$$

Mà $m = m + 0i$ nên $\cos(a + b) + \cos(b + c) + \cos(c + a) = m.$

Lưu ý. Qua lời giải trên ta còn thu được:

$$\sin(a + b) + \sin(b + c) + \sin(c + a) = 0.$$

25. Đa thức $Q(x)$ có hai nghiệm là

$$\begin{aligned} \alpha &= -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}, \\ \beta &= -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin \left(-\frac{2\pi}{3}\right). \end{aligned}$$

Giả sử $n = 3q + r$, với $r = 0, 1, 2$.

☑ Khi $n = 3k$, ta có:

$$\begin{aligned} P(\alpha) &= \alpha^{6k} + \alpha^{3k} + 1 \\ &= \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}\right)^{6k} + \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}\right)^{3k} + 1 \\ &= \cos 4k\pi + i \sin 4k\pi + \cos 2k\pi + i \sin 2k\pi + 1 = 3 \neq 0. \end{aligned}$$

☑ Khi $n = 3k + 1$, ta có:

$$\begin{aligned} P(\alpha) &= \alpha^{6k+2} + \alpha^{3k+1} + 1 \\ &= \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}\right)^{6k+2} + \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}\right)^{3k+1} + 1 \\ &= \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} + \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} + 1 = 0. \end{aligned}$$

Tương tự, ta cũng có $P(\beta) = 0$.

☑ Khi $n = 3k + 2$, ta có:

$$\begin{aligned} P(\alpha) &= \alpha^{6k+4} + \alpha^{3k+2} + 1 \\ &= \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)^{6k+4} + \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)^{3k+2} + 1 \\ &= \cos \frac{8\pi}{3} + i \sin \frac{8\pi}{3} + \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} + 1 = 0. \end{aligned}$$

Tương tự, ta cũng có $P(\beta) = 0$.

Vậy $P(x)$ chia hết cho $Q(x)$ khi và chỉ khi $n = 3k + 1$ hoặc $n = 3k + 2$.

Cách khác. Ta có $\varepsilon = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$ là một nghiệm của $Q(x)$. Vậy $Q(\varepsilon) = 0$.

Nhận xét 2. $P(x)$ chia hết cho $Q(x)$ khi và chỉ khi $P(\varepsilon) = 0$.

Chứng minh. Giả sử đa thức $P(x)$ chia hết cho đa thức $Q(x)$. Khi đó tồn tại đa thức $H(x)$ sao cho $P(x) = Q(x).H(x)$. Suy ra: $P(\varepsilon) = Q(\varepsilon).H(\varepsilon) = 0$. Giả sử $P(\varepsilon) = 0$. Giả sử $P(x) = Q(x).H(x) + R(x)$, với $R(x)$ là đa thức bậc nhất hoặc $R(x)$ là đa thức hằng. Ta có

$$0 = P(\varepsilon) = Q(\varepsilon).H(\varepsilon) + R(\varepsilon) \Rightarrow R(\varepsilon) = 0.$$

Do ε là số phức và $R(\varepsilon) = 0$ nên $R(x) \equiv 0$. Suy ra $P(x)$ chia hết cho $Q(x)$.

Trở lại bài toán: Sử dụng nhận xét trên suy ra điều kiện để $P(x)$ chia hết cho $Q(x)$ là $P(\varepsilon) = 0$ hay

$$\begin{aligned} &\left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)^{2n} + \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)^n + 1 = 0 \\ \Leftrightarrow &\cos \frac{4n\pi}{3} + i \sin \frac{4n\pi}{3} + \cos \frac{2n\pi}{3} + i \sin \frac{2n\pi}{3} + 1 = 0 \\ \Leftrightarrow &\left(\cos \frac{4n\pi}{3} + \cos \frac{2n\pi}{3} + 1 \right) + i \left(\sin \frac{4n\pi}{3} + \sin \frac{2n\pi}{3} \right) = 0 \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} \cos \frac{2n\pi}{3} + \left(1 + \cos \frac{4n\pi}{3} \right) = 0 \\ \sin \frac{4n\pi}{3} + \sin \frac{2n\pi}{3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \frac{2n\pi}{3} + 2 \cos^2 \frac{2n\pi}{3} = 0 \\ \sin \frac{4n\pi}{3} = \sin \frac{-2n\pi}{3} \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\cos \frac{2n\pi}{3} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 3k + 1 \\ n = 3k + 2. \end{cases} \end{aligned}$$

26. Giả sử đa thức $x^{13} + x + 90$ chia hết cho đa thức $x^2 - x + a$ trong $\mathbb{Z}[x]$. Khi đó

$$x^{13} + x + 90 = (x^2 - x + a)q(x), q(x) \in \mathbb{Z}[x]. \quad (*)$$

Thay lần lượt các giá trị $x = -1; 0; 1$ vào đẳng thức $(*)$ ta được:

$$88 = (2 + a)q(-1); 90 = aq(0); 92 = aq(1).$$

Bởi vì a chia hết 90 và 92 và $a + 2$ chia hết 88 vậy a chỉ nhận giá trị 2 hoặc -1 . Nhưng đa thức $x^2 - x - 1$ có một nghiệm thực dương, còn đa thức $x^{13} + x + 90$ không có nghiệm

thực dương, vậy nên $a = 2$ và ta cần chứng minh rằng $x^2 - x + 2$ chia hết $x^{13} + x + 90$. Thật vậy gọi ω là một trong hai nghiệm phức của $x^2 - x + 2$ ta có

$$\begin{aligned}\omega^2 &= \omega - 2, \omega^4 = -3\omega + 2, \omega^8 = -3\omega - 14, \\ \omega^{12} &= 45\omega - 46, \omega^{13} + \omega + 90 = 0.\end{aligned}$$

Ta có điều phải chứng minh.

Lời bình. Lời giải trên là một sự kết hợp hài hòa Đa thức nguyên, phép chia hết và nghiệm số phức của đa thức.

27. Trước hết, ta thấy rằng nếu $P_n(x_0) = 0$ thì $0 < x_0 < 1$. Thật vậy:

- ☑ Nếu $x_0 > 1$ thì $x_0 > 0, x_0 - 1 > 0$ nên $P_n(x_0) > 0$, mâu thuẫn.
- ☑ Nếu $x_0 < 0$ thì đặt $y_0 = -x_0 > 0$, ta có $P_n(x_0) = (-1)^n P_n(y_0)$, nhưng $P_n(y_0) > 0$ nên $P_n(x_0) \neq 0$, cũng không thỏa.

Tiếp theo, ta sẽ rút gọn $P_n(x)$. Xét $x_0 \in (0; 1)$ và đặt $2x_0 = a^2, 1 - x_0 = b^2$ thì

$$(x_0 - 1)^{n-k} = ((-1)(1 - x_0))^{n-k} = (ib)^{2n-2k},$$

trong đó $i^2 = -1$. Ta đưa về $T_n = \sum_{k=0}^n C_{2n}^{2k} \cdot a^{2k} \cdot (ib)^{2n-2k}$. Xét khai triển

$$(a + ib)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k \cdot a^k \cdot (ib)^{2n-k}, \quad (a - ib)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k (-1)^k a^k \cdot (ib)^{2n-k}.$$

Suy ra $T_n = \frac{(a + ib)^{2n} + (a - ib)^{2n}}{2}$. Ta thấy $a^2 + b^2 = x_0 + 1$ nên

$$\left(\frac{a}{\sqrt{x_0 + 1}} \right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{x_0 + 1}} \right)^2 = 1.$$

Đặt $\frac{a}{\sqrt{x_0 + 1}} = \cos \varphi, \frac{b}{\sqrt{x_0 + 1}} = \sin \varphi$ với $\varphi \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Khi đó

$$T_n = \frac{(\cos \varphi + i \sin \varphi)^{2n} + (\cos \varphi - i \sin \varphi)^{2n}}{2}.$$

Theo công thức de Moivre cho lũy thừa của số phức thì

$$T_n = \frac{\cos(2n\varphi) + i \sin(2n\varphi) + \cos(2n\varphi) - i \sin(2n\varphi)}{2} = \cos(2n\varphi).$$

Từ đó suy ra rằng

$$P_n(x_0) = 0 \Leftrightarrow T_n(x_0) = 0 \Leftrightarrow \cos(2n\varphi) = 0 \Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{4n} + k \frac{\pi}{2n}, \text{ với } 0 \leq k \leq n - 1.$$

Ứng với mỗi số φ , ta xác định được duy nhất số $x_0 \in (0; 1)$ nên có n số x_0 sao cho $P_n(x) = 0$, chứng tỏ rằng đa thức đã cho có n nghiệm thực phân biệt. Ta có điều phải chứng minh.

Lưu ý. Biểu thức của bài toán có lẽ xuất phát từ việc rút gọn tổng nhị thức Newton dạng “chẵn – lẻ” quen thuộc: $\sum_{0 \leq 2k \leq n} C_n^{2k} a^{n-2k} b^k$ với việc xét khai triển $(a+b)^n$ và $(a-b)^n$. Trở

ngại lớn ở đây chính là mũ của các số hạng và hệ số nhị thức lại không khớp nhau. Dĩ nhiên ta không thể chuyển $C_{2n}^{2k} \rightarrow C_n^k$ được nên buộc phải nâng lũy thừa của mũ thành bình phương. Tuy nhiên, nếu chỉ đặt đơn thuần $2x = a^2, 1-x = b^2$ thì ngay ở tổng chẵn của đề cho cũng đan dấu. Chính dấu hiệu lạ đó đã gợi ý cho ta xét số phức $i^2 = -1$ để khắc phục điều này. Chú ý rằng số 2^k trong đề bài có thể thay bằng a^k với $a > 0$ bất kỳ và bài toán vẫn đúng. Ngoài ra, nếu đổi việc xét các nhị thức ở vị trí chẵn có thể thay bằng các vị trí chia hết cho 3, 5, ... hay số nguyên tố p bất kỳ cũng sẽ tạo thành nhiều tình huống thú vị khác. Cách tiếp cận bằng số phức ở đây có lẽ là duy nhất, vì việc chỉ ra các khoảng chứa n nghiệm của $P_n(x)$ là không khả thi; còn nếu quy nạp theo bậc n thì lại khó tìm được công thức tường minh như ở bài toán đa thức Chebyshev.

D. SỬ DỤNG SỐ PHỨC CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

Tiếp theo ta sẽ xét một số ví dụ về dùng số phức để chứng minh bất đẳng thức. Đây là phương pháp rất độc đáo, thú vị, dùng cái ảo để chứng minh cái thực. Ta thường sử dụng các kết quả sau:

$$\checkmark |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

$$\checkmark |z_1 + z_2 + \dots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \dots + |z_n|, \forall z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}.$$

BÀI 28. Chứng minh rằng với các số thực a_k, b_k ($k = 1, 2, \dots, n$) thì:

$$\begin{aligned} & \sqrt{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 + (b_1 + b_2 + \dots + b_n)^2} \\ & \leq \sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \sqrt{a_2^2 + b_2^2} + \dots + \sqrt{a_n^2 + b_n^2}. \end{aligned} \quad (1)$$

Lời giải

Đặt $a_k + b_k i = z_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$). Khi đó

$$z_1 + z_2 + \dots + z_n = (a_1 + a_2 + \dots + a_n) + (b_1 + b_2 + \dots + b_n)i.$$

Bất đẳng thức (1) cần chứng minh có dạng

$$|z_1 + z_2 + \dots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \dots + |z_n|. \quad (2)$$

Bất đẳng thức (2) đúng vì môđun của tổng các số phức thì không lớn hơn tổng của từng môđun. $\square$

BÀI 29. Cho ba số thực a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 6$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{1+a^2} + \sqrt{4+b^2} + \sqrt{9+c^2} \geq 6\sqrt{2}.$$

Lời giải

Xét các số phức $z_1 = a + i, z_2 = b + 2i, z_3 = c + 3i$. Khi đó

$$|z_1| + |z_2| + |z_3| = \sqrt{a^2 + 1} + \sqrt{b^2 + 4} + \sqrt{c^2 + 9}.$$

Mặt khác

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 + z_3 &= (a + b + c) + 6i = 6 + 6i \\ \Rightarrow |z_1 + z_2 + z_3| &= \sqrt{6^2 + 6^2} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Mà $|z_1 + z_2 + z_3| \leq |z_1| + |z_2| + |z_3|$ nên

$$\sqrt{1 + a^2} + \sqrt{4 + b^2} + \sqrt{9 + c^2} \geq 6\sqrt{2}.$$

Ta có điều phải chứng minh. □

BÀI 30. Chứng minh rằng với mọi số thực a, b thì:

$$\sqrt{4\cos^2 a \cos^2 b + \sin^2(a - b)} + \sqrt{4\sin^2 a \sin^2 b + \sin^2(a - b)} \geq 2. \quad (*)$$

 **Lời giải**

Đặt $z_1 = 2\cos a \cos b + \sin(a - b)i$, $z_2 = 2\sin a \sin b + \sin(a - b)i$. Khi đó

$$|z_1| = \sqrt{4\cos^2 a \cos^2 b + \sin^2(a - b)}, \quad |z_2| = \sqrt{4\sin^2 a \sin^2 b + \sin^2(a - b)}.$$

Mặt khác

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= 2(\cos a \cos b + \sin a \sin b) + 2\sin(a - b)i \\ &= 2\cos(a - b) + 2\sin(a - b)i. \end{aligned}$$

Do đó $|z_1 + z_2| = \sqrt{4\cos^2(a - b) + 4\sin^2(a - b)} = 2$. Bởi vậy

$$(*) \Leftrightarrow |z_1| + |z_2| \geq |z_1 + z_2| \quad (\text{đúng}).$$

□

BÀI 31. Chứng minh rằng với các số dương a, b, c thì:

$$\sqrt{a^2 + ab + b^2} + \sqrt{b^2 + bc + c^2} + \sqrt{c^2 + ca + a^2} \geq \sqrt{3}(a + b + c).$$

 **Lời giải**

Xét các số phức

$$z_1 = \left(a + \frac{b}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}b}{2}i, \quad z_2 = \left(b + \frac{c}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}c}{2}i, \quad z_3 = \left(c + \frac{a}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}a}{2}i.$$

Khi đó

$$\begin{aligned} &|z_1| + |z_2| + |z_3| \\ &= \sqrt{\left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}b}{2}\right)^2} + \sqrt{\left(b + \frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}c}{2}\right)^2} + \sqrt{\left(c + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}a}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{a^2 + ab + b^2} + \sqrt{b^2 + bc + c^2} + \sqrt{c^2 + ca + a^2}. \end{aligned}$$

Mặt khác: $z_1 + z_2 + z_3 = \frac{3}{2}(a + b + c) + \frac{\sqrt{3}}{2}(a + b + c)i$. Do đó

$$|z_1 + z_2 + z_3| = \sqrt{\frac{9}{4}(a + b + c)^2 + \frac{3}{4}(a + b + c)^2} = \sqrt{3}(a + b + c).$$

Do $|z_1 + z_2 + z_3| \leq |z_1| + |z_2| + |z_3|$ nên ta có điều phải chứng minh. $\square$

BÀI 32. Chứng minh rằng nếu a, b, c là các số dương thỏa mãn:

$$ab + bc + ca = abc$$

thì $\frac{\sqrt{a^2 + 2b^2}}{ab} + \frac{\sqrt{b^2 + 2c^2}}{bc} + \frac{\sqrt{c^2 + 2a^2}}{ca} \geq \sqrt{3}$.

 **Lời giải**

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\sqrt{\frac{1}{b^2} + \frac{2}{a^2}} + \sqrt{\frac{1}{c^2} + \frac{2}{b^2}} + \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{2}{c^2}} \geq \sqrt{3}.$$

Đặt $x = \frac{1}{a}, y = \frac{1}{b}, z = \frac{1}{c}$. Ta cần chứng minh

$$\sqrt{y^2 + 2x^2} + \sqrt{z^2 + 2y^2} + \sqrt{x^2 + 2z^2} \geq \sqrt{3}. \quad (*)$$

Từ giả thiết $ab + bc + ca = abc$, ta có

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1 \Rightarrow x + y + z = 1.$$

Xét các số phức

$$z_1 = y + \sqrt{2}xi, z_2 = z + \sqrt{2}yi, z_3 = x + \sqrt{2}zi.$$

Khi đó

$$|z_1| + |z_2| + |z_3| = \sqrt{y^2 + 2x^2} + \sqrt{z^2 + 2y^2} + \sqrt{x^2 + 2z^2}.$$

Mặt khác

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 + z_3 &= (x + y + z) + \sqrt{2}(x + y + z)i \\ \Rightarrow |z_1 + z_2 + z_3| &= \sqrt{(x + y + z)^2 + 2(x + y + z)^2} = \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Mà $|z_1 + z_2 + z_3| \leq |z_1| + |z_2| + |z_3|$ nên ta có (*), điều phải chứng minh. $\square$

BÀI 33. Chứng minh rằng với mọi số thực a, b, c và số dương k , ta có

$$\left(k(a + b + c) - abc\right)^2 \leq (a^2 + k)(b^2 + k)(c^2 + k).$$

 **Lời giải**

Xét đa thức f bậc 3, nhận a, b, c làm nghiệm như sau:

$$f(t) = (t - a)(t - b)(t - c) = t^3 - t^2(a + b + c) + t(ab + bc + ca) - abc.$$

Bởi vì

$$|A + Bi|^2 = (A + Bi)(A - Bi) = A^2 + B^2 \geq A^2 \text{ (với } i^2 = -1),$$

nên ta có

$$\begin{aligned} |f(it)|^2 &= |i^3t^3 - i^2t^2(a + b + c) + it(ab + bc + ca) - abc|^2 \\ &= |-it^3 + t^2(a + b + c) + it(ab + bc + ca) - abc|^2 \\ &\geq (t^2(a + b + c) - abc)^2 \\ |f(it)|^2 &= |(it - a)(it - b)(it - c)|^2 \\ &= |it - a|^2 |it - b|^2 |it - c|^2 \\ &= (it - a)(-it - a)(it - b)(-it - b)(it - c)(-it - c) \\ &= (a^2 - i^2t^2)(b^2 - i^2t^2)(c^2 - i^2t^2) \\ &= (a^2 + t^2)(b^2 + t^2)(c^2 + t^2). \end{aligned}$$

Do đó

$$(t^2(a + b + c) - abc)^2 \leq (a^2 + t^2)(b^2 + t^2)(c^2 + t^2), \quad (*)$$

với t là số thực bất kì. Do đó, đặt $k = t^2$, từ (*) ta có điều phải chứng minh.

Lưu ý. Chọn k cụ thể ta sẽ được những bài toán mới, chẳng hạn chọn $k = 3$, ta được bài toán: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 \leq 3$. Chứng minh rằng

$$abc + 8 \geq 3(a + b + c).$$

□

BÀI 34. Chứng minh rằng với mọi số thực a, b, c, d và số dương k , ta có

$$(k^2 - k(ab + ac + ad + bc + bd + cd) + abcd)^2 \leq (a^2 + k)(b^2 + k)(c^2 + k)(d^2 + k).$$

🔗 Lời giải

Xét đa thức f bậc 4, nhận a, b, c, d làm nghiệm như sau:

$$\begin{aligned} f(t) &= (t - a)(t - b)(t - c)(t - d) \\ &= t^4 - t^3(a + b + c + d) + t^2(ab + ac + ad + bc + bd + cd) \\ &\quad - t(abc + bcd + cda + dab) + abcd. \end{aligned}$$

Bởi vì

$$|A + Bi|^2 = (A + Bi)(A - Bi) = A^2 + B^2 \geq A^2 \text{ (với } i^2 = -1),$$

nên với mọi số thực t , ta có

$$\begin{aligned} |f(it)|^2 &= |i^4t^4 - i^3t^3(a + b + c + d) + i^2t^2(ab + ac + ad + bc + bd + cd) \\ &\quad - it(abc + bcd + cda + dab) + abcd|^2 \\ &= |t^4 + it^3(a + b + c + d) - t^2(ab + ac + ad + bc + bd + cd) \\ &\quad - it(abc + bcd + cda + dab) + abcd|^2 \\ &\geq (t^4 - t^2(ab + ac + ad + bc + bd + cd) + abcd)^2. \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned}
 |f(it)|^2 &= |(it-a)(it-b)(it-c)(it-d)|^2 \\
 &= |it-a|^2 |it-b|^2 |it-c|^2 |it-d|^2 \\
 &= (-a+it)(-a-it)(-b+it)(-b-it)(-c+it)(-c-it)(-d+it)(-d-it) \\
 &= (a^2 - i^2 t^2)(b^2 - i^2 t^2)(c^2 - i^2 t^2)(d^2 - i^2 t^2) \\
 &= (a^2 + t^2)(b^2 + t^2)(c^2 + t^2)(d^2 + t^2). \quad (2)
 \end{aligned}$$

Từ (1) và (2) ta có điều phải chứng minh. $\square$

BÀI 35 (Romanian Mathematical Olympiads 2003, Shortlist). Cho các số dương a, b, c, d thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$. Chứng minh rằng

$$ab + ac + ad + bc + bd + cd \leq \frac{5}{4} + 4abcd.$$

Lời giải

Trong kết quả bài toán 34, lấy $k = 0,25$ ta được

$$\begin{aligned}
 &\left(\frac{1}{16} - \frac{1}{4}(ab + ac + ad + bc + bd + cd) + abcd\right)^2 \\
 &\leq \left(\frac{1}{4} + a^2\right)\left(\frac{1}{4} + b^2\right)\left(\frac{1}{4} + c^2\right)\left(\frac{1}{4} + d^2\right).
 \end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có

$$\left(\frac{1}{4} + a^2\right)\left(\frac{1}{4} + b^2\right)\left(\frac{1}{4} + c^2\right)\left(\frac{1}{4} + d^2\right) \leq \left(\frac{1 + (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)}{4}\right)^4 = \frac{1}{16}.$$

Do đó

$$\begin{aligned}
 &\left(\frac{1}{16} - \frac{1}{4}(ab + ac + ad + bc + bd + cd) + abcd\right)^2 \leq \frac{1}{16} \\
 \Rightarrow &\frac{1}{16} - \frac{1}{4}(ab + ac + ad + bc + bd + cd) + abcd \geq -\frac{1}{4} \\
 \Rightarrow &\frac{5}{4} + 4abcd \geq ab + ac + ad + bc + bd + cd.
 \end{aligned}$$

Ta có điều phải chứng minh. Dấu "=" xảy ra khi $a = b = c = d = \frac{1}{2}$. $\square$

BÀI 36 (Titu Andreescu, Gabriel Dospinescu). Cho các số thực a, b, c, d thỏa mãn

$$(a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1)(d^2 + 1) = 16.$$

Chứng minh rằng

$$-3 \leq ab + ac + ad + bc + bd + cd - abcd \leq 5.$$

Lời giải

Trong kết quả bài toán 34, lấy $k = 1$ ta được

$$(1 - (ab + ac + ad + bc + bd + cd) + abcd)^2 \leq (a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1)(d^2 + 1) = 16.$$

Do đó

$$\begin{aligned} -4 &\leq (ab + ac + ad + bc + bd + cd) - abcd - 1 \leq 4 \\ \Rightarrow -3 &\leq ab + ac + ad + bc + bd + cd - abcd \leq 5. \end{aligned}$$

Ta có điều phải chứng minh. Dấu "=" xảy ra chẳng hạn khi

$$a = b = c = d = 1; \quad a = b = 1, c = d = -1.$$

□

BÀI 37 (USA Mathematical Olympiads 2014). Cho các số thực a, b, c, d thỏa mãn điều kiện $b - d \geq 5$ và tất cả các nghiệm x_1, x_2, x_3, x_4 của đa thức

$$P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$$

đều là nghiệm thực. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$(x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1)(x_3^2 + 1)(x_4^2 + 1).$$

Lời giải

Theo định lý Viet, ta có $d = x_1x_2x_3x_4$ và

$$b = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4.$$

Do $b - d \geq 5$ nên

$$(x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4) - x_1x_2x_3x_4 \geq 5.$$

Trong kết quả bài toán 34, lấy $k = 1$ ta được

$$\begin{aligned} &(1 - (x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4) + x_1x_2x_3x_4)^2 \\ &\leq (1 + x_1^2)(1 + x_2^2)(1 + x_3^2)(1 + x_4^2). \end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned} 16 &\leq (1 - (x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4) - x_1x_2x_3x_4)^2 \\ &\leq (1 + x_1^2)(1 + x_2^2)(1 + x_3^2)(1 + x_4^2). \end{aligned}$$

Xét đa thức $P(x) = (x - 1)^4$ có 4 nghiệm $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$, khi đó

$$(x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1)(x_3^2 + 1)(x_4^2 + 1) = 16.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức đã cho là 16.

□

E. SỬ DỤNG SỐ PHỨC GIẢI PHƯƠNG TRÌNH, HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Một phương trình nghiệm phức $f(z) = 0$, với $z = x + iy$, ta biến đổi thành

$$h(x, y) + ig(x, y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} h(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0. \end{cases}$$

Nghĩa là một phương trình nghiệm phức, bằng cách tách phần thực và phần ảo luôn có thể đưa về hệ phương trình.

BÀI 38. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^3 - 6xy^2 = 5 & (1) \\ 6x^2y - 2y^3 = 5\sqrt{3}. & (2) \end{cases}$

 **Lời giải**

Nhân hai vế của (2) với i rồi cộng với (1) ta được

$$\begin{aligned} 2x^3 - 6xy^2 + (6x^2y - 2y^3)i &= 5 + 5\sqrt{3}i \\ \Leftrightarrow x^3 - 3xy^2 + (3x^2y - y^3)i &= \frac{5}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2}i \\ \Leftrightarrow x^3 + 3x^2yi + 3xy^2i^2 + y^3i^3 &= \frac{5}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2}i \\ \Leftrightarrow (x + yi)^3 &= 5 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right). \end{aligned}$$

Vậy $x + yi$ là căn bậc ba của số phức $z = 5 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = 5 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$. Mà z có các căn bậc ba là

$$\begin{aligned} z_0 &= \sqrt[3]{5} \left(\cos \frac{\pi}{9} + i \sin \frac{\pi}{9} \right), \\ z_1 &= \sqrt[3]{5} \left(\cos \frac{\frac{\pi}{3} + 2\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{3} + 2\pi}{3} \right) = \sqrt[3]{5} \left(\cos \frac{7\pi}{9} + i \sin \frac{7\pi}{9} \right), \\ z_2 &= \sqrt[3]{5} \left(\cos \frac{\frac{\pi}{3} + 4\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{3} + 4\pi}{3} \right) = \sqrt[3]{5} \left(\cos \frac{13\pi}{9} + i \sin \frac{13\pi}{9} \right). \end{aligned}$$

Vậy các nghiệm của hệ phương trình là

$$\begin{cases} x = \sqrt[3]{5} \cos \frac{\pi}{9} \\ y = \sqrt[3]{5} \cos \frac{\pi}{9} \end{cases}; \begin{cases} x = \sqrt[3]{5} \cos \frac{7\pi}{9} \\ y = \sqrt[3]{5} \cos \frac{7\pi}{9} \end{cases}; \begin{cases} x = \sqrt[3]{5} \cos \frac{13\pi}{9} \\ y = \sqrt[3]{5} \cos \frac{13\pi}{9} \end{cases}.$$

Lưu ý. Cách giải này rất độc đáo và nhanh hơn nhiều so với cách sử dụng tính đẳng cấp của hệ, rồi đưa về phương trình đa thức bậc ba. $\square$

BÀI 39 (HSG Quốc gia năm học 2006-2007). Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \left(1 - \frac{12}{y+3x} \right) \sqrt{x} = 2 \\ \left(1 + \frac{12}{y+3x} \right) \sqrt{y} = 6. \end{cases}$$

Lời giải

Điều kiện $x \geq 0, y \geq 0, y + 3x \neq 0$. Đặt $u = \sqrt{3x} \geq 0, v = \sqrt{y} \geq 0$. Thay vào hệ, ta được

$$\begin{cases} \left(1 - \frac{12}{u^2 + v^2}\right) \frac{u}{\sqrt{3}} = 2 \\ \left(1 + \frac{12}{u^2 + v^2}\right) v = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u - \frac{12u}{u^2 + v^2} = 2\sqrt{3} \quad (1) \\ v + \frac{12v}{u^2 + v^2} = 6. \quad (2) \end{cases}$$

Nhân phương trình (2) với i , sau đó cộng với phương trình (1) ta được

$$u + vi - \frac{12(u - vi)}{u^2 + v^2} = 2\sqrt{3} + 6i. \quad (3)$$

Xét số phức $z = u + vi$, với $u \geq 0, v \geq 0$. Khi đó (3) viết lại

$$\begin{aligned} z - \frac{12\bar{z}}{z\bar{z}} &= 2\sqrt{3} + 6i \Leftrightarrow z - \frac{12}{z} = 2(\sqrt{3} + 3i) \\ &\Leftrightarrow z^2 - 2(\sqrt{3} + 3i)z - 12 = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Ta có

$$\begin{aligned} \Delta' &= (\sqrt{3} + 3i)^2 + 12 = -6 + 6\sqrt{3}i + 12 = 6 + 6\sqrt{3}i \\ &= 12 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = 12 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right). \end{aligned}$$

Vậy Δ' có hai căn bậc hai là

$$\pm \sqrt{12} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = \pm \sqrt{12} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = \pm (3 + \sqrt{3}i).$$

Từ (4) ta có

$$\begin{cases} z = \sqrt{3} + 3i + 3 + \sqrt{3}i = \sqrt{3} + 3 + (3 + \sqrt{3})i \\ z = \sqrt{3} + 3i - 3 - \sqrt{3}i = \sqrt{3} - 3 + (3 - \sqrt{3})i. \end{cases}$$

Do $u \geq 0$ và $v \geq 0$ nên

$$\begin{cases} u = \sqrt{3} + 3 \\ v = \sqrt{3} + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{(\sqrt{3} + 3)^2}{3} \\ y = (\sqrt{3} + 3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 + 2\sqrt{3} \\ y = 3(4 + 2\sqrt{3}). \end{cases}$$

Hệ đã cho có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x = 4 + 2\sqrt{3} \\ y = 3(4 + 2\sqrt{3}). \end{cases}$ □

BÀI 40. Giải phương trình

$$x^5 + 45x^4 + 210x^3 + 210x^2 + 45x + 1 = 0. \quad (1)$$

Lời giải

Xét $x < 0$. Ta có $C_{20}^{2k}(i\sqrt{-x})^{2k} = C_{20}^{2k}(-1)^k(-x)^k = C_{20}^{2k}x^k$. Suy ra

$$(1 + i\sqrt{-x})^{10} + (1 - i\sqrt{-x})^{10} = 2(C_{10}^0 + C_{10}^2x + C_{10}^4x^2 + \dots + C_{10}^{10}x^5).$$

Do đó

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow 2(C_{10}^0 + C_{10}^2x + C_{10}^4x^2 + \dots + C_{10}^{10}x^5) = 0 \\ &\Leftrightarrow (1 + i\sqrt{-x})^{10} + (1 - i\sqrt{-x})^{10} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1 + i\sqrt{-x}}{1 - i\sqrt{-x}}\right)^{10} = -1. \end{aligned}$$

Nghĩa là $\frac{1 + i\sqrt{-x}}{1 - i\sqrt{-x}}$ là một căn bậc mười của $-1 = \cos \pi + i \sin \pi$. Do đó

$$\frac{1 + i\sqrt{-x}}{1 - i\sqrt{-x}} = \cos \frac{\pi + k2\pi}{10} + i \sin \frac{\pi + k2\pi}{10}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, 9. \quad (2)$$

Ta có

$$\begin{aligned} &(1 - i\sqrt{-x}) \left(\cos \frac{\pi + k2\pi}{10} + i \sin \frac{\pi + k2\pi}{10} \right) \\ &= \left(\cos \frac{\pi + k2\pi}{10} + \sqrt{-x} \sin \frac{\pi + k2\pi}{10} \right) + \left(\sin \frac{\pi + k2\pi}{10} - \sqrt{-x} \cos \frac{\pi + k2\pi}{10} \right) i. \end{aligned}$$

Từ (2) ta nhân chéo, sau đó đồng nhất phần thực với phần thực, phần ảo với phần ảo được kết quả

$$\sqrt{-x} = \tan \frac{\pi + k2\pi}{20}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, 9. \quad (3)$$

Do $\sqrt{-x} > 0$ nên trong (3) ta chỉ cho k chạy từ 0 đến 4. Vậy phương trình (1) có 5 nghiệm là

$$x = -\tan^2 \frac{\pi + k2\pi}{20}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4. \quad (4)$$

Nhưng (1) là phương trình đa thức bậc 5 nên có không quá 5 nghiệm. Vậy (4) cho ta tất cả các nghiệm của (1).

Lưu ý. Sẽ là sai lầm nếu cho rằng

$$C_{10}^0 + C_{10}^2x + C_{10}^4x^2 + \dots + C_{10}^{10}x^5 = \frac{(1 + \sqrt{x})^{10} + (1 - \sqrt{x})^{10}}{2}$$

và $(1 + \sqrt{x})^{10} + (1 - \sqrt{x})^{10} > 0$ nên suy ra (1) vô nghiệm. Cần nhớ rằng giải phương trình là tìm x thuộc tập xác định và thỏa mãn phương trình (1). Bài toán 40 này còn được giải như sau :

$$(1) \Leftrightarrow (x + 1)(x^4 + 44x^3 + 166x^2 + 44x + 1) = 0.$$

Phương trình $x^4 + 44x^3 + 166x^2 + 44x + 1 = 0$ gọi là phương trình với hệ số phản hồi, trường hợp đặc biệt này, gọi là phương trình đối xứng. $\square$

BÀI 41. Giải phương trình

$$64x^6 - 2112x^5 + 7920x^4 - 7392x^3 + 1980x^2 - 132x + 1 = 0.$$

Lời giải

Đặt $x = pt$, thay vào phương trình, dẫn tới cần phải chọn $p = 2$. Một dấu hiệu khác cũng khá rõ ràng, đó là hệ số tự do là 1, số hạng chứa lũy thừa cao nhất là $64x^6 = (-2x)^6$. $\square$

BÀI 42. Chứng minh rằng $(1 + \sqrt{x})^{20} + (1 - \sqrt{x})^{20} = P_{10}(x)$, trong đó $P_{10}(x)$ là một đa thức bậc mười. Giải phương trình $P_{10}(x) = 0$.

Lời giải

Ta có $P_{10}(x) = 2(C_{20}^0 + C_{20}^2x + C_{20}^4x^2 + \dots + C_{20}^{20}x^{10})$. Vậy $P_{10}(x)$ là một đa thức bậc mười. Để thấy rằng $x \geq 0$ không thỏa mãn phương trình $P_{10}(x) = 0$. Tiếp theo xét $x < 0$. Khi đó

$$P_{10}(x) = (1 + i\sqrt{-x})^{20} + (1 - i\sqrt{-x})^{20}.$$

Phương trình $P_{10}(x) = 0$ tương đương với

$$(1 + i\sqrt{-x})^{20} = -(1 - i\sqrt{-x})^{20} \Leftrightarrow \left(\frac{1 + i\sqrt{-x}}{1 - i\sqrt{-x}}\right)^{20} = -1.$$

Nghĩa là $\frac{1 + i\sqrt{-x}}{1 - i\sqrt{-x}}$ là một căn bậc hai mươi của $-1 = \cos \pi + i \sin \pi$. Do đó

$$\frac{1 + i\sqrt{-x}}{1 - i\sqrt{-x}} = \cos \frac{\pi + k2\pi}{20} + i \sin \frac{\pi + k2\pi}{20}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, 19. \quad (1)$$

Ta có

$$\begin{aligned} & (1 - i\sqrt{-x}) \left(\cos \frac{\pi + k2\pi}{20} + i \sin \frac{\pi + k2\pi}{20} \right) \\ &= \left(\cos \frac{\pi + k2\pi}{20} + \sqrt{-x} \sin \frac{\pi + k2\pi}{20} \right) + \left(\sin \frac{\pi + k2\pi}{20} - \sqrt{-x} \cos \frac{\pi + k2\pi}{20} \right) i. \end{aligned}$$

Từ (1) ta nhân chéo, sau đó đồng nhất phần thực với phần thực, phần ảo với phần ảo được kết quả

$$\sqrt{-x} = \tan \frac{\pi + k2\pi}{40}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, 19. \quad (2)$$

Do $\sqrt{-x} > 0$ nên trong (2) ta chỉ cho k chạy từ 0 đến 9. Vậy phương trình $P_{10}(x) = 0$ có 10 nghiệm là $x = -\tan^2 \frac{\pi + k2\pi}{40}, \quad k = 0, 1, \dots, 9.$ $\square$

BÀI 43. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^4 - 6x^2y^2 + y^4 = \sqrt{3} & (1) \\ x^3y - y^3x = \frac{1}{4}. & (2) \end{cases}$$

Lời giải

Xét số phức $z = x + yi$, với $x, y \in \mathbb{R}$. Vì

$$z^4 = (x + yi)^4 = x^4 + 4x^3yi + 6x^2y^2i^2 + 4xy^3i^3 + y^4i^4$$

$$= (x^4 - 6x^2y^2 + y^4) + 4(x^3y - y^3x)i.$$

nên từ hệ đã cho ta có $z^4 = \sqrt{3} + i = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$. Vậy $z = x + yi$ là một căn bậc bốn của số phức $2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$. Các căn bậc bốn của số phức $2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$ là

$$\sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{\pi}{24} + i \sin \frac{\pi}{24} \right), \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{13\pi}{24} + i \sin \frac{13\pi}{24} \right), \\ \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{25\pi}{24} + i \sin \frac{25\pi}{24} \right), \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{37\pi}{24} + i \sin \frac{37\pi}{24} \right).$$

Hay

$$\begin{cases} x + yi = \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{\pi}{24} + i \sin \frac{\pi}{24} \right) \\ x + yi = \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{13\pi}{24} + i \sin \frac{13\pi}{24} \right) \\ x + yi = \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{25\pi}{24} + i \sin \frac{25\pi}{24} \right) \\ x + yi = \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{37\pi}{24} + i \sin \frac{37\pi}{24} \right) \end{cases}.$$

Hệ đã cho có 4 nghiệm :

$$\begin{cases} x = \sqrt[4]{2} \cos \frac{\pi}{24} \\ y = \sqrt[4]{2} \sin \frac{\pi}{24} \end{cases}; \begin{cases} x = \sqrt[4]{2} \cos \frac{13\pi}{24} \\ y = \sqrt[4]{2} \sin \frac{13\pi}{24} \end{cases}; \\ \begin{cases} x = \sqrt[4]{2} \cos \frac{25\pi}{24} \\ y = \sqrt[4]{2} \sin \frac{25\pi}{24} \end{cases}; \begin{cases} x = \sqrt[4]{2} \cos \frac{37\pi}{24} \\ y = \sqrt[4]{2} \sin \frac{37\pi}{24} \end{cases}.$$

□

BÀI 44. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x + \frac{3x - y}{x^2 + y^2} = 3 \\ y - \frac{x + 3y}{x^2 + y^2} = 0. \end{cases}$$

 **Lời giải**

Điều kiện $x^2 + y^2 \neq 0$. Xét số phức $z = x + iy$. Khi đó

$$iz = ix - y, x^2 + y^2 = |z|^2 = z\bar{z}.$$

Hệ phương trình đã cho viết lại

$$\begin{cases} x + \frac{3x - y}{x^2 + y^2} = 3 & (1) \\ yi - \frac{x + 3y}{x^2 + y^2}i = 0. & (2) \end{cases}$$

Lấy (1) trừ (2) theo vế ta được

$$x - yi + \frac{3x - y}{x^2 + y^2} + \frac{x + 3y}{x^2 + y^2}i = 3 \Leftrightarrow x - yi + \frac{3(x + yi)}{x^2 + y^2} - \frac{y - xi}{x^2 + y^2} = 3$$

Hay

$$\bar{z} + 3 \frac{z}{z \cdot \bar{z}} + \frac{iz}{z \cdot \bar{z}} = 3 \Leftrightarrow \bar{z} + 3 \frac{1}{\bar{z}} + \frac{i}{\bar{z}} = 3 \Leftrightarrow (\bar{z})^2 - 3\bar{z} + 3 + i = 0.$$

Ta có $\Delta = 9 - 4(3 + i) = -3 - 4i$. Xét số phức $a + bi$ thỏa mãn điều kiện

$$-3 - 4i = (a + bi)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = -3 \\ 2ab = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = -3 \\ b = -\frac{2}{a} \end{cases}$$

Khi đó

$$a^2 - \frac{4}{a^2} = -3 \Leftrightarrow a^4 + 3a^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow a^2 = 1 \Leftrightarrow a = \pm 1.$$

Vậy $(a; b) = (1; -2); (a; b) = (-1; 2)$. Do đó $\Delta = -3 - 4i$ có hai căn bậc hai là $\pm(1 - 2i)$.

Suy ra

$$\begin{cases} \bar{z} = \frac{3 + (1 - 2i)}{2} = 2 - i \\ \bar{z} = \frac{3 - (1 - 2i)}{2} = 1 + i. \end{cases}$$

Nghĩa là

$$\begin{cases} x - yi = 2 - i \\ x - yi = 1 + i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x; y) = (2; 1) \\ (x; y) = (1; -1). \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có hai nghiệm là $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ và $\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$. □

BÀI 45 (HSG quốc gia-1996). Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sqrt{3x} \left(1 + \frac{1}{x+y} \right) = 2 \\ \sqrt{7y} \left(1 - \frac{1}{x+y} \right) = 4\sqrt{2}. \end{cases}$$

 **Lời giải**

Điều kiện $x > 0$ và $y > 0$. Đặt $u = \sqrt{x}$, $v = \sqrt{y}$. Hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} u \left(1 + \frac{1}{u^2 + v^2} \right) = \frac{2}{\sqrt{3}} \\ v \left(1 - \frac{1}{u^2 + v^2} \right) = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7}} \end{cases}$$

Vì $u^2 + v^2$ là bình phương của môđun của số phức $z = u + iv$ nên ta biến đổi hệ phương trình thành:

$$\begin{cases} u + \frac{u}{u^2 + v^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \\ v - \frac{v}{u^2 + v^2} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + \frac{u}{u^2 + v^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} & (1) \\ iv - \frac{iv}{u^2 + v^2} = \frac{4\sqrt{2}i}{\sqrt{7}} & (2) \end{cases}$$

Cộng (1) và (2) theo vế ta được:

$$u + iv + \frac{u - iv}{u^2 + v^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{4\sqrt{2}i}{\sqrt{7}}. \quad (3)$$

Vì $\frac{u - iv}{u^2 + v^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \frac{1}{z}$ nên (3) viết lại

$$z + \frac{1}{z} = \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{4\sqrt{2}i}{\sqrt{7}} \Leftrightarrow z^2 - 2\left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2\sqrt{2}i}{\sqrt{7}}\right)z + 1 = 0. \quad (4)$$

Ta có

$$\Delta' = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2\sqrt{2}i}{\sqrt{7}}\right)^2 - 1 = \frac{1}{3} - \frac{8}{7} + \frac{4\sqrt{2}i}{\sqrt{21}} - 1 = -\frac{38}{21} + \frac{4\sqrt{2}i}{\sqrt{21}}.$$

Xét số phức $a + bi$ thỏa mãn điều kiện

$$-\frac{38}{21} + \frac{4\sqrt{2}i}{\sqrt{21}} = (a + bi)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = -\frac{38}{21} \\ 2ab = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{21}} \end{cases}$$

Khi đó

$$a^2 - \frac{8}{21a^2} = \frac{-38}{21} \Leftrightarrow 21a^4 + 38a^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow a^2 = \frac{-19 + 23}{21} = \frac{4}{21}.$$

Vậy $(a; b) = \left(\frac{2}{\sqrt{21}}; \sqrt{2}\right); (a; b) = \left(-\frac{2}{\sqrt{21}}; -\sqrt{2}\right)$. Do đó

$$z = u + iv = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \pm \frac{2}{\sqrt{21}}\right) + \left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}} \pm \sqrt{2}\right)i.$$

$$\text{Vì } u > 0 \text{ và } v > 0 \text{ nên } \begin{cases} u = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{21}} \\ v = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}} + \sqrt{2}. \end{cases} \text{ Do đó}$$

$$\begin{cases} x = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{21}}\right)^2 = \frac{11}{21} + \frac{4}{3\sqrt{7}} \\ y = \left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}} + \sqrt{2}\right)^2 = \frac{22}{7} + \frac{8}{\sqrt{7}}. \end{cases}$$

Hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là

$$\begin{cases} x = \frac{11}{21} + \frac{4}{3\sqrt{7}} \\ y = \frac{22}{7} + \frac{8}{\sqrt{7}}. \end{cases}$$

□

F. HỆ LẬP SINH BỞI CÁC ĐA THỨC ĐỐI XỨNG BA BIẾN

BÀI 46. Tìm các số phức x, y, z khác nhau đôi một và thỏa mãn:

$$\begin{cases} x = y^3 + z^3 \\ y = z^3 + x^3 \\ z = x^3 + y^3. \end{cases}$$

Lời giải

Đặt $\sigma_1 = x + y + z$, $\sigma_2 = xy + yz + zx$, $\sigma_3 = xyz$. Khi đó:

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 + z^3 &= 3xyz + (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) \\ &= 3\sigma_3 + \sigma_1(\sigma_1^2 - 3\sigma_2) = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3. \end{aligned}$$

Hệ đã cho viết lại:

$$\begin{cases} x = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3 - x^3 \\ y = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3 - y^3 \\ z = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3 - z^3. \end{cases}$$

Hay x, y, z là nghiệm của phương trình:

$$t = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3 - t^3 \Leftrightarrow t^3 + t - (\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3) = 0. \quad (1)$$

Mặt khác, theo định lí Viet thì x, y, z cũng là nghiệm của phương trình:

$$t^3 - \sigma_1 t^2 + \sigma_2 t - \sigma_3 = 0. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$\begin{cases} -\sigma_1 = 0 \\ \sigma_2 = 1 \\ -\sigma_3 = -(\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma_1 = 0 \\ \sigma_2 = 1 \\ \sigma_3 = 0. \end{cases}$$

Như vậy x, y, z là nghiệm của phương trình:

$$t^3 + t = 0 \Leftrightarrow t(t^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = i \\ t = -i. \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ đã cho là $(0; i; -i)$ và các hoán vị. □

BÀI 47. Tìm các số phức a, b, c, d khác nhau đôi một và thỏa mãn:

$$\begin{cases} a^4 = bcd + 1 \\ b^4 = cda + 1 \\ c^4 = dab + 1 \\ d^4 = abc + 1. \end{cases}$$

Lời giải

Đặt $\sigma_4 = abcd$. Lần lượt nhân phương trình thứ nhất, thứ hai, thứ ba, thứ tư với a, b, c, d ta được:

$$\begin{cases} a^5 = abcd + a \\ b^5 = abcd + b \\ c^5 = abcd + c \\ d^5 = abcd + d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^5 = \sigma_4 + a \\ b^5 = \sigma_4 + b \\ c^5 = \sigma_4 + c \\ d^5 = \sigma_4 + d. \end{cases}$$

Như vậy a, b, c, d là nghiệm của phương trình:

$$t^5 = \sigma_4 + t \Leftrightarrow t^5 - t - \sigma_4 = 0. \quad (1)$$

Tuy nhiên phương trình (1) có đủ 5 nghiệm phức là a, b, c, d và r . Khi đó áp dụng định lý Viet, ta được: $\sigma_4 = r\sigma_4 \Leftrightarrow \sigma_4(r - 1) = 0. \quad (2)$

☑ Nếu $r = 1$ thì do 1 là nghiệm của phương trình (1) nên

$$1^5 - 1 - \sigma_4 = 0 \Leftrightarrow \sigma_4 = 0.$$

☑ Nếu $r \neq 1$ thì từ (2) suy ra $\sigma_4 = 0$.

Như vậy, ta luôn có $\sigma_4 = 0$. Vì thế nên (1) tương đương:

$$t^5 - t = 0 \Leftrightarrow t(t^2 - 1)(t^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow t \in \{0; 1; -1; i; -i\}.$$

☑ Do $\sigma_4 = 0$ nên trong 4 số a, b, c, d phải có một số bằng 0.

☑ Hơn nữa bộ $(a; b; c; d) = (0; 1; i; -i)$ không thỏa mãn hệ.

☑ Với $a, b, c, d \in \{0; 1; -1; i; -i\}$ thì $a^4, b^4, c^4, d^4 \in \{0; 1\}$, do đó từ hệ đã cho suy ra: $abc, bcd, cda, dab \in \{0; -1\}$, dẫn tới trong 4 số a, b, c, d phải có đủ 3 số $0, i, -i$.

Suy ra các nghiệm của hệ là $(0; -1; i; i)$ và 23 hoán vị khác của nó. □

BÀI 48. Tìm các số phức x, y, z khác nhau đôi một và thỏa mãn:

$$\begin{cases} x^3 + x^2 = \frac{y^2 + z^2}{yz - 1} \\ y^3 + y^2 = \frac{z^2 + x^2}{zx - 1} \\ z^3 + z^2 = \frac{x^2 + y^2}{xy - 1}. \end{cases}$$

✍️ Lời giải

Điều kiện: $xy \neq 1, yz \neq 1, zx \neq 1$. Nếu $x = 0$ thì thay vào hệ ta được

$$\begin{cases} y^2 + z^2 = 0 \\ y^3 + y^2 = -z^2 \\ z^3 + z^2 = -y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 + z^2 = 0 \\ y^3 = 0 \\ z^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = 0, \end{cases}$$

mâu thuẫn với giả thiết các số phức x, y, z khác nhau đôi một. Như vậy $x \neq 0$ và tương tự, ta suy ra $y \neq 0, z \neq 0$. Đặt:

$$\sigma_1 = x + y + z, \sigma_2 = xy + yz + zx, \sigma_3 = xyz.$$

Khi đó: $x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2(xy + yz + zx) = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$. Phương trình thứ nhất của hệ đã cho trở thành:

$$\begin{aligned} x^3 + x^2 &= \frac{\sigma_1^2 - 2\sigma_2 - x^2}{\frac{\sigma_3}{x} - 1} \\ \Leftrightarrow \sigma_3 x^2 - x^3 + \sigma_3 x - x^2 &= \sigma_1^2 - 2\sigma_2 - x^2 \\ \Leftrightarrow x^3 - \sigma_3 x^2 - \sigma_3 x + \sigma_1^2 - 2\sigma_2 &= 0. \end{aligned}$$

Điều này có nghĩa là x là nghiệm của phương trình:

$$t^3 - \sigma_3 t^2 - \sigma_3 t + \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = 0. \quad (1)$$

Tương tự, ta cũng suy ra được y, z là nghiệm của (1). Mặt khác, theo định lí Viet suy ra x, y, z cũng là nghiệm của phương trình:

$$t^3 - \sigma_1 t^2 + \sigma_2 t - \sigma_3 = 0. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$\begin{aligned} \begin{cases} \sigma_1 = \sigma_3 \\ \sigma_2 = -\sigma_3 \\ \sigma_3 = -\sigma_1^2 + 2\sigma_2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \sigma_3 = \sigma_1 \\ \sigma_2 = -\sigma_1 \\ \sigma_1 = -\sigma_1^2 - 2\sigma_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma_3 = \sigma_1 \\ \sigma_2 = -\sigma_1 \\ \sigma_1^2 + 3\sigma_1 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma_3 = \sigma_1 \\ \sigma_2 = -\sigma_1 \\ \sigma_1 \in \{0; -3\} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (\sigma_1; \sigma_2; \sigma_3) = (0; 0; 0) \text{ (loại)} \\ (\sigma_1; \sigma_2; \sigma_3) = (-3; 3; -3). \end{cases} \end{aligned}$$

Như vậy x, y, z là nghiệm của phương trình:

$$t^3 + 3t^2 + 3t + 3 = 0 \Leftrightarrow (t + 1)^3 = -2 \Leftrightarrow \left(-\frac{t+1}{\sqrt[3]{2}}\right)^3 = 1. \quad (3)$$

Phương trình (3) nghĩa là $-\frac{t+1}{\sqrt[3]{2}}$ là căn bậc 3 của $1 = \cos 0 + i \sin 0$ hay:

$$\begin{cases} -\frac{t+1}{\sqrt[3]{2}} = \cos 0 + i \sin 0 \\ -\frac{t+1}{\sqrt[3]{2}} = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \\ -\frac{t+1}{\sqrt[3]{2}} = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t+1 = -\sqrt[3]{2} \\ t+1 = -\sqrt[3]{2} \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \\ t+1 = -\sqrt[3]{2} \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \end{cases}.$$

Nghiệm $(x; y; z)$ của hệ là

$$\left(-\sqrt[3]{2} - 1; -\sqrt[3]{2} \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) - 1; -\sqrt[3]{2} \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) - 1\right)$$

và các hoán vị. □

BÀI 2. SỬ DỤNG SỐ PHỨC ĐỂ GIẢI PHƯƠNG TRÌNH HÀM ĐA THỨC

Nghiệm của đa thức đóng vai trò quan trọng trong việc xác định một đa thức. Cụ thể, nếu đa thức $P(x)$ bậc n ($n \in \mathbb{N}^*$) có n nghiệm $x_1, x_2, \dots, x_n$ thì $P(x)$ có dạng

$$P(x) = c(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n).$$

Tuy nhiên nếu chỉ xét các nghiệm thực thì trong nhiều trường hợp sẽ không đủ số nghiệm. Hơn nữa trong bài toán phương trình hàm đa thức, nếu chỉ xét các nghiệm thực thì lời giải sẽ không hoàn chỉnh. Định lý cơ bản của đại số vì vậy đóng một vai trò hết sức quan trọng trong dạng toán này.

☑ **Định lý cơ bản của đại số.** Mọi đa thức bậc n hệ số phức (thực)

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \text{ (với } a_n \neq 0)$$

đều có đủ n nghiệm phức (phân biệt hay trùng nhau).

☑ **Định lý Viet thuận:** Nếu $x_1, x_2, \dots, x_n$ là n nghiệm (phân biệt hay trùng nhau) của đa thức $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ($a_n \neq 0$) thì:

$$\begin{aligned} S_1 &= x_1 + x_2 + \dots + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \\ S_2 &= x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n = \frac{a_{n-2}}{a_n} \\ S_3 &= x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + \dots + x_{n-2} x_{n-1} x_n = -\frac{a_{n-3}}{a_n} \\ &\dots\dots\dots \\ S_n &= x_1 x_2 \dots x_n = (-1)^n \cdot \frac{a_0}{a_n}. \end{aligned}$$

☑ **Định lý Viet đảo:** Nếu n số $x_1, x_2, \dots, x_n$ thỏa mãn

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \dots + x_n &= S_1 \\ x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n &= S_2 \\ x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + \dots + x_{n-2} x_{n-1} x_n &= S_3 \\ &\dots\dots\dots \\ x_1 x_2 \dots x_n &= S_n \end{aligned}$$

thì $x_1, x_2, \dots, x_n$ là nghiệm của phương trình

$$x^n - S_1 x^{n-1} + S_2 x^{n-2} + \dots + (-1)^{n-1} S_{n-1} x + (-1)^n S_n = 0.$$

☑ Cho hai số phức z_1 và z_2 . Khi đó:

$$\begin{aligned} |z_1 z_2| &= |z_1| |z_2| \\ |z_1 + z_2| &\leq |z_1| + |z_2|, \text{ dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi } z_1 = k z_2, \text{ với } k \geq 0. \\ |z_1 - z_2| &\geq ||z_1| - |z_2||. \end{aligned}$$

BÀI 1 (Olympic Hồng Kông-1999). Cho k là số nguyên dương. Tìm các đa thức hệ số thực thỏa mãn điều kiện $P(P(x)) = [P(x)]^k, \forall x \in \mathbb{R}$. (1)

 Lời giải

Xét trường hợp $P(x) \equiv C$ (C là hằng số). Từ (1) được $C = C^k$. Khi $k = 1$ thì C là hằng số bất kì. Khi $k > 1$ thì:

$$C = C^k \Leftrightarrow C(C^{k-1} - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} C = 0 \\ C^{k-1} = 1. \end{cases}$$

Nếu k chẵn thì $C = 1$ hoặc $C = 0$, nếu k lẻ thì $C = 0$ hoặc $C = 1$ hoặc $C = -1$. Tiếp theo ta xét trường hợp $\deg P \geq 1$. Vì đa thức $P(x) - x$ luôn có nghiệm (xét cả nghiệm phức) nên với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, tồn tại $\alpha_n \in \mathbb{C}$ sao cho $P(\alpha_n) = \alpha_n$. Từ đó

$$P(\alpha_n) = P(P(\alpha_n)) \stackrel{\text{theo (1)}}{=} [P(\alpha_n)]^k = \alpha_n^k, \forall n = 1, 2, \dots \quad (2)$$

Từ (2) suy ra đa thức $P(x) - x^k$ có vô số nghiệm, hay $P(x) - x^k \equiv 0$, nghĩa là $P(x) \equiv x^k$. Thử lại thấy thỏa mãn.

Kết luận: Nếu $k = 0$ thì $P(x) \equiv C$ (C là hằng số bất kì). Nếu $k > 1$ thì các đa thức thỏa mãn đề bài là

$$P(x) \equiv 0, P(x) \equiv 1, P(x) \equiv x^k.$$

□

BÀI 2. Tìm tất cả các đa thức hệ số thực $P(x)$ thỏa mãn:

$$P(x)P(x+1) = P(x^2 + x + 1), \forall x \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

 Lời giải

Nếu $P(x) \equiv a$ (a là hằng số) thì thay vào (1) ta được

$$a^2 = a \Leftrightarrow a(a-1) = 0 \Leftrightarrow a \in \{0, 1\}.$$

Bây giờ ta xét $P(x)$ là đa thức có bậc lớn hơn hoặc bằng 1. Giả sử a là một nghiệm của $P(x)$. Khi đó $a^2 + a + 1$ cũng là nghiệm. Trong (1) thay x bởi $x-1$ ta được

$$P(x-1)P(x) = P(x^2 - x + 1), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Vì $P(a) = 0$ nên suy ra $P(a^2 - a + 1) = 0$, vậy $a^2 - a + 1$ cũng là nghiệm của $P(x)$. Chọn a là nghiệm có môđun lớn nhất (nếu có nhiều nghiệm như thế thì ta chọn một trong chúng). Từ cách chọn suy ra

$$|a^2 + a + 1| \leq |a|, \quad |a^2 - a + 1| \leq |a|.$$

Theo bất đẳng thức về môđun ta có

$$\begin{aligned} |2a| &= |(a^2 + a + 1) + (-a^2 + a - 1)| \leq |a^2 + a + 1| + |-a^2 + a - 1| \\ &= |a^2 + a + 1| + |a^2 - a + 1| \leq |a| + |a| = 2|a| = |2a|. \end{aligned}$$

Như vậy dấu bằng phải xảy ra ở các bất đẳng thức trên, suy ra

$$|(a^2 + a + 1) + (-a^2 + a - 1)| = |a^2 + a + 1| + |-a^2 + a - 1|,$$

suy ra tồn tại số thực $s \geq 0$ sao cho $a^2 + a + 1 = s(-a^2 + a - 1)$.

Nếu $|a^2 + a + 1| < |a^2 - a + 1|$ thì:

$$2|a^2 - a + 1| > |a^2 - a + 1| + |a^2 + a + 1| \geq |2a| \Rightarrow |a^2 - a + 1| > |a|.$$

Tương tự nếu $|a^2 + a + 1| > |a^2 - a + 1|$ thì $|a^2 + a + 1| > |a|$, mâu thuẫn với cách chọn a . Vậy $|a^2 - a + 1| = |a^2 + a + 1|$. Từ đó $s = 1$ và ta có

$$a^2 + a + 1 = -a^2 + a - 1 \Leftrightarrow a^2 = -1 \Leftrightarrow a = \pm i.$$

Vậy $P(x) = (x^2 + 1)^m Q(x)$, trong đó $Q(x)$ là đa thức không chia hết cho $x^2 + 1$. Thay vào (1), ta có

$$(x^2 + 1)^m Q(x)(x^2 + 2x + 2)^m Q(x + 1) = [(x^2 + x + 1)^2 + 1]^m Q(x^2 + x + 1).$$

Hay $Q(x)Q(x + 1) = Q(x^2 + x + 1)$. Vậy $Q(x)$ cũng thỏa (1). Nếu như $Q(x)$ có nghiệm thì ta làm tương tự như trên, nghiệm có môđun lớn nhất phải là $i, -i$. Nhưng điều này không thể vì $Q(x)$ không chia hết cho $x^2 + 1$. Bởi vậy $Q(x)$ là hằng số. Giả sử đó là c , thay vào (1) ta được $c = 1$. Vậy $P(x) = (x^2 + 1)^m$. Thử lại ta kết luận: tất cả các đa thức thỏa mãn đề bài là

$$P(x) \equiv 0, P(x) \equiv 1, P(x) = (x^2 + 1)^m \text{ (với } m = 1, 2, \dots)$$

□

BÀI 3. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ với hệ số thực thỏa mãn:

$$P(x)P(2x^2) = P(2x^3 + x), \forall x \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Lời giải

Với đa thức hằng $P(x) \equiv a$, ta có $a^2 = a \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 1 \end{cases}$.

Vậy $P(x) \equiv 0$ và $P(x) \equiv 1$ thỏa mãn bài ra. Tiếp theo xét trường hợp $P(x)$ khác hằng số. Giả sử

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \text{ với } a_n \neq 0$$

là đa thức thỏa mãn các yêu cầu bài toán. Từ (1) ta có

$$\begin{aligned} & (a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0) [a_n (2x^2)^n + \dots + a_1 (2x^2) + a_0] \\ &= [a_n (2x^3 + x)^n + \dots + a_1 (2x^3 + x) + a_0]. \end{aligned}$$

So sánh hệ số của x^{3n} và hệ số tự do ở hai vế ta được

$$\begin{cases} 2^n a_n^2 = 2^n a_n \\ a_0^2 = a_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_n^2 = a_n \\ a_0 \in \{0, 1\} \end{cases} \xrightarrow{\text{do } a_n \neq 0} \begin{cases} a_n = 1 \\ a_0 \in \{0, 1\} \end{cases}.$$

Trường hợp 1. $a_n = 1$ và $a_0 = 0$. Khi đó

$$P(x) = x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x = x^\ell P_1(x), \text{ với } \ell \in \mathbb{N}^*, P_1(0) \neq 0.$$

Thay vào (1) ta được

$$\begin{aligned} x^\ell P_1(x)(2x^2)^\ell P_1(2x^2) &= (2x^3 + x)^\ell P_1(2x^3 + x), \forall x \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow P_1(x)(2x^2)^\ell P_1(2x^2) &= (2x^2 + 1)^\ell P_1(2x^3 + x), \forall x \neq 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Do hàm đa thức liên tục trên $\mathbb{R}$, nên từ (2), cho $x \rightarrow 0$ ta được $P_1(0) = 0$, đến đây ta gặp mâu thuẫn. Vậy trường hợp 1 không xảy ra.

Trường hợp 2. $a_n = 1$ và $a_0 = 1$. Giả sử α là một nghiệm thực của $P(x)$. Khi đó do $a_0 = 1$ nên $\alpha \neq 0$. Ta có $P(2\alpha^3 + \alpha) = P(\alpha)P(2\alpha^2) = 0$. Suy ra $2\alpha^3 + \alpha$ cũng là một nghiệm của $P(x)$. Xét dãy số (α_n) như sau:

$$\alpha_0 = \alpha \neq 0; \alpha_{n+1} = 2\alpha_n^3 + \alpha_n, \forall n = 0, 1, 2, \dots$$

Nếu $\alpha > 0$ thì (α_n) là dãy tăng nghiêm ngặt, nếu $\alpha < 0$ thì (α_n) là dãy giảm nghiêm ngặt. Từ đây suy ra nếu $P(x)$ có một nghiệm thực khác không thì nó sẽ có vô số nghiệm thực. Điều này không thể xảy ra. Kết hợp $P(0) = 1 \neq 0$ suy ra $P(x) \neq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Suy ra $P(x)$ chỉ có nghiệm phức $z_1, z_2, \dots, z_n$. Theo định lý Viet ta có

$$z_1 \cdot z_2 \dots z_n = (-1)^n \Rightarrow |z_1| |z_2| \dots |z_n| = 1. \quad (3)$$

Nếu tồn tại z_k sao cho $|z_k| > 1$. Điều này dẫn đến

$$|2z_k^2 + 1| = |2z_k^2 - (-1)| \geq |2z_k^2| - |-1| = 2|z_k^2| - 1 > 1.$$

Do đó $|2z_k^3 + z_k| = |z_k| |2z_k^2 + 1| > |z_k|$, suy ra $P(x)$ có vô số nghiệm, điều này không thể xảy ra. Vậy với mọi $k = 1, 2, \dots, n$ thì $|z_k| \leq 1$, từ đây và từ (3) suy ra $|z_k| = 1, \forall k = \overline{1, n}$. Giả sử $\alpha = \cos \phi + i \sin \phi$ là nghiệm phức của $P(x)$, khi đó $2\alpha^3 + \alpha$ cũng là nghiệm của $P(x)$ và

$$\begin{aligned} 1 &= |2\alpha^3 + \alpha| = |\alpha| \cdot |2\alpha^2 + 1| = |2\alpha^2 + 1| = |2 \cos 2\phi + 2i \sin 2\phi + 1| \\ &= |(2 \cos 2\phi + 1) + (2 \sin 2\phi) i| = \sqrt{(2 \cos 2\phi + 1)^2 + (2 \sin 2\phi)^2}. \end{aligned}$$

Từ đó

$$(2 \cos 2\phi + 1)^2 + (2 \sin 2\phi)^2 = 1 \Leftrightarrow \cos 2\phi = -1 \Leftrightarrow \phi = \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

Suy ra $\alpha = \pm i$. Do đó $P(x) = (x^2 + 1)^k, k \in \mathbb{N}$. Thử lại thấy thỏa mãn.

Vậy tất cả các đa thức thỏa mãn yêu cầu đề bài là

$$P(x) \equiv 0; P(x) \equiv (x^2 + 1)^k, k \in \mathbb{N}.$$

Lưu ý.

- ☑ Trong trường hợp 1, để suy ra $P_1(0) = 0$ (để tạo ra mâu thuẫn) mà không cần dùng giới hạn ta có thể làm như sau: Từ (2) suy ra đa thức

$$P_1(x)(2x^2)^\ell P_1(2x^2) - (2x^2 + 1)^\ell P_1(2x^3 + x)$$

có vô số nghiệm nên nó là đa thức không, nghĩa là

$$P_1(x)(2x^2)^\ell P_1(2x^2) = (2x^2 + 1)^\ell P_1(2x^3 + x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Từ đây cho $x = 0$ ta được $P_1(0) = 0$, mâu thuẫn.

☑ Bạn đọc hãy liên hệ bài toán 3 này với bài toán ?? ở trang ??.

□

BÀI 4. Tìm các đa thức $P(x)$ có hệ số thực thỏa mãn điều kiện:

$$P(x).P(2x^2) = P(x^3 + x), \forall x \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

🔗 Lời giải

Với đa thức hằng $P(x) \equiv a$, ta có $a^2 = a \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 1. \end{cases}$ Ta thấy $P(x) \equiv 0$ và $P(x) \equiv 1$ thỏa mãn bài ra. Tiếp theo xét trường hợp $P(x)$ khác hằng số:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0, \quad n \in \mathbb{N}^*. \quad (2)$$

Từ (1) ta có $P(0) = 0$ hoặc $P(0) = 1$. Do đó $a_0 = 0$ hoặc $a_0 = 1$.

Trường hợp 1. $a_0 = 0$. Khi đó giả sử

$$P(x) = x^m Q(x), \quad Q(0) \neq 0, \quad m \in \mathbb{N}^*.$$

Thay vào (1) ta được

$$\begin{aligned} x^m Q(x). (2x^2)^m. Q(2x^2) &= (x^3 + x)^m Q(x^3 + x), \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow Q(x). (2x^2)^m Q(2x^2) &= (x^2 + 1)^m Q(x^3 + x), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (3)$$

Từ (3), cho $x = 0$ ta được $Q(0) = 0$, đến đây ta gặp mâu thuẫn.

Trường hợp 2. $a_0 = 1$. Đồng nhất hệ số bậc cao nhất ở (1) ta được

$$a_n \cdot a_n \cdot 2^n = a_n \Leftrightarrow a_n = \frac{1}{2^n}.$$

Từ (1) suy ra nếu $P(x_0) = 0$ thì $P(x_0^3 + x_0) = 0$, vậy nếu x_0 là nghiệm thực của $P(x)$ thì $x_0^3 + x_0$ cũng là nghiệm của $P(x)$. Xét dãy số (x_n) như sau:

$$x_0 \neq 0; \quad x_{n+1} = x_n^3 + x_n, \quad \forall n = 0, 1, 2, \dots$$

Nếu $x_0 > 0$ thì (x_n) là dãy tăng nghiêm ngặt, nếu $x_0 < 0$ thì (x_n) là dãy giảm nghiêm ngặt. Từ đây suy ra nếu $P(x)$ có một nghiệm thực khác không thì nó sẽ có vô số nghiệm thực. Điều này không thể xảy ra. Kết hợp $P(0) = 1 \neq 0$ suy ra $P(x) \neq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Suy ra $P(x)$ chỉ có nghiệm phức $z_1, z_2, \dots, z_n$. Theo định lý Viet ta có

$$z_1 \cdot z_2 \dots z_n = (-1)^n \cdot 2^n \Rightarrow |z_1| |z_2| \dots |z_n| = 2^n.$$

Vì vậy tồn tại z_k sao cho $|z_k| \geq 2$. Điều này dẫn đến

$$|z_k^2 + 1| = |z_k^2 - (-1)| \geq |z_k^2| - |-1| = |z_k^2| - 1 \geq 3.$$

Do đó $|z_k^3 + z_k| = |z_k| |z_k^2 + 1| > |z_k|$, vậy $P(x)$ có vô số nghiệm, điều này không thể xảy ra.

Vậy chỉ có hai đa thức thỏa mãn yêu cầu đề bài là $P(x) \equiv 0$ và $P(x) \equiv 1$.

Lưu ý. Bài toán 3 và bài toán 4 được tổng quát hoá thành bài toán 5 sau đây. □

BÀI 5. Cho số thực $\alpha \in [0; 2]$. Tìm tất cả các đa thức khác không $P(x)$ với hệ số thực thỏa mãn đồng nhất thức

$$P(x)P(2x^2) = P(\alpha x^3 + x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Lời giải

- Khi $\alpha = 0$ thì $P(x)P(2x^2) = P(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, dẫn tới $P(x) \equiv 0$, $P(x) \equiv 1$.
- Khi $\alpha = 2$, tiến hành tương tự như bài toán 3.
- Khi $0 < \alpha < 2$, tiến hành tương tự như bài toán 4. □

BÀI 6 (Đề nghị thi Olympic 30/04/2011). Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn phương trình hàm

$$P(x)P(3x^2) = P(3x^3 + x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

BÀI 7. Tìm tất cả các đa thức $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ thỏa mãn

$$f(\sin x + \cos x) = f(\sin x) + f(\cos x), \forall x \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Lời giải

Dễ thấy đa thức $f(x) \equiv c$ (c là hằng số) thỏa mãn các yêu cầu đề bài. Tiếp theo giả sử $\deg(f) = n \geq 1$. Đặt $t = \tan \frac{x}{2}$, khi đó

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Vậy (1) trở thành

$$f\left(\frac{1+2x-x^2}{1+x^2}\right) = f\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) + f\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right). \quad (2)$$

Giả sử $f(x) = \sum_{k=1}^n a_k x^k + a_0$. Nhân cả hai vế của (2) với $(1+x^2)^n$, rồi thay x bởi i (i là đơn vị ảo, $i^2 = -1$) ta được

$$a_n(2+2i)^n = a_n[(2i)^n + 2^n] \Leftrightarrow (1+i)^n = 1+i^n. \quad (3)$$

Số phức $(1+i)^n$ có môđun là $\sqrt{2}^n$. Ta có

$$\begin{aligned} 1+i^n &= 1 + \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right)^n = 1 + \cos \frac{n\pi}{2} + i \sin \frac{n\pi}{2} \\ \Rightarrow |1+i^n| &= \sqrt{\left(1 + \cos \frac{n\pi}{2}\right)^2 + \sin^2 \frac{n\pi}{2}} = \sqrt{2 + 2\cos \frac{n\pi}{2}} = \sqrt{4\cos^2 \frac{n\pi}{4}}. \end{aligned}$$

Do đó từ (3) suy ra

$$2^n = 4\cos^2 \frac{n\pi}{4} \Leftrightarrow 2^{n-2} = \cos^2 \frac{n\pi}{4}. \quad (4)$$

Khi $n = 1$ thì (4) đúng. Khi $n = 2$ thì (4) không đúng. Khi $n > 2$ thì $2^{n-2} > 2 > \cos^2 \frac{n\pi}{4}$, vậy (4) không đúng khi $n > 2$. Tóm lại (4) $\Leftrightarrow n = 1$. Do đó $\deg(f) = 1$ hay $f(x) = ax + b$. Thay vào (1) được $b = 0$. Vậy $f(x) \equiv ax$. Các đa thức thỏa mãn yêu cầu đề bài là

$$f(x) \equiv c, \quad f(x) \equiv ax \quad (a, c \text{ là các hằng số, } a \neq 0).$$

□

BÀI 8. Tìm tất cả các đa thức hệ số thực f, g thỏa mãn:

$$f(g(x)) = f(x)g(x), \forall x \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

 Lời giải

Nếu $g(x) \equiv 0$ thì từ (1) suy ra $f(x)$ là đa thức thỏa mãn $f(0) = 0$. Nếu $f(x) \equiv 0$ thì mọi đa thức $g(x)$ đều thỏa mãn yêu cầu đề bài. Tiếp theo giả sử $f(x) \not\equiv 0$ và $g(x) \not\equiv 0$. Từ (1) suy ra:

$$\deg(f) \cdot \deg(g) = \deg(f) + \deg(g). \quad (2)$$

Do $\deg(f), \deg(g)$ là những số tự nhiên nên (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} \deg(f) = \deg(g) = 0 \\ \deg(f) = \deg(g) = 2. \end{cases}$

✓ Khi $\deg(f) = \deg(g) = 0$. Giả sử $f(x) \equiv a, g(x) \equiv b$ (a, b là những hằng số khác 0). Thay vào (1), ta được: $a = ab \Leftrightarrow b = 1$.

✓ Giả sử $\deg(f) = \deg(g) = 2$. Gọi x_0 là một nghiệm của đa thức $g(x)$ (x_0 có thể là số phức). Từ (1) suy ra:

$$f(0) = f(g(x_0)) = f(x_0)g(x_0) = 0 \Rightarrow f(x) = ax^2 + bx \quad (a \neq 0).$$

Lúc này (1) trở thành:

$$\begin{aligned} a[g(x)]^2 + bg(x) &= (ax^2 + bx)g(x), \forall x \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow ag(x) + b &= ax^2 + bx, \forall x \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow g(x) &= ax^2 + \frac{b}{a}x - \frac{b}{a}, \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Kết luận: các cặp đa thức thỏa mãn yêu cầu đề bài là

$$\begin{aligned} f(x) &\equiv a_n x^n + \cdots + a_1 x, \quad g(x) \equiv 0 \\ f(x) &\equiv 0, \quad g(x) \text{ là đa thức hệ số thực} \\ f(x) &\equiv a, \quad g(x) \equiv 1 \quad (a \text{ là hằng số khác } 0) \\ f(x) &\equiv ax^2 + bx, \quad g(x) \equiv ax^2 + \frac{b}{a}x - \frac{b}{a} \quad (a, b \text{ là hằng số, } a \neq 0). \end{aligned}$$

□