

A. NGUYÊN HÀM CƠ BẢN

<i>Bảng nguyên hàm của một số hàm thường gặp (với C là hằng số tùy ý)</i>	
① $\int 0 dx = C.$	$\longrightarrow \int k dx = kx + C.$
② $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$	$\longrightarrow \int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a} \frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + C.$
③ $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C.$	$\longrightarrow \int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln ax+b + C.$
④ $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C.$	$\longrightarrow \int \frac{1}{(ax+b)^2} dx = -\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{ax+b} + C.$
⑤ $\int \sin x dx = -\cos x + C.$	$\longrightarrow \int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + C.$
⑥ $\int \cos x dx = \sin x + C.$	$\longrightarrow \int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + C.$
⑦ $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C.$	$\longrightarrow \int \frac{dx}{\sin^2(ax+b)} = -\frac{1}{a} \cot(ax+b) + C.$
⑧ $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C.$	$\longrightarrow \int \frac{dx}{\cos^2(ax+b)} = \frac{1}{a} \tan(ax+b) + C.$
⑨ $\int e^x dx = e^x + C.$	$\longrightarrow \int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C.$
⑩ $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$	$\longrightarrow \int a^{\alpha x+\beta} dx = \frac{1}{\alpha} \frac{a^{\alpha x+\beta}}{\ln a} + C.$
♦ Nhận xét. Khi thay x bằng $(ax+b)$ thì khi lấy nguyên hàm nhân kết quả thêm $\frac{1}{a}$.	

Một số nguyên tắc tính cơ bản

- Tích của đa thức hoặc lũy thừa $\xrightarrow{PP}$ khai triển.
- Tích các hàm mũ $\xrightarrow{PP}$ khai triển theo công thức mũ.
- Bậc chẵn của sin và cosin $\Rightarrow$ Hạ bậc: $\sin^2 a = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2a$, $\cos^2 a = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2a$.
- Chứa tích các căn thức của $x \xrightarrow{PP}$ chuyển về lũy thừa.

- Câu 1.** Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos x + 6x$ là
A. $\sin x + 3x^2 + C.$ **B.** $-\sin x + 3x^2 + C.$ **C.** $\sin x + 6x^2 + C.$ **D.** $-\sin x + C.$
- Câu 2.** Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x + 6$ là
A. $x^2 + 6x + C.$ **B.** $2x^2 + C.$ **C.** $2x^2 + 6x + C.$ **D.** $x^2 + C.$
- Câu 3.** Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x + 4$ là
A. $2x^2 + 4x + C.$ **B.** $x^2 + 4x + C.$ **C.** $x^2 + C.$ **D.** $2x^2 + C.$
- Câu 4.** Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x + x$ là
A. $e^x + x^2 + C.$ **B.** $e^x + \frac{1}{2}x^2 + C.$ **C.** $\frac{1}{x+1}e^x + \frac{1}{2}x^2 + C.$ **D.** $e^x + 1 + C.$
- Câu 5.** Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^4 + x^2$ là

A. $4x^3 + 2x + C$ B. $\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3 + C$ C. $x^4 + x^2 + C$ D. $x^5 + x^3 + C$.

Câu 6. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3 + x^2$ là

A. $x^4 + x^3 + C$. B. $\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + C$. C. $3x^2 + 2x + C$. D. $x^3 + x^2 + C$.

Câu 7. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos 3x$

A. $\int \cos 3x dx = 3 \sin 3x + C$ B. $\int \cos 3x dx = \frac{\sin 3x}{3} + C$
C. $\int \cos 3x dx = \sin 3x + C$ D. $\int \cos 3x dx = -\frac{\sin 3x}{3} + C$

Câu 8. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x} + \sin x$ là

A. $\ln x - \cos x + C$. B. $-\frac{1}{x^2} - \cos x + C$. C. $\ln|x| + \cos x + C$. D. $\ln|x| - \cos x + C$.

Câu 9. Cho biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Tìm $I = \int [2f(x) - 1] dx$.

A. $I = 2xF(x) - x + C$. B. $I = 2xF(x) - 1 + C$. C. $I = 2F(x) - 1 + C$. D. $I = 2F(x) - x + C$.

Câu 10. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{-x} + 1$ là

A. $-e^x + x + C$. B. $-e^{-x} + x + C$. C. $e^{-x} + x + C$. D. $e^x + x + C$.

Câu 11. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{2x-1}$.

A. $\int f(x) dx = \frac{2}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1} + C$. B. $\int f(x) dx = \frac{1}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1} + C$.
C. $\int f(x) dx = -\frac{1}{3}\sqrt{2x-1} + C$. D. $\int f(x) dx = \frac{1}{2}\sqrt{2x-1} + C$.

Câu 12. Hàm số nào sau đây là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin x + e^x - 5x$?

A. $F(x) = -\cos x + e^x - \frac{5}{2}x^2 + 1$. B. $F(x) = \cos x + e^x - 5x + 3$.
C. $F(x) = \cos x + e^x - \frac{5}{2}x^2$. D. $F(x) = -\cos x + \frac{e^x}{x+1} - \frac{5}{2}x^2$.

Câu 13. Cho $\int f(x) dx = \frac{1}{x} + \ln x + C$ (với C là hằng số tùy ý), trên miền $(0; +\infty)$, chọn khẳng định đúng về hàm số $f(x)$.

A. $f(x) = \sqrt{x} + \ln x$. B. $f(x) = \frac{x-1}{x^2}$.
C. $f(x) = -\sqrt{x} + \frac{1}{x} + \ln x$. D. $f(x) = -\frac{1}{x^2} + \ln x$.

Câu 14. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x + \frac{1}{x}$ trên khoảng $(0; +\infty)$ là

A. $1 - \frac{1}{x^2} + C$. B. $1 + \ln x + C$. C. $x^2 - \frac{1}{x^2} + C$. D. $\frac{x^2}{2} + \ln x + C$.

Câu 15. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{2x}$

A. $\int e^{2x} dx = 2e^{2x} + C$. B. $\int e^{2x} dx = e^{2x} + C$.

C. $\int e^{2x} dx = \frac{e^{2x+1}}{2x+1} + C.$

D. $\int e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x} + C.$

Câu 16. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}}$ là

A. $-\frac{\sqrt{x}}{2} + C.$

B. $\frac{2}{\sqrt{x}} + C.$

C. $-\frac{2}{\sqrt{x}} + C.$

D. $\frac{\sqrt{x}}{2} + C.$

Câu 17. Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f(0) = 1$, $f'(x) = 2x + \sin x$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $f(x) = x^2 + \cos x.$

B. $f(x) = x^2 - \cos x + 2.$

C. $f(x) = x^2 - \cos x.$

D. $f(x) = x^2 + \cos x + 1.$

Câu 18. Tìm họ nguyên hàm $F(x) = \int \frac{1}{(2x+1)^3} dx.$

A. $F(x) = \frac{-1}{4(2x+1)^2} + C.$

B. $F(x) = \frac{-1}{6(2x+1)^2} + C$

C. $F(x) = \frac{-1}{4(2x+1)^3} + C.$

D. $F(x) = \frac{-1}{6(2x+1)^3} + C.$

Câu 19. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos^3 x$ là

A. $\frac{\cos^4 x}{4} + C.$

B. $\sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C.$

C. $x - \frac{\sin^3 x}{3} + C.$

D. $-\sin x + \frac{\sin^3 x}{3} + C.$

Câu 20. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{-x} \left(2 + \frac{e^x}{\cos^2 x} \right).$

A. $F(x) = -\frac{2}{e^x} + \tan x + C.$

B. $F(x) = 2e^x - \tan x + C.$

C. $F(x) = -\frac{2}{e^x} - \tan x + C.$

D. $F(x) = 2e^{-x} + \tan x + C.$

Câu 21. Xác định họ nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = (x+1)e^{x^2+2x-3}$

A. $F(x) = \frac{e^{x^2+2x-3} + C}{2}, C \in \mathbb{R}.$

B. $F(x) = \frac{e^{x^2+2x-3} + C}{x+1}, C \in \mathbb{R}.$

C. $F(x) = 2e^{x^2+2x-3} + C, C \in \mathbb{R}.$

D. $F(x) = e^{x^2+2x-3} + C, C \in \mathbb{R}.$

Câu 22. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin^2 x \cos^2 x$ là

A. $\frac{1}{4}x - \frac{1}{16}\sin 4x + C.$

B. $\frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin 4x.$

C. $\frac{1}{8}x - \frac{1}{8}\sin 4x + C.$

D. $\frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin 4x + C.$

Câu 23. Cho $F(x) = \int (2x+1)^{109} dx$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $F(x) = \frac{(2x+1)^{108}}{108} + C.$

B. $F(x) = \frac{(2x+1)^{110}}{110} + C.$

C. $F(x) = \frac{(2x+1)^{108}}{216} + C.$

D. $F(x) = \frac{(2x+1)^{110}}{220} + C.$

Câu 24. Tìm các hàm số $f(x)$ biết $f'(x) = \frac{\cos x}{(2 + \sin x)^2}.$

A. $f(x) = \frac{\sin x}{(2 + \sin x)^2} + C.$

B. $f(x) = \frac{1}{(2 + \cos x)} + C.$

C. $f(x) = -\frac{1}{2 + \sin x} + C.$

D. $f(x) = \frac{\sin x}{2 + \sin x} + C.$

Câu 25. Họ nguyên hàm của hàm số $y = (2x+1)^{2019}$ là

A. $\frac{(2x+1)^{2018}}{2018} + C.$ B. $\frac{(2x+1)^{2020}}{4040} + C.$ C. $\frac{(2x+1)^{2020}}{2020} + C.$ D. $\frac{(2x+1)^{2018}}{4036} + C.$

Câu 26. Hàm nào sau đây là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{3 \sin x + \cos x}{\sin x + 2 \cos x}$

A. $y = 2x - \ln|\sin x + 2 \cos x|.$ B. $y = x - \ln|\sin x + 2 \cos x|.$
C. $y = x + \ln|\sin x + 2 \cos x|.$ D. $y = \ln|\sin x + 2 \cos x|.$

B. NGUYÊN HÀM CỦA HÀM SỐ HỮU TỶ

1. Công thức thường áp dụng

• $\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln|ax+b| + C.$ • $\int \frac{1}{(ax+b)^2} dx = -\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{ax+b} + C.$

• $\ln a + \ln b = \ln(ab).$ • $\ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}.$

• $\ln a^n = n \ln a.$ • $\ln 1 = 0.$

2. Phương pháp tính nguyên hàm, tích phân của hàm số hữu tỷ $I = \int \frac{P(x)}{Q(x)} dx.$

- Nếu bậc của tử số $P(x) \geq$ bậc của mẫu số $Q(x) \xrightarrow{PP}$ Chia đa thức.
- Nếu bậc của tử số $P(x) <$ bậc của mẫu số $Q(x) \xrightarrow{PP}$ phân tích mẫu $Q(x)$ thành tích số, rồi sử dụng phương pháp che để đưa về công thức nguyên hàm số 01.
- Nếu mẫu không phân tích được thành tích số $\xrightarrow{PP}$ thêm bớt để đổi biến hoặc lượng giác hóa bằng cách đặt $X = a \tan t$, nếu mẫu đưa được về dạng $X^2 + a^2$.

Câu 27. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$ trên khoảng $(1; +\infty)$ là

A. $x + 3 \ln(x-1) + C.$ B. $x - 3 \ln(x-1) + C.$ C. $x - \frac{3}{(x-1)^2} + C.$ D. $x + \frac{3}{(x-1)^2} + C.$

Câu 28. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{5x-2}.$

A. $\int \frac{dx}{5x-2} = 5 \ln|5x-2| + C$

B. $\int \frac{dx}{5x-2} = \frac{1}{5} \ln|5x-2| + C$

C. $\int \frac{dx}{5x-2} = \ln|5x-2| + C$

D. $\int \frac{dx}{5x-2} = -\frac{1}{2} \ln|5x-2| + C$

Câu 29. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{3x-1}$ trên khoảng $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$ là:

A. $\frac{1}{3} \ln(3x-1) + C$ B. $\ln(1-3x) + C$ C. $\frac{1}{3} \ln(1-3x) + C$ D. $\ln(3x-1) + C$

Câu 30. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2x+1}{(x+2)^2}$ trên khoảng $(-2; +\infty)$ là

A. $2 \ln(x+2) + \frac{1}{x+2} + C.$

B. $2 \ln(x+2) - \frac{1}{x+2} + C.$

C. $2 \ln(x+2) - \frac{3}{x+2} + C.$

D. $2 \ln(x+2) + \frac{3}{x+2} + C.$

Câu 31. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{3x-1}{(x-1)^2}$ trên khoảng $(1; +\infty)$ là

A. $3\ln(x-1) - \frac{2}{x-1} + c.$

B. $3\ln(x-1) + \frac{1}{x-1} + c.$

C. $3\ln(x-1) - \frac{1}{x-1} + c.$

D. $3\ln(x-1) + \frac{2}{x-1} + c.$

Câu 32. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{3x-2}{(x-2)^2}$ trên khoảng $(2; +\infty)$ là

A. $3\ln(x-2) + \frac{4}{x-2} + C.$

B. $3\ln(x-2) + \frac{2}{x-2} + C$

C. $3\ln(x-2) - \frac{2}{x-2} + C$

D. $3\ln(x-2) - \frac{4}{x-2} + C$

Câu 33. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2x-1}{(x+1)^2}$ trên khoảng $(-1; +\infty)$ là

A. $2\ln(x+1) + \frac{2}{x+1} + C.$

B. $2\ln(x+1) + \frac{3}{x+1} + C.$

C. $2\ln(x+1) - \frac{2}{x+1} + C.$

D. $2\ln(x+1) - \frac{3}{x+1} + C.$

Câu 34. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{1-2x}$ trên $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$.

A. $\frac{1}{2}\ln(1-2x) + C.$

B. $\ln|2x-1| + C.$

C. $\frac{1}{2}\ln|2x-1| + C.$

D. $-\frac{1}{2}\ln|2x-1| + C.$

Câu 35. Cho biết $\int \frac{2x-13}{(x+1)(x-2)} dx = a\ln|x+1| + b\ln|x-2| + C$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a+2b=8.$

B. $a+b=8.$

C. $2a-b=8.$

D. $a-b=8.$

Câu 36. Tích phân $I = \int_0^1 \frac{(x-1)^2}{x^2+1} dx = a\ln b + c$, trong đó a, b, c là các số nguyên. Tính giá trị của biểu thức $a+b+c$?

A. 3.

B. 0.

C. 1.

D. 2.

Câu 37. Cho biết $\int \frac{3}{x^2+4x+3} dx = \frac{a}{b} \ln \left| \frac{x+1}{x+3} \right| + C$, với b là số thực dương và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản.

Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a+2b=8.$

B. $a+b=8.$

C. $2a+b=8.$

D. $a-b=8.$

Câu 38. Cho biết $\int \frac{4x+1}{2x+3} dx = ax - \frac{b}{2} \ln(2x+3) + C$, với mọi $x \in \left(-\frac{3}{2}; +\infty\right)$. Mệnh đề nào sau đây

đúng?

A. $2a-b=-1.$

B. $2a-b=-3.$

C. $2a-b=9.$

D. $2a-b=7.$

Câu 39. Biết $F(x) = (ax^2 + bx + c)\sqrt{2x-3}$ ($a, b, c \in \mathbb{Z}$) là một nguyên hàm của hàm số

$f(x) = \frac{20x^2 - 30x + 11}{\sqrt{2x-3}}$ trên khoảng $\left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$. Tính $T = a+b+c$.

A. $T=8.$

B. $T=5.$

C. $T=6.$

D. $T=7.$

C. TÍNH NGUYÊN HÀM BẰNG PHƯƠNG PHÁP TỪNG PHẦN

1) Công thức nguyên hàm từng phần $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = g(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x)dx \\ v = \int g(x)dx = G(x) \end{cases} (C=0)$

Khi đó ta có $\int u.dv = u.v - \int v.du$ hay $\int f(x)g(x)dx = f(x)G(x) - \int G(x)f'(x)dx$

2) Công thức tích phân từng phần $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = g(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x)dx \\ v = \int g(x)dx = G(x) \quad (C=0) \end{cases}$

Khi đó ta có $\int_a^b u.dv = (u.v) \Big|_a^b - \int_a^b v.du$ hay $\int_a^b f(x)g(x)dx = [f(x)G(x)] \Big|_a^b - \int_a^b G(x)f'(x)dx$

3) Công thức đạo hàm của hàm số sơ cấp và hàm hợp.

$$\diamond (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} . \diamond (u^n)' = nu^{n-1}u' . \diamond (uv)' = u'v + uv' .$$

$$\diamond (\sin u)' = u' \cos u . \diamond (\cos u)' = -u' \sin u . \diamond (e^x)' = e^x$$

$$\diamond (e^u)' = e^u u' \diamond (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$\diamond$ Hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ nếu $F'(x) = f(x)$.

$$\diamond \int u(x).v'(x)dx = u(x).v(x) - \int v(x).u'(x)dx . \diamond \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \text{ với } \alpha \neq -1 .$$

$$\diamond \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C \diamond \int e^x dx = e^x + C \diamond \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\diamond \int \cos x dx = \sin x + C$$

Câu 40. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $\cos 2x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)e^x$, họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f'(x)e^x$ là:

A. $-\sin 2x + \cos 2x + C$.

B. $-\sin 2x + \cos 2x + C$.

C. $-2 \sin 2x - \cos 2x + C$.

D. $2 \sin 2x - \cos 2x + C$.

Câu 41. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 4x(1 + \ln x)$ là

A. $2x^2 \ln x + 3x^2$.

B. $2x^2 \ln x + x^2$.

C. $2x^2 \ln x + 3x^2 + C$.

D. $2x^2 \ln x + x^2 + C$.

Câu 42. Cho $F(x) = \frac{1}{2x^2}$ là một nguyên hàm của hàm số $\frac{f(x)}{x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x) \ln x$.

A. $\int f'(x) \ln x dx = -\left(\frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{2x^2}\right) + C$

B. $\int f'(x) \ln x dx = \frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{x^2} + C$

C. $\int f'(x) \ln x dx = -\left(\frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{x^2}\right) + C$

D. $\int f'(x) \ln x dx = \frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{2x^2} + C$

Câu 43. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^4 + xe^x$ là

A. $\frac{1}{5}x^5 + (x-1)e^x + C$.

B. $\frac{1}{5}x^5 + xe^x + C$.

C. $\frac{1}{5}x^5 + (x+1)e^x + C$.

D. $4x^3 + (x+1)e^x + C$.

Câu 44. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = xe^{2x}$?

A. $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x}\left(x - \frac{1}{2}\right) + C$.

B. $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x}(x-2) + C$.

C. $F(x) = 2e^{2x}(x-2) + C$.

D. $F(x) = 2e^{2x}\left(x - \frac{1}{2}\right) + C$.

Câu 45. Biết $\int x \cos 2x dx = ax \sin 2x + b \cos 2x + C$ với a, b là các số hữu tỉ. Tính tích ab ?

A. $ab = \frac{1}{8}$.

B. $ab = -\frac{1}{4}$.

C. $ab = -\frac{1}{8}$.

D. $ab = \frac{1}{4}$.

Câu 46. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x(1 + \sin x)$ là

A. $\frac{x^2}{2} - x \sin x + \cos x + C$.

B. $\frac{x^2}{2} - x \cos x + \sin x + C$.

C. $\frac{x^2}{2} - x \cos x - \sin x + C.$

D. $\frac{x^2}{2} - x \sin x - \cos x + C.$

Câu 47. Tìm nguyên hàm $J = \int (x+1)e^{3x} dx.$

A. $J = \frac{1}{3}(x+1)e^{3x} - \frac{1}{3}e^{3x} + C.$

B. $J = \frac{1}{3}(x+1)e^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x} + C.$

C. $J = \frac{1}{3}(x+1)e^{3x} + \frac{1}{9}e^{3x} + C.$

D. $J = (x+1)e^{3x} - \frac{1}{3}e^{3x} + C.$

Câu 48. Kết quả tính $\int 2x \ln(x-1) dx$ bằng:

A. $(x^2+1)\ln(x-1) - \frac{x^2}{2} - x + c.$

B. $(x^2-1)\ln(x-1) - \frac{x^2}{2} + x + c.$

C. $x^2 \ln(x-1) - \frac{x^2}{2} - x + c.$

D. $(x^2-1)\ln(x-1) - \frac{x^2}{2} - x + c.$

Câu 49. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x(e^x - \sin x)$ là

A. $(x-1)e^x + x \cos x - \sin x + C.$

B. $(x+1)e^x + x \cos x - \sin x + C.$

C. $(x-1)e^x + x \cos x + \sin x + C.$

D. $(x-1)e^x - x \cos x - \sin x + C.$

Câu 50. Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \frac{\ln 2x}{x^2}$?

A. $F(x) = -\frac{1}{x}(\ln 2x - 1).$

B. $F(x) = -\frac{1}{x}(\ln 2x + 1).$

C. $F(x) = -\frac{1}{x}(1 - \ln 2x).$

D. $F(x) = \frac{1}{x}(\ln 2x + 1).$

Câu 51. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = (2x+3)\ln x$ là

A. $(x^2+3x)\ln x + \frac{x^2}{2} + 3x + C.$

B. $(x^2+3x)\ln x + \frac{x^2}{2} - 3x + C.$

C. $(x^2+3x)\ln x - \frac{x^2}{2} + 3x + C.$

D. $(x^2+3x)\ln x - \frac{x^2}{2} - 3x + C.$

Câu 52. Tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x}{\sin^2 x}$ trên khoảng $(0; \pi)$ là

A. $-x \cot x + \ln(\sin x) + C.$

B. $x \cot x - \ln|\sin x| + C.$

C. $x \cot x + \ln|\sin x| + C.$

D. $-x \cot x - \ln(\sin x) + C.$

D. NGUYÊN HÀM CÓ ĐIỀU KIỆN

Câu 53. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = 3 - 5 \sin x$ và $f(0) = 10$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. $f(x) = 3x + 5 \cos x + 5$

B. $f(x) = 3x + 5 \cos x + 2$

C. $f(x) = 3x - 5 \cos x + 15$

D. $f(x) = 3x - 5 \cos x + 2$

Câu 54. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x + 2x$ thỏa mãn $F(0) = \frac{3}{2}$. Tìm $F(x)$.

A. $F(x) = 2e^x + x^2 - \frac{1}{2}$

B. $F(x) = e^x + x^2 + \frac{5}{2}$

C. $F(x) = e^x + x^2 + \frac{3}{2}$

D. $F(x) = e^x + x^2 + \frac{1}{2}$

Câu 55. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = \frac{1}{x-1}$ và $F(2) = 1$. Tính $F(3)$.

A. $F(3) = \ln 2 - 1$

B. $F(3) = \ln 2 + 1$

C. $F(3) = \frac{1}{2}$

D. $F(3) = \frac{7}{4}$

Câu 56. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \sin x + \cos x$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$

A. $F(x) = \cos x - \sin x + 3$

B. $F(x) = -\cos x + \sin x + 3$

C. $F(x) = -\cos x + \sin x - 1$

D. $F(x) = -\cos x + \sin x + 1$

Câu 57. Cho $F(x) = (x-1)e^x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)e^{2x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x)e^{2x}$.

A. $\int f'(x)e^{2x} dx = (x-2)e^x + C$

B. $\int f'(x)e^{2x} dx = \frac{2-x}{2}e^x + C$

C. $\int f'(x)e^{2x} dx = (2-x)e^x + C$

D. $\int f'(x)e^{2x} dx = (4-2x)e^x + C$

Câu 58. $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = (2x+1)e^{2x}$ thỏa $F(0) = 0$. Tính $F(1)$

A. $F(1) = 2e^2$.

B. $F(1) = \frac{e^2}{2}$.

C. $F(1) = e^2$.

D. $F(1) = \frac{3e^2}{2}$.

Câu 59. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{-x} + \sin x$ thỏa mãn $F(0) = 0$. Tìm $F(x)$.

A. $F(x) = -e^{-x} + \cos x + 2$.

B. $F(x) = -e^{-x} + \cos x$.

C. $F(x) = e^{-x} + \cos x - 2$.

D. $F(x) = -e^{-x} - \cos x + 2$.

Câu 60. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = \frac{2}{x+2}$. Biết $F(-1) = 0$. Tính $F(2)$ kết quả là.

A. $\ln 8 + 1$.

B. $4 \ln 2 + 1$.

C. $2 \ln 3 + 2$.

D. $2 \ln 4$.

Câu 61. Biết $\int \frac{dx}{1+\cos x} = a \tan \frac{x}{b} + C$ với a, b là các số nguyên dương. Tính $S = a - 2b$?

A. -5 .

B. -2 .

C. 0 .

D. -3 .

Câu 62. Cho $F(x) = \frac{a}{x}(\ln x + b)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1+\ln x}{x^2}$, trong đó $a, b \in \mathbb{Z}$. Giá trị $S = b - 2a$ bằng

A. 6 .

B. 0 .

C. 4 .

D. 2 .

Câu 63. Cho $F(x) = -\frac{1}{3x^3}$ là một nguyên hàm của hàm số $\frac{f(x)}{x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x)\ln x$

A. $\int f'(x)\ln x dx = \frac{\ln x}{x^3} - \frac{1}{5x^5} + C$

B. $\int f'(x)\ln x dx = -\frac{\ln x}{x^3} + \frac{1}{3x^3} + C$

C. $\int f'(x)\ln x dx = \frac{\ln x}{x^3} + \frac{1}{3x^3} + C$

D. $\int f'(x)\ln x dx = \frac{\ln x}{x^3} + \frac{1}{5x^5} + C$

Câu 64. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f'(x) = 2e^{2x} + 1 \forall x$, $f(0) = 2$. Hàm $f(x)$ là

A. $y = 2e^x + 2x$.

B. $y = 2e^x + 2$.

C. $y = e^{2x} + x + 2$.

D. $y = e^{2x} + x + 1$.

Câu 65. Cho $f(x) = \frac{x}{\cos^2 x}$ trên $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ và $F(x)$ là một nguyên hàm của $x.f'(x)$ thỏa mãn $F(0) = 0$. Tính $F\left(\frac{\pi}{3}\right)$?

A. $\frac{\pi^2}{36} - \frac{\pi\sqrt{3}}{3} + \ln 2$.

B. $\frac{4\pi^2}{9} - \frac{\pi\sqrt{3}}{3} - \ln 2$.

C. $\frac{4\pi^2}{9} - \frac{\pi\sqrt{3}}{3} + \ln 2$.

D. $\frac{\pi^2}{36} - \frac{\pi\sqrt{3}}{3} - \ln 2$.

Câu 66. Cho a là số thực khác 0, $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x \left(\ln(ax) + \frac{1}{x} \right)$ thỏa mãn $F\left(\frac{1}{a}\right) = 0$ và $F(2018) = e^{2018}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $a \in [2018; +\infty)$. B. $a \in \left(\frac{1}{2018}; 1\right)$. C. $a \in \left(0; \frac{1}{2018}\right)$. D. $a \in [1; 2018)$.

Câu 67. Biết $\int (x+3)e^{-2x} dx = -\frac{1}{m}e^{-2x}(2x+n) + C, (m, n \in \mathbb{Z})$. Giá trị của $m^2 + n^2$ bằng

- A. 10. B. 65. C. 5. D. 41.

Câu 68. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2x+1}{x^4+2x^3+x^2}$ trên khoảng $(0; +\infty)$ thỏa mãn $F(1) = \frac{1}{2}$. Giá trị của biểu thức $S = F(1) + F(2) + F(3) + \dots + F(2019)$ bằng

- A. $\frac{2019}{2020}$. B. $\frac{2019 \cdot 2021}{2020}$. C. $2018 \frac{1}{2020}$. D. $-\frac{2019}{2020}$.

Câu 69. Cho $f(x)$ và $g(x)$ là hai hàm số liên tục và có một nguyên hàm lần lượt là $F(x) = x + 2019$, $G(x) = x^2 + 2020$. Tìm một nguyên hàm $H(x)$ của hàm số $h(x) = f(x) \cdot g(x)$, biết $H(1) = 3$.

- A. $H(x) = x^3 + 3$. B. $H(x) = x^2 + 5$. C. $H(x) = x^3 + 1$. D. $H(x) = x^2 + 2$.

Câu 70. Giả sử $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2 e^x$. Tính tích $P = abc$.

- A. $P = -4$. B. $P = 1$. C. $P = 5$. D. $P = -3$.

Câu 71. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2^x$, thỏa mãn $F(0) = \frac{1}{\ln 2}$. Tính giá trị biểu thức $T = F(0) + F(1) + F(2) + \dots + F(2019)$.

- A. $T = \frac{2^{2020} - 1}{\ln 2}$. B. $T = 1009 \cdot \frac{2^{2019} - 1}{2}$. C. $T = 2^{2019 \cdot 2020}$. D. $T = \frac{2^{2019} - 1}{\ln 2}$.

Câu 72. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$. Biết $f(3) + f(-3) = 4$ và

$f\left(\frac{1}{3}\right) + f\left(-\frac{1}{3}\right) = 2$. Giá trị của biểu thức $f(-5) + f(0) + f(2)$ bằng

- A. $5 - \frac{1}{2} \ln 2$. B. $6 - \frac{1}{2} \ln 2$. C. $5 + \frac{1}{2} \ln 2$. D. $6 + \frac{1}{2} \ln 2$.

E. NGUYÊN HÀM HÀM ẨN

Câu 73. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2) = -\frac{1}{25}$ và $f'(x) = 4x^3 [f(x)]^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng

- A. $-\frac{41}{400}$ B. $-\frac{1}{10}$ C. $-\frac{391}{400}$ D. $-\frac{1}{40}$

Câu 74. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(x) + f'(x) = e^{-x}, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 2$. Tất cả các nguyên hàm của $f(x)e^{2x}$ là

- A. $(x-2)e^x + e^x + C$. B. $(x+2)e^{2x} + e^x + C$. C. $(x-1)e^x + C$. D. $(x+1)e^x + C$.

Câu 75. Cho hàm số $y = f(x)$ đồng biến và có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $(f'(x))^2 = f(x) \cdot e^x, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 2$. Khi đó $f(2)$ thuộc khoảng nào sau đây?

- A. $(12; 13)$. B. $(9; 10)$. C. $(11; 12)$. D. $(13; 14)$.

- Câu 76.** Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f(x) < 0, \forall x > 0$ và có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$ thỏa mãn $f'(x) = (2x+1)f^2(x), \forall x > 0$ và $f(1) = -\frac{1}{2}$. Giá trị của biểu thức $f(1) + f(2) + \dots + f(2020)$ bằng
- A. $-\frac{2020}{2021}$. B. $-\frac{2015}{2019}$. C. $-\frac{2019}{2020}$. D. $-\frac{2016}{2021}$.
- Câu 77.** Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f(2) = -\frac{4}{19}$ và $f'(x) = x^3 f^2(x) \forall x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng
- A. $-\frac{2}{3}$. B. $-\frac{1}{2}$. C. -1 . D. $-\frac{3}{4}$.
- Câu 78.** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$ thỏa mãn điều kiện: $f(1) = -2\ln 2$ và $x(x+1) \cdot f'(x) + f(x) = x^2 + x$. Biết $f(2) = a + b \ln 3$ ($a, b \in \mathbb{Q}$). Giá trị $2(a^2 + b^2)$ là
- A. $\frac{27}{4}$. B. 9 . C. $\frac{3}{4}$. D. $\frac{9}{2}$.
- Câu 79.** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$, biết $f'(x) + (2x+1)f^2(x) = 0$, $f(x) = 0, f'(x) > 0 \forall x > 0, f(2) = \frac{1}{6}$. Tính giá trị của $P = f(1) + f(2) + \dots + f(2019)$.
- A. $P = \frac{2020}{2019}$. B. $P = \frac{2019}{2020}$. C. $P = \frac{2018}{2019}$. D. $P = \frac{2021}{2020}$.
- Câu 80.** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$ thỏa mãn điều kiện: $f(1) = -2\ln 2$ và $x(x+1) \cdot f'(x) + f(x) = x^2 + x$ (1). Biết $f(2) = a + b \ln 3$ ($a, b \in \mathbb{Q}$). Giá trị của $2(a^2 + b^2)$ là:
- A. $\frac{27}{4}$. B. 9 . C. $\frac{3}{4}$. D. $\frac{9}{2}$.
- Câu 81.** Cho $\int f(4x) dx = x^2 + 3x + c$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?
- A. $\int f(x+2) dx = \frac{x^2}{4} + 2x + C$. B. $\int f(x+2) dx = x^2 + 7x + C$.
C. $\int f(x+2) dx = \frac{x^2}{4} + 4x + C$. D. $\int f(x+2) dx = \frac{x^2}{2} + 4x + C$.
- Câu 82.** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2) = -\frac{2}{9}$ và $f'(x) = 2x[f(x)]^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng
- A. $-\frac{35}{36}$. B. $-\frac{2}{3}$. C. $-\frac{19}{36}$. D. $-\frac{2}{15}$.
- Câu 83.** Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, thỏa mãn $f(x) + \tan x \cdot f'(x) = \frac{x}{\cos^3 x}$. Biết rằng $\sqrt{3}f\left(\frac{\pi}{3}\right) - f\left(\frac{\pi}{6}\right) = a\pi\sqrt{3} + b \ln 3$ trong đó $a, b \in \mathbb{Q}$. Giá trị của biểu thức $P = a + b$ bằng
- A. $\frac{14}{9}$. B. $-\frac{2}{9}$. C. $\frac{7}{9}$. D. $-\frac{4}{9}$.
- Câu 84.** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$ thỏa mãn $f(1) = 2\ln 2 + 1$, $x(x+1)f'(x) + (x+2)f(x) = x(x+1), \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$. Biết $f(2) = a + b \ln 3$, với a, b là hai số hữu tỉ. Tính $T = a^2 - b$.
- A. $T = \frac{-3}{16}$. B. $T = \frac{21}{16}$. C. $T = \frac{3}{2}$. D. $T = 0$.

Câu 85. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $(1; +\infty)$ và thỏa mãn $(xf'(x) - 2f(x)) \cdot \ln x = x^3 - f(x)$, $\forall x \in (1; +\infty)$; biết $f(\sqrt[3]{e}) = 3e$. Giá trị $f(2)$ thuộc khoảng nào dưới đây?

- A. $\left(12; \frac{25}{2}\right)$. B. $\left(13; \frac{27}{2}\right)$. C. $\left(\frac{23}{2}; 12\right)$. D. $\left(14; \frac{29}{2}\right)$.

----- HẾT -----

Nguyễn Bảo Vương

A. NGUYÊN HÀM CƠ BẢN

Bảng nguyên hàm của một số hàm thường gặp (với C là hằng số tùy ý)	
① $\int 0 dx = C.$	$\longrightarrow \int k dx = kx + C.$
② $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$	$\longrightarrow \int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a} \frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + C.$
③ $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C.$	$\longrightarrow \int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln ax+b + C.$
④ $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C.$	$\longrightarrow \int \frac{1}{(ax+b)^2} dx = -\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{ax+b} + C.$
⑤ $\int \sin x dx = -\cos x + C.$	$\longrightarrow \int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + C.$
⑥ $\int \cos x dx = \sin x + C.$	$\longrightarrow \int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + C.$
⑦ $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C.$	$\longrightarrow \int \frac{dx}{\sin^2(ax+b)} = -\frac{1}{a} \cot(ax+b) + C.$
⑧ $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C.$	$\longrightarrow \int \frac{dx}{\cos^2(ax+b)} = \frac{1}{a} \tan(ax+b) + C.$
⑨ $\int e^x dx = e^x + C.$	$\longrightarrow \int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C.$
⑩ $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$	$\longrightarrow \int a^{\alpha x+\beta} dx = \frac{1}{\alpha} \frac{a^{\alpha x+\beta}}{\ln a} + C.$
♦ Nhận xét. Khi thay x bằng $(ax+b)$ thì khi lấy nguyên hàm nhân kết quả thêm $\frac{1}{a}$.	

Một số nguyên tắc tính cơ bản

- Tích của đa thức hoặc lũy thừa $\xrightarrow{PP}$ khai triển.
- Tích các hàm mũ $\xrightarrow{PP}$ khai triển theo công thức mũ.
- Bậc chẵn của sin và cosin $\Rightarrow$ Hạ bậc: $\sin^2 a = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2a$, $\cos^2 a = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2a$.
- Chứa tích các căn thức của x $\xrightarrow{PP}$ chuyển về lũy thừa.

Câu 1. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos x + 6x$ là

- A.** $\sin x + 3x^2 + C$. **B.** $-\sin x + 3x^2 + C$. **C.** $\sin x + 6x^2 + C$. **D.** $-\sin x + C$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \int f(x) dx = \int (\cos x + 6x) dx = \sin x + 3x^2 + C.$$

Câu 2. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x + 6$ là

- A.** $x^2 + 6x + C$. **B.** $2x^2 + C$. **C.** $2x^2 + 6x + C$. **D.** $x^2 + C$.

Lời giải

Chọn A

$$\int (2x + 6) dx = x^2 + 6x + C$$

Câu 3. Họ tất cả nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x + 4$ là

- A. $2x^2 + 4x + C$. B. $x^2 + 4x + C$. C. $x^2 + C$. D. $2x^2 + C$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int f(x)dx = \int (2x + 4)dx = x^2 + 4x + C$.

Câu 4. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x + x$ là

- A. $e^x + x^2 + C$. B. $e^x + \frac{1}{2}x^2 + C$. C. $\frac{1}{x+1}e^x + \frac{1}{2}x^2 + C$. D. $e^x + 1 + C$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int (e^x + x)dx = e^x + \frac{1}{2}x^2 + C$.

Câu 5. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^4 + x^2$ là

- A. $4x^3 + 2x + C$ B. $\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3 + C$ C. $x^4 + x^2 + C$ D. $x^5 + x^3 + C$.

Lời giải

Chọn B

$\int f(x)dx = \int (x^4 + x^2)dx = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3 + C$.

Câu 6. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3 + x^2$ là

- A. $x^4 + x^3 + C$. B. $\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + C$. C. $3x^2 + 2x + C$. D. $x^3 + x^2 + C$.

Lời giải

Chọn $\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + C$

Câu 7. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos 3x$

- A. $\int \cos 3x dx = 3 \sin 3x + C$ B. $\int \cos 3x dx = \frac{\sin 3x}{3} + C$
C. $\int \cos 3x dx = \sin 3x + C$ D. $\int \cos 3x dx = -\frac{\sin 3x}{3} + C$

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\int \cos 3x dx = \frac{\sin 3x}{3} + C$

Câu 8. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x} + \sin x$ là

- A. $\ln x - \cos x + C$. B. $-\frac{1}{x^2} - \cos x + C$. C. $\ln|x| + \cos x + C$. D. $\ln|x| - \cos x + C$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int f(x)dx = \int \left(\frac{1}{x} + \sin x \right) dx = \int \frac{1}{x} dx + \int \sin x dx = \ln|x| - \cos x + C$.

Câu 9. Cho biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Tìm $I = \int [2f(x) - 1]dx$.

- A. $I = 2xF(x) - x + C$. B. $I = 2xF(x) - 1 + C$. C. $I = 2F(x) - 1 + C$. D. $I = 2F(x) - x + C$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } I = \int [2f(x) - 1] dx = \int 2f(x) dx - \int 1 dx = 2F(x) - x + C.$$

Câu 10. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{-x} + 1$ là

- A.** $-e^x + x + C$. **B.** $-e^{-x} + x + C$. **C.** $e^{-x} + x + C$. **D.** $e^x + x + C$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } \int f(x) dx = \int (e^{-x} + 1) dx = -e^{-x} + x + C.$$

Câu 11. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{2x-1}$.

- A.** $\int f(x) dx = \frac{2}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1} + C$. **B.** $\int f(x) dx = \frac{1}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1} + C$.
C. $\int f(x) dx = -\frac{1}{3}\sqrt{2x-1} + C$. **D.** $\int f(x) dx = \frac{1}{2}\sqrt{2x-1} + C$.

Lời giải

Chọn B

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int \sqrt{2x-1} dx = \frac{1}{2} \int (2x-1)^{\frac{1}{2}} d(2x-1) \\ &= \frac{1}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1} + C \end{aligned}$$

Câu 12. Hàm số nào sau đây là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin x + e^x - 5x$?

- A.** $F(x) = -\cos x + e^x - \frac{5}{2}x^2 + 1$. **B.** $F(x) = \cos x + e^x - 5x + 3$.
C. $F(x) = \cos x + e^x - \frac{5}{2}x^2$. **D.** $F(x) = -\cos x + \frac{e^x}{x+1} - \frac{5}{2}x^2$.

Lời giải

Chọn A

Áp dụng công thức nguyên hàm cơ bản, ta có:

$$\int f(x) dx = \int (\sin x + e^x - 5x) dx = -\cos x + e^x - \frac{5}{2}x^2 + C.$$

Vậy $F(x) = -\cos x + e^x - \frac{5}{2}x^2 + 1$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin x + e^x - 5x$.

Câu 13. Cho $\int f(x) dx = \frac{1}{x} + \ln x + C$ (với C là hằng số tùy ý), trên miền $(0; +\infty)$, chọn khẳng định đúng về hàm số $f(x)$.

- A.** $f(x) = \sqrt{x} + \ln x$. **B.** $f(x) = \frac{x-1}{x^2}$.
C. $f(x) = -\sqrt{x} + \frac{1}{x} + \ln x$. **D.** $f(x) = -\frac{1}{x^2} + \ln x$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } f(x) = \left(\frac{1}{x} + \ln x + C \right)' = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x^2}$$

Câu 14. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x + \frac{1}{x}$ trên khoảng $(0; +\infty)$ là

A. $1 - \frac{1}{x^2} + C.$

B. $1 + \ln x + C.$

C. $x^2 - \frac{1}{x^2} + C.$

D. $\frac{x^2}{2} + \ln x + C.$

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int f(x)dx = \int \left(x + \frac{1}{x}\right)dx = \frac{x^2}{2} + \ln x + C.$

Câu 15. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{2x}$

A. $\int e^{2x} dx = 2e^{2x} + C.$

B. $\int e^{2x} dx = e^{2x} + C.$

C. $\int e^{2x} dx = \frac{e^{2x+1}}{2x+1} + C.$

D. $\int e^{2x} dx = \frac{1}{2}e^{2x} + C.$

Lời giải

Chọn D

$\int e^{2x} dx = \frac{1}{2} \int e^{2x} d(2x) = \frac{1}{2}e^{2x} + C.$

Câu 16. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}}$ là

A. $-\frac{\sqrt{x}}{2} + C.$

B. $\frac{2}{\sqrt{x}} + C.$

C. $-\frac{2}{\sqrt{x}} + C.$

D. $\frac{\sqrt{x}}{2} + C.$

Lời giải

Chọn C

$\int \frac{1}{x\sqrt{x}} dx = \int \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} dx = \int x^{-\frac{3}{2}} dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + C = -\frac{2}{\sqrt{x}} + C.$

Câu 17. Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f(0) = 1$, $f'(x) = 2x + \sin x$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $f(x) = x^2 + \cos x.$

B. $f(x) = x^2 - \cos x + 2.$

C. $f(x) = x^2 - \cos x.$

D. $f(x) = x^2 + \cos x + 1.$

Lời giải

Chọn B

Ta có: $f(x) = \int f'(x)dx = \int (2x + \sin x)dx = x^2 - \cos x + C.$

$f(0) = -1 + C = 1 \Leftrightarrow C = 2 \Rightarrow f(x) = x^2 - \cos x + 2.$

Câu 18. Tìm họ nguyên hàm $F(x) = \int \frac{1}{(2x+1)^3} dx.$

A. $F(x) = \frac{-1}{4(2x+1)^2} + C.$

B. $F(x) = \frac{-1}{6(2x+1)^2} + C$

C. $F(x) = \frac{-1}{4(2x+1)^3} + C.$

D. $F(x) = \frac{-1}{6(2x+1)^3} + C.$

Lời giải

Chọn A

Ta có: $F(x) = \int \frac{1}{(2x+1)^3} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{(2x+1)^3} d(2x+1) = \frac{1}{2} \int (2x+1)^{-3} d(2x+1).$
 $= -\frac{1}{4} \cdot (2x+1)^{-2} + C = \frac{-1}{4(2x+1)^2} + C$

Vậy $F(x) = \frac{-1}{4(2x+1)^2} + C$.

Câu 19. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos^3 x$ là

- A.** $\frac{\cos^4 x}{4} + C$. **B.** $\sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C$. **C.** $x - \frac{\sin^3 x}{3} + C$. **D.** $-\sin x + \frac{\sin^3 x}{3} + C$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\int (\cos^3 x) dx = \int (1 - \sin^2 x) \cos x dx = \int (1 - \sin^2 x) d(\sin x) = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C$.

Vậy họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos^3 x$ là $\sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C$.

Câu 20. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{-x} \left(2 + \frac{e^x}{\cos^2 x} \right)$.

- A.** $F(x) = -\frac{2}{e^x} + \tan x + C$. **B.** $F(x) = 2e^x - \tan x + C$.
C. $F(x) = -\frac{2}{e^x} - \tan x + C$. **D.** $F(x) = 2e^{-x} + \tan x + C$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\int e^{-x} \left(2 + \frac{e^x}{\cos^2 x} \right) dx = \int \left(2e^{-x} + \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx = -\frac{2}{e^x} + \tan x + C$

Câu 21. Xác định họ nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = (x+1)e^{x^2+2x-3}$

- A.** $F(x) = \frac{e^{x^2+2x-3} + C}{2}, C \in \mathbb{R}$. **B.** $F(x) = \frac{e^{x^2+2x-3} + C}{x+1}, C \in \mathbb{R}$.
C. $F(x) = 2e^{x^2+2x-3} + C, C \in \mathbb{R}$. **D.** $F(x) = e^{x^2+2x-3} + C, C \in \mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn A

Xét $I = \int (x+1)e^{x^2+2x-3} dx = \frac{1}{2} \int e^{x^2+2x-3} d(x^2+2x-3) = \frac{e^{x^2+2x-3} + C}{2}$.

Câu 22. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin^2 x \cos^2 x$ là

- A.** $\frac{1}{4}x - \frac{1}{16}\sin 4x + C$. **B.** $\frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin 4x$. **C.** $\frac{1}{8}x - \frac{1}{8}\sin 4x + C$. **D.** $\frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin 4x + C$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f(x) = \sin^2 x \cos^2 x = \frac{1}{4} \sin^2 2x = \frac{1}{4} \cdot \frac{1 - \cos 4x}{2} = \frac{1}{8} - \frac{1}{8} \cos 4x$.

Do đó $\int f(x) dx = \int \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{8} \cos 4x \right) dx = \frac{1}{8}x - \frac{1}{32} \sin 4x + C$.

Câu 23. Cho $F(x) = \int (2x+1)^{109} dx$, mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

- A.** $F(x) = \frac{(2x+1)^{108}}{108} + C$. **B.** $F(x) = \frac{(2x+1)^{110}}{110} + C$.

C. $F(x) = \frac{(2x+1)^{108}}{216} + C.$

D. $F(x) = \frac{(2x+1)^{110}}{220} + C.$

Lời giải

Chọn D

$$F(x) = \int (2x+1)^{109} dx = \frac{1}{2} \int (2x+1)^{109} d(2x+1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2x+1)^{110}}{110} + C = \frac{(2x+1)^{110}}{220} + C.$$

Câu 24. Tìm các hàm số $f(x)$ biết $f'(x) = \frac{\cos x}{(2 + \sin x)^2}.$

A. $f(x) = \frac{\sin x}{(2 + \sin x)^2} + C.$

B. $f(x) = \frac{1}{(2 + \cos x)} + C.$

C. $f(x) = -\frac{1}{2 + \sin x} + C.$

D. $f(x) = \frac{\sin x}{2 + \sin x} + C.$

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } f(x) = \int f'(x) dx = \int \frac{\cos x}{(2 + \sin x)^2} dx = \int \frac{d(2 + \sin x)}{(2 + \sin x)^2} = -\frac{1}{2 + \sin x} + C.$$

Câu 25. Họ nguyên hàm của hàm số $y = (2x+1)^{2019}$ là

A. $\frac{(2x+1)^{2018}}{2018} + C.$

B. $\frac{(2x+1)^{2020}}{4040} + C.$

C. $\frac{(2x+1)^{2020}}{2020} + C.$

D. $\frac{(2x+1)^{2018}}{4036} + C.$

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } \int (2x+1)^{2019} dx = \frac{1}{2} \int (2x+1)^{2019} d(2x+1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2x+1)^{2020}}{2020} + C = \frac{(2x+1)^{2020}}{4040} + C.$$

Câu 26. Hàm nào sau đây là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{3 \sin x + \cos x}{\sin x + 2 \cos x}$

A. $y = 2x - \ln|\sin x + 2 \cos x|.$

B. $y = x - \ln|\sin x + 2 \cos x|.$

C. $y = x + \ln|\sin x + 2 \cos x|.$

D. $y = \ln|\sin x + 2 \cos x|.$

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } f(x) = \frac{(\sin x + 2 \cos x) - (\cos x - 2 \sin x)}{\sin x + 2 \cos x} = 1 - \frac{\cos x - 2 \sin x}{\sin x + 2 \cos x}.$$

$$\Rightarrow \int f(x) dx = \int \left(1 - \frac{\cos x - 2 \sin x}{\sin x + 2 \cos x} \right) dx = x - \ln|\sin x + 2 \cos x| + C.$$

B. NGUYÊN HÀM CỦA HÀM SỐ HỮU TỈ

1. Công thức thường áp dụng

$$\bullet \int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln|ax+b| + C. \bullet \int \frac{1}{(ax+b)^2} dx = -\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{ax+b} + C.$$

$$\bullet \ln a + \ln b = \ln(ab). \bullet \ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}.$$

$$\bullet \ln a^n = n \ln a. \bullet \ln 1 = 0.$$

2. Phương pháp tính nguyên hàm, tích phân của hàm số hữu tỷ $I = \int \frac{P(x)}{Q(x)} dx.$

• Nếu bậc của tử số $P(x) \geq$ bậc của mẫu số $Q(x) \xrightarrow{PP}$ Chia đa thức.

- Nếu bậc của tử số $P(x) <$ bậc của mẫu số $Q(x) \xrightarrow{PP}$ phân tích mẫu $Q(x)$ thành tích số, rồi sử dụng phương pháp che để đưa về công thức nguyên hàm số 01.
- Nếu mẫu không phân tích được thành tích số $\xrightarrow{PP}$ thêm bớt để đổi biến hoặc lượng giác hóa bằng cách đặt $X = a \tan t$, nếu mẫu đưa được về dạng $X^2 + a^2$.

Câu 27. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$ trên khoảng $(1; +\infty)$ là

- A.** $x + 3\ln(x-1) + C$. **B.** $x - 3\ln(x-1) + C$. **C.** $x - \frac{3}{(x-1)^2} + C$. **D.** $x + \frac{3}{(x-1)^2} + C$.

Lời giải

Chọn A

Trên khoảng $(1; +\infty)$ thì $x-1 > 0$ nên

$$\int f(x)dx = \int \frac{x+2}{x-1}dx = \int \left(1 + \frac{3}{x-1}\right)dx = x + 3\ln|x-1| + C = x + 3\ln(x-1) + C.$$

Câu 28. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{5x-2}$.

A. $\int \frac{dx}{5x-2} = 5\ln|5x-2| + C$

B. $\int \frac{dx}{5x-2} = \frac{1}{5}\ln|5x-2| + C$

C. $\int \frac{dx}{5x-2} = \ln|5x-2| + C$

D. $\int \frac{dx}{5x-2} = -\frac{1}{2}\ln|5x-2| + C$

Lời giải

Chọn B

Áp dụng công thức $\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C$ ($a \neq 0$) ta được $\int \frac{dx}{5x-2} = \frac{1}{5}\ln|5x-2| + C$.

Câu 29. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{3x-1}$ trên khoảng $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$ là:

A. $\frac{1}{3}\ln(3x-1) + C$

B. $\ln(1-3x) + C$

C. $\frac{1}{3}\ln(1-3x) + C$

D. $\ln(3x-1) + C$

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\int \frac{1}{3x-1}dx = \frac{1}{3}\int \frac{d(3x-1)}{3x-1} = \frac{1}{3}\ln|3x-1| + C = \frac{1}{3}\ln(1-3x) + C$ (do $x \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$)

Câu 30. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2x+1}{(x+2)^2}$ trên khoảng $(-2; +\infty)$ là

A. $2\ln(x+2) + \frac{1}{x+2} + C$.

B. $2\ln(x+2) - \frac{1}{x+2} + C$.

C. $2\ln(x+2) - \frac{3}{x+2} + C$.

D. $2\ln(x+2) + \frac{3}{x+2} + C$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $x+2=t \Rightarrow x=t-1 \Rightarrow dx=dt$ với $t > 0$

Ta có $\int f(x)dx = \int \frac{2t-1}{t^2}dt = \int \left(\frac{2}{t} - \frac{1}{t^2}\right)dt = 2\ln t + \frac{1}{t} + C$

Hay $\int f(x)dx = 2\ln(x+2) + \frac{1}{x+2} + C$.

Câu 31. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{3x-1}{(x-1)^2}$ trên khoảng $(1; +\infty)$ là

A. $3\ln(x-1) - \frac{2}{x-1} + C.$

B. $3\ln(x-1) + \frac{1}{x-1} + C.$

C. $3\ln(x-1) - \frac{1}{x-1} + C.$

D. $3\ln(x-1) + \frac{2}{x-1} + C.$

Lời giải

Chọn A

Ta có $f(x) = \frac{3x-3+2}{(x-1)^2} = \frac{3(x-1)+2}{(x-1)^2} = \frac{3}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2}$

Vậy $\int f(x)dx = \int \left(\frac{3}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} \right) dx = 3 \int \frac{d(x-1)}{x-1} + 2 \int \frac{d(x-1)}{(x-1)^2}$
 $= 3\ln|x-1| + 2 \int (x-1)^{-2} d(x-1) = 3\ln(x-1) - \frac{2}{x-1} + C$ vì $x > 1$.

Câu 32. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{3x-2}{(x-2)^2}$ trên khoảng $(2; +\infty)$ là

A. $3\ln(x-2) + \frac{4}{x-2} + C.$

B. $3\ln(x-2) + \frac{2}{x-2} + C$

C. $3\ln(x-2) - \frac{2}{x-2} + C$

D. $3\ln(x-2) - \frac{4}{x-2} + C$

Lời giải

Chọn D

Ta có $f(x) = \frac{3x-2}{(x-2)^2} = \frac{3(x-2)+4}{(x-2)^2} = \frac{3}{x-2} + \frac{4}{(x-2)^2}$. Do đó

$\int \frac{3x-2}{(x-2)^2} dx = \int \left(\frac{3}{x-2} + \frac{4}{(x-2)^2} \right) dx = 3\ln(x-2) - \frac{4}{x-2} + C.$

Câu 33. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2x-1}{(x+1)^2}$ trên khoảng $(-1; +\infty)$ là

A. $2\ln(x+1) + \frac{2}{x+1} + C.$

B. $2\ln(x+1) + \frac{3}{x+1} + C.$

C. $2\ln(x+1) - \frac{2}{x+1} + C.$

D. $2\ln(x+1) - \frac{3}{x+1} + C.$

Lời giải

Chọn B

Ta có

$\int f(x)dx = \int \frac{2x-1}{(x+1)^2} dx = \int \frac{2(x+1)-3}{(x+1)^2} dx = \int \left[\frac{2}{x+1} - \frac{3}{(x+1)^2} \right] dx = 2\ln(x+1) + \frac{3}{x+1} + C.$

Câu 34. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{1-2x}$ trên $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$.

A. $\frac{1}{2}\ln(1-2x) + C.$

B. $\ln|2x-1| + C.$

C. $\frac{1}{2}\ln|2x-1| + C.$

D. $-\frac{1}{2}\ln|2x-1| + C.$

Lời giải

Chọn D

Với mọi $x \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$ ta có: $\int \frac{1}{1-2x} dx = -\frac{1}{2} \ln|1-2x| + C = -\frac{1}{2} \ln|2x-1| + C$.

- Câu 35.** Cho biết $\int \frac{2x-13}{(x+1)(x-2)} dx = a \ln|x+1| + b \ln|x-2| + C$. Mệnh đề nào sau đây đúng?
A. $a+2b=8$. **B.** $a+b=8$. **C.** $2a-b=8$. **D.** $a-b=8$.

Lời giải

Chọn D

Ta có

$$\int \frac{2x-13}{(x+1)(x-2)} dx = \int \left(\frac{5}{x+1} - \frac{3}{x-2} \right) dx = 5 \int \frac{1}{x+1} dx - 3 \int \frac{1}{x-2} dx = 5 \ln|x+1| - 3 \ln|x-2| + C.$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} a=5 \\ b=-3 \end{cases} \Rightarrow a-b=8.$$

- Câu 36.** Tích phân $I = \int_0^1 \frac{(x-1)^2}{x^2+1} dx = a \ln b + c$, trong đó a, b, c là các số nguyên. Tính giá trị của biểu thức $a+b+c$?

- A.** 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có : } I = \int_0^1 \frac{(x-1)^2}{x^2+1} dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{2x}{x^2+1} \right) dx = \left(x - \ln|x^2+1| \right) \Big|_0^1 = 1 - \ln 2.$$

Khi đó $a=-1, b=2, c=1$.

Vậy $a+b+c=2$.

- Câu 37.** Cho biết $\int \frac{3}{x^2+4x+3} dx = \frac{a}{b} \ln \left| \frac{x+1}{x+3} \right| + C$, với b là số thực dương và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.** $a+2b=8$. **B.** $a+b=8$. **C.** $2a+b=8$. **D.** $a-b=8$.

Lời giải

Chọn C

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \int \frac{3}{x^2+4x+3} dx &= \int \frac{3}{(x+1)(x+3)} dx = \frac{3}{2} \int \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3} \right) dx \\ &= \frac{3}{2} (\ln|x+1| - \ln|x+3|) = \frac{3}{2} \ln \left| \frac{x+1}{x+3} \right| + C. \end{aligned}$$

Vậy $a=3, b=2 \Rightarrow 2a+b=8$.

- Câu 38.** Cho biết $\int \frac{4x+1}{2x+3} dx = ax - \frac{b}{2} \ln(2x+3) + C$, với mọi $x \in \left(-\frac{3}{2}; +\infty\right)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.** $2a-b=-1$. **B.** $2a-b=-3$. **C.** $2a-b=9$. **D.** $2a-b=7$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } \int \frac{4x+1}{2x+3} dx = \int \left(2 - \frac{5}{2x+3} \right) dx = 2x - \frac{5}{2} \ln|2x+3| + C$$

Vì $x \in \left(-\frac{3}{2}; +\infty\right)$ nên $|2x+3| = 2x+3$.

Do đó $\int \frac{4x+1}{2x+3} dx = 2x - \frac{5}{2} \ln(2x+3) + C$. Vậy $a=2, b=5 \Rightarrow 2a-b=-1$.

Câu 39. Biết $F(x) = (ax^2 + bx + c)\sqrt{2x-3}$ ($a, b, c \in \mathbb{Z}$) là một nguyên hàm của hàm số

$f(x) = \frac{20x^2 - 30x + 11}{\sqrt{2x-3}}$ trên khoảng $\left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$. Tính $T = a + b + c$.

A. $T = 8$.

B. $T = 5$.

C. $T = 6$.

D. $T = 7$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $F'(x) = f(x)$.

$$\begin{aligned} \text{Tính } F'(x) &= (2ax + b)\sqrt{2x-3} + (ax^2 + bx + c) \cdot \frac{1}{\sqrt{2x-3}} \\ &= \frac{(2ax + b)(2x-3) + ax^2 + bx + c}{\sqrt{2x-3}} = \frac{5ax^2 + (3b-6a)x - 3b + c}{\sqrt{2x-3}}. \end{aligned}$$

$$\text{Do đó } \frac{5ax^2 + (3b-6a)x - 3b + c}{\sqrt{2x-3}} = \frac{20x^2 - 30x + 11}{\sqrt{2x-3}}$$

$$\Rightarrow 5ax^2 + (3b-6a)x - 3b + c = 20x^2 - 30x + 11$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5a = 20 \\ 3b - 6a = -30 \\ -3b + c = 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = -2 \\ c = 5 \end{cases} \Rightarrow T = 7.$$

Nguyễn Bảo Vương

C. TÍNH NGUYÊN HÀM BẰNG PHƯƠNG PHÁP TỪNG PHẦN

1) Công thức nguyên hàm từng phần $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = g(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x)dx \\ v = \int g(x)dx = G(x) \quad (C=0) \end{cases}$

Khi đó ta có $\int u.dv = u.v - \int v.du$ hay $\int f(x)g(x)dx = f(x)G(x) - \int G(x)f'(x)dx$

2) Công thức tích phân từng phần $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = g(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x)dx \\ v = \int g(x)dx = G(x) \quad (C=0) \end{cases}$

Khi đó ta có $\int_a^b u.dv = (u.v) \Big|_a^b - \int_a^b v.du$ hay $\int_a^b f(x)g(x)dx = [f(x)G(x)] \Big|_a^b - \int_a^b G(x)f'(x)dx$

3) Công thức đạo hàm của hàm số sơ cấp và hàm hợp.

$$\diamond (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \quad \diamond (u^n)' = nu^{n-1}u' \quad \diamond (uv)' = u'v + uv'$$

$$\diamond (\sin u)' = u' \cos u \quad \diamond (\cos u)' = -u' \sin u \quad \diamond (e^x)' = e^x$$

$$\diamond (e^u)' = e^u u' \quad \diamond (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$\diamond$ Hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ nếu $F'(x) = f(x)$.

$$\diamond \int u(x).v'(x)dx = u(x).v(x) - \int v(x).u'(x)dx \quad \diamond \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \text{ với } \alpha \neq -1.$$

$$\diamond \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C \quad \diamond \int e^x dx = e^x + C \quad \diamond \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\diamond \int \cos x dx = \sin x + C$$

Câu 40. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $\cos 2x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)e^x$, họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f'(x)e^x$ là:

A. $-\sin 2x + \cos 2x + C$.

B. $-2\sin 2x + \cos 2x + C$.

C. $-2\sin 2x - \cos 2x + C$.

D. $2\sin 2x - \cos 2x + C$.

Lời giải

Chọn C

Do $\cos 2x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)e^x$

$$\text{nên } f(x)e^x = (\cos 2x)' \Leftrightarrow f(x)e^x = -2\sin 2x.$$

$$\text{Khi đó ta có } \int f(x)e^x dx = \cos 2x + C.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = f(x) \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x)dx \\ v = e^x \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó } \int f(x)e^x dx = \cos 2x + C \Leftrightarrow \int f(x)d(e^x) = \cos 2x + C$$

$$\Leftrightarrow f(x)e^x - \int f'(x)e^x dx = \cos 2x + C \Leftrightarrow \int f'(x)e^x dx = -2\sin 2x - \cos 2x + C.$$

Vậy tất cả các nguyên hàm của hàm số $f'(x)e^x$ là $-2\sin 2x - \cos 2x + C$.

Câu 41. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 4x(1 + \ln x)$ là

A. $2x^2 \ln x + 3x^2$.

B. $2x^2 \ln x + x^2$.

C. $2x^2 \ln x + 3x^2 + C$.

D. $2x^2 \ln x + x^2 + C$.

Lời giải

Chọn D.

$$\text{Cách 1. Ta có } \int f(x)dx = \int 4x(1 + \ln x)dx = \int 4x dx + \int 4x \ln x dx$$

+ Tính $\int 4x dx = 2x^2 + C_1$

+ Tính $\int 4x \ln x dx$

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = 4x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = 2x^2 \end{cases}$

Suy ra $\int 4x \ln x dx = 2x^2 \ln x - \int 2x dx = 2x^2 \ln x - x^2 + C_2$

Do đó $I = 2x^2 \ln x + x^2 + C$.

Cách 2. Ta có $(2x^2 \ln x + x^2)' = (2x^2)' \cdot \ln x + 2x^2 \cdot (\ln x)' + (x^2)'$

$= 4x \cdot \ln x + 2x^2 \cdot \frac{1}{x} + 2x$

$= 4x(1 + \ln x)$.

Do đó $2x^2 \ln x + x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 4x(1 + \ln x)$.

Hay $2x^2 \ln x + x^2 + C$ là họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 4x(1 + \ln x)$.

Câu 42. Cho $F(x) = \frac{1}{2x^2}$ là một nguyên hàm của hàm số $\frac{f(x)}{x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x) \ln x$.

A. $\int f'(x) \ln x dx = -\left(\frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{2x^2}\right) + C$

B. $\int f'(x) \ln x dx = \frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{x^2} + C$

C. $\int f'(x) \ln x dx = -\left(\frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{x^2}\right) + C$

D. $\int f'(x) \ln x dx = \frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{2x^2} + C$

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\int \frac{f(x)}{x} dx = \frac{1}{2x^2}$. Chọn $f(x) = \frac{-1}{x^2}$.

Khi đó: $\int f'(x) \ln x dx = \int \frac{2}{x^3} \ln x dx$. Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = \frac{2}{x^3} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = \frac{-1}{x^2} \end{cases}$.

Khi đó: $\int f'(x) \ln x dx = \int \frac{\ln x}{x^3} dx = -\frac{\ln x}{x^2} + \int \frac{1}{x^3} dx = -\left(\frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{2x^2}\right) + C$.

Câu 43. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^4 + xe^x$ là

A. $\frac{1}{5}x^5 + (x-1)e^x + C$. **B.** $\frac{1}{5}x^5 + xe^x + C$. **C.** $\frac{1}{5}x^5 + (x+1)e^x + C$. **D.** $4x^3 + (x+1)e^x + C$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\int f(x) dx = \int (x^4 + xe^x) dx = \frac{1}{5}x^5 + \int xe^x dx$.

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases}$.

Suy ra $\int f(x) dx = \frac{1}{5}x^5 + xe^x - \int e^x dx = \frac{1}{5}x^5 + xe^x - e^x + C = \frac{1}{5}x^5 + (x-1)e^x + C$.

Câu 44. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = xe^{2x}$?

A. $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} \left(x - \frac{1}{2} \right) + C.$

B. $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} (x - 2) + C.$

C. $F(x) = 2e^{2x} (x - 2) + C.$

D. $F(x) = 2e^{2x} \left(x - \frac{1}{2} \right) + C.$

Lời giải

Chọn A

Ta có $F(x) = \int x e^{2x} dx$

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = e^{2x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{cases}$

Suy ra $F(x) = \frac{1}{2}x e^{2x} - \frac{1}{2} \int e^{2x} dx = \frac{1}{2}x e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C = \frac{1}{2}e^{2x} \left(x - \frac{1}{2} \right) + C$

Câu 45. Biết $\int x \cos 2x dx = ax \sin 2x + b \cos 2x + C$ với a, b là các số hữu tỉ. Tính tích ab ?

A. $ab = \frac{1}{8}.$

B. $ab = -\frac{1}{4}.$

C. $ab = -\frac{1}{8}.$

D. $ab = \frac{1}{4}.$

Lời giải

Chọn A

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \cos 2x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{2} \sin 2x \end{cases}$

Khi đó $\int x \cos 2x dx = \frac{1}{2}x \sin 2x - \frac{1}{2} \int \sin 2x dx = \frac{1}{2}x \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + C$

$\Rightarrow a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{4}.$

Vậy $ab = \frac{1}{8}.$

Câu 46. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x(1 + \sin x)$ là

A. $\frac{x^2}{2} - x \sin x + \cos x + C.$

B. $\frac{x^2}{2} - x \cos x + \sin x + C.$

C. $\frac{x^2}{2} - x \cos x - \sin x + C.$

D. $\frac{x^2}{2} - x \sin x - \cos x + C.$

Lời giải

Chọn B

Xét $I = \int x(1 + \sin x) dx.$

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = (1 + \sin x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = x - \cos x \end{cases}.$

$I = x(x - \cos x) - \int (x - \cos x) dx = x^2 - x \cos x - \frac{x^2}{2} + \sin x + C = \frac{x^2}{2} - x \cos x + \sin x + C.$

Câu 47. Tìm nguyên hàm $J = \int (x+1)e^{3x} dx.$

A. $J = \frac{1}{3}(x+1)e^{3x} - \frac{1}{3}e^{3x} + C.$

B. $J = \frac{1}{3}(x+1)e^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x} + C.$

C. $J = \frac{1}{3}(x+1)e^{3x} + \frac{1}{9}e^{3x} + C.$

D. $J = (x+1)e^{3x} - \frac{1}{3}e^{3x} + C.$

Lời giải

Chọn B

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x+1 \\ dv = e^{3x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{3} e^{3x} \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó } J = \frac{1}{3}(x+1)e^{3x} - \frac{1}{3} \int e^{3x} dx = \frac{1}{3}(x+1)e^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x} + C.$$

Câu 48. Kết quả tính $\int 2x \ln(x-1) dx$ bằng:

A. $(x^2+1)\ln(x-1) - \frac{x^2}{2} - x + c.$

B. $(x^2-1)\ln(x-1) - \frac{x^2}{2} + x + c.$

C. $x^2 \ln(x-1) - \frac{x^2}{2} - x + c.$

D. $(x^2-1)\ln(x-1) - \frac{x^2}{2} - x + c.$

Lời giải

Chọn D

$$I = \int 2x \ln(x-1) dx$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln(x-1) \\ dv = 2x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x-1} dx \\ v = x^2 - 1 \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó } I = (x^2-1)\ln(x-1) - \int \frac{x^2-1}{x-1} dx$$

$$= (x^2-1)\ln(x-1) - \int (x+1) dx$$

$$= (x^2-1)\ln(x-1) - \frac{x^2}{2} - x + c.$$

Câu 49. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x(e^x - \sin x)$ là

A. $(x-1)e^x + x \cos x - \sin x + C.$

B. $(x+1)e^x + x \cos x - \sin x + C.$

C. $(x-1)e^x + x \cos x + \sin x + C.$

D. $(x-1)e^x - x \cos x - \sin x + C.$

Lời giải

Chọn A

$$\text{Đặt } I = \int x(e^x - \sin x) dx.$$

$$\begin{cases} u = x \\ dv = (e^x - \sin x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x + \cos x \end{cases} \Rightarrow I = x(e^x + \cos x) - \int (e^x + \cos x) dx$$

$$\Rightarrow I = x(e^x + \cos x) - (e^x + \sin x) + C \Rightarrow I = (x-1)e^x + x \cos x - \sin x + C$$

Câu 50. Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \frac{\ln 2x}{x^2}$?

A. $F(x) = -\frac{1}{x}(\ln 2x - 1).$

B. $F(x) = -\frac{1}{x}(\ln 2x + 1).$

C. $F(x) = -\frac{1}{x}(1 - \ln 2x).$

D. $F(x) = \frac{1}{x}(\ln 2x + 1).$

Lời giải

Chọn B

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln 2x \\ dv = \frac{1}{x^2} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = -\frac{1}{x} \end{cases}.$$

$$\text{Do đó } \int \frac{\ln 2x}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \ln 2x + \int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \ln 2x - \frac{1}{x} + C = -\frac{1}{x} (\ln 2x + 1) + C$$

Câu 51. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = (2x+3)\ln x$ là

A. $(x^2 + 3x)\ln x + \frac{x^2}{2} + 3x + C.$

B. $(x^2 + 3x)\ln x + \frac{x^2}{2} - 3x + C.$

C. $(x^2 + 3x)\ln x - \frac{x^2}{2} + 3x + C.$

D. $(x^2 + 3x)\ln x - \frac{x^2}{2} - 3x + C.$

Lời giải

Chọn D

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln x \\ dv = (2x+3) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = x^2 + 3x \end{cases}.$$

$$\begin{aligned} \int (2x+3)\ln x dx &= (x^2 + 3x)\ln x - \int (x^2 + 3x) \frac{dx}{x} \\ &= (x^2 + 3x)\ln x - \int (x+3) dx \\ &= (x^2 + 3x)\ln x - \frac{x^2}{2} - 3x + C. \end{aligned}$$

Câu 52. Tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x}{\sin^2 x}$ trên khoảng $(0; \pi)$ là

A. $-x \cot x + \ln(\sin x) + C.$

B. $x \cot x - \ln|\sin x| + C.$

C. $x \cot x + \ln|\sin x| + C.$

D. $-x \cot x - \ln(\sin x) + C.$

Lời giải

Chọn A

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = \frac{1}{\sin^2 x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\cot x \end{cases}.$$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó: } \int \frac{x}{\sin^2 x} dx &= -x \cot x + \int \cot x dx = -x \cot x + \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = -x \cot x + \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} \\ &= -x \cot x + \ln|\sin x| + C. \end{aligned}$$

$$\text{Với } x \in (0; \pi) \Rightarrow \sin x > 0 \Rightarrow \ln|\sin x| = \ln(\sin x).$$

$$\text{Vậy } \int \frac{x}{\sin^2 x} dx = -x \cot x + \ln(\sin x) + C.$$

D. NGUYÊN HÀM CÓ ĐIỀU KIỆN

Câu 53. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = 3 - 5 \sin x$ và $f(0) = 10$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. $f(x) = 3x + 5 \cos x + 5$

B. $f(x) = 3x + 5 \cos x + 2$

C. $f(x) = 3x - 5 \cos x + 15$

D. $f(x) = 3x - 5 \cos x + 2$

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } f(x) = \int (3 - 5 \sin x) dx = 3x + 5 \cos x + C$$

Theo giả thiết $f(0) = 10$ nên $5 + C = 10 \Rightarrow C = 5$.

Vậy $f(x) = 3x + 5 \cos x + 5$.

Câu 54. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x + 2x$ thỏa mãn $F(0) = \frac{3}{2}$. Tìm $F(x)$.

- A. $F(x) = 2e^x + x^2 - \frac{1}{2}$ B. $F(x) = e^x + x^2 + \frac{5}{2}$ C. $F(x) = e^x + x^2 + \frac{3}{2}$ D. $F(x) = e^x + x^2 + \frac{1}{2}$

Lời giải

Chọn D

Ta có $F(x) = \int (e^x + 2x) dx = e^x + x^2 + C$

Theo bài ra ta có: $F(0) = 1 + C = \frac{3}{2} \Rightarrow C = \frac{1}{2}$.

Câu 55. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = \frac{1}{x-1}$ và $F(2) = 1$. Tính $F(3)$.

- A. $F(3) = \ln 2 - 1$ B. $F(3) = \ln 2 + 1$ C. $F(3) = \frac{1}{2}$ D. $F(3) = \frac{7}{4}$

Lời giải

Chọn B

$F(x) = \int f(x) dx = \int \frac{1}{x-1} dx = \ln|x-1| + C$. $F(2) = 1 \Leftrightarrow \ln 1 + C = 1 \Leftrightarrow C = 1$.

Vậy $F(x) = \ln|x-1| + 1$. Suy ra $F(3) = \ln 2 + 1$.

Câu 56. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \sin x + \cos x$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$

- A. $F(x) = \cos x - \sin x + 3$ B. $F(x) = -\cos x + \sin x + 3$
C. $F(x) = -\cos x + \sin x - 1$ D. $F(x) = -\cos x + \sin x + 1$

Lời giải

Chọn D

Có $F(x) = \int f(x) dx = \int (\sin x + \cos x) dx = -\cos x + \sin x + C$

Do $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\cos \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2} + C = 2 \Leftrightarrow 1 + C = 2 \Leftrightarrow C = 1 \Rightarrow F(x) = -\cos x + \sin x + 1$.

Câu 57. Cho $F(x) = (x-1)e^x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)e^{2x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x)e^{2x}$.

- A. $\int f'(x)e^{2x} dx = (x-2)e^x + C$ B. $\int f'(x)e^{2x} dx = \frac{2-x}{2}e^x + C$
C. $\int f'(x)e^{2x} dx = (2-x)e^x + C$ D. $\int f'(x)e^{2x} dx = (4-2x)e^x + C$

Lời giải

Chọn C

Theo đề bài ta có $\int f(x).e^{2x} dx = (x-1)e^x + C$, suy ra $f(x).e^{2x} = [(x-1)e^x]' = e^x + (x-1).e^x$

$\Rightarrow f(x) = e^{-x} + (x-1).e^{-x} \Rightarrow f'(x) = (1-x).e^{-x}$

Suy ra $\int f'(x)e^{2x} dx = \int (1-x)e^x dx = \int (1-x)d(e^x) = e^x(1-x) + \int e^x dx = e^x(2-x) + C$.

Câu 58. $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = (2x+1)e^{2x}$ thỏa $F(0) = 0$. Tính $F(1)$

- A. $F(1) = 2e^2$. B. $F(1) = \frac{e^2}{2}$. C. $F(1) = e^2$. D. $F(1) = \frac{3e^2}{2}$.

Lời giải

Chọn C

$F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = (2x+1)e^{2x}$ suy ra

$$\int_0^1 (2x+1)e^{2x} dx = F(x) \Big|_0^1 = F(1) - F(0).$$

$$\text{Tính } I = \int_0^1 (2x+1)e^{2x} dx. \text{ Đặt } \begin{cases} u = 2x+1 \\ dv = e^{2x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2dx \\ v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{cases}.$$

$$\text{Suy ra } I = (2x+1)\frac{1}{2}e^{2x} \Big|_0^1 - \int_0^1 e^{2x} dx = \frac{3}{2}e^2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{2x} \Big|_0^1 = \frac{3}{2}e^2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(e^2 - 1) = e^2.$$

$$\text{Suy ra } F(1) - F(0) = e^2, \text{ mặt khác } F(0) = 0 \text{ suy ra } F(1) = e^2.$$

Câu 59. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{-x} + \sin x$ thỏa mãn $F(0) = 0$. Tìm $F(x)$.

- A. $F(x) = -e^{-x} + \cos x + 2$. B. $F(x) = -e^{-x} + \cos x$.
C. $F(x) = e^{-x} + \cos x - 2$. D. $F(x) = -e^{-x} - \cos x + 2$.

Lời giải

Chọn D

$$F(x) = \int f(x) dx = \int (e^{-x} + \sin x) dx = -\int e^{-x} d(-x) + \int \sin x dx = -e^{-x} - \cos x + C$$

$$F(0) = 0 \Leftrightarrow -1 - 1 + C = 0 \Leftrightarrow C = 2.$$

$$\text{Vậy } F(x) = -e^{-x} - \cos x + 2.$$

Câu 60. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = \frac{2}{x+2}$. Biết $F(-1) = 0$. Tính $F(2)$ kết quả là.

- A. $\ln 8 + 1$. B. $4 \ln 2 + 1$. C. $2 \ln 3 + 2$. D. $2 \ln 4$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } \int_{-1}^2 f(x) dx = F(2) - F(-1).$$

$$\Leftrightarrow \int_{-1}^2 \frac{2}{x+2} = 2 \ln |x+2| \Big|_{-1}^2 = 2 \ln 4 - 2 \ln 1 = 2 \ln 4.$$

$$\Leftrightarrow F(2) - F(-1) = 2 \ln 4.$$

$$\Leftrightarrow F(2) = 2 \ln 4 \text{ (do } F(-1) = 0).$$

Câu 61. Biết $\int \frac{dx}{1+\cos x} = a \tan \frac{x}{b} + C$ với a, b là các số nguyên dương. Tính $S = a - 2b$?

- A. -5 . B. -2 . C. 0 . D. -3 .

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } \int \frac{dx}{1+\cos x} = \int \frac{dx}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} = \tan \frac{x}{2} + C.$$

$$\text{Do đó: } a = 1, b = 2 \Rightarrow S = a - 2b = 1 - 4 = -3.$$

- Câu 62.** Cho $F(x) = \frac{a}{x}(\ln x + b)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1 + \ln x}{x^2}$, trong đó $a, b \in \mathbb{Z}$. Giá trị $S = b - 2a$ bằng
- A. 6. B. 0. C. 4. D. 2.

Lời giải

Chọn C

Vì $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ nên $(F(x))' = f(x)$

$$\text{Xét } (F(x))' = \left(\frac{a}{x}(\ln x + b) \right)' = a \left[-\frac{1}{x^2}(\ln x + b) + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} \right] = \frac{(a - ab) - a \ln x}{x^2}$$

$$\text{Đồng nhất } (F(x))' = f(x) \Rightarrow \frac{(a - ab) - a \ln x}{x^2} = \frac{1 + \ln x}{x^2}.$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} a - ab = 1 \\ -a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } b - 2a = 2 - 2 \cdot (-1) = 4.$$

- Câu 63.** Cho $F(x) = -\frac{1}{3x^3}$ là một nguyên hàm của hàm số $\frac{f(x)}{x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x) \ln x$

A. $\int f'(x) \ln x dx = \frac{\ln x}{x^3} - \frac{1}{5x^5} + C$

B. $\int f'(x) \ln x dx = -\frac{\ln x}{x^3} + \frac{1}{3x^3} + C$

C. $\int f'(x) \ln x dx = \frac{\ln x}{x^3} + \frac{1}{3x^3} + C$

D. $\int f'(x) \ln x dx = \frac{\ln x}{x^3} + \frac{1}{5x^5} + C$

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } F'(x) = \frac{f(x)}{x} \Rightarrow f(x) = x \cdot F'(x) = x \cdot \left(-\frac{1}{3} \cdot x^{-3} \right)' = \frac{1}{x^3} = x^{-3}$$

$$\Rightarrow f'(x) = -3x^{-4} \Rightarrow f'(x) \ln x = -3x^{-4} \ln x$$

$$\text{Vậy } \int f'(x) \ln x dx = \int (-3x^{-4} \ln x) dx = -3 \int \ln x \cdot x^{-4} dx$$

$$\text{Đặt } u = \ln x; dv = x^{-4} dx \Rightarrow du = \frac{dx}{x}; v = \frac{x^{-3}}{-3}$$

$$\text{Nên } \int f'(x) \ln x dx = -3 \int \ln x \cdot x^{-4} dx = -3 \left(\frac{\ln x}{-3x^3} + \int \frac{x^{-4}}{3} dx \right) = \frac{\ln x}{x^3} - \int x^{-4} dx = \frac{\ln x}{x^3} + \frac{1}{3x^3} + C$$

- Câu 64.** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f'(x) = 2e^{2x} + 1 \forall x$, $f(0) = 2$. Hàm $f(x)$ là

A. $y = 2e^x + 2x$.

B. $y = 2e^x + 2$.

C. $y = e^{2x} + x + 2$.

D. $y = e^{2x} + x + 1$.

Lời giải

Chọn D

Ta có:

$$\begin{cases} f'(x) = 2e^{2x} + 1 \\ f(0) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = \int (2e^{2x} + 1) dx \\ f(0) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = e^{2x} + x + C \\ C = 1 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } f(x) = e^{2x} + x + 1.$$

Câu 65. Cho $f(x) = \frac{x}{\cos^2 x}$ trên $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ và $F(x)$ là một nguyên hàm của $x.f'(x)$ thỏa mãn $F(0) = 0$. Tính $F\left(\frac{\pi}{3}\right)$?

- A. $\frac{\pi^2}{36} - \frac{\pi\sqrt{3}}{3} + \ln 2$. B. $\frac{4\pi^2}{9} - \frac{\pi\sqrt{3}}{3} - \ln 2$. C. $\frac{4\pi^2}{9} - \frac{\pi\sqrt{3}}{3} + \ln 2$. D. $\frac{\pi^2}{36} - \frac{\pi\sqrt{3}}{3} - \ln 2$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } F(x) = \int x.f'(x) dx = \int x d(f(x)) = xf(x) - \int f(x) dx = \frac{x^2}{\cos^2 x} - \int \frac{x}{\cos^2 x} dx$$

$$\int \frac{x}{\cos^2 x} dx = \int x d(\tan x) = x \tan x - \int \tan x dx = x \tan x + \ln(\cos x) + C$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{x^2}{\cos^2 x} - x \tan x - \ln(\cos x) + C \Rightarrow F(0) = C = 0$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{x^2}{\cos^2 x} - x \tan x - \ln(\cos x) \Rightarrow F\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{4\pi^2}{9} - \frac{\sqrt{3}\pi}{3} + \ln 2$$

Câu 66. Cho a là số thực khác 0, $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x \left(\ln(ax) + \frac{1}{x} \right)$ thỏa mãn $F\left(\frac{1}{a}\right) = 0$ và $F(2018) = e^{2018}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $a \in [2018; +\infty)$. B. $a \in \left(\frac{1}{2018}; 1\right)$. C. $a \in \left(0; \frac{1}{2018}\right)$. D. $a \in [1; 2018)$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Xét } F(x) = \int e^x \left(\ln(ax) + \frac{1}{x} \right) dx = \int e^x \ln(ax) dx + \int e^x \cdot \frac{1}{x} dx = M + \int e^x \cdot \frac{1}{x} dx.$$

$$\text{Xét } M = \int e^x \ln(ax) dx. \text{ Đặt } \begin{cases} u = \ln(ax) \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = e^x \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } M = \int e^x \ln(ax) dx = e^x \cdot \ln(ax) - \int e^x \cdot \frac{1}{x} dx \Rightarrow F(x) = e^x \ln(ax) + C.$$

$$\text{Vì } F\left(\frac{1}{a}\right) = 0 \Leftrightarrow C = 0 \text{ suy ra } F(x) = e^x \ln(ax).$$

$$\text{Lại có } F(2018) = e^{2018} \ln(2018a) = e^{2018} \Leftrightarrow \ln(2018a) = 1$$

$$\Leftrightarrow 2018a = e \Leftrightarrow a = \frac{e}{2018}. \text{ Vậy } a \in \left(\frac{1}{2018}; 1\right).$$

Câu 67. Biết $\int (x+3)e^{-2x} dx = -\frac{1}{m}e^{-2x}(2x+n) + C, (m, n \in \mathbb{Z})$. Giá trị của $m^2 + n^2$ bằng

- A. 10. B. 65. C. 5. D. 41.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Đặt: } u = x+3 \Rightarrow du = dx, dv = e^{-2x} dx \Rightarrow v = -\frac{1}{2}e^{-2x}.$$

$$\text{Ta có: } \int (x+3)e^{-2x} dx = -\frac{1}{2}e^{-2x}(x+3) + \frac{1}{2} \int e^{-2x} dx.$$

$$\int (x+3)e^{-2x} dx = -\frac{1}{2}e^{-2x}(x+3) - \frac{1}{4}e^{-2x} + C.$$

$$\int (x+3)e^{-2x} dx = -\frac{1}{4}e^{-2x}(2x+7) + C.$$

Vậy, ta có $m=4, n=7 \Rightarrow m^2+n^2=65$.

Câu 68. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2x+1}{x^4+2x^3+x^2}$ trên khoảng $(0; +\infty)$ thỏa mãn

$F(1) = \frac{1}{2}$. Giá trị của biểu thức $S = F(1) + F(2) + F(3) + \dots + F(2019)$ bằng

- A. $\frac{2019}{2020}$. B. $\frac{2019.2021}{2020}$. C. $2018\frac{1}{2020}$. D. $-\frac{2019}{2020}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } f(x) = \frac{2x+1}{x^4+2x^3+x^2} = \frac{2x+1}{x^2(x+1)^2}.$$

$$\text{Đặt } t = x(x+1) = x^2 + x \Rightarrow dt = (2x+1)dx.$$

$$\text{Khi đó } F(x) = \int f(x)dx = \int \frac{1}{t^2} dt = -\frac{1}{t} + C = -\frac{1}{x(x+1)} + C.$$

$$\text{Mặt khác, } F(1) = \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} + C = \frac{1}{2} \Rightarrow C = 1.$$

$$\text{Vậy } F(x) = -\frac{1}{x(x+1)} + 1.$$

Suy ra

$$\begin{aligned} S &= F(1) + F(2) + F(3) + \dots + F(2019) = -\left(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{2019.2020}\right) + 2019 \\ &= -\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2019} - \frac{1}{2020}\right) + 2019 = -\left(1 - \frac{1}{2020}\right) + 2019 \\ &= 2018 + \frac{1}{2020} = 2018\frac{1}{2020}. \end{aligned}$$

Câu 69. Cho $f(x)$ và $g(x)$ là hai hàm số liên tục và có một nguyên hàm lần lượt là $F(x) = x + 2019$, $G(x) = x^2 + 2020$. Tìm một nguyên hàm $H(x)$ của hàm số $h(x) = f(x).g(x)$, biết $H(1) = 3$.

- A. $H(x) = x^3 + 3$. B. $H(x) = x^2 + 5$. C. $H(x) = x^3 + 1$. D. $H(x) = x^2 + 2$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } f(x) = F'(x) = 1 \text{ và } g(x) = G'(x) = 2x$$

$$\Rightarrow h(x) = f(x).g(x) = 2x \Rightarrow H(x) = \int h(x)dx = \int 2xdx = x^2 + C.$$

$$\text{Mà } H(1) = 3 \Rightarrow 1^2 + C = 3 \Leftrightarrow C = 2 \Rightarrow H(x) = x^2 + 2.$$

Câu 70. Giả sử $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2e^x$. Tính tích $P = abc$.

- A. $P = -4$. B. $P = 1$. C. $P = 5$. D. $P = -3$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } F'(x) = (2ax + b)e^x + (ax^2 + bx + c)e^x = [ax^2 + (2a + b)x + b + c]e^2.$$

Do $F'(x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$ nên ta có hệ:
$$\begin{cases} a=1 \\ 2a+b=0 \\ b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \\ c=2 \end{cases}.$$

Vậy $P = abc = -4$.

- Câu 71.** Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2^x$, thỏa mãn $F(0) = \frac{1}{\ln 2}$. Tính giá trị biểu thức $T = F(0) + F(1) + F(2) + \dots + F(2019)$.
- A.** $T = \frac{2^{2020} - 1}{\ln 2}$. **B.** $T = 1009 \cdot \frac{2^{2019} - 1}{2}$. **C.** $T = 2^{2019 \cdot 2020}$. **D.** $T = \frac{2^{2019} - 1}{\ln 2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $F(x) = \int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C$.

Theo giả thiết $F(0) = \frac{1}{\ln 2} \Leftrightarrow \frac{2^0}{\ln 2} + C = \frac{1}{\ln 2} \Leftrightarrow C = 0$. Suy ra: $F(x) = \frac{2^x}{\ln 2}$

Vậy $T = F(0) + F(1) + F(2) + \dots + F(2019) = \frac{2^0}{\ln 2} + \frac{2^1}{\ln 2} + \frac{2^2}{\ln 2} + \dots + \frac{2^{2019}}{\ln 2}$
 $= \frac{1}{\ln 2} (2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{2019}) = \frac{1}{\ln 2} \cdot 1 \cdot \frac{1 - 2^{2020}}{1 - 2} = \frac{2^{2020} - 1}{\ln 2}$.

- Câu 72.** Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$, thỏa mãn $f'(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$. Biết $f(3) + f(-3) = 4$ và $f\left(\frac{1}{3}\right) + f\left(-\frac{1}{3}\right) = 2$. Giá trị của biểu thức $f(-5) + f(0) + f(2)$ bằng
- A.** $5 - \frac{1}{2} \ln 2$. **B.** $6 - \frac{1}{2} \ln 2$. **C.** $5 + \frac{1}{2} \ln 2$. **D.** $6 + \frac{1}{2} \ln 2$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f'(x) = \frac{1}{x^2 - 1} \Rightarrow f(x) = \int f'(x) dx = \int \frac{1}{x^2 - 1} dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C$ với $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$.

Khi đó:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C_1 & \text{khi } x > 1 \\ \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C_2 & \text{khi } -1 < x < 1 \\ \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C_3 & \text{khi } x < -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(3) + f(-3) = C_1 + C_3 = 4 \\ f\left(\frac{1}{3}\right) + f\left(-\frac{1}{3}\right) = 2C_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_3 = 4 \\ C_2 = 1 \end{cases}$$

Vậy $f(-5) + f(0) + f(2) = \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2} + C_3 + C_2 + \frac{1}{2} \ln \frac{1}{3} + C_1 = \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} + 5 = 5 - \frac{1}{2} \ln 2$.

E. NGUYÊN HÀM HÀM ẨN

Câu 73. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2) = -\frac{1}{25}$ và $f'(x) = 4x^3 [f(x)]^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng

A. $-\frac{41}{400}$

B. $-\frac{1}{10}$

C. $-\frac{391}{400}$

D. $-\frac{1}{40}$

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } f'(x) = 4x^3 [f(x)]^2 \Rightarrow -\frac{f'(x)}{[f(x)]^2} = -4x^3 \Rightarrow \left[\frac{1}{f(x)} \right]' = -4x^3 \Rightarrow \frac{1}{f(x)} = -x^4 + C$$

$$\text{Do } f(2) = -\frac{1}{25}, \text{ nên ta có } C = -9. \text{ Do đó } f(x) = -\frac{1}{x^4 + 9} \Rightarrow f(1) = -\frac{1}{10}.$$

Câu 74. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(x) + f'(x) = e^{-x}, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 2$. Tất cả các nguyên hàm của $f(x)e^{2x}$ là

A. $(x-2)e^x + e^x + C$.

B. $(x+2)e^{2x} + e^x + C$.

C. $(x-1)e^x + C$.

D. $(x+1)e^x + C$.

Lời giải

Chọn D

$$f(x) + f'(x) = e^{-x} \Leftrightarrow f(x)e^x + f'(x)e^x = 1 \Leftrightarrow (f(x)e^x)' = 1 \Leftrightarrow f(x)e^x = x + C'.$$

Vì $f(0) = 2$ nên $C' = 2$. Do đó $f(x)e^{2x} = (x+2)e^x$. Vậy:

$$\int f(x)e^{2x} dx = \int (x+2)e^x dx = \int (x+2)d(e^x) = (x+2)e^x - \int e^x d(x+2) = (x+2)e^x - \int e^x dx = (x+2)e^x - e^x + C = (x+1)e^x + C.$$

Câu 75. Cho hàm số $y = f(x)$ đồng biến và có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $(f'(x))^2 = f(x).e^x, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 2$. Khi đó $f(2)$ thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(12;13)$.

B. $(9;10)$.

C. $(11;12)$.

D. $(13;14)$.

Lời giải

Chọn B

Vì hàm số $y = f(x)$ đồng biến và có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ đồng thời $f(0) = 2$ nên $f'(x) \geq 0$ và $f(x) > 0$ với mọi $x \in [0; +\infty)$.

Từ giả thiết $(f'(x))^2 = f(x).e^x, \forall x \in \mathbb{R}$ suy ra $f'(x) = \sqrt{f(x).e^x}, \forall x \in [0; +\infty)$.

$$\text{Do đó, } \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}, \forall x \in [0; +\infty).$$

Lấy nguyên hàm hai vế, ta được $\sqrt{f(x)} = e^{\frac{x}{2}} + C, \forall x \in [0; +\infty)$ với C là hằng số nào đó.

Kết hợp với $f(0) = 2$, ta được $C = \sqrt{2} - 1$.

Từ đó, tính được $f(2) = (e + \sqrt{2} - 1)^2 \approx 9,81$.

Câu 76. Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f(x) < 0, \forall x > 0$ và có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$ thỏa mãn $f'(x) = (2x+1)f^2(x), \forall x > 0$ và $f(1) = -\frac{1}{2}$. Giá trị của biểu thức $f(1) + f(2) + \dots + f(2020)$ bằng

- A.** $-\frac{2020}{2021}$. **B.** $-\frac{2015}{2019}$. **C.** $-\frac{2019}{2020}$. **D.** $-\frac{2016}{2021}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có:

$$f'(x) = (2x+1)f^2(x) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = 2x+1 \Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f^2(x)} dx = \int (2x+1) dx \Rightarrow -\frac{1}{f(x)} = x^2 + x + C.$$

$$\text{Mà } f(1) = -\frac{1}{2} \Rightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{-1}{x^2 + x} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}.$$

$$\begin{cases} f(1) = \frac{1}{2} - 1 \\ f(2) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \\ f(3) = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} \\ \vdots \\ f(2020) = \frac{1}{2021} - \frac{1}{2020} \end{cases} \Rightarrow f(1) + f(2) + \dots + f(2020) = -1 + \frac{1}{2021} = -\frac{2020}{2021}.$$

Câu 77. Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f(2) = -\frac{4}{19}$ và $f'(x) = x^3 f^2(x) \forall x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng

- A.** $-\frac{2}{3}$. **B.** $-\frac{1}{2}$. **C.** -1 . **D.** $-\frac{3}{4}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } f'(x) = x^3 f^2(x) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = x^3 \Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f^2(x)} dx = \int x^3 dx \Leftrightarrow -\frac{1}{f(x)} = \frac{x^4}{4} + C.$$

$$\text{Mà } f(2) = -\frac{4}{19} \Rightarrow \frac{19}{4} = \frac{16}{4} + C \Rightarrow C = \frac{3}{4}. \text{ Suy ra } f(x) = -\frac{4}{x^4 + 3}.$$

$$\text{Vậy } f(1) = -1.$$

Câu 78. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$ thỏa mãn điều kiện: $f(1) = -2\ln 2$ và $x \cdot (x+1) \cdot f'(x) + f(x) = x^2 + x$. Biết $f(2) = a + b \cdot \ln 3$ ($a, b \in \mathbb{Q}$). Giá trị $2(a^2 + b^2)$ là

- A.** $\frac{27}{4}$. **B.** 9 . **C.** $\frac{3}{4}$. **D.** $\frac{9}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Chia cả hai vế của biểu thức $x.(x+1).f'(x) + f(x) = x^2 + x$ cho $(x+1)^2$ ta có

$$\frac{x}{x+1}.f'(x) + \frac{1}{(x+1)^2}f(x) = \frac{x}{x+1} \Leftrightarrow \left[\frac{x}{x+1}.f(x) \right]' = \frac{x}{x+1}.$$

$$\text{Vậy } \frac{x}{x+1}.f(x) = \int \left[\frac{x}{x+1}.f(x) \right]' dx = \int \frac{x}{x+1} dx = \int \left(1 - \frac{1}{x+1} \right) dx = x - \ln|x+1| + C.$$

$$\text{Do } f(1) = -2\ln 2 \text{ nên ta có } \frac{1}{2}.f(1) = 1 - \ln 2 + C \Leftrightarrow -\ln 2 = 1 - \ln 2 + C \Leftrightarrow C = -1.$$

$$\text{Khi đó } f(x) = \frac{x+1}{x}(x - \ln|x+1| - 1).$$

$$\text{Vậy ta có } f(2) = \frac{3}{2}(2 - \ln 3 - 1) = \frac{3}{2}(1 - \ln 3) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\ln 3 \Rightarrow a = \frac{3}{2}, b = -\frac{3}{2}.$$

$$\text{Suy ra } 2(a^2 + b^2) = 2\left[\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2\right] = 9.$$

Câu 79. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$, biết $f'(x) + (2x+1)f^2(x) = 0$, $f(x) = 0, f'(x) > 0 \forall x > 0, f(2) = \frac{1}{6}$. Tính giá trị của $P = f(1) + f(2) + \dots + f(2019)$.

A. $P = \frac{2020}{2019}$.

B. $P = \frac{2019}{2020}$.

C. $P = \frac{2018}{2019}$.

D. $P = \frac{2021}{2020}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có:

$$f'(x) + (2x+1).f^2(x) = 0 \Rightarrow \frac{-f'(x)}{f^2(x)} = 2x+1 \Rightarrow \int \frac{-f'(x)}{f^2(x)} dx = \int (2x+1) dx$$

Suy ra

$$\frac{1}{f(x)} = x^2 + x + c \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x^2 + x + c}$$

$$\text{Mà } f(2) = \frac{1}{6} \Rightarrow c = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x^2 + x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$$

$$P = f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(2019)$$

$$\Rightarrow P = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2019} - \frac{1}{2020} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2020} = \frac{2019}{2020}$$

Câu 80. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$ thỏa mãn điều kiện: $f(1) = -2\ln 2$ và $x.(x+1).f'(x) + f(x) = x^2 + x$ (1). Biết $f(2) = a + b.\ln 3$ ($a, b \in \mathbb{Q}$). Giá trị của $2(a^2 + b^2)$ là:

A. $\frac{27}{4}$.

B. 9.

C. $\frac{3}{4}$.

D. $\frac{9}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Xét trên đoạn $[1; 2]$, chia cả hai vế của phương trình (1) cho $(x+1)^2$, ta được:

$$\frac{x}{x+1} \cdot f'(x) + \frac{1}{(x+1)^2} \cdot f(x) = \frac{x}{x+1}$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{x}{x+1} \cdot f(x) \right]' = \frac{x}{x+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{x+1} \cdot f(x) = \int \frac{x}{x+1} dx = \int \left(1 - \frac{1}{x+1} \right) dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{x+1} \cdot f(x) = x - \ln|x+1| + C \quad (2).$$

Theo giả thiết, $f(1) = -2\ln 2$ nên thay $x=1$ vào phương trình (2), ta được:

$$\frac{1}{2} f(1) = 1 - \ln 2 + C \Leftrightarrow -\ln 2 = 1 - \ln 2 + C \Leftrightarrow C = -1.$$

Thay $x=2$ vào (2), ta được:

$$\frac{2}{3} f(2) = 2 - \ln 3 - 1 \Leftrightarrow f(2) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \ln 3.$$

$$\Rightarrow a = \frac{3}{2}, b = -\frac{3}{2}. \text{ Vậy } 2(a^2 + b^2) = 9.$$

Câu 81. Cho $\int f(4x) dx = x^2 + 3x + c$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\int f(x+2) dx = \frac{x^2}{4} + 2x + C.$

B. $\int f(x+2) dx = x^2 + 7x + C.$

C. $\int f(x+2) dx = \frac{x^2}{4} + 4x + C.$

D. $\int f(x+2) dx = \frac{x^2}{2} + 4x + C.$

Lời giải

Chọn C

Từ giả thiết bài toán $\int f(4x) dx = x^2 + 3x + c$.

Đặt $t = 4x \Rightarrow dt = 4dx$ từ đó ta có $\frac{1}{4} \int f(t) dt = \left(\frac{t}{4}\right)^2 + 3\left(\frac{t}{4}\right) + c \Rightarrow \int f(t) dt = \frac{t^2}{4} + 3t + c.$

Xét $\int f(x+2) dx = \int f(x+2) d(x+2) = \frac{(x+2)^2}{4} + 3(x+2) + c = \frac{x^2}{4} + 4x + C.$

Vậy mệnh đề đúng là $\int f(x+2) dx = \frac{x^2}{4} + 4x + C.$

Câu 82. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2) = -\frac{2}{9}$ và $f'(x) = 2x[f(x)]^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng

A. $-\frac{35}{36}.$

B. $-\frac{2}{3}.$

C. $-\frac{19}{36}.$

D. $-\frac{2}{15}.$

Lời giải

Ta có $f'(x) = 2x[f(x)]^2 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{[f(x)]^2} = 2x \Leftrightarrow \left[\frac{1}{f(x)} \right]' = -2x \Leftrightarrow \frac{1}{f(x)} = -x^2 + C.$

Từ $f(2) = -\frac{2}{9}$ suy ra $C = -\frac{1}{2}.$

$$\text{Do đó } f(1) = \frac{1}{-1^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)} = -\frac{2}{3}.$$

Câu 83. Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, thỏa mãn $f(x) + \tan x \cdot f'(x) = \frac{x}{\cos^3 x}$.

Biết rằng $\sqrt{3}f\left(\frac{\pi}{3}\right) - f\left(\frac{\pi}{6}\right) = a\pi\sqrt{3} + b\ln 3$ trong đó $a, b \in \mathbb{Q}$. Giá trị của biểu thức $P = a + b$ bằng

- A.** $\frac{14}{9}$. **B.** $-\frac{2}{9}$. **C.** $\frac{7}{9}$. **D.** $-\frac{4}{9}$.

Lời giải

Chọn D

$$f(x) + \tan x \cdot f'(x) = \frac{x}{\cos^3 x} \Leftrightarrow \cos x \cdot f(x) + \sin x \cdot f'(x) = \frac{x}{\cos^2 x}.$$

$$\Leftrightarrow [\sin x \cdot f(x)]' = \frac{x}{\cos^2 x}.$$

$$\text{Do đó } \int [\sin x \cdot f(x)]' dx = \int \frac{x}{\cos^2 x} dx \Rightarrow \sin x \cdot f(x) = \int \frac{x}{\cos^2 x} dx$$

$$\text{Tính } I = \int \frac{x}{\cos^2 x} dx.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = \frac{dx}{\cos^2 x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \tan x \end{cases}. \text{ Khi đó}$$

$$I = \int \frac{x}{\cos^2 x} dx = x \tan x - \int \tan x dx = x \tan x + \int \frac{d(\cos x)}{\cos x} dx = x \tan x + \ln |\cos x|.$$

$$\text{Suy ra } f(x) = \frac{x \cdot \tan x + \ln |\cos x|}{\sin x} = \frac{x}{\cos x} + \frac{\ln |\cos x|}{\sin x}.$$

$$a\pi\sqrt{3} + b\ln 3 = \sqrt{3}f\left(\frac{\pi}{3}\right) - f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{2\ln 2}{\sqrt{3}}\right) - \left(\frac{\pi\sqrt{3}}{9} + 2\ln \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= \frac{5\pi\sqrt{3}}{9} - \ln 3. \text{ Suy ra } \begin{cases} a = \frac{5}{9} \\ b = -1 \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } P = a + b = -\frac{4}{9}.$$

Câu 84. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$ thỏa mãn $f(1) = 2\ln 2 + 1$, $x(x+1)f'(x) + (x+2)f(x) = x(x+1)$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$. Biết $f(2) = a + b\ln 3$, với a, b là hai số hữu tỉ. Tính $T = a^2 - b$.

- A.** $T = \frac{-3}{16}$. **B.** $T = \frac{21}{16}$. **C.** $T = \frac{3}{2}$. **D.** $T = 0$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } x(x+1)f'(x) + (x+2)f(x) = x(x+1)$$

$$\Leftrightarrow f'(x) + \frac{x+2}{x(x+1)}f(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{x+1}f'(x) + \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}f(x) = \frac{x^2}{x+1}$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{x^2}{x+1} f(x) \right] = \frac{x^2}{x+1} \Leftrightarrow \frac{x^2}{x+1} f(x) = \int \frac{x^2}{x+1} dx \Leftrightarrow \frac{x^2}{x+1} f(x) = \frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1| + c$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \frac{x+1}{x^2} \left(\frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1| + c \right).$$

Ta có $f(1) = 2\ln 2 + 1 \Leftrightarrow c = 1$.

Từ đó $f(x) = \frac{x+1}{x^2} \left(\frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1| + 1 \right)$, $f(2) = \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \ln 3$. Nên $\begin{cases} a = \frac{3}{4} \\ b = \frac{3}{4} \end{cases}$.

Vậy $T = a^2 - b = -\frac{3}{16}$.

Câu 85. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $(1; +\infty)$ và thỏa mãn $(xf'(x) - 2f(x)) \cdot \ln x = x^3 - f(x)$, $\forall x \in (1; +\infty)$; biết $f(\sqrt[3]{e}) = 3e$. Giá trị $f(2)$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $\left(12; \frac{25}{2}\right)$. **B.** $\left(13; \frac{27}{2}\right)$. **C.** $\left(\frac{23}{2}; 12\right)$. **D.** $\left(14; \frac{29}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình $(xf'(x) - 2f(x)) \cdot \ln x = x^3 - f(x)$ (1) trên khoảng $(1; +\infty)$:

$$(1) \Leftrightarrow x \ln x \cdot f'(x) + (1 - 2 \ln x) \cdot f(x) = x^3 \Leftrightarrow f'(x) + \frac{1 - 2 \ln x}{x \ln x} \cdot f(x) = \frac{x^2}{\ln x} \quad (2).$$

Đặt $g(x) = \frac{1 - 2 \ln x}{x \ln x}$. Ta tìm một nguyên hàm $G(x)$ của $g(x)$.

$$\text{Ta có } \int g(x) dx = \int \frac{1 - 2 \ln x}{x \ln x} dx = \int \frac{1 - 2 \ln x}{\ln x} d(\ln x) = \int \left(\frac{1}{\ln x} - 2 \right) d(\ln x)$$

$$= \ln(\ln x) - 2 \ln x + C = \ln \left(\frac{\ln x}{x^2} \right) + C.$$

$$\text{Ta chọn } G(x) = \ln \left(\frac{\ln x}{x^2} \right).$$

Nhân cả 2 vế của (2) cho $e^{G(x)} = \frac{\ln x}{x^2}$, ta được: $\frac{\ln x}{x^2} \cdot f'(x) + \frac{1 - 2 \ln x}{x^3} \cdot f(x) = 1$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\ln x}{x^2} \cdot f(x) \right)' = 1 \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x^2} \cdot f(x) = x + C \quad (3).$$

Theo giả thiết, $f(\sqrt[3]{e}) = 3e$ nên thay $x = \sqrt[3]{e}$ vào (3), ta được:

$$\frac{\ln(\sqrt[3]{e})}{\sqrt[3]{e^2}} \cdot f(\sqrt[3]{e}) = \sqrt[3]{e} + C \Leftrightarrow C = \frac{1}{3\sqrt[3]{e^2}} \cdot 3e - \sqrt[3]{e} = 0.$$

$$\text{Từ đây, ta tìm được } f(x) = \frac{x^3}{\ln x} \Rightarrow f(2) = \frac{2^3}{\ln 2}. \text{ Vậy } f(2) \in \left(\frac{23}{2}; 12 \right).$$

----- **HẾT** -----