

CHỦ ĐỀ 6: BIỆN LUẬN SỐ NGHIỆM PHƯƠNG TRÌNH

II. CÁC DẠNG TOÁN TRỌNG TÂM VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

🔗 **Dạng 1:** Dựa vào bảng biến thiên và đồ thị để biện luận số nghiệm của phương trình

Bài toán: Biện luận số nghiệm của phương trình: $F(x; m) = 0$ theo tham số m dựa vào đồ thị hoặc bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$.

Phương pháp giải:

▪ **Bước 1:** Biến đổi phương trình $F(x; m) = 0$ về dạng $f(x) = g(m)$.

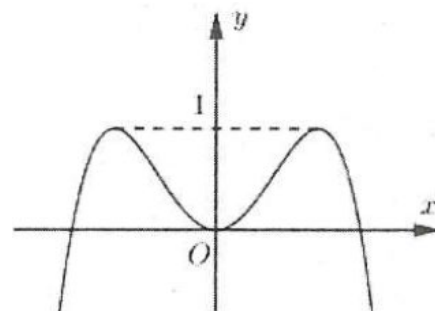
▪ **Bước 2:** Vẽ đồ thị hoặc bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ (C) và đường thẳng $d: y = g(m)$.

Đường thẳng d có đặc điểm vuông góc với trục tung và cắt trục tung tại điểm có tung độ $g(m)$.

▪ **Bước 3:** Dựa vào đồ thị hoặc bảng biến thiên của hàm số để biện luận số nghiệm của phương trình đã cho.

Ví dụ 1: Cho hàm số $y = -x^4 + 2x^2$ có đồ thị như hình bên. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $-x^4 + 2x^2 = m$ có bốn nghiệm thực phân biệt?

- A. $m > 0$
- B. $0 \leq m \leq 1$
- C. $0 < m < 1$
- D. $m < 1$



Lời giải

Số nghiệm của phương trình phụ thuộc vào số giao điểm của đồ thị hàm số $y = -x^4 + 2x^2$ và đường thẳng $y = m$. Dựa vào hình vẽ suy ra phương trình đã cho có 4 nghiệm khi $0 < m < 1$. **Chọn C.**

Ví dụ 2: [Đề thi tham khảo THPT QG năm 2019] Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$				
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$		-2		1		-2		$+\infty$

Số nghiệm thực của phương trình $2f(x) + 3 = 0$ là

- A. 4
- B. 3
- C. 2
- D. 1

Lời giải

Số nghiệm thực của phương trình $f(x)+3=0 \Leftrightarrow f(x)=\frac{-3}{2}$ chính là số giao điểm của đồ thị hàm số

$y=f(x)$ và đường thẳng $y=-\frac{3}{2}$.

Đường thẳng $y=-\frac{3}{2}$ cắt đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại 4 điểm phân biệt.

Vậy phương trình $2f(x)+3=0$ có đúng 4 nghiệm thực phân biệt. **Chọn A.**

Ví dụ 3: Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị trong hình bên.

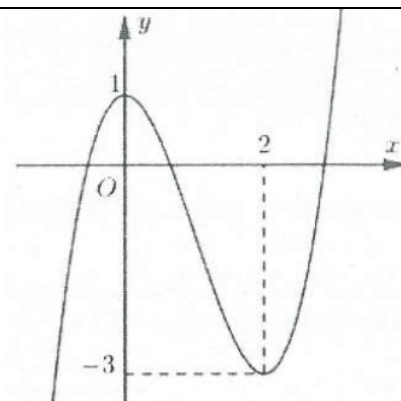
Hỏi phương trình $ax^3+bx^2+cx+d+1=0$ có bao nhiêu nghiệm?

A. Phương trình không có nghiệm.

B. Phương trình có đúng 1 nghiệm.

C. Phương trình có đúng 2 nghiệm.

D. Phương trình có đúng 3 nghiệm.



Lời giải

Số nghiệm của phương trình đã cho phụ thuộc vào số giao điểm của đồ thị hàm số

$y=ax^3+bx^2+cx+d$ và đường thẳng $y=-1$.

Dựa vào đồ thị ta thấy (C) cắt đường thẳng $y=-1$ tại 3 điểm phân biệt nên phương trình đã cho có 3 nghiệm. **Chọn D.**

Ví dụ 4: Tìm tất cả các giá trị m để phương trình $x^3-3x=2m$ có 3 nghiệm phân biệt

A. $-2 < m < 2$

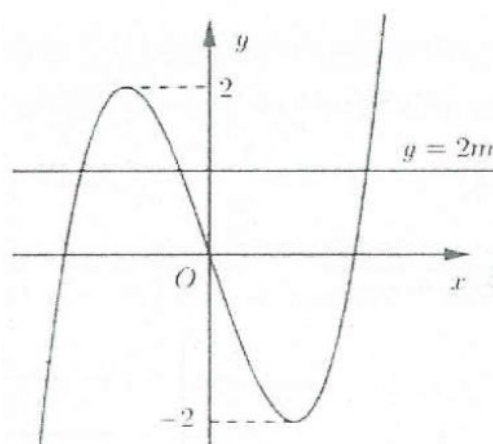
B. $-1 < m < 1$

C. $-2 \leq m \leq 2$

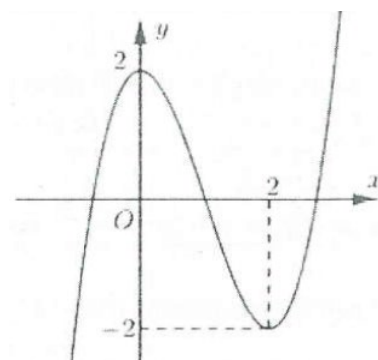
D. $-1 \leq m \leq 1$

Lời giải

Phương trình $x^3-3x=2m$ là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^3-3x$ và đường thẳng $y=2m$. Phương trình có 3 nghiệm phân biệt khi hai đồ thị có ba giao điểm. Khi đó $-2 < 2m < 2 \Leftrightarrow -1 < m < 1$. **Chọn B.**



Ví dụ 5: [Đề thi THPT QG năm 2018] Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$). Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ. Số nghiệm thực của phương trình $3f(x) + 4 = 0$ là:



- A. 3
- B. 0
- C. 1
- D. 2

Lời giải

Ta có: $3f(x) + 4 = 0 \Leftrightarrow f(x) = -\frac{4}{3}$

Số nghiệm của phương trình $f(x) = -\frac{4}{3}$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = -\frac{4}{3}$.

Dựa vào đồ thị hàm số suy ra phương trình $f(x) = -\frac{4}{3}$ có 3 nghiệm phân biệt. **Chọn A.**

Ví dụ 6: Cho hàm số $y = f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	2	1	$+\infty$	

Giá trị của tham số m để phương trình $x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2m - 1 = 0$ có 3 nghiệm phân biệt là:

- A. $\frac{1}{2} < m < \frac{3}{4}$
- B. $1 < m < \frac{3}{2}$
- C. $1 < m < 2$
- D. $\frac{1}{2} < m < \frac{3}{2}$

Lời giải

Ta có: PT $\Leftrightarrow 2x^3 - 3x^2 + 4m - 2 = 0 \Leftrightarrow 2x^3 - 3x^2 + 2 = 4 - 4m$ (1)

Số nghiệm của phương trình (1) là số giao điểm của đồ thị (C) và đường thẳng $d: y = 4 - 4m$. Do vậy phương trình (1) có đúng 3 nghiệm khi d cắt (C) tại đúng 3 điểm phân biệt

$1 < 4 - 4m < 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < m < \frac{3}{4}$. **Chọn A.**

Ví dụ 7: Cho hàm số $y = f(x) = x^4 - 2x^2 + 2$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$				
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Số giá trị nguyên của m để phương trình $2x^4 - 4x^2 + m - 5 = 0$ có đúng 2 nghiệm

A. 3

B. 4

C. 5

D. 6

Lời giải

Ta có: PT $\Leftrightarrow x^4 - 2x^2 = \frac{5-m}{2} \Leftrightarrow x^4 - 2x^2 + 2 = \frac{9-m}{2}$ (2)

Số nghiệm của phương trình (2) là số giao điểm của đồ thị (C) và đường thẳng $y = \frac{9-m}{2}$

Do vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm $\Leftrightarrow d$ cắt (C) tại 2 điểm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{9-m}{2} = 1 \\ \frac{9-m}{2} > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 7 \\ m < 5 \end{cases}$$

Kết hợp $m \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow m = \{1; 2; 3; 4; 5; 7\}$. **Chọn D.**

Ví dụ 8: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ tại 3 điểm phân biệt, trong đó có đúng hai điểm phân biệt có hoành độ dương.

A. $-1 < m < 3$

B. $1 < m < 3$

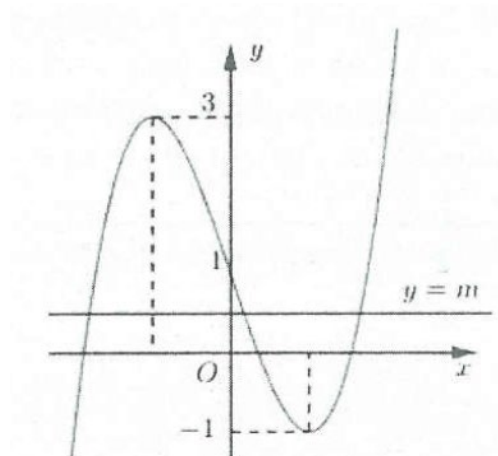
C. $-1 < m < 1$

D. $m = 1$

Lời giải

Ta có đồ thị hai hàm số như hình bên.

Đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ tại 3 điểm phân biệt, trong đó có đúng hai điểm phân biệt có hoành độ dương khi và chỉ khi $-1 < m < 1$. **Chọn C.**



Ví dụ 9: Các giá trị m để đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2}x^4 - x^2 + 3$ tại 4 điểm phân biệt là

A. $\frac{5}{2} < m < 3$

B. $\frac{1}{2} < m < 3$

C. $m > 3$

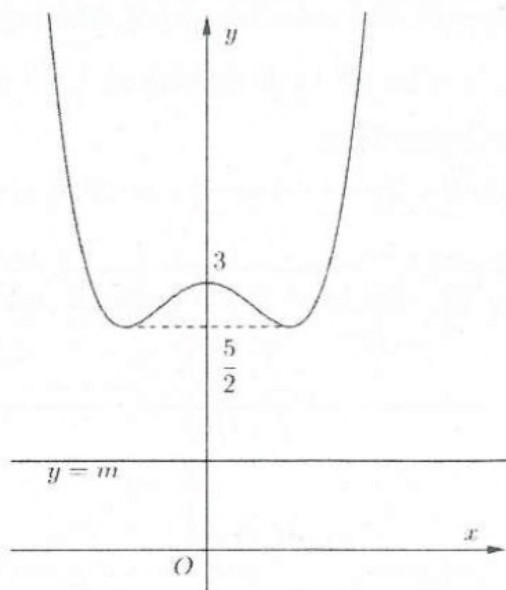
D. $\frac{1}{2} < m < \frac{5}{2}$

Lời giải

Ta có đồ thị hai hàm số $y = \frac{1}{2}x^4 - x^2 + 3$ như hình bên.

Dựa vào đồ thị ta thấy, đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2}x^4 - x^2 + 3$ tại 4 điểm phân biệt khi và chỉ khi giá

trị m thuộc đoạn $\left(\frac{5}{2}; 3\right) \Leftrightarrow \frac{5}{2} < m < 3$. **Chọn A.**



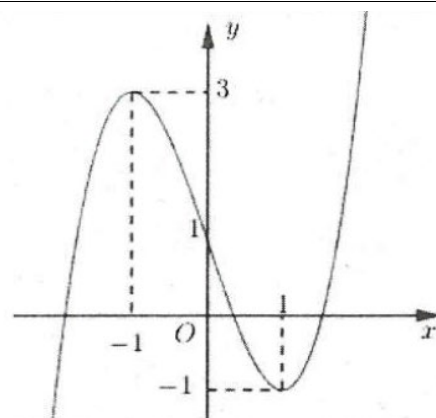
Ví dụ 10: Đồ thị sau đây là của hàm số $y = x^3 - 3x + 1$. Tìm m để phương trình $x^3 - 3x - m = 0$ có ba nghiệm phân biệt

A. $-1 < m < 3$

B. $-2 < m < 2$

C. $-2 \leq m < 2$

D. $-2 < m < 3$



Lời giải

PT $\Leftrightarrow x^3 - 3x + 1 = m + 1$. Số nghiệm của phương trình đã cho là số giao điểm đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ và đường thẳng $y = m + 1$.

Dựa vào đồ thị ta thấy, phương trình có ba nghiệm phân biệt khi và chỉ khi hai đồ thị có ba giao điểm. Khi đó $-1 < m + 1 < 3 \Leftrightarrow -2 < m < 2$. **Chọn B.**

Ví dụ 11: Cho hàm số $y = f(x) = -x^3 - 3x^2 + 4$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$	
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$+\infty$	0	4	$-\infty$	

Phương trình $x^3 + 3x^2 + 2m = 0$, với m là tham số thực, có 3 nghiệm thực phân biệt khi m thuộc tập hợp nào dưới đây?

A. $[-2; 0]$

B. $(-2; 0)$

C. $[-3; -2]$

D. $[-2; 0]$

Lời giải

PT $\Leftrightarrow -x^3 - 3x^2 + 4 = 2m + 4 (*)$. Phương trình $(*)$ là phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng $y = 2m + 4$ và đồ thị hàm số $y = f(x) = -x^3 - 3x^2 + 4$. PT có 3 nghiệm phân biệt khi hay đồ thị có 3 giao điểm.

Khi đó $0 < 2m + 4 < 4 \Leftrightarrow -2 < m < 0 \Rightarrow m \in (-2; 0)$. **Chọn B.**

Ví dụ 12: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$				
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$		-2		-1		-2		$+\infty$

Tập hợp các giá trị của tham số m để phương trình $f(x) = m$ có bốn nghiệm phân biệt là

A. $(-2; +\infty)$

B. $[-2; -1]$

C. $(-2; -1)$

D. $(-\infty; -1)$

Lời giải

Phương trình $f(x) = m$ là phương trình hoành độ giao điểm đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = m$ song song trục hoành. Phương trình $f(x) = m$ có bốn nghiệm phân biệt khi và chỉ khi đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại 4 điểm phân biệt. Khi đó

$-2 < m < -1 \Leftrightarrow m \in (-2; -1)$. **Chọn C.**

Ví dụ 13: Hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$+$	$+$
$f(x)$	-2	$+\infty$	$+\infty$	2

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x) = m$ có 3 nghiệm thực phân biệt.

A. $m \in (2; +\infty)$

B. $m \in (-\infty; -2)$

C. $m \in [-2; 2]$

D. $m \in (-2; 2)$

Lời giải

Phương trình $f(x) = m$ có 3 nghiệm thực phân biệt khi $m \in (-2; 2)$. **Chọn D.**

Ví dụ 14: Cho hàm số $y = f(x) = -x^3 - 3x^2 + 4$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$	
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$+\infty$	0	4	$-\infty$	

Phương trình $x^3 + 3x^2 + 2m = 0$, với m là tham số thực, có 3 nghiệm thực phân biệt khi m thuộc tập hợp nào dưới đây?

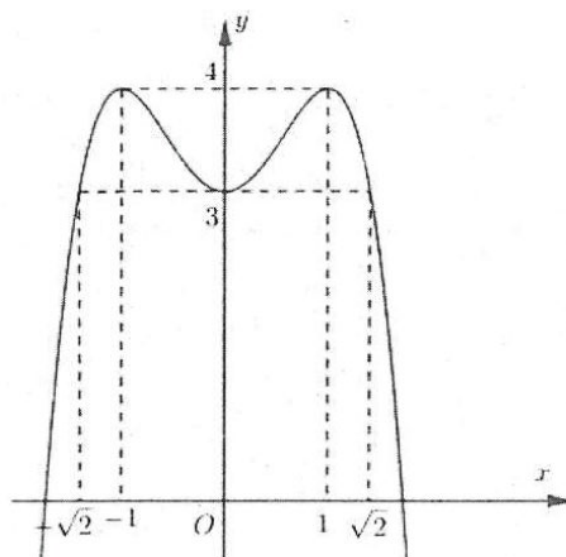
- A. $[-2; 0]$ B. $(-2; 0)$ C. $[-3; -2]$ D. $[-2; 0]$

Lời giải

PT $\Leftrightarrow -x^3 - 3x^2 + 4 = 2m + 4$ (*). Phương trình (*) là phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng $y = 2m + 4$ và đồ thị hàm số $y = f(x) = -x^3 - 3x^2 + 4$. Phương trình có 3 nghiệm phân biệt khi hai đồ thị có 3 giao điểm. Khi đó $0 < 2m + 4 < 4 \Leftrightarrow -2 < m < 0 \Rightarrow m \in (-2; 0)$. **Chọn B.**

Ví dụ 15: Cho đồ thị hàm số $y = f(x) = -x^4 + 2x^2 + 3$ như hình vẽ. Số các giá trị nguyên của tham số $m \in [-10; 10]$ để phương trình $x^4 - 2x^2 = m^4 - 2m^2$ có đúng 2 nghiệm phân biệt là

- A. 17
B. 18
C. 19
D. 20



Lời giải

Ta có: $x^4 - 2x^2 = m^4 - 2m^2 \Leftrightarrow -x^4 + 2x^2 + 3 = -m^4 + 2m^2 + 3$ (*)

Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy: Phương trình (*) có đúng hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow -m^4 + 2m^2 + 3 < 3 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -\sqrt{2} \\ m > \sqrt{2} \end{cases}$$

Kết hợp $\begin{cases} m \in [-10; 10] \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow$ có 18 giá trị của tham số m . **Chọn B.**

Ví dụ 16: Cho hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x + m$ (với m là tham số thực) có đồ thị (C) . Giả sử (C) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 (với $x_1 < x_2 < x_3$). Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $0 < x_1 < 1 < x_2 < 3 < x_3 < 4$

B. $1 < x_1 < x_2 < 3 < x_3 < 4$

C. $1 < x_1 < 3 < x_2 < 4 < x_3$

D. $x_1 < 0 < 1 < x_2 < 3 < x_3 < 4$

Lời giải

Đồ thị (C) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt.

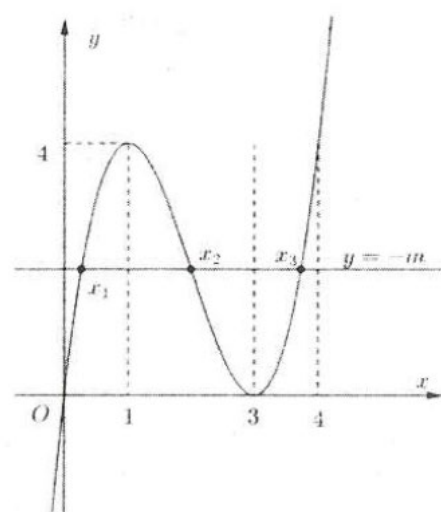
Khi đó PT $x^3 - 6x^2 + 9x + m = 0$ có ba nghiệm phân biệt.

Suy ra PT $x^3 - 6x^2 + 9x = -m$ có ba nghiệm phân biệt, suy ra đường thẳng $y = -m$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x$ tại 3 điểm phân biệt.

Ta có đồ thị hai hàm số như hình bên.

Hai đồ thị có 3 giao điểm khi và chỉ khi $-4 < m < 0$.

Khi đó $0 < x_1 < 1 < x_2 < 3 < x_3 < 4$. **Chọn A.**



➤ Dạng 2: Biện luận số nghiệm của phương trình bằng phương pháp suy đồ thị

1. Các phép tịnh tiến đồ thị hàm số

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$, p và q là hai số dương tùy ý. Khi đó:

- Tịnh tiến (C) lên trên q đơn vị thì ta được đồ thị của hàm số $y = f(x) + q$.
- Tịnh tiến (C) xuống dưới q đơn vị thì ta được đồ thị của hàm số $y = f(x) - q$.
- Tịnh tiến (C) sang trái p đơn vị thì ta được đồ thị của hàm số $y = f(x + p)$.
- Tịnh tiến (C) sang phải p đơn vị thì ta được đồ thị của hàm số $y = f(x - p)$.

2. Một số phép suy đồ thị

☑ **Mẫu 1:** Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ (C) thì đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ gồm 2 phần.

- **Phần 1:** Là phần đồ thị hàm số (C) nằm phía trên trục hoành.
- **Phần 2:** Lấy đối xứng phần của (C) nằm dưới Ox qua Ox .

☑ **Mẫu 2:** Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ (C) suy ra đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ gồm hai phần

- **Phần 1:** Là phần của (C) nằm bên phải trục tung.

- **Phần 2:** Lấy đối xứng phần 1 qua trục tung (vì hàm số $y = f(|x|)$ là hàm chẵn nên nhận trục tung là trục đối xứng).

☑ **Mẫu 3:** Cho đồ thị hàm số $y = u(x).v(x)$ (C) thì đồ thị hàm số $y = |u(x)|.v(x)$ gồm hai phần.

- **Phần 1:** Là phần của (C) ứng với miền $u(x) \geq 0$.

- **Phần 2:** Lấy đối xứng phần của (C) ứng với miền $u(x) < 0$ qua trục Ox .

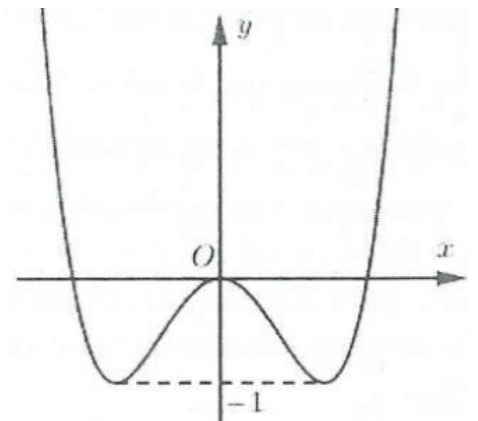
Ví dụ 1: Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $|x^4 - 2x^2| = m$ có 4 nghiệm phân biệt

A. $m = 1$

B. $m = 0$

C. $m > 1$

D. $0 < m < 1$



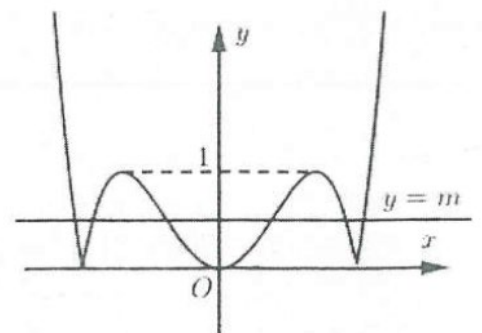
Lời giải

Gọi $y = x^4 - 2x^2$ (C). Đồ thị hàm số $y = |x^4 - 2x^2|$ gồm 2 phần:

Phần 1: Là phần đồ thị hàm số (C) nằm phía bên trục hoành.

Phần 2: Lấy đối xứng phần của (C) nằm dưới Ox qua Ox .

Dựa vào đồ thị hàm số $y = |x^4 - 2x^2|$ (hình vẽ) và đường thẳng $y = m$.



Suy ra phương trình $|x^4 - 2x^2| = m$ có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi hai đồ thị có 4 giao điểm. Khi đó $m = 1$. **Chọn A.**

Ví dụ 2: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = |x^4 - 2x^2 - 2|$ tại 6 điểm phân biệt.

A. $2 < m < 3$

B. $2 < m < 4$

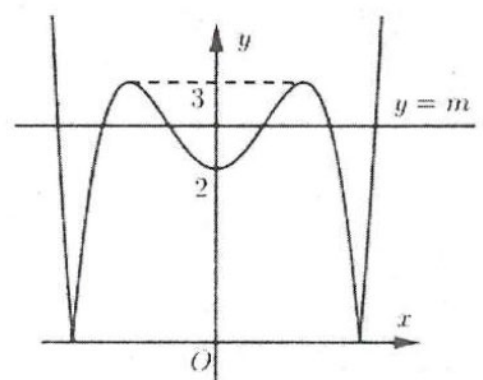
C. $m = 3$

D. $0 < m < 3$

Lời giải

Vẽ đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 2$ (C). Khi đó đồ thị hàm số

$y = |x^4 - 2x^2 - 2|$ gồm 2 phần:



Phần 1: Là phần đồ thị hàm số (C) nằm phía bên trên trục hoành.

Phần 2: Lấy đối xứng phần của (C) nằm dưới Ox qua Ox .

Dựa vào đồ thị hàm số (hình vẽ bên) để đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị (C) tại 6 điểm phân biệt khi và chỉ khi $2 < m < 3$. **Chọn A.**

Ví dụ 3: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $|3x - x^3 + 1| + m - 2 = 0$ có sáu nghiệm phân biệt.

A. $1 < m < 2$

B. $0 \leq m \leq 1$

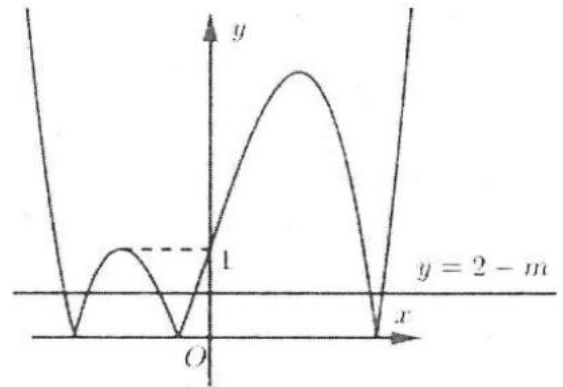
C. $1 \leq m \leq 2$

D. $0 < m < 1$

Lời giải

Ta có: PT $\Leftrightarrow |-x^3 + 3x + 1| = 2 - m (*) \Rightarrow$ Phương trình $(*)$

là phương trình hoành độ giao điểm đồ thị hàm số $y = |3x - x^3 + 1|$ và đường thẳng $y = 2 - m$ vuông góc với trục tung. Phương trình đã cho có sáu nghiệm phân biệt khi và chỉ khi hai đồ thị cắt nhau tại 6 điểm phân biệt. Ta có đồ thị hai hàm số như hình bên. Để hai đồ thị cắt nhau tại 6 điểm thì $0 < 2 - m < 1 \Leftrightarrow 1 < m < 2$. **Chọn A.**



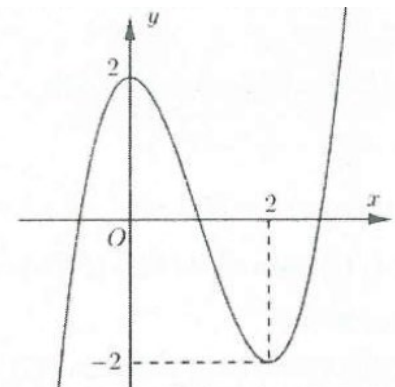
Ví dụ 4: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $|2f(x) + 1| = 5$ là:

A. 3

B. 5

C. 2

D. 4



Lời giải

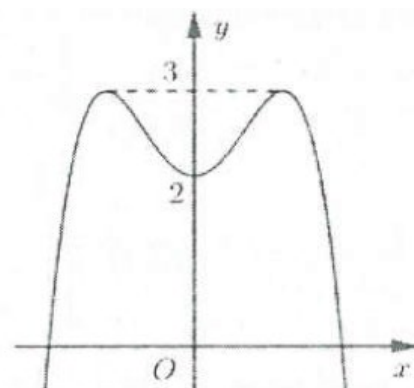
Ta có: $|2f(x) + 1| = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} 2f(x) + 1 = 5 \\ 2f(x) + 1 = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 2 \\ f(x) = -3 \end{cases}$

Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy, phương trình $f(x) = 2$ có 2 nghiệm và phương trình $f(x) = -3$ có một nghiệm nên phương trình đã cho có 3 nghiệm. **Chọn A.**

Ví dụ 5: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm

thực của phương trình $|2f(x) + 3| = 8$ là:

- A. 7
- B. 5
- C. 4
- D. 6



Lời giải

$$\text{Ta có: } |2f(x) + 3| = 8 \Leftrightarrow \begin{cases} 2f(x) + 3 = 8 \\ 2f(x) + 3 = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = \frac{5}{2} \\ f(x) = \frac{-11}{2} \end{cases}$$

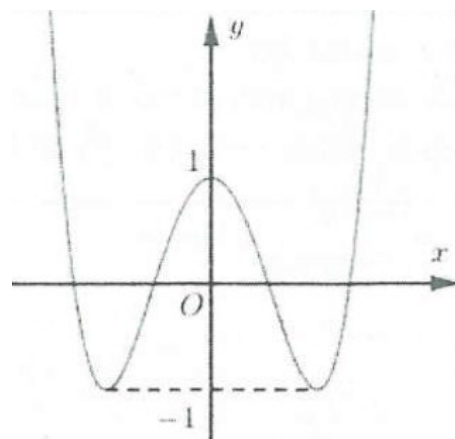
Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy, phương trình $f(x) = \frac{5}{2}$ có 4 nghiệm và phương trình $f(x) = \frac{-11}{2}$ có 2 nghiệm nên phương trình đã cho có 6 nghiệm. **Chọn D.**

Ví dụ 6: Hình bên là đồ thị hàm số $y = 2x^4 - 4x^2 + 1$. Tìm tất cả các

giá trị của tham số m để phương trình $\left|x^4 - 2x^2 + \frac{1}{2}\right| = 2m$ có 8

nghiệm phân biệt

- A. $0 < m < \frac{1}{2}$
- B. $-\frac{1}{4} < m < \frac{1}{2}$
- C. $0 < m < \frac{1}{4}$
- D. $m \geq \frac{1}{4}$



Lời giải

$$\text{Ta có: PT } \Leftrightarrow |2x^4 - 4x^2 + 1| = 4m$$

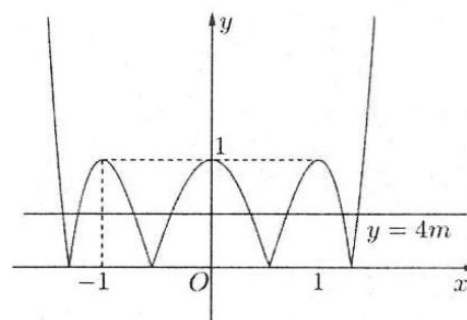
$$\text{Gọi } y = 2x^4 - 4x^2 + 1 (C)$$

Đồ thị hàm số $y = |2x^4 - 4x^2 + 1|$ gồm 2 phần:

Phần 1: Là phần đồ thị hàm số (C) nằm phía bên trên trục hoành.

Phần 2: Lấy đối xứng phần của (C) nằm dưới Ox qua Ox .

Dựa vào đồ thị hàm số $y = |2x^4 - 4x^2 + 1|$ và đường thẳng $y = 4m$ suy ra phương trình đã cho có 8 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi hai đồ thị có 8 giao điểm. Hai đồ thị có 8 giao điểm



$$\Leftrightarrow 0 < 4m < 1 \Leftrightarrow 0 < m < \frac{1}{4}. \text{ Chọn C.}$$

Ví dụ 7: Biết rằng hàm số $y = x^4 - 4x^2 + 3$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	-1	3	-1	$+\infty$

Tìm m để phương trình $|x^4 - 4x^2 + 3| = m$ có đúng 4 nghiệm phân biệt.

A. $1 < m < 3$

B. $m > 3$

C. $m = 0$

D. $m \in (1; 3) \cup \{0\}$

Lời giải

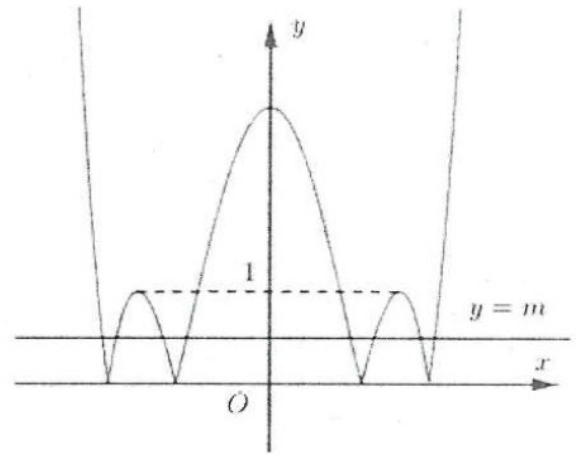
Vẽ đồ thị hàm số $y = |x^4 - 4x^2 + 3|$ (C')

Ký hiệu $y = x^4 - 4x^2 + 3$ (C) khi đó (C') gồm 2 phần:

Phần 1: Là phần của (C) nằm trên trục Ox .

Phần 2: Lấy đối xứng phần của (C) nằm dưới Ox qua trục Ox

Để phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt thì đường thẳng $y = m$ cắt (C) tại 4 điểm phân biệt



$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ 1 < m < 3 \end{cases}. \text{ Chọn D.}$$

Ví dụ 8: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$+\infty$	-4	0	$-\infty$	

Với $m \in (1; 3)$ thì phương trình $|f(x)| = m$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 4

B. 3

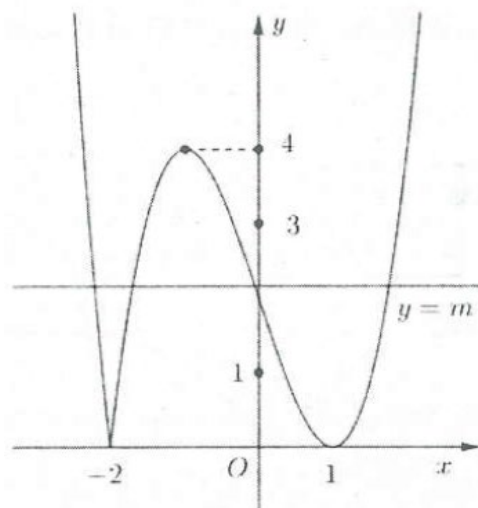
C. 2

D. 5

Lời giải

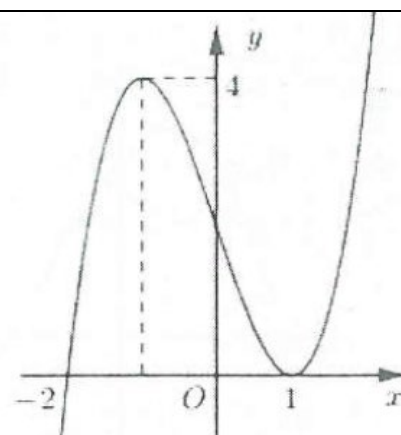
Phương trình $|f(x)| = m$ là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ và đường thẳng $y = m$ song song trục hoành có đồ thị ở hình bên. Hai đồ thị có bao nhiêu giao điểm thì PT $|f(x)| = m$ có bấy nhiêu nghiệm.

$m \in (1;3)$ thì hai đồ thị có 4 giao điểm, suy ra PT $|f(x)| = m$ có 4 nghiệm. **Chọn A.**



Ví dụ 9: Cho hàm số $y = f(x) = (x^2 + x - 2).g(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của m để phương trình $|x^2 + x - 2|.g(x) = m$ có 3 nghiệm phân biệt. Tổng các phần tử của S là:

- A. 4
- B. 6
- C. -6
- D. -4



Lời giải

Ta có: $x^2 + x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq -2 \end{cases}$

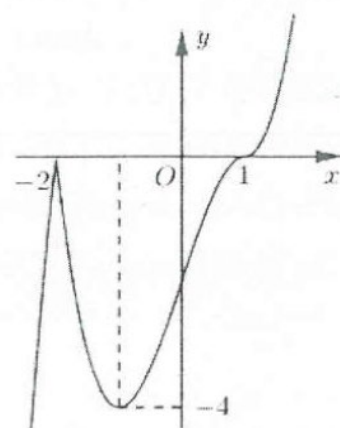
Gọi $y = f(x) = (x^2 + x - 2).g(x)(C)$ thì đồ thị hàm số $y = |x^2 + x - 2|.g(x)$ gồm 2 phần.

Phần 1: Là phần của (C) ứng với miền $\begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq -2 \end{cases}$

Phần 2: Lấy đối xứng phần (C) ứng với miền $-2 < x < 1$ qua trục hoành.

Dựa vào đồ thị hàm số suy ra phương trình $|x^2 + x - 2|.g(x) = m$ có 3 nghiệm phân biệt khi $-4 < m < 0$.

Kết hợp $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m = \{-3; -2; -1\} \Rightarrow$ tổng các phần tử của S là -6. **Chọn C.**



x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$

Ví dụ 10: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Số nghiệm của phương trình $|f(x-1)| = 2$ là

y	$-\infty$	4	-2	$+\infty$
		$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

A. 4

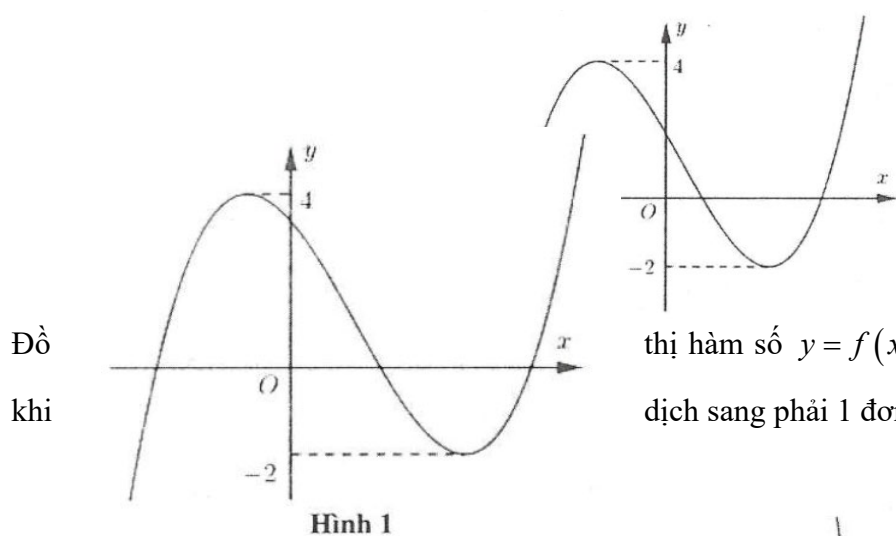
B. 5

C. 2

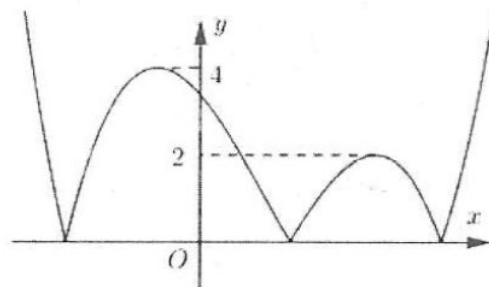
D. 3

Lời giải

Ta có đồ thị hàm số $y = f(x)$ có dạng như hình sau:



thị hàm số $y = f(x-1)$ (C) là đồ thị hàm số $y = f(x)$ dịch sang phải 1 đơn vị (xem hình 1).



Hình 2

Đồ thị hàm số $y = |f(x-1)|$ là gồm 2 phần (xem hình 2)

Phần 1: Là phần của (C) nằm trên trục hoành

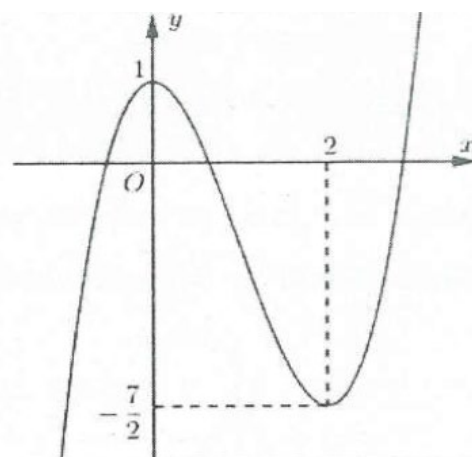
Phần 2: Lấy đối xứng phần nằm dưới trục hoành của (C) qua Ox.

Dựa vào đồ thị hàm số $y = |f(x-1)|$ suy ra phương trình $|f(x-1)| = 2$ có 5 nghiệm. **Chọn B.**

Ví dụ 11: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Phương

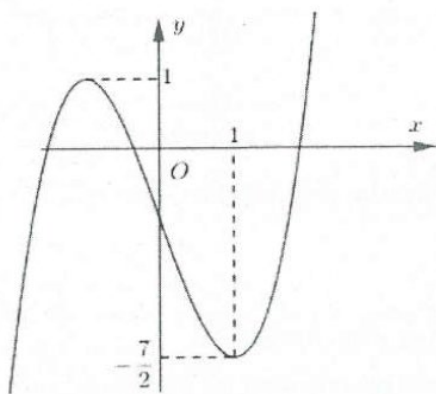
trình $|f(x+1)| = m$ có nhiều nghiệm nhất khi:

- A. $m = \frac{7}{2}$
- B. $1 < m < \frac{7}{2}$
- C. $m = 1$
- D. $0 < m < 1$

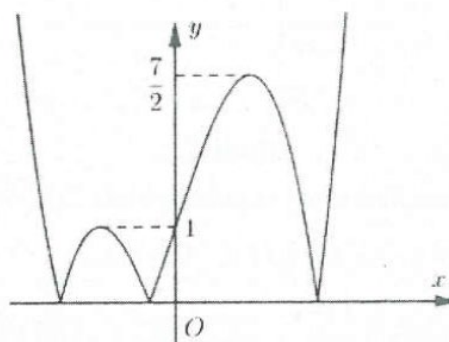


Lời giải

Đồ thị hàm số $y = f(x+1)$ (C) là đồ thị hàm số $y = f(x)$ khi dịch sang trái 1 đơn vị (xem hình 1).



Hình 1.



Hình 2.

Đồ thị hàm số $y = |f(x+1)|$ gồm 2 phần (xem hình 2)

Phần 1: Là phần của (C) nằm trên trục hoành

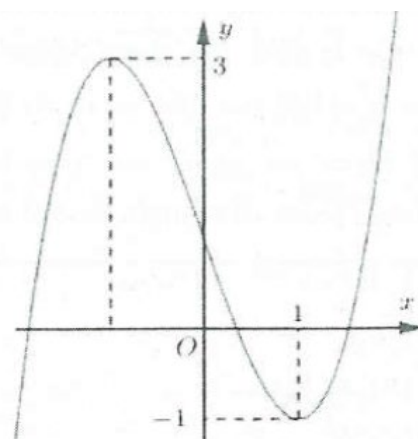
Phần 2: Lấy đối xứng phần nằm dưới trục hoành của (C) qua Ox .

Dựa vào đồ thị hàm số $y = |f(x+1)|$ suy ra phương trình $|f(x+1)| = m$ có nhiều nghiệm nhất là 6 nghiệm khi $0 < m < 1$. **Chọn D.**

Ví dụ 12: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Có bao

nhiều giá trị nguyên của m để phương trình $f(|x|-1) = m$ có 4 nghiệm phân biệt

- A. 3
- B. 4
- C. 5
- D. 6



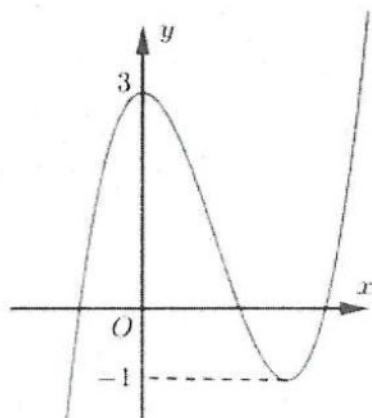
Lời giải

Đồ thị hàm số $y = f(x-1)(C)$ là đồ thị hàm số $y = f(x)$ khi dịch sang phải 1 đơn vị (hình 1)

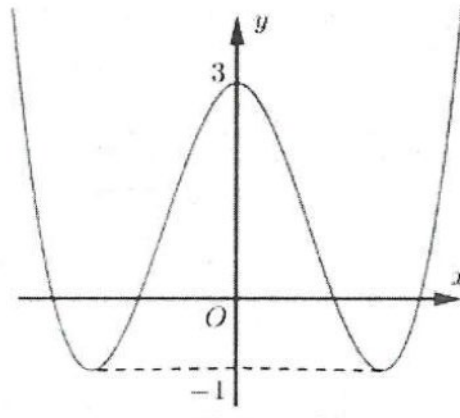
Đồ thị hàm số $y = f(|x|-1)$ gồm 2 phần:

Phần 1: Là phần của (C) nằm bên phải trục tung.

Phần 2: Hàm số $y = f(|x|-1)$ là hàm chẵn, ta lấy đối xứng phần 1 qua trục tung (hình 2).



Hình 1.



Hình 2.

Dựa vào hình 2 suy ra phương trình $f(|x|-1) = m$ có 4 nghiệm phân biệt khi $-1 < m < 3$

Với $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m = \{0; 1; 2\}$. **Chọn A.**

✎ **Dạng 3: Các bài toán sử dụng đồ thị kết hợp phương pháp đặt ẩn phụ**

Bài toán: Cho hàm số $y = f(x)$. Biện luận số nghiệm của phương trình $f[u(x)] = m$.

Phương pháp giải:

▪ **Bước 1:** Đặt $t = u(x)$ ta cần xác định miền giá trị của t và tương ứng với mỗi giá trị của t có bao nhiêu giá trị của x .

(Ta có thể lập bảng biến thiên hàm số $t = u(x)$ để nhận xét và tìm miền của t).

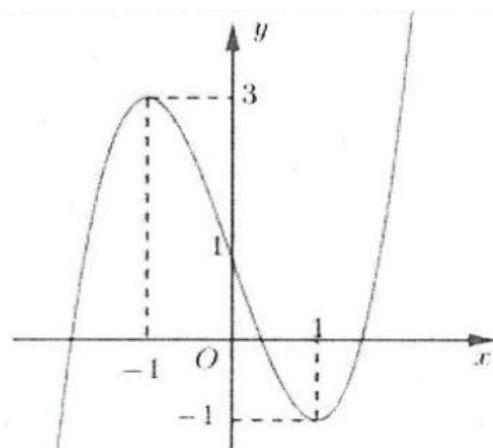
▪ **Bước 2:** Dựa vào đồ thị, biện luận số nghiệm của phương trình $f(t) = m$ từ đó suy ra số nghiệm của phương trình $f[u(x)] = m$.

Ví dụ 1: [Đề thi tham khảo năm 2018] Cho hàm số $y = f(x)$

liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(\sin x) = m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$ là

A. $[-1; 3)$

B. $(-1; 1)$



C. $(-1;3)$

D. $[-1;1)$

Lời giải

Đặt $t = \sin x$, với $x \in (0; \pi) \Rightarrow t \in (0; 1]$. Khi đó $f(\sin x) = m \Leftrightarrow f(t) = m$.

Dựa vào đồ thị hàm số, để $f(t) = m$ có nghiệm thuộc $(0; 1] \Leftrightarrow -1 \leq m < 1$. **Chọn D.**

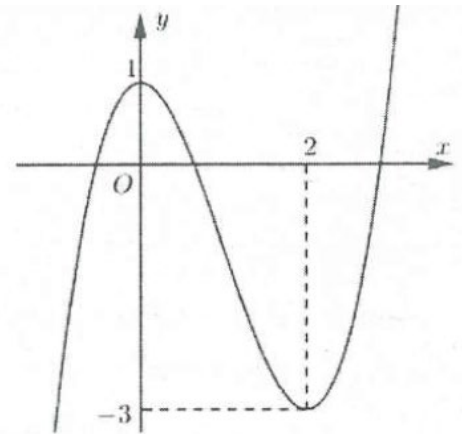
Ví dụ 2: Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Số các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(\sqrt{x} + \sqrt{1-x}) = m$ có nghiệm thuộc đoạn $[0; 1]$ là:

A. 2

B. 3

C. 4

D. 5



Lời giải

Đặt $t = \sqrt{x} + \sqrt{1-x} \Rightarrow t^2 + 2\sqrt{x(1-x)} (t > 0)$

Theo bất đẳng thức Cosi ta có: $\sqrt{x(1-x)} \leq \frac{x+1-x}{2} = \frac{1}{2}$

Do đó $1 \leq t^2 \leq 2 \Rightarrow 1 \leq t \leq \sqrt{2}$. Vậy $x \in [0; 1] \Rightarrow t \in [1; \sqrt{2}]$

Ta có: $f(1) = -1$, $f(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} - 5$

Kết hợp đồ thị suy ra phương trình $f(t) = m$ có nghiệm thuộc đoạn $[1; \sqrt{2}]$ thì $m \in [2\sqrt{2} - 5; -1]$

Vậy có 2 giá trị nguyên của $m \in \{-2; -1\}$ để phương trình đã cho có nghiệm. **Chọn A.**

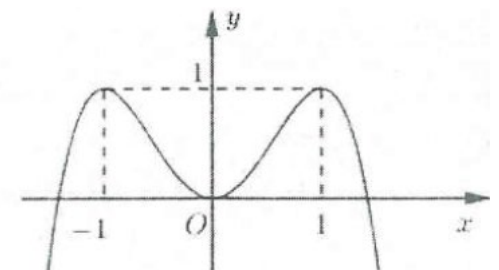
Ví dụ 3: Cho hàm số $y = f(x) = -x^4 + 2x^2$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Số các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $-(1 - \sin x)^4 + 2(1 - \sin x)^2 = m$ có nghiệm là:

A. 2

B. 8

C. 3

D. 9



Lời giải

Đặt $t = 1 - \sin x$ ta có: $\sin x \in [-1; 1] \Rightarrow t \in [0; 2]$

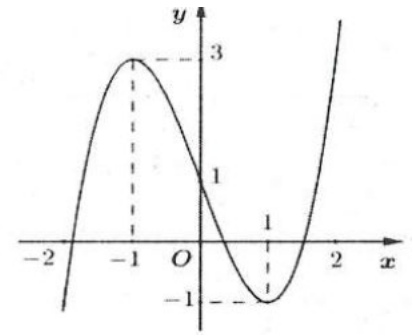
Ta có: $f(2) = -8$. Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy $t \in [0; 2] \Rightarrow f(t) \in [-8; 1]$

Vậy phương trình $-(1 - \sin x)^4 + 2(1 - \sin x)^2 = m$ có nghiệm khi $m \in [-8; 1]$

Kết hợp $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ có 9 giá trị của m . **Chọn D.**

Ví dụ 4: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm của phương trình $f[f(x)] = 0$ là:

- A. 6
- B. 7
- C. 8
- D. 9



Lời giải

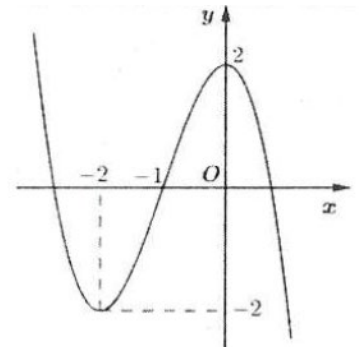
$$\text{Đặt } t = f(x) \Rightarrow f(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = f(x) = a \\ t = f(x) = b \\ t = f(x) = c \end{cases} \text{ dựa vào đồ thị ta có: } a \in (-2; -1), b \in (0; 1), c \in (1; 2)$$

Khi đó dựa vào đồ thị ta lại có phương trình $f(x) = a$ có 1 nghiệm, phương trình $f(x) = b$ và phương trình $f(x) = c$ đều có 3 nghiệm.

Do đó phương trình $f[f(x)] = 0$ có 7 nghiệm. **Chọn B.**

Ví dụ 5: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong như hình vẽ. Đặt $g(x) = f[f(x)]$. Số nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$ là:

- A. 6
- B. 7
- C. 8
- D. 9



Lời giải

$$\text{Ta có: } g'(x) = f'(x) \cdot f'[f(x)] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f'[f(x)] = 0 \end{cases}$$

$$\text{Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = 0 \text{ có 2 nghiệm phân biệt } x = -2, x = 0.$$

$$\text{Lại có: } f'[f(x)] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = -2 \\ f(x) = 0 \end{cases}$$

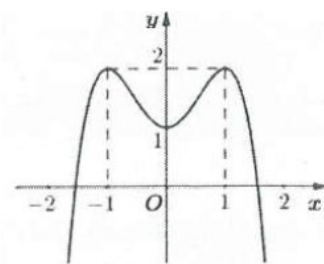
Phương trình $f(x) = -2$ có 2 nghiệm $x = -2, x = 0$ (nghiệm $x = -2$ bị lặp).

Phương trình $f(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

Do đó phương trình $g'(x) = 0$ có 6 nghiệm phân biệt. **Chọn A.**

Ví dụ 6: Cho hàm số $y = f(x) = -x^4 + 2x^2 + 1$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số giá trị nguyên của m để phương trình $f[f(x)] = m$ có nghiệm $x \in [-1; 1]$.

- A. 10 B. 11
C. 12 D. 13



Lời giải

Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy với $x \in [-1; 1] \Rightarrow f(x) \in [1; 2]$

Đặt $t = f(x)$, xét phương trình $f(t) = m$ với $t \in [1; 2]$

Dựa vào đồ thị hàm số với $t \in [1; 2] \Rightarrow f(t) \in [-7; 2]$

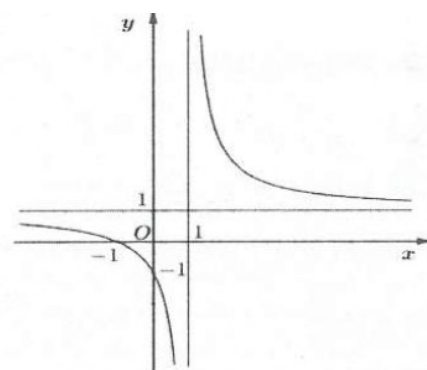
Do đó phương trình $f[f(x)] = m$ có nghiệm $x \in [-1; 1] \Leftrightarrow m \in [-7; 2]$

Kết hợp $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ có 10 giá trị của m . **Chọn A.**

Ví dụ 7: Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm m để

phương trình $\frac{\sin x + 1}{\sin x - 1} = m$ có nghiệm $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right)$

- A. $m \in [-1; 0]$ B. $m \in [-1; 0)$
C. $m \in [-1; +\infty)$ D. $m \in (-1; 0]$



Lời giải

Ta có: $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right) \Rightarrow \sin x \in [-1; 0)$. Đặt $t = \sin x \Rightarrow \frac{t+1}{t-1} = m$ với $t \in [-1; 0)$

Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy phương trình $f(t) = m$ có nghiệm $t \in [-1; 0) \Leftrightarrow m \in (-1; 0]$. **Chọn D.**

Ví dụ 8: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	2	0	$+\infty$	

Số nghiệm của phương trình $f'[f(x)] = 0$ là:

- A. 4 B. 7 C. 6 D. 3

Lời giải

Đặt $g(x) = f[f(x)]$ ta có: $g'(x) = f'(x) \cdot f'[f(x)] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f'[f(x)] = 0 \end{cases}$

Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $x = \pm 1$.

Lại có: $f'[f(x)] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = -1 \\ f(x) = 1 \end{cases}$

Phương trình $f(x) = -1$ có một nghiệm duy nhất

Phương trình $f(x) = 1$ có 3 nghiệm phân biệt.

Do đó phương trình $g'(x) = 0$ có 6 nghiệm phân biệt. **Chọn C.**

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: Đường thẳng $y = 2x - 1$ có bao nhiêu điểm chung với đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - x - 1}{x + 1}$

- A. 3 B. 1 C. 0 D. 2

Câu 2: Biết đường thẳng $y = -\frac{9}{4}x - \frac{1}{24}$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x$ tại một điểm duy nhất; ký hiệu $(x_0; y_0)$ là tọa độ điểm đó. Tìm y_0 .

- A. $y_0 = \frac{13}{12}$ B. $y_0 = \frac{12}{13}$ C. $y_0 = -\frac{1}{2}$ D. $y_0 = -2$

Câu 3: Cho hàm số $y = x^4 + 4x^2$ có đồ thị (C) . Tìm số giao điểm của đồ thị (C) và trục hoành.

- A. 0 B. 3 C. 1 D. 2

Câu 4: Đường thẳng $y = x - 1$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{2x - 1}{x + 1}$ tại các điểm có tọa độ là:

- A. $(0; -1), (2; 1)$ B. $(0; 2)$ C. $(1; 2)$ D. $(-1; 0), (2; 1)$

Câu 5: Đồ thị hàm số $y = x^4 - 5x^2 + 4$ cắt trục hoành tại bao nhiêu điểm?

- A. 0 B. 4 C. 2 D. 3

Câu 6: Số giao điểm của đường cong $y = x^3 - 2x^2 + x - 1$ và đường thẳng $y = 1 - 2x$

- A. 1 B. 3 C. 0 D. 2

Câu 7: Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 1$ với trục Ox là

- A. 1 B. 2 C. 4 D. 3

Câu 8: Parabol $(P): y = x^2$ và đường cong $(C): y = x^4 - 3x^2 - 2$ có bao nhiêu giao điểm

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 4

Câu 9: Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = 4x^4 + 3x^2 - 1$ và trục hoành là

- A. 4 B. 2 C. 3 D. 0

Câu 10: Tọa độ giao điểm M của đồ thị hàm số $y = \frac{2x + 3}{x + 2}$ với trục hoành là

- A. $\left(-\frac{3}{2}; 0\right)$ B. $(-2; 0)$ C. $\left(0; \frac{3}{2}\right)$ D. $(0; -2)$

Câu 11: Biết đường thẳng $54x + 24y + 1 = 0$ cắt đồ thị $y = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x$ tại điểm duy nhất, ký hiệu $(x_0; y_0)$ là tọa độ của điểm đó. Tìm y_0 .

- A. $y_0 = -\frac{1}{2}$ B. $y_0 = \frac{12}{13}$ C. $y_0 = \frac{13}{12}$ D. $y_0 = -2$

Câu 12: Tìm số giao điểm của hai đồ thị hàm số $y = \sqrt{x + 3}$ và $y = x + 1$

A. 0

B. 2

C. 3

D. 1

Câu 13: Đường thẳng $y = x + 1$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{x+3}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt A, B . Tính độ dài đoạn thẳng AB .

A. $AB = \sqrt{34}$

B. $AB = 8$

C. $AB = 6$

D. $AB = \sqrt{17}$

Câu 14: Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d: y = 2x - 3$. Đường thẳng d cắt (C) tại hai điểm A và B . Khoảng cách giữa A và B là

A. $AB = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

B. $AB = \frac{5}{2}$

C. $AB = \frac{5\sqrt{5}}{2}$

D. $AB = \frac{2}{5}$

Câu 15: Đường thẳng $y = 1$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$ tại ba điểm phân biệt M, N, P biết N nằm giữa M và P . Tính độ dài MP .

A. $MP = 2$

B. $MP = 3$

C. $MP = 1$

D. $MP = 4$

Câu 16: Đường thẳng $y = x - 1$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 - x^2 + x - 1$ tại hai điểm. Tìm tổng tung độ các giao điểm đó.

A. -3

B. 2

C. 0

D. -1

Câu 17: Gọi M, N là giao điểm của đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x-2}$ và đường thẳng $d: y = x + 2$. Hoành độ trung điểm I của đoạn MN là

A. $-\frac{5}{2}$

B. $-\frac{1}{2}$

C. 1

D. $\frac{1}{2}$

Câu 18: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
y'	+	0	-	+
y	$-\infty$	2	-1	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $f(x) + 1 = 0$

A. 3

B. 0

C. 1

D. 2

Câu 19: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt đường thẳng $y = -2018$ tại bao nhiêu điểm?

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	+	0	-	0	-
y		3		3	

	$-\infty$		-1		$-\infty$
--	-----------	--	------	--	-----------

A. 2

B. 4

C. 1

D. 0

Câu 20: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$				
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y			1		3				
	0	$\nearrow$		$\searrow$	-2	$\nearrow$		$\searrow$	1

Số nghiệm của phương trình $f(x) - 1 = 0$ là

A. 3

B. 4

C. 2

D. 1

Câu 21: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau. Tìm số nghiệm thực

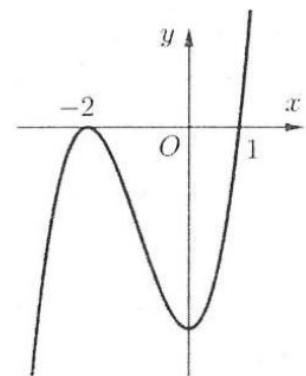
phân biệt của phương trình $f(x) = 1$

A. 2

B. 1

C. 0

D. 3



Câu 22: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $f(x) = m$ có ba nghiệm phân biệt

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$			
y'	$+$	0	$-$	0	$+$		
y	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

A. $m < -2$

B. $-2 < m < 4$

C. $-2 \leq m \leq 4$

D. $m > 4$

Câu 23: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình sau

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$				
y'								
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho phương trình $f(x) = m$ có đúng ba nghiệm thực phân biệt

A. $(-4; 2)$

B. $[-4; 2)$

C. $(-4; 2]$

D. $(-\infty; 2]$

Câu 24: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	0	1	3	$+\infty$
y'		$+$ 0 $+$		$-$ 0 $+$	
y	$-\infty$	$\nearrow +\infty$		$+\infty \searrow \frac{27}{4}$	$\nearrow +\infty$

Tìm điều kiện của m để phương trình $f(x) = m$ có 3 nghiệm phân biệt

- A. $m < 0$ B. $m > 0$ C. $0 < m < \frac{27}{4}$ D. $m > \frac{27}{4}$

Câu 25: Giá trị của tham số m để phương trình $x^3 - 3x = 2m + 1$ có ba nghiệm phân biệt là

- A. $-\frac{3}{2} < m < \frac{1}{2}$ B. $-2 < m < 2$ C. $-\frac{3}{2} \leq m \leq \frac{1}{2}$ D. $-2 \leq m \leq 2$

Câu 26: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Số nghiệm của phương trình $f(x) + 3 = 0$ là

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
y'		$+$ 0 $-$	0 $+$	
y	$-\infty$	$\nearrow 2$	$\searrow -3$	$\nearrow +\infty$

- A. 0 B. 3 C. 2 D. 1

Câu 27: Cho hàm số H có bảng biến thiên như sau

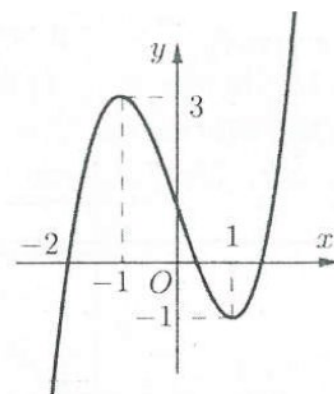
x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
y'		$-$	$+$ 0 $-$	
y	$+\infty$	$\searrow -1$	$-\infty \nearrow 2$	$\searrow -\infty$

Tập tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $f(x) + m = 0$ có ba nghiệm phân biệt là

- A. $(-2; 1)$ B. $[-1; 2)$ C. $(-1; 2)$ D. $(-2; 1]$

Câu 28: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình $f(x) = \log_2 m$ có đúng 3 nghiệm thực phân biệt?

- A. 5
B. 8
C. 6
D. 7



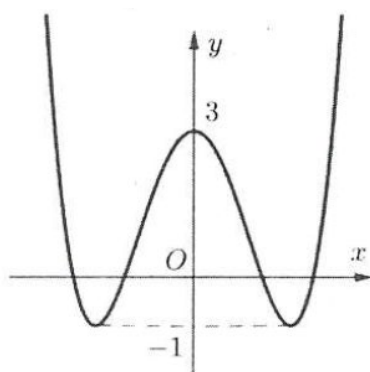
Câu 29: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	3	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $3|f(2x-1)| - 10 = 0$ là

- A. 2 B. 1 C. 4 D. 3

Câu 30: Cho hàm số $y = -\frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 3$ có đồ thị như hình dưới. Tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $|x^4 - 8x^2 + 12| = m$ có 8 nghiệm phân biệt là



- A. 3 B. 6 C. 10 D. 0

Câu 31: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(0; +\infty)$, có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	x_1	0	x_2	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
y	-3	2	$-\infty$	$+\infty$	-4	3

Tìm m để phương trình $f(x) = m$ có 4 nghiệm phân biệt

- A. $-4 < m < 3$ B. $-3 < m < 3$ C. $-4 < m < 2$ D. $-3 < m < 2$

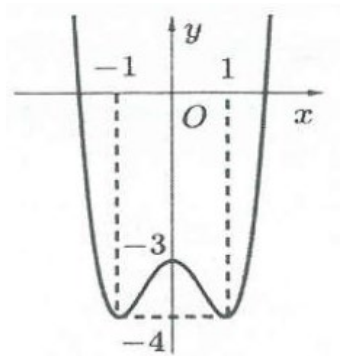
Câu 32: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$, liên tục trên từng khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
y'	+		+		-		+
y							

Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho phương trình $f(x) = 3m$ có ba nghiệm phân biệt.

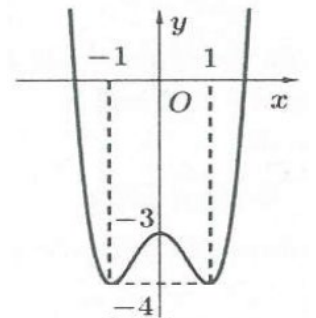
- A. $-1 < m < \frac{-2}{3}$ B. $m < -1$ C. $m \leq -1$ D. $m > \frac{-2}{3}$

Câu 33: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x) + m - 2018 = 0$ có 4 nghiệm phân biệt.



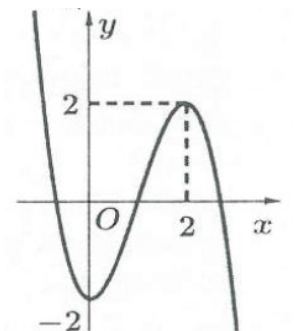
- A. $2021 \leq m \leq 2022$ B. $2021 < m < 2022$
 C. $\begin{cases} m \geq 2022 \\ m \leq 2021 \end{cases}$ D. $\begin{cases} m > 2022 \\ m < 2021 \end{cases}$

Câu 34: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x) + m - 2018 = 0$ có 4 nghiệm phân biệt.



- A. $2021 \leq m \leq 2022$ B. $2021 < m < 2022$
 C. $\begin{cases} m \geq 2022 \\ m \leq 2021 \end{cases}$ D. $\begin{cases} m > 2022 \\ m < 2021 \end{cases}$

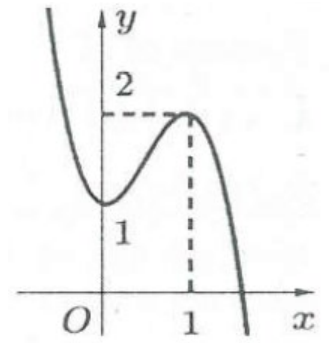
Câu 35: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị trong hình bên. Phương trình $f(x) = 1$ có bao nhiêu nghiệm thực phân biệt lớn hơn 2.



- A. 0
 B. 1
 C. 2
 D. 3

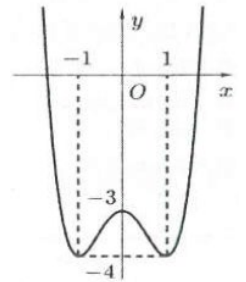
Câu 36: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau. Số nghiệm của phương trình $2|f(x-1)| - 3 = 0$ là:

- A. 1
- B. 4
- C. 3
- D. 2



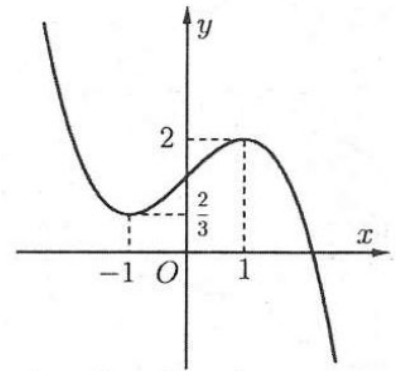
Câu 37: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như đường cong trong hình vẽ sau đây. Tìm giá trị của tham số m để phương trình $|f(x)| + 1 = m$ có 6 nghiệm phân biệt?

- A. $-4 < m < -3$
- B. $4 < m < 5$
- C. $m > 5$
- D. $0 < m < 4$



Câu 38: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên. Tìm số nghiệm của phương trình $f(x+2018) = 1$.

- A. 2
- B. 1
- C. 3
- D. 4



Câu 39: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $x^3 - 3x^2 - m^3 + 3m^2 = 0$ có ba nghiệm phân biệt.

- A. $m = 2$
- B. $m \in (-1; 3)$
- C. $m \in (-1; +\infty)$
- D. $m \in (-1; 3) \setminus \{0; 2\}$

Câu 40: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 3$ tại 4 điểm phân biệt

- A. $-1 < m < 1$
- B. $m < -4$
- C. $-4 < m < -3$
- D. $m > -1$

Câu 41: Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$ cắt đường thẳng $y = m$ tại ba điểm phân biệt thì tất cả các giá trị tham số m thỏa mãn là

- A. $m > 1$
- B. $-3 \leq m \leq 1$
- C. $-3 < m < 1$
- D. $m < -3$

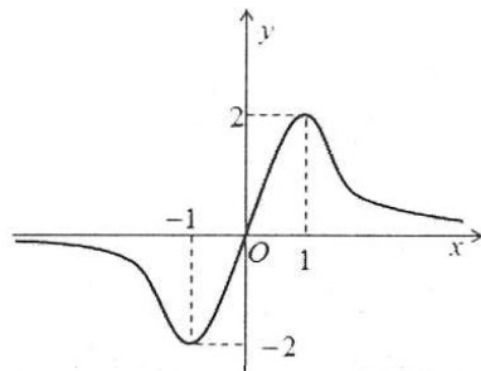
Câu 42: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ cắt đường thẳng $y = m - 1$ tại ba điểm phân biệt

- A. $0 < m < 4$
- B. $1 < m \leq 5$
- C. $1 < m < 5$
- D. $1 \leq m < 5$

Câu 43: Tìm m để đường thẳng $y = mx + 1$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ tại hai điểm thuộc hai nhánh của đồ thị.

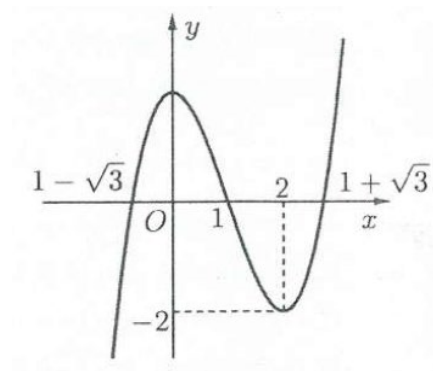
- A. $m \in \left(-\frac{1}{4}; +\infty\right) \setminus \{0\}$ B. $m \in (0; +\infty)$ C. $m \in (-\infty; 0)$ D. $m = 0$

Câu 44: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Biết rằng trục hoành là tiệm cận ngang của đồ thị. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x) = 4^{m+2\log_4 \sqrt{2}}$ có hai nghiệm dương phân biệt.



- A. $m > 1$
B. $0 < m < 1$
C. $m < 0$
D. $0 < m < 2$

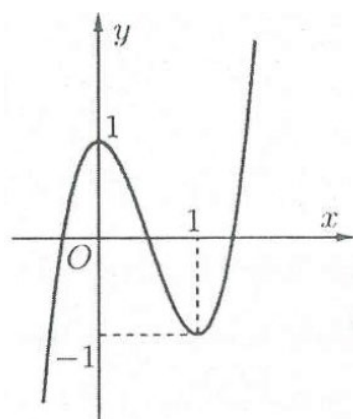
Câu 45: Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ có đồ thị là đường cong hình bên. Hỏi phương trình $(x^3 - 3x^2 + 2)^3 - 3(x^3 - 3x^2 + 2)^2 + 2 = 0$ có bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?



- A. 7
B. 9
C. 6
D. 5

Câu 46: Cho hàm số $y = 4x^3 - 6x^2 + 1$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ.

Phương trình $4(4x^3 - 6x^2 + 1)^3 - 6(4x^3 - 6x^2 + 1)^2 + 1 = 0$ có bao nhiêu nghiệm thực?



- A. 3
B. 6
C. 7
D. 9

Câu 47: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
y'	$+$	$ $	$-$	0	$+$
y		0		$+\infty$	

$$\left| \begin{array}{c} -\infty \\ -1 \end{array} \right|$$

Tìm các giá trị thực của tham số m để phương trình $|f(x)| = m + 2$ có bốn nghiệm phân biệt.

- A. $-2 < m < -1$ B. $-3 \leq m \leq -2$ C. $-2 \leq m \leq -1$ D. $-3 < m < -1$

Câu 48: Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y = \frac{3x-2}{x-1}$. Tìm tất cả các

giá trị thực của tham số m để phương trình $\frac{|3x-2|}{x-1} = m$ có hai nghiệm

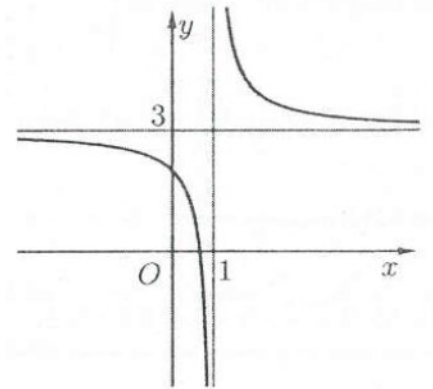
thực dương.

- A. $-2 < m < 0$

- B. $m < -3$

- C. $0 < m < 3$

- D. $m > 3$



Câu 49: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[-3; 3]$ và đồ

thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Biết $f(1) = 6$ và $g(x) = f(x) - \frac{(x+1)^2}{2}$.

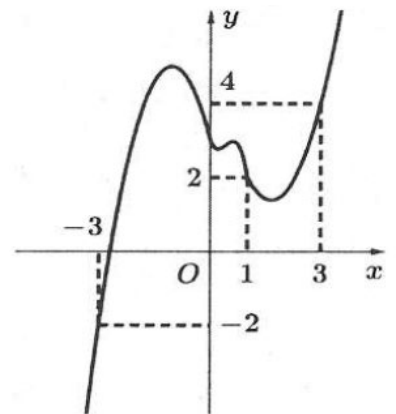
Kết luận nào sau đây là **đúng**?

- A. Phương trình $g(x) = 0$ có đúng hai nghiệm thuộc $[-3; 3]$

- B. Phương trình $g(x) = 0$ không có nghiệm thuộc $[-3; 3]$

- C. Phương trình $g(x) = 0$ có đúng một nghiệm thuộc $[-3; 3]$

- D. Phương trình $g(x) = 0$ có đúng ba nghiệm thuộc $[-3; 3]$



LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: $\frac{x^2 - x - 1}{x + 1} = 2x - 1 \Leftrightarrow x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$. **Chọn D.**

Câu 2: $\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x = -\frac{9}{4}x - \frac{1}{24} \Leftrightarrow \frac{1}{3}\left(x + \frac{1}{2}\right)^3 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{13}{12}$. **Chọn A.**

Câu 3: Ta có $x^4 + 4x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$. **Chọn C.**

Câu 4: $\frac{2x-1}{x+1} = x-1 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = -1 \\ x = 2 \Rightarrow y = 1 \end{cases}$. **Chọn A.**

Câu 5: $x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ x^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ x = \pm 2 \end{cases}$. **Chọn B.**

Câu 6: $x^3 - 2x^2 + x - 1 = 1 - 2x \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 + 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$. **Chọn A.**

Câu 7: $x^4 - 2x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$. **Chọn B.**

Câu 8: $x^4 - 3x^2 - 2 = x^2 \Leftrightarrow x^4 - 4x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 2 - \sqrt{6} \quad (l) \\ x^2 = 2 + \sqrt{6} \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2 + \sqrt{6}}$. **Chọn C.**

Câu 9: $4x^4 + 3x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = -1 \quad (l) \\ x^2 = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{2}$. **Chọn B.**

Câu 10: Ta dễ có $M\left(\frac{-3}{2}; 0\right)$. **Chọn A.**

Câu 11: Ta có $\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x = -\frac{9}{4}x - \frac{1}{24} \Leftrightarrow \frac{1}{3}\left(x + \frac{1}{2}\right)^3 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{13}{12}$. **Chọn C.**

Câu 12: Ta có $\sqrt{x+3} = x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x+3 = (x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2 + x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x = 1, x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$. **Chọn D.**

Câu 13: $\frac{x+3}{x-1} = x+1 \Leftrightarrow x^2 - x - 4 = 0$. Giả sử $A(x_1; x_1+1), B(x_2; x_2+1) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 x_2 = -4 \end{cases}$

Ta có $AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (x_1 - x_2)^2} = \sqrt{2[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2]} = \sqrt{34}$. **Chọn A.**

Câu 14: $\frac{2x-1}{x+1} = 2x-3 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \Rightarrow y = 1 \\ x = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = -4 \end{cases} \Rightarrow AB = \frac{5\sqrt{5}}{2}$. **Chọn C.**

Câu 15: $x^3 - 3x^2 + 2x + 1 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 1 \\ x = 1 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow MP = 2 \\ x = 2 \Rightarrow y = 1 \end{cases}$

Câu 16: $x^3 - x^2 + x - 1 = x - 1 \Leftrightarrow x^3 - x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = -1 \\ x = 1 \Rightarrow y = 0 \end{cases}$. **Chọn D.**

Câu 17: $\frac{x+1}{x-2} = x+2 \Leftrightarrow x^2 - x - 5 = 0 \Rightarrow$ hoành độ I là $\frac{1}{2}$. **Chọn D.**

Câu 18: Đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt đường thẳng $y = -1$ tại đúng 2 điểm phân biệt nên PT có đúng 2 nghiệm phân biệt. **Chọn D.**

Câu 19: Đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt đường thẳng $y = -2018$ tại đúng 2 điểm phân biệt. **Chọn A.**

Câu 20: Đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt đường thẳng $y = 1$ tại đúng 3 điểm phân biệt nên PT có đúng 3 nghiệm phân biệt. **Chọn A.**

Câu 21: Đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt đường thẳng $y = 1$ tại đúng 1 điểm nên PT có đúng 1 nghiệm. **Chọn B.**

Câu 22: Đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt đường thẳng $y = m$ tại đúng 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow -2 < m < 4$. **Chọn B.**

Câu 23: Đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt đường thẳng $y = m$ tại đúng 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow -4 < m \leq 2$. **Chọn C.**

Câu 24: Đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt đường thẳng $y = m$ tại đúng 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow m > \frac{27}{4}$. **Chọn D.**

Câu 25: $f(x) = x^3 - 3x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1 \longrightarrow f(1) = -2; f(-1) = 2$

$\Rightarrow -2 < m < 2$. **Chọn B.**

Câu 26: Đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt đường thẳng $y = -3$ tại đúng 2 điểm phân biệt nên PT có đúng 2 nghiệm phân biệt. **Chọn C.**

Câu 27: Đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt đường thẳng $y = -m$ tại đúng 3 điểm phân biệt

$\Leftrightarrow -1 \leq m < 2$. **Chọn B.**

Câu 28: Đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt đường thẳng $y = \log_2 m$ tại đúng 3 điểm phân biệt

$\Leftrightarrow -1 < \log_2 m < 3 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < m < 8 \Rightarrow m \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$. **Chọn D.**

Câu 29: Ta có $3|f(2x-1)| - 10 = 0 \Leftrightarrow f(2x-1) = \pm \frac{10}{3}$

Đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt đường thẳng $y = \frac{10}{3}$ tại đúng 3 điểm phân biệt nên $f(2x-1) = \frac{10}{3}$ có đúng 3 nghiệm phân biệt.

Đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt đường thẳng $y = -\frac{10}{3}$ tại đúng 1 điểm nên $f(2x-1) = -\frac{10}{3}$ có đúng 1 nghiệm.

Vậy tổng là 4 nghiệm. **Chọn C.**

Câu 30: Ta có $|x^4 - 8x^2 + 12| = m \Leftrightarrow x^4 - 8x^2 + 12 = \pm m$.

Đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt đường thẳng $y = m$ tại đúng 4 điểm phân biệt

$$\Leftrightarrow -1 < m < 3 \Rightarrow m \in \{0; 1; 2\}.$$

Đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt đường thẳng $y = -m$ tại đúng 4 điểm phân biệt

$$\Leftrightarrow -1 < -m < 3 \Leftrightarrow -3 < m < 1 \Rightarrow m \in \{-2; -1; 0\}. \text{ Chọn B.}$$

Câu 31: Đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt đường thẳng $y = m$ tại đúng 4 điểm phân biệt $\Leftrightarrow -3 < m < 2$. **Chọn D.**

Câu 32: Đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt đường thẳng $y = 3m$ tại đúng 3 điểm phân biệt

$$\Leftrightarrow 3m < -3 \Leftrightarrow m < -1. \text{ Chọn B.}$$

Câu 33: $f(x) + m - 2018 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 2018 - m \Rightarrow -4 < 2018 - m < -3 \Leftrightarrow 2021 < m < 2022$. **Chọn B.**

Câu 34: $f(x) + m - 2018 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 2018 - m \Rightarrow -4 < 2018 - m < -3 \Leftrightarrow 2021 < m < 2022$. **Chọn B.**

Câu 35: Phương trình $f(x) = 1$ có 1 nghiệm lớn hơn 2. **Chọn B.**

$$\text{Câu 36: Ta có } 2. |f(x-1)| - 3 = 0 \Leftrightarrow |f(x-1)| = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x-1) = \frac{3}{2} \\ f(x-1) = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

Ta $f(x-1) = \frac{3}{2}$ có 3 nghiệm phân biệt, $f(x-1) = -\frac{3}{2}$ có 1 nghiệm. **Chọn B.**

Câu 37: Ta có $|f(x)| + 1 = m \Leftrightarrow |f(x)| = m - 1 \Rightarrow 3 < m - 1 < 4 \Leftrightarrow 4 < m < 5$. **Chọn B.**

Câu 38: Phương trình $f(x + 2018) = 1$ có 3 nghiệm phân biệt. **Chọn C.**

$$\text{Câu 39: } x^3 - 3x^2 - m^3 + 3m^2 = 0 \Leftrightarrow (x - m)[x^2 + (m - 3)x + m^2 - 3m] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ g(x) = x^2 + (m - 3)x + m^2 - 3m = 0 \end{cases}$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} g(m) \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m^2 - 6m \neq 0 \\ -3m^2 + 6m + 9 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq \{0; 2\} \\ -1 < m < 3 \end{cases}. \text{ Chọn D.}$$

$$\text{Câu 40: } y' = 4x^3 - 4x; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = -3 \\ x = \pm 1 \Rightarrow y = -4 \end{cases} \Rightarrow -4 < m < -3. \text{ Chọn C.}$$

$$\text{Câu 41: } y' = 3x^2 - 6x; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 1 \\ x = 2 \Rightarrow y = -3 \end{cases} \Rightarrow -3 < m < 1. \text{ Chọn C.}$$

$$\text{Câu 42: } y' = 3x^2 - 3; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = 0 \\ x = -1 \Rightarrow y = 4 \end{cases} \Rightarrow 0 < m - 1 < 4 \Leftrightarrow 1 < m < 5. \text{ Chọn C.}$$

$$\text{Câu 43: Ta có } \frac{x+1}{x-1} = mx + 1 \Leftrightarrow mx^2 - mx - 2 = 0. \text{ Tiệm cận đứng } x = 1 \Rightarrow x_1 < 1 < x_2$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ (x_1 - 1)(x_2 - 1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m^2 + 8m > 0 \\ -\frac{2}{m} - 1 + 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m > 0 \vee m < -8 \\ m > 0 \end{cases} \Rightarrow m > 0. \text{ Chọn B.}$$

Câu 44: Số nghiệm phương trình $f(x) = 4^{m+2\log_4 \sqrt{2}}$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = 4^{m+2\log_4 \sqrt{2}}$

$$\text{Yêu cầu bài toán} \Leftrightarrow 4^{m+2\log_4 \sqrt{2}} < 2 \Leftrightarrow m + 2\log_4 \sqrt{2} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow m < 0. \text{ Chọn C.}$$

$$\text{Câu 45: Phương trình trở thành: } f^3(x) - 3f^2(x) + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 1 - \sqrt{3} \\ f(x) = 1 \\ f(x) = 1 + \sqrt{3} \end{cases}$$

Dựa vào hình vẽ, ta thấy rằng:

- Đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt đường thẳng $y = 1 - \sqrt{3}$ tại 3 điểm phân biệt
- Đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt đường thẳng $y = 1$ tại 3 điểm phân biệt
- Đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt đường thẳng $y = 1 + \sqrt{3}$ tại 1 điểm duy nhất

Vậy phương trình đã cho có $3 + 3 + 1 = 7$ nghiệm phân biệt. **Chọn A.**

$$\text{Câu 46: Phương trình trở thành: } 4f^3(x) - 6f^2(x) + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = x_1 \in (-1; 0) \\ f(x) = x_2 \in (0; 1) \\ f(x) = x_3 \in (1; +\infty) \end{cases}$$

Dựa vào hình vẽ, ta thấy rằng:

- Đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt đường thẳng $y = x_1 \in (-1; 0)$ tại 3 điểm phân biệt
- Đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt đường thẳng $y = x_2 \in (0; 1)$ tại 3 điểm phân biệt
- Đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt đường thẳng $y = x_3 > 1$ tại 1 điểm duy nhất

Vậy phương trình đã cho có $3 + 3 + 1 = 7$ nghiệm phân biệt. **Chọn C.**

$$\text{Câu 47: Ta có } |f(x)| = m + 2 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = m + 2 & (1) \\ f(x) = -m - 2 & (2) \end{cases}$$

Yêu cầu bài toán tương đương với:

TH1. (1) có nghiệm duy nhất và (2) có 3 nghiệm phân biệt

Dựa vào hình vẽ, ta thấy rằng:

- (1) có nghiệm duy nhất khi $\begin{cases} m + 2 \geq 0 \\ m + 2 < -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -2 \\ m < -3 \end{cases}$

- (2) có 3 nghiệm phân biệt khi $-1 < -m - 2 < 0 \Leftrightarrow -2 < m < -1$

$$\text{Suy ra TH1} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -2 \\ m < -3 \\ -2 < m < -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -2 \\ -2 < m < -1 \\ m < -3 \\ -2 < m < -1 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < m < -1$$

TH2. (1) có 3 nghiệm phân biệt và (2) có nghiệm duy nhất

Dựa vào hình vẽ, ta thấy rằng:

- (1) có 3 nghiệm phân biệt khi $-1 < m + 2 < 2 \Leftrightarrow -3 < m < 0$

- (2) có nghiệm duy nhất khi $\begin{cases} -m - 2 \geq 0 \\ -m - 2 < -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -2 \\ m > -1 \end{cases}$

$$\text{Suy ra TH2} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -2 \\ m > -1 \\ -3 < m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -2 \\ -3 < m < 0 \\ m > -1 \\ -3 < m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -3 < m \leq -2$$

Kết hợp hai trường hợp, ta được $-3 < m < -1$ là giá trị cần tìm. **Chọn D.**

Câu 48: Dựa vào đồ thị hàm số $f(x) = \frac{|3x-2|}{x-1} \Rightarrow f(x) = m$ có 2 nghiệm dương khi $-2 < m < 0$. **Chọn A.**

Câu 49: Ta có $g'(x) = f'(x) - x - 1$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x + 1$

Dựa vào hình vẽ, ta thấy đồ thị $f'(x)$ cắt $y = x + 1$ tại 3 điểm phân biệt có $x = -3$; $x = 1$; $x = 3$

Do đó $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \{-3; 1; 3\}$ và $g(1) = 4 \longrightarrow$ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-3	1	3	$+\infty$			
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y								

Vậy trên đoạn $[-3; 3]$, phương trình $g(x) = 0$ có đúng hai nghiệm. **Chọn A.**