

MỤC LỤC

TÀI LIỆU THAM KHẢO	1
1. ĐỊNH NGHĨA NGUYÊN HÀM	2
2. NGUYÊN HÀM CỦA CÁC HÀM SƠ CẤP	2
2.1. Bảng nguyên hàm các hàm sơ cấp	2
2.2. Các ví dụ minh họa	2
3. CÁC TÍNH CHẤT CỦA NGUYÊN HÀM	3
4. TÌM NGUYÊN HÀM BẰNG PHƯƠNG PHÁP PHÂN TÍCH	3
4.1. Các công thức, kỹ năng phân tích cần nhớ	3
4.2. Các dạng phân tích cơ bản	4
4.2.1. Biến đổi căn thức, hàm mũ về dạng lũy thừa, mũ cơ bản	4
4.2.2. Phân tích hàm hữu tỉ	6
4.2.3. Phân tích hàm lượng giác	8
4.2.4. Phân tích hàm siêu việt	10
5. TÌM NGUYÊN HÀM BẰNG PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN	11
5.1. Một số ví dụ mở đầu về phương pháp đổi biến	12
5.2. Đổi biến hàm hữu tỉ, hàm căn thức đơn giản, hàm mũ - logarit	13
5.3. Đổi biến hàm lượng giác	17
5.4. Đổi biến hàm vô tỉ	20
6. TÌM NGUYÊN HÀM BẰNG PHƯƠNG PHÁP NGUYÊN HÀM TỪNG PHẦN	23
6.1. Lý thuyết nguyên hàm từng phần	23
6.2. Các ví dụ minh họa	24
7. GIỚI THIỆU MỘT SỐ BÀI TẬP ĐỊNH DẠNG TRẮC NGHIỆM	27
7.1. Các câu hỏi lý thuyết	27
7.2. Tìm nguyên hàm cụ thể	30
7.3. Tìm một nguyên hàm riêng, tính giá trị của nguyên hàm tìm được	41

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Lê Hồng Đức, L. H. (2006). *Phương pháp giải toán Tích Phân*.

Nguyễn Vũ Minh, (2017). *Phân loại dạng và phương pháp tính Nguyên Hàm - Tích Phân (tập 1)*.

Internet. *Tuyển tập các đề thi thử, đề minh họa, đề chính thức của bộ GD và ĐT*.

A: NGUYÊN HÀM

(chương trình cơ bản)

1. ĐỊNH NGHĨA NGUYÊN HÀM

Nhắc lại: nếu ta có một hàm $F(x)$ và $F'(x)=f(x)$. Khi đó hàm $f(x)$ được gọi là đạo hàm của $F(x)$. Thế thì hàm $F(x)$ gọi là nguyên hàm của $f(x)$

Định nghĩa: Hàm $F(x)$ được gọi là một nguyên hàm của hàm $f(x)$ nếu $F'(x) = f(x)$

Ví dụ:

+, Hàm $f(x) = x^2 - 2x + 3$ có một nguyên hàm là hàm $F(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 + 3x + 2016$ vì

$$F'(x) = x^2 - 2x + 3 = f(x)$$

+, Hàm $f(x) = e^x + 3$ có một nguyên hàm là hàm $F(x) = e^x + 3x + 1999$ vì

$$F'(x) = e^x + 3 = f(x)$$

+, Hàm $f(x) = \cos 3x$ có một nguyên hàm là hàm $F(x) = \frac{1}{3} \sin 3x + 18$ vì

$$F'(x) = \cos 3x = f(x)$$

- Ký hiệu nguyên hàm của hàm $f(x)$ là $\int f(x)dx = F(x) + C, C \in \mathbb{R}$

• Nhận xét:

+, Nếu hàm $f(x)$ có nguyên hàm là $F(x)$ thì hàm $F(x)+C, C \in \mathbb{R}$ cũng là nguyên hàm của $f(x)$

+, Một hàm nếu tồn tại nguyên hàm thì nó có vô số nguyên hàm khi thay C bởi một giá trị cụ thể.

2. NGUYÊN HÀM CỦA CÁC HÀM SƠ CẤP**2.1. Bảng nguyên hàm các hàm sơ cấp**

Hàm lũy thừa	$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (1)$ Đặc biệt: $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C \quad (2)$	Hệ quả: +, $\int k dx = kx + C$, với $k \in \mathbb{R} \quad (3)$ +, $\int 0 dx = C$
Hàm mũ	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (4)$	Hệ quả: $\int e^x dx = e^x + C \quad (5)$
Hàm lượng giác	$\int \sin x dx = -\cos x + C \quad (6)$ $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C \quad (7)$ $\int \cos x dx = \sin x + C \quad (6')$ $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C \quad (7')$	Hệ quả: $\int \cot^2 x dx = -\cot x - x + C \quad (8)$ $\int \tan^2 x dx = \tan x - x + C \quad (9)$

Định lý: nếu $\int f(x)dx = F(x) + C$ thì $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$, với $a \neq 0 \quad (10)$

2.2. Các ví dụ minh họa

$$1/ \int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C \quad (\text{công thức 1})$$

$$2/ \int x^{\sqrt{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2}+1} x^{\sqrt{2}+1} + C \quad (\text{công thức 1})$$

$$3/ \int \frac{1}{5x-3} dx = \frac{1}{5} \cdot \ln|5x-3| + C \quad (\text{kết hợp công thức 1 và định lí 10})$$

$$4/ \int (2x+3)^4 dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2x+3)^5}{5} + C = \frac{1}{10} (2x+3)^5 + C \quad (1+10)$$

$$5/ \int 3^x dx = \frac{3^x}{\ln 3} + C \quad (\text{CT 4})$$

$$6/ \int 2^{6x-9} dx = \frac{1}{6} \cdot \frac{2^{6x-9}}{\ln 2} + C \quad (\text{CT 4 + ĐL 10})$$

$$7/ \int e^{2x+1} dx = \frac{1}{2} \cdot e^{2x+1} + C \quad (\text{CT 5 + ĐL 10})$$

$$8/ \int \sin(3x-2) dx = -\frac{1}{3} \cdot \cos(3x-2) \quad (\text{CT 6 + ĐL 10})$$

$$9/ \int \frac{1}{\cos^2(1-2x)} dx = \frac{1}{-2} \cdot \tan(1-2x) + C \quad (\text{CT 7' + ĐL 10})$$

$$10/ \int \tan^2\left(\frac{1}{2}x-3\right) dx = \frac{1}{\frac{1}{2}} \cdot \tan\left(\frac{1}{2}x-3\right) - x + C = 2 \cdot \tan\left(\frac{1}{2}x-3\right) - x + C \quad (\text{CT 9 + ĐL 10})$$

*ĐL (10) là một định lí rất quan trọng thường xuyên phải sử dụng, các bạn cần chú ý để làm bài tập.

3. CÁC TÍNH CHẤT CỦA NGUYÊN HÀM

- $\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$
- $\int k \cdot f(x) dx = k \int f(x) dx$
- $\int f'(x) dx = f(x) + C$

Các ví dụ minh họa:

1/ Tìm nguyên hàm $F(x) = \int \left(2x^5 - \frac{1}{3}x^4 + 2x^2 - 1\right) dx$

$$F(x) = \int \left(2x^5 - \frac{1}{3}x^4 + 3x^2 - 1\right) dx = 2 \int x^5 dx - \frac{1}{3} \int x^4 dx + 7 \int x^2 dx - \int dx$$

$$= 2 \cdot \frac{x^6}{6} - \frac{1}{3} \cdot \frac{x^5}{5} + 7 \cdot \frac{x^3}{3} - x + C = \frac{x^6}{3} - \frac{x^5}{15} + \frac{7}{3}x^3 - x + C$$

2/ Tìm nguyên hàm $F(x) = \int (e^x + 3x^2) dx$

$$F(x) = \int e^x dx + 3 \int x^2 dx = e^x + 3 \cdot \frac{x^3}{3} + C = e^x + x^3 + C$$

3/ Tìm nguyên hàm của hàm $F(x) = \int (\cos 3x - 2x^2 + 3) dx$

$$F(x) = \int \cos 3x dx - 2 \int x^2 dx + 3 \int dx = \frac{1}{3} \sin 3x - \frac{2}{3} x^3 + 3x + C$$

4. TÌM NGUYÊN HÀM BẰNG PHƯƠNG PHÁP PHÂN TÍCH

4.1. Các công thức, kỹ năng phân tích cần nhớ

1. Các công thức lũy thừa, mũ	$x^\alpha \cdot x^\beta = x^{\alpha+\beta}$ $x^\alpha : x^\beta = \frac{x^\alpha}{x^\beta} = x^{\alpha-\beta}$ $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$ $a^x \cdot b^x = (ab)^x$	$\frac{k}{x^\alpha} = k \cdot x^{-\alpha}$ $\sqrt[\alpha]{x^\beta} = x^{\frac{\beta}{\alpha}}$
2. Các công thức lượng giác	Công thức sơ cấp: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ $1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$ Công thức tích thành tổng:	Công thức hạ bậc: $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$ $\sin^3 x = \frac{3 \sin x - \sin 3x}{4}$ $\cos^3 x = \frac{3 \cos x + \cos 3x}{4}$

	$\sin x \cdot \sin y = -\frac{1}{2}(\cos(x+y) - \cos(x-y))$ $\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$ $\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$	
Hằng đẳng thức	$(x \pm y)^2 = x^2 \pm 2xy + y^2$ $(x \pm y)^3 = x^3 \pm 3x^2y + 3xy^2 \pm y^3$	
Tách phân số	$A = \frac{f_1+f_2+f_3+\dots+f_n}{g} = \frac{f_1}{g} + \frac{f_2}{g} + \frac{f_3}{g} + \dots + \frac{f_n}{g}$	
Trục căn thức	$\frac{\alpha}{\sqrt{ax+b} \pm \sqrt{ax+c}} = \frac{\alpha(\sqrt{ax+b} \mp \sqrt{ax+c})}{b-c}$	

4.2. Các dạng phân tích cơ bản

Nguyên tắc phân tích, biến đổi ở đây là đưa các hàm của đề bài về các hàm cơ bản đã biết nguyên hàm.

4.2.1. Biến đổi căn thức, hàm mũ về dạng lũy thừa, mũ cơ bản

Sử dụng hệ thống công thức 4.1.1 cùng với những công thức cơ bản đã học để làm bài.

Ví dụ minh họa:

$$1/ \int (\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x} + 5\sqrt[4]{x^3}) dx$$

$$= \int \left(x^{\frac{1}{2}} - 2 \cdot x^{\frac{1}{3}} + 5 \cdot x^{\frac{3}{4}} \right) dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} - 2 \cdot \frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + 5 \cdot \frac{x^{\frac{3}{4}+1}}{\frac{3}{4}+1} + C = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}x^{\frac{4}{3}} + \frac{20}{7}x^{\frac{7}{4}} + C$$

**Đến đây có thể kết thúc việc giải toán. Tuy nhiên có những câu hỏi mà các phương án lại để ở dạng căn thức, khi đó chúng ta cần thực hiện thêm một bước nữa là đưa các lũy thừa của x trở lại căn thức.*

Cụ thể: $= \frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^4} + \frac{20}{7}\sqrt[4]{x^7} + C$. Đến đây vẫn có thể người ta yêu cầu xử lý tiếp các căn thức này là làm giảm lũy thừa của x bằng cách phân tích đưa x ra ngoài căn.

$$\text{Cụ thể: } = \frac{2}{3}\sqrt{x^2 \cdot x} - \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^3 \cdot x} + \frac{20}{7} \cdot \sqrt[4]{x^4 \cdot x^3} = \frac{2}{3}x\sqrt{x} - \frac{3}{2}x\sqrt[3]{x} + \frac{20}{7} \cdot x\sqrt[4]{x^3} + C$$

Chú ý: khi biến đổi các biểu thức chúng ta cần chú ý đến điều kiện để biểu thức xác định.

$$2/ \int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt[3]{x}} \right) dx$$

$$= \int \left(x^{-\frac{1}{2}} - 2 \cdot x^{-\frac{1}{3}} \right) dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} - 2 \cdot \frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} + C = 2 \cdot x^{\frac{1}{2}} - 3 \cdot x^{\frac{2}{3}} + C$$

$$= 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x^2} + C$$

**Qua hai ví dụ trên các bạn có thể tự đưa ra công thức tổng quát tìm nguyên hàm dạng $\sqrt[n]{x^m}$; $\frac{1}{\sqrt[n]{x^m}}$*

$$3/ \int (\sqrt{x} - 2\sqrt[4]{x})(x - \sqrt{x} + \sqrt[4]{x}) dx$$

ở ví dụ này ta cần khai triển phép nhân này trước khi có thể áp dụng công thức nguyên hàm.

$$= \int \left(x^{\frac{1}{2}} - 2x^{\frac{1}{4}} \right) \left(x^1 - x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{4}} \right) dx = \int \left(x^{\frac{1}{2}+1} - x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}} - 2x^{\frac{1}{4}+1} + 2x^{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}} - 2x^{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} \right) dx$$

$$= \int \left(x^{\frac{3}{2}} - x + x^{\frac{3}{4}} - 2x^{\frac{5}{4}} + 2x^{\frac{3}{4}} - 2x^{\frac{1}{2}} \right) dx = \int \left(x^{\frac{3}{2}} - x + 3x^{\frac{3}{4}} - 2x^{\frac{5}{4}} - 2x^{\frac{1}{2}} \right) dx$$

$$= \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - \frac{x^2}{2} + 3 \cdot \frac{x^{\frac{7}{4}}}{\frac{7}{4}} - 2 \cdot \frac{x^{\frac{9}{4}}}{\frac{9}{4}} - 2 \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{x^2}{2} + \frac{12}{7}x^{\frac{7}{4}} - \frac{8}{9}x^{\frac{9}{4}} - \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$$

$$4/ \int \left(x + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^3 dx$$

*Cũng giống như ở VD 3/, ở ví dụ này ta cần khai triển hằng đẳng thức trước khi có thể áp dụng nguyên hàm cơ bản.

$$= \int \left(x^3 + 3x^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} + 3x \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right)^3 \right) dx = \int \left(x^3 + 3x^2 \cdot x^{-\frac{1}{2}} + 3x \cdot \frac{1}{x} + \left(x^{-\frac{1}{2}} \right)^3 \right) dx$$

$$= \int \left(x^3 + 3x^{\frac{3}{2}} + 3 + x^{-\frac{3}{2}} \right) dx = \frac{x^4}{4} + 3 \cdot \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + 3x + \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + C = \frac{x^4}{4} + \frac{6}{5}x^{\frac{5}{2}} + 3x - 2x^{-\frac{1}{2}} + C$$

$$5/ \int \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}} dx$$

*Ta sẽ thừa hiện tách phân số để đưa về nguyên hàm cơ bản.

$$= \int \left(\frac{x}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right) dx = \int \left(x^1 \cdot x^{-\frac{1}{3}} - x^{-\frac{1}{3}} \right) dx = \int \left(x^{\frac{2}{3}} - x^{-\frac{1}{3}} \right) dx = \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} - \frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + C = \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} - \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + C$$

$$6/ \int 2^x \cdot e^{3x} dx$$

*Ta sẽ biến đổi đưa về cùng mũ x

$$= \int 2^x \cdot (e^3)^x dx = \int (2 \cdot e^3)^x dx = \frac{(2e^3)^x}{\ln(2e^3)} + C$$

$$7/ \int \sqrt{e^{2x} + e^{-2x} + 2} dx$$

*Bình thường nếu trong căn chỉ có một hạng tử ta sẽ xử lý đưa về lũy thừa. Tuy nhiên trong ví dụ này thì biểu thức trong căn có tới 3 hạng tử, do vậy việc đưa về lũy thừa sẽ không có ý nghĩa do không phải nguyên hàm cơ bản. Trong trường hợp này ta cần biến đổi làm mất dấu căn bằng cách đưa về hằng đẳng thức.

$$\text{Ta có: } e^{2x} + e^{-2x} + 2 = (e^x)^2 + 2 \cdot e^x \cdot e^{-x} + (e^{-x})^2 = (e^x + e^{-x})^2$$

Do đó bài toán trở thành:

$$\int \sqrt{(e^x + e^{-x})^2} dx = \int (e^x + e^{-x}) dx = e^x + \frac{1}{-1} \cdot e^{-x} + C = e^x - e^{-x} + C$$

$$8/ \int \frac{dx}{\sqrt{3x-2} + \sqrt{3x+3}}$$

*Đối với dạng này ta sử dụng kỹ năng trục căn thức để xử lý.

$$= \int \frac{\sqrt{3x-2} - \sqrt{3x+3}}{(x-2) - (x+3)} dx = \int \frac{\sqrt{3x-2} - \sqrt{3x+3}}{-5} dx = -\frac{1}{5} \int \left((3x-2)^{\frac{1}{2}} - (3x+3)^{\frac{1}{2}} \right) dx$$

$$= -\frac{1}{5} \cdot \left[\frac{1}{\frac{3}{2}} \cdot \frac{(3x-2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{1}{\frac{3}{2}} \cdot \frac{(3x+3)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right] + C = -\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{\frac{3}{2}} \cdot \frac{2}{3} \left[(3x-2)^{\frac{3}{2}} - (3x+3)^{\frac{3}{2}} \right] + C$$

$$= -\frac{2}{45} \cdot \left[(3x-2)^{\frac{3}{2}} - (3x+3)^{\frac{3}{2}} \right] + C$$

Các bài tập dưới đây dành cho các bạn tự luyện tập

$$\int (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + 4\sqrt[4]{x}) dx$$

$$\int e^x (5 + 3e^{-x}) dx$$

$$\int \frac{(\sqrt[3]{x}+1)^2}{x} dx$$

$$\begin{array}{lll}
\int (\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1) dx & \int \left(2\sqrt{x} - 3e^{-x} - \frac{8}{x^3} \right) dx & \int 2^{2x+1} \cdot 3^{3x+2} dx \\
\int e^x \left(7 - 3e^{-x} + \frac{e^{-x}}{\cos^2 x} \right) dx & \int \frac{3^{x+1}}{4^x} dx & \int (3^x - 2)^2 dx \\
\int (2^x + 3^x) \cdot 4^{2x+1} dx & \int 2^{2x} 3^x 4^x dx & \int (2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x^2} + 7x^2\sqrt{x}) dx \\
\int (x\sqrt{x} - 1)^2 dx & \int \frac{dx}{\sqrt{x+3} + \sqrt{x-1}} & \int \frac{3dx}{\sqrt{2x-1} - \sqrt{2x+1}} \\
\int \sqrt{e^x + e^{-x} - 2} dx & \int \sqrt[3]{x\sqrt{64x} \cdot \sqrt[4]{x}} dx & \int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right)^2 dx
\end{array}$$

4.2.2. Phân tích hàm hữu tỉ

Dạng 0: $\int (f(x))^n dx$.

Cách làm: nếu bậc của $f(x)$ bằng 1 thì sử dụng định lí (10) phần 2.1; nếu bậc của $f(x)$ lớn hơn 1 thì khai triển hằng đẳng thức với $n=\{2;3\}$, nếu $n \geq 4$ thì khai triển bằng nhị thức Newton hoặc nhân đa thức như bình thường.

Ví dụ:

$$1/ \int (2x - 5)^{10} dx$$

Ta thấy bậc của $f(x)$ là 1 nên ta sử dụng ĐL (10) để làm

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{(2x-5)^{11}}{11} + C = \frac{(2x-5)^{11}}{22} + C$$

$$2/ \int (x^5 - 3)^2 dx$$

Do bậc của $f(x)$ là 5 nên ta không thể sử dụng ĐL(10) như ở trên được nữa. Ta sẽ khai triển hằng đẳng thức này.

$$= \int (x^{10} - 6x^5 + 9) dx = \frac{x^{11}}{11} - 6 \cdot \frac{x^6}{6} + 9x + C = \frac{x^{11}}{11} - x^6 + 9x + C$$

$$3/ \int (x^2 + 2)^3 dx$$

$$= \int ((x^2)^3 + 3 \cdot (x^2)^2 \cdot 2 + 3 \cdot x^2 \cdot 2^2 + 2^3) dx = \int (x^6 + 6x^4 + 12x^2 + 8) dx$$

$$= \frac{x^7}{7} + \frac{6x^5}{5} + 4x^3 + 8x + C$$

Dạng 1: $\int \frac{f(x)}{x^\alpha} dx$

Cách làm: tách phân số đưa về dạng x^α

$$1/ \int \frac{x^5 + 4x^7 - 2x + 8 - 7x^9}{x^2} dx$$

$$= \int \left(\frac{x^5}{x^2} + \frac{4x^7}{x^2} - \frac{2x}{x^2} + \frac{8}{x^2} - \frac{7x^9}{x^2} \right) dx = \int \left(x^3 + 4x^5 - \frac{2}{x} + 8 \cdot x^{-2} - 7x^7 \right) dx$$

**Lưu ý: dạng k/x thì để nguyên không đưa về $k \cdot x^{-1}$*

$$= \frac{x^4}{4} + 4 \cdot \frac{x^6}{6} - 2 \ln|x| + 8 \cdot \frac{x^{-1}}{-1} - \frac{7x^8}{8} + C = \frac{x^4}{4} + \frac{2}{3}x^6 - 2 \ln|x| - \frac{8}{x} - \frac{7}{8}x^8 + C$$

$$* \text{Công thức tính nhanh: } \int \frac{k}{x^2} dx = -\frac{k}{x} + C; \int \frac{k}{(ax+b)^2} dx = -\frac{k}{a(ax+b)} + C$$

$$2/ \int \left(\frac{3}{x^5} - \frac{2}{x^4} + \frac{1}{x^3} - \frac{5}{x} + 2018 \right) dx$$

$$= \int \left(3 \cdot x^{-5} - 2 \cdot x^{-4} + x^{-3} - \frac{5}{x} + 2018 \right) dx = 3 \cdot \frac{x^{-4}}{-4} - 2 \cdot \frac{x^{-3}}{-3} + \frac{x^{-2}}{-2} - 5 \ln|x| + 2018x + C$$

$$= -\frac{3}{4x^4} + \frac{2}{3x^3} - \frac{2}{x^2} - 5 \ln|x| + 2018x + C$$

*Hãy tự rút ra cho mình công thức tính nhanh nguyên hàm dạng $\int \frac{k}{x^n} dx = ?$

Dạng 2: $\int \frac{f(x)}{ax+b} dx$

Cách làm: chia $f(x)$ cho $(ax+b)$ để phân tích tử số thành $f(x) = (ax+b) \cdot g(x) + r$; với r là số dư, $g(x)$ là thương.

*Để làm được dạng này các bạn cần biết cách **chia đa thức** đã học ở lớp 8. Bạn nào không nhớ cách chia thì có thể tìm tài liệu trên mạng để xem lại cách chia.

$$1/ \int \frac{x^3+3x^2-6x+5}{x+1} dx = F(x)$$

Chia tử số cho mẫu số ta được $x^3 + 3x^2 - 6x + 5 = (x+1)(x^2 + 2x - 8) + 13$

$$F(x) = \int \frac{(x+1)(x^2+2x-8)+13}{x+1} dx = \int (x^2 + 2x - 8 + \frac{13}{x+1}) dx = \frac{x^3}{3} + x^2 - 8x + 13 \ln|x+1| + C$$

$$2/ \int \frac{3x^2-6x+5}{2x+1} dx$$

$$= \int \frac{(2x+1)(\frac{3}{2}x-\frac{15}{4})+\frac{35}{4}}{2x+1} dx = \int (\frac{3}{2}x - \frac{15}{4} + \frac{35}{4(2x+1)}) dx = \frac{3x^2}{4} - \frac{15}{4}x + \frac{35}{8} \ln|2x+1| + C$$

Dạng 3: $\int \frac{ax+b}{ax^2+bx+c} dx$ với điều kiện mẫu số có nghiệm

Cách làm:

+, Nếu mẫu số có 2 nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ thì phân tích về dạng: $\int (\frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2}) dx$. Tìm A, B bằng cách qui đồng và đồng nhất hệ số.

+, Nếu mẫu số có nghiệm kép thì phân tích về dạng $\int \frac{k(x \pm x_0)+h}{(x \pm x_0)^2} dx = \int (\frac{k}{x-x_0} + \frac{h}{(x-x_0)^2}) dx$

$$1/ \int \frac{3x+7}{x^2+4x+3} dx = F(x)$$

Mẫu số có 2 nghiệm là $-1; -3$ nên ta phân tích $\frac{3x+7}{x^2+4x+3} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+3}$

Qui đồng ta được: $A(x+3) + B(x+1) = 3x+7 \Leftrightarrow Ax + Bx + 3A + B = 3x+7$

Đồng nhất hệ số của x và hệ số tự do ta được: $\begin{cases} A+B=3 \\ 3A+B=7 \end{cases}$. Giải hệ ta được $A=2; B=1$

$$\text{Vậy } F(x) = \int (\frac{2}{x+1} + \frac{1}{x+3}) dx = 2 \ln|x+1| + \ln|x+3| + C$$

**Khi tính nguyên hàm cần chú ý chia cho hệ số của x .*

$$2/ \int \frac{3}{x^2-x-12} dx = F(x)$$

Mẫu số có hai nghiệm $4; -3$ nên ta phân tích $\frac{2}{x^2-x-12} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+3}$

$$\Rightarrow A(x+3) + B(x-4) = 2 \Leftrightarrow Ax + Bx + 3A - 4B = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ 3A-4B=2 \end{cases} \Leftrightarrow A = \frac{2}{7}; B = -\frac{2}{7}$$

$$\text{Vậy } F(x) = \int (\frac{2}{7} \cdot \frac{1}{x-4} - \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{x+3}) dx = \frac{2}{7} \cdot \ln|x-4| - \frac{2}{7} \cdot \ln|x+3| + C = \frac{2}{7} \cdot \ln \frac{|x-4|}{|x+3|} + C$$

$$3/ \int \frac{dx}{x \cdot (x+1)} = F(x)$$

Cũng phân tích về dạng $\frac{A}{x} + \frac{B}{x+1}$

$$F(x) = \int (\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}) dx = \ln|x| - \ln|x+1| + C = \ln \frac{|x|}{|x+1|} + C$$

$$4/ \int \frac{5}{x^2-4x+4} dx = F(x)$$

Ta thấy mẫu số có nghiệm kép $x=2$ nên ta đưa về hằng đẳng thức

$$F(x) = \int \frac{5}{(x-2)^2} dx = \int 5 \cdot (x-2)^{-2} dx = 5 \cdot \frac{(x-2)^{-1}}{-1} + C = -\frac{5}{x-2} + C$$

$$\begin{aligned}
 5/ \int \frac{2x-1}{x^2+6x+9} dx &= F(x) \\
 &= \int \frac{2(x+3)-6-1}{(x+3)^2} dx = \int \frac{2(x+3)-7}{(x+3)^2} dx = \int \left(\frac{2}{x+3} - \frac{7}{(x+3)^2} \right) dx \\
 &= 2 \ln|x+3| + \frac{7}{x+3} + C
 \end{aligned}$$

Dạng 4: $\int \frac{f(x)}{ax^2+bx+c} dx$ với điều kiện mẫu số có nghiệm và bậc của $f(x)$ lớn hơn hoặc bằng 2.

Cách làm: Chia tử số cho mẫu số rồi đưa về dạng 3 phân tích tiếp.

$$\begin{aligned}
 1/ \int \frac{x^2+5x+10}{x^2+4x-5} dx &= F(x) \\
 &= \int \frac{(x^2+4x-5)+(x+15)}{x^2+4x-5} dx = \int \left(1 + \frac{x+15}{x^2+4x-5} \right) dx.
 \end{aligned}$$

Đến đây ta phân tích tiếp $\frac{x+15}{x^2+4x-5} = \frac{8}{3(x-1)} - \frac{5}{3(x+5)}$

$$F(x) = \int \left(1 + \frac{8}{3(x-1)} - \frac{5}{3(x+5)} \right) dx = x + \frac{8}{3} \ln|x-1| - \frac{5}{3} \ln|x+5| + C$$

$$\begin{aligned}
 2/ \int \frac{x^3+3x^2+6x-5}{x^2+x-6} dx &= F(x) \\
 &= \int \frac{(x+2)(x^2+x-6)+10x+7}{x^2+x-6} dx = \int \left(x+2 + \frac{10x+7}{x^2+x-6} \right) dx = \int \left(x+2 + \frac{23}{5(x+3)} + \frac{27}{5(x-2)} \right) dx \\
 &= \frac{x^2}{2} + 2x + \frac{23}{5} \ln|x+3| + \frac{27}{5} \ln|x-2| + C
 \end{aligned}$$

**Đối với những trường hợp mẫu số có 3 nghiệm hay nhiều hơn ta cũng làm tương tự như các dạng trên.*

**Các bài tập tự luyện*

$\int (2x+1)^{2018} dx$	$\int (3x^3-2)^2 dx$	$\int (3x^2-1)^3 dx$
$\int \left(\frac{1}{4}x-5 \right)^3 dx$	$\int \left(\frac{1}{2}x^2+x \right)^2 dx$	$\int (1-x^2)^4 dx$
$\int \frac{x^2-3x+4}{x} dx$	$\int \frac{3x^5+2x^4-4x^2-x+2}{2x^2} dx$	$\int \frac{(2x^2-1)^2}{x^3} dx$
$\int \frac{2x^3-x+1}{3x^2} dx$	$\int \frac{(\sqrt{x}-2)^2}{2x} dx$	$\int \frac{(x^3+1)^2}{-x^2} dx$
$\int \frac{x^3+3x^2-5x+1}{x-1} dx$	$\int \frac{2x^5+x^3-2x^2+3}{x+1} dx$	$\int \frac{2x^3-x^2-x+4}{2x-1} dx$
$\int \frac{6x+4}{2x-3} dx$	$\int \frac{x+1}{x-1} dx$	$\int \frac{2-3x}{x+1} dx$
$\int \frac{3x+4}{x^2-4x-5} dx$	$\int \frac{x+7}{x^2+8x-9} dx$	$\int \frac{-2x}{2x^2+3x-5} dx$
$\int \frac{3}{x^2-x-2} dx$	$\int \frac{-8}{x^2+10x+9} dx$	$\int \frac{1}{x^2-2x+1} dx$
$\int \frac{x-1}{x^2+10x+25} dx$	$\int \frac{-3}{4x^2-12x+9} dx$	$\int \frac{-x-1}{4-12x+9x^2} dx$
$\int \frac{2x^2-5x+6}{x^2-x} dx$	$\int \frac{3x^2+5}{(2x-1)(3-x)} dx$	$\int \frac{x^3-3x+1}{2x^2-x-3} dx$
$* \int \frac{x^4+x^2+1}{x^2+x+1} dx$	$* \int \frac{x^4+2x^2+2+x}{x^2+x+1} dx$	$\int \frac{1}{(x-1)(x+1)(x+3)} dx$

4.2.3. Phân tích hàm lượng giác

**Kiến thức cần nhớ*

+, Nguyên hàm các hàm lượng giác cơ bản; định lí (10)

+, Các công thức lượng giác đã học, đặc biệt mục 4.1.2

*Một số dạng biến đổi thường gặp

$$\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$$

$$= (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)$$

$$\cos^4 x - \sin^4 x = (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x)$$

$$\cos^4 x + \sin^4 x = (\cos^2 x)^2 + (\sin^2 x)^2 + 2 \sin^2 x \cos^2 x - 2 \sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x$$

+, Một số nguyên hàm bổ sung:

$$\int \tan x \, dx = -\ln|\cos x| + C$$

$$\int \tan(ax + b) \, dx = -\frac{1}{a} \ln|\cos(ax + b)| + C$$

$$\int \cot x \, dx = \ln|\sin x| + C$$

$$\int \cot(ax + b) \, dx = \frac{1}{a} \ln|\sin(ax + b)| + C$$

$$1/ \int (\tan x + \cot x)^2 \, dx = F$$

$$= \int (\tan^2 x + \cot^2 x + 2 \tan x \cdot \cot x) \, dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 + \frac{1}{\sin^2 x} - 1 + 2 \right) \, dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} \right) \, dx = \tan x - \cot x + C$$

$$2/ \int e^x \left(2 + \frac{e^{-x}}{\sin^2 x} \right) \, dx$$

$$= \int \left(2e^x + e^x \cdot \frac{e^{-x}}{\sin^2 x} \right) \, dx = \int \left(2e^x + \frac{1}{\sin^2 x} \right) \, dx = 2e^x - \cot x + C$$

$$3/ \int \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} \, dx$$

$= \int \frac{1}{\sin^2 x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \, dx$. Ở đây ta chưa thể áp dụng công thức nguyên hàm cơ bản mà phải qua một bước biến đổi nữa để chuyển phép nhân thành phép cộng.

$$= \int (1 + \cot^2 x)(1 + \tan^2 x) \, dx = \int ((1 + \tan^2 x) + (\cot^2 x + \cot^2 x \cdot \tan^2 x)) \, dx$$

$$\int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + (\cot^2 x + 1) \right) \, dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} \right) \, dx = \tan x - \cot x + C$$

$$4/ \int \sin^2 2x \, dx$$

Ta sẽ hạ bậc sin để đưa về nguyên hàm cơ bản.

$$\int \frac{1 - \cos 4x}{2} \, dx = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 4x}{2} \right) \, dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \sin 4x + C = \frac{1}{2}x - \frac{1}{8} \sin 4x + C$$

$$5/ \int \sin x \cdot \cos 2x \, dx$$

Ta sẽ biến đổi tích sin x.cos x thành tổng các hàm cơ bản.

$$= \int \frac{1}{2} (\sin 3x + \sin(-x)) \, dx = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{3} \cos 3x - \frac{1}{-1} \cos(-x) \right) + C$$

$$= \frac{1}{2} \left(\cos x - \frac{1}{3} \cos 3x \right) + C$$

*Lưu ý liên hệ **cung đối nhau**: $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$; $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$

$$6/ \int 4 \sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x \, dx$$

$$= \int 4 \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) (\cos 3x - \cos x) \cdot \sin 3x \, dx = \int (-2) (\sin 3x \cdot \cos 3x - \sin 3x \cdot \cos x) \, dx$$

$$= \int (-\sin 6x + 2 \cdot \frac{1}{2} (\sin 4x + \sin 2x)) \, dx = \int (-\sin 6x + \sin 4x + \sin 2x) \, dx$$

$$= \frac{1}{6} \cos 6x - \frac{1}{4} \cos 4x - \frac{1}{2} \cos 2x + C$$

Ở đây ta đã sử dụng công thức biến đổi tích thành tổng và công thức nhân đôi.

*Lưu ý: khi phép nhân có sin và cos thì ta viết sin trước; khi phép phân cùng sin hoặc cùng cos ta viết hàm có góc lớn hơn trước để hạn chế sai sót về dấu.

$$7/ \int \cos \frac{x}{2} \cdot \cos x \, dx$$

$$= \int \cos x \cdot \cos \frac{x}{2} \, dx = \int \frac{1}{2} (\cos \frac{3x}{2} + \cos \frac{x}{2}) \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} \sin \frac{3x}{2} + \frac{1}{2} \sin \frac{x}{2} \right) + C = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} \sin \frac{3x}{2} + 2 \sin \frac{x}{2} \right) + C = \frac{1}{3} \sin \frac{3x}{2} + \sin \frac{x}{2} + C$$

$$8/ \int (\cos^4 x - \sin^4 x) dx = F$$

$$= \int ((\cos^2 x)^2 - (\sin^2 x)^2) dx = \int (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x) dx = \int (\cos^2 x - \sin^2 x) dx$$

Đến đây ta tiếp tục hạ bậc sin; cos bằng công thức hạ bậc hoặc công thức nhân đôi của cos

$$C1: = \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2} - \frac{1-\cos 2x}{2} \right) dx = \int \cos 2x dx = \frac{1}{2} \sin 2x + C$$

$$C2: \text{do } \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \text{ nên } F = \int \cos 2x dx = \frac{1}{2} \sin 2x + C$$

$$9/ \int \frac{\cos 2x}{\sin x + \cos x} dx = F$$

$$\text{Để ý thấy } \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)$$

$$F = \int \frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{\sin x + \cos x} dx = \int (\cos x - \sin x) dx = \sin x + \cos x + C$$

$$10/ \int \sin^3 x dx$$

Dùng công thức hạ bậc 3 của sin ta được:

$$\int \sin^3 x dx = \int \frac{3 \sin x - \sin 3x}{4} dx = \frac{1}{4} \left(-3 \cos x + \frac{1}{3} \cos 3x \right) + C$$

$$= \frac{1}{12} \cos 3x - \frac{3}{4} \cos x + C$$

$$11/ \int \tan(2x + 1) dx$$

$$= \frac{1}{2} \ln |\cos(2x + 1)| + C$$

$$12/ \int \cot^2(1 - 3x) dx$$

$$\int \left(\frac{1}{\sin^2(1-3x)} - 1 \right) dx = \frac{1}{-3} \cdot (-\cot(1 - 3x)) + C = \frac{\cot(1-3x)}{3} + C$$

*Các bài tập tự luyện

$\int (\tan x - \cot x)^2 dx$	$\int (2 \tan x + 3 \cot x)^2 dx$	$\int \left(2 \tan^2 2x - 3 \cot^2 \frac{x}{2} \right) dx$
$\int \frac{1}{\sin^2 2x \cdot \cos^2 2x} dx$	$\int \frac{2}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx$	$\int \sin^2 \frac{x}{3} dx$
$\int \cos^2 3x dx$	$\int (2 \sin^2 x - 3 \cos^2 x) dx$	$\int 4 \sin^2 x \cdot \cos^2 x dx$
$\int (\sin 2x + \cos 2x)^2 dx$	$\int (\sin x - \cos 2x)^2 dx$	$\int (2 \sin x - 3 \cos x)^2 dx$
$\int (\cos^2 3x - \sin^2 3x) dx$	$\int \sin 2x \cdot \cos 4x dx$	$\int 2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{3x}{2} dx$
$\int 4 \cos x \cdot \cos \frac{x}{2} dx$	$\int 24 \sin 2x \sin 4x \sin 6x dx$	$\int -4 \cos x \cos 2x \cos 3x dx$
$\int \sin x \cdot \cos 3x \cdot \cos 5x dx$	$\int \sin^2 x \cdot \cos x dx$	$\int 4(\sin^3 x - \cos^3 x) dx$
$\int 8 \cos^3 \frac{x}{2} dx$	$\int -4 \sin^3 2x dx$	$\int (\sin^4 x - \cos^4 x) dx$
$\int (\sin^4 2x + \cos^4 2x) dx$	$\int \frac{2 \cos 2x}{\sin x - \cos x} dx$	$\int \frac{4 \cos x}{\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}} dx$
$\int 3 \cot(3x - 2) dx$	$\int 4 \tan\left(\frac{1}{2}x + 5\right) dx$	$\int 2 \tan^2\left(\frac{x}{3} + 1\right) dx$
$\int \tan^3 x dx$	$\int \cot^3(1 - x) dx$	$\int (\sin^6 x + \cos^6 x) dx$

4.2.4. Phân tích hàm siêu việt

*Hàm siêu việt thường ba hai kiểu phân tích là nhân khai triển; phân tích từ hằng đẳng thức và tách phân số. Cách làm đa số tương tự

Tuy nhiên tôi xin đưa ra một vài ví dụ đơn giản để các bạn định hình nguyên hàm dạng này trước khi phân tích những nguyên hàm mức độ cao hơn.

$$1/ \int (2^x + 3^x) \cdot 4^x dx$$

$$= \int (2^x \cdot 4^x + 3^x 4^x) dx = \int (8^x + 12^x) dx = \frac{8^x}{\ln 8} + \frac{12^x}{\ln 12} + C$$

$$2/ \int e^x \left(2 - \frac{1}{2} e^{-x} + \frac{e^{-x}}{\sin^2 2x} \right) dx$$

$$= \int \left(2e^x - \frac{1}{2} e^x \cdot e^{-x} + \frac{e^x e^{-x}}{\sin^2 2x} \right) dx = \int \left(2e^x - \frac{1}{2} + \frac{1}{\sin^2 2x} \right) dx = 2e^x - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \cot 2x + C$$

$$3/ \int \frac{3^{x+2}}{4^{x+1}} dx$$

*cần nhớ rằng: muốn gộp mũ thì mũ phải giống nhau

$$= \int \frac{3^x \cdot 3^2}{4^x \cdot 4} dx = \int \frac{9}{4} \cdot \left(\frac{3}{4} \right)^x dx = \frac{9}{4} \cdot \frac{\left(\frac{3}{4} \right)^x}{\ln \left(\frac{3}{4} \right)} + C$$

$$4/ \int 2^{2x} \cdot 3^x \cdot 7^x dx$$

$$= \int (2^2)^x 3^x 7^x dx = \int (2^2 \cdot 3 \cdot 7)^x dx = \int 84^x dx = \frac{84^x}{\ln 84} + C$$

$$5/ \int \frac{1}{e^{2-5x}} dx$$

$$= \int e^{-(2-5x)} dx = \int e^{5x-2} dx = \frac{1}{5} e^{5x-2} + C$$

$$//////////$$

$$6/ \int (3^x - 2)^2 dx$$

*Khai triển hằng đẳng thức đưa về nguyên hàm cơ bản.

$$= \int ((3^x)^2 - 2 \cdot 3^x \cdot 2 + 2^2) dx = \int (3^{2x} - 4^x + 4) dx = \frac{3^{2x}}{2 \ln 3} - \frac{4^x}{\ln 4} + 4x + C$$

$$7/ \int \frac{e^{2x-3}}{e^x} dx$$

*Tách phân số giống như hàm hữu tỉ

$$= \int \left(\frac{e^{2x}}{e^x} - \frac{3}{e^x} \right) dx = \int (e^x - 3 \cdot e^{-x}) dx = e^x - \frac{3}{-1} e^{-x} + C = e^x + \frac{3}{e^x} + C$$

$$8/ \int \sqrt{e^x + e^{-x} + 2} dx$$

Để thấy biểu thức trong căn là một hằng đẳng thức, ta sẽ đưa về hằng đẳng thức để xóa dấu căn.

$$= \int \sqrt{\left(e^{\frac{x}{2}} \right)^2 + \left(e^{-\frac{x}{2}} \right)^2 + 2 \cdot e^{\frac{x}{2}} e^{-\frac{x}{2}}} dx = \int \sqrt{\left(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}} \right)^2} dx = \int \left(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}} \right) dx$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{2}} e^{\frac{x}{2}} + \frac{1}{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x}{2}} + C = 2e^{\frac{x}{2}} - 2e^{-\frac{x}{2}} + C$$

*Các bạn có thể làm tương tự như trên với những câu dạng $\int \sqrt{e^n + e^{-n} + 2} dx$

*Bài tập tự luyện

$$\int (3^x - 4^x) 5^x dx$$

$$\int (2^{2x} + 3^{3x}) 4^{x-1} dx$$

$$\int 4^{2x} e^{3x} dx$$

$$\int \frac{9^x - 4^x}{2 \cdot 3^x} dx$$

$$\int (e^x + 2)^2 dx$$

$$\int (e^{2x} - 3)^2 dx$$

$$\int (e^x + 1)^3 dx$$

$$\int (2^x - 3^x)^3 dx$$

$$\int \frac{e^{2-5x} - 1}{e^{2x}} dx$$

$$\int \frac{2^{x+1} - 5^{x-1}}{10^x} dx$$

$$\int \sqrt{e^{4x} + e^{-4x} + 2} dx$$

$$\int \sqrt{4e^x + 9e^{-x} - 12} dx$$

5. TÌM NGUYÊN HÀM BẰNG PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN

*Nếu không thể phân tích được hãy nghĩ đến đổi biến (đặt ẩn phụ)!

*Người ta sử dụng phương pháp đổi biến số để biến một nguyên hàm phức tạp về nguyên hàm đơn giản hơn đã biết cách giải.

*Có 2 dạng đổi biến cơ bản:

Dạng 1: Hàm đổi biến chỉ chứa hàm đặt và đạo hàm của hàm đặt.

Ví dụ: tính $\int 3x^2(x^3 - 2)^{10} dx = F$

Đổi biến đặt $u = x^3 - 2$

Khi đó vì phân hai vế ta được $u' du = (x^3)' dx \Leftrightarrow du = 3x^2 dx$

$$F = \int (x^3 - 2)^{10} \cdot 3x^2 dx = \int u^{10} \cdot du = \frac{u^{11}}{11} + C = \frac{(x^3 - 2)^{11}}{11} + C$$

$$\int 3x^2(x^3 - 2)^{10} dx = \int u^{10} du$$

$u = x^3 - 2$ $du = 3x^2 dx$

Dạng 2: Hàm đổi biến chứa hàm đặt, đạo hàm của hàm đặt (có thể có hoặc không) và các thành phần còn lại có thể rút ra theo biến mới.

Ví dụ: tính $\int \frac{x(2x^2+3)}{\sqrt{x^2+1}} dx = F$

Đổi biến đặt $u = \sqrt{x^2 + 1}$

Vì phân hai vế ta được $u' du = (\sqrt{x^2 + 1})' dx \Leftrightarrow du = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx \Leftrightarrow du = \frac{x dx}{u} \Leftrightarrow u du = x dx$

Mặt khác: $u^2 = x^2 + 1 \Leftrightarrow x^2 = u^2 - 1$

$$F = \int \frac{2x^2+3}{\sqrt{x^2+1}} \cdot x dx = \int \frac{2(u^2-1)+3}{u} \cdot u du = \int (2u^2 + 1) du = \frac{2}{3}u^3 + u + C$$

$$= \frac{2}{3}(\sqrt{x^2 + 1})^3 + \sqrt{x^2 + 1} + C$$

$$F = \int \frac{x(2x^2 + 3)}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = \int \frac{2x^2 + 3}{\sqrt{x^2 + 1}} \cdot x dx = \int \frac{2(u^2 - 1) + 3}{u} \cdot u du$$

$u = \sqrt{x^2 + 1}$ $x^2 = u^2 - 1$ $u du = x dx$

*Để sử dụng tốt phương pháp này thì yêu cầu bắt buộc là phải thành thạo tình nguyên hàm cơ bản; kỹ năng phân tích tìm đưa về nguyên hàm cơ bản; cần hình thành trong đầu được kết quả đạo hàm của hàm mà dự tính ta sẽ đặt liệu có ở nguyên hàm ta đang tính.

*Khi đổi biến hãy tuân theo nguyên tắc “biến cái phức tạp về đơn giản”

5.1. Một số ví dụ mở đầu về phương pháp đổi biến

$$1/ \int \frac{\ln x}{x} dx = F$$

Hình thành ý tưởng: $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

Đặt $u = \ln x$. Vi phân 2 vế ta được: $du = \frac{dx}{x}$

$$F = \int \ln x \cdot \frac{dx}{x} = \int u \cdot du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{\ln^2 x}{2} + C$$

$$2/ \int 2e^{\sin x} \cos x dx = F$$

Hình thành ý tưởng: $(\sin x)' = \cos x$

Cách 1: đặt $u = e^{\sin x}$. Vi phân 2 vế: $du = \cos x e^{\sin x} dx$

$$F = \int 2e^{\sin x} \cos x dx = \int 2du = 2u + C = 2e^{\sin x} + C$$

Cách 2: đặt $u = \sin x$. Vi phân 2 vế: $du = \cos x dx$

$$F = \int 2e^{\sin x} \cos x dx = \int 2e^u du = 2e^u + C = 2e^{\sin x} + C$$

$$3/ \int \frac{2x+4}{x^2+4x-5} dx = F$$

*Câu này chúng ta có thể phân tích thành dạng $\int \left(\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+5} \right) dx$ do mẫu số có 2 nghiệm là 1 và (-5).

Tuy nhiên để ý thấy đạo hàm của mẫu số chính là tử số. Vì thế ta còn có thể sử dụng phương pháp đổi biến để làm câu này.

$$\text{Đặt } u = x^2 + 4x - 5 \Rightarrow du = (2x + 4)dx$$

$$F = \int \frac{(2x+4)dx}{x^2+4x-5} = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln|x^2 + 4x - 5| + C$$

*Rõ ràng trong ví dụ này sử dụng phương pháp đổi biến là nhanh hơn rất nhiều.

$$4/ \int \frac{2x+2}{x^2+2x+3} dx = F$$

*câu này chúng ta sẽ thấy không thể sử dụng phương pháp phân tích được nữa, do mẫu số không có nghiệm. Để ý thấy mẫu số có đạo hàm là tử số. Do đó ta sẽ áp dụng phương pháp đổi biến.

$$\text{Đặt } u = x^2 + 2x + 3 \Rightarrow du = (2x + 2)dx$$

$$F = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln|x^2 + 2x + 3| + C$$

$$5/ \int \frac{3e^x}{e^x+1} dx$$

Ta thấy phần phức tạp hơn là mẫu số có đạo hàm là tử số (không gồm hệ số) nên ta sẽ đổi biến như sau:

$$\text{Đặt } u = e^x + 1 \Rightarrow du = e^x dx$$

$$F = \int \frac{3du}{u} = 3 \ln|u| + C = 3 \ln|e^x + 1| + C$$

$$6/ \int \frac{x^2+2x-1}{\sqrt{x+1}} dx = F$$

Ở câu này ta thấy mẫu số là một căn thức và đạo hàm của nó không có ở những tích còn lại của hàm số. Tuy nhiên ta lại có thể rút x ra để thế vào những phần còn lại của hàm số.

$$\text{Đặt } u = \sqrt{x+1} \Rightarrow u^2 = x+1 \Rightarrow x = u^2 - 1 \Rightarrow dx = 2udu$$

$$F = \int \frac{(u^2-1)^2 + 2(u^2-1)-1}{u} \cdot 2udu = \int 2 \cdot [u^4 - 2u^2 + 1 + 2u^2 - 2 - 1] du$$

$$= \int 2(u^4 - 2)du = 2 \left(\frac{u^5}{5} - 2u \right) + C = 2 \left(\frac{(\sqrt{x+1})^5}{5} - 2\sqrt{x+1} \right) + C$$

*Đó là một vài ví dụ mở đầu để các bạn có thể định hình cho mình về phương pháp đổi biến. Thực tế có rất nhiều dạng đổi biến khác nhau với độ phức tạp khác nhau. Chúng ta sẽ đi riêng từng dạng để biết “kiểu” đổi biến ở mỗi dạng hàm.

Ta cần đặt biến mới sao cho tất cả các thành phần chứa biến cũ có thể thay thế bằng biến mới

5.2. Đổi biến hàm hữu tỉ, hàm căn thức đơn giản, hàm mũ - logarit.

$$1/ \int x(2-x^2)^{12} dx = F$$

Đặt $u = 2 - x^2 \Rightarrow du = -2xdx$. Ta thấy nguyên hàm ban đầu chỉ có xdx nên ta sẽ tách riêng xdx

$$xdx = \frac{du}{-2}.$$

$$F = \int (2 - x^2)^{12} x dx = \int u^{12} \cdot \frac{du}{-2} = \frac{u^{13}}{13} \cdot \frac{1}{-2} + C = \frac{(2-x^2)^{13}}{-26} + C$$

$$2/ \int \frac{8x dx}{x^2+1}$$

$$\text{Đặt } u = x^2 + 1 \Rightarrow du = 2x dx$$

Ở câu này do ta có thể tách $8x dx = 4 \cdot 2x dx$ nên không cần tách riêng $x dx$ như ở trên VD1

$$\int \frac{8x dx}{x^2+1} = \int \frac{4 \cdot 2x dx}{x^2+1} = \int \frac{4 du}{u} = 4 \ln|u| + C = 4 \ln|x^2 + 1| + C$$

$$3/ \int x^5 (1 - x^3)^6 dx$$

Đặt $u = 1 - x^3 \Rightarrow du = -3x^2 dx$. Lúc này ta thấy không hề có $x^2 dx$ trong hàm cần tính. Tuy nhiên để ý thấy có $x^5 = x^3 \cdot x^2$. Như vậy đã xuất hiện $x^2 dx$, còn x^3 ta rút theo u được $x^3 = 1 - u$

$$\int x^5 (1 - x^3)^6 dx = \int (1 - x^3)^6 \cdot x^3 \cdot x^2 dx = \int u^6 \cdot (1 - u) \cdot \frac{du}{-3} = \int -\frac{1}{3} (u^6 - u^7) du$$

$$= -\frac{1}{3} \left(\frac{u^7}{7} - \frac{u^8}{8} \right) + C = -\frac{1}{3} \left(\frac{(1-x^3)^7}{7} - \frac{(1-x^3)^8}{8} \right) + C$$

*không phải lúc nào bài toán cũng có sẵn mà đòi hỏi chúng ta có kỹ năng phân tích đưa về hàm mà ta muốn.

$$4/ \int \frac{x^5 dx}{x^2+1}$$

$$\text{Đặt } u = x^2 + 1 \Rightarrow du = 2x dx \Leftrightarrow x dx = \frac{du}{2}. \text{ Tách } x^5 dx = x^4 \cdot x dx = (x^2)^2 x dx, \text{ với } x^2 = u - 1$$

$$\int \frac{x^5 dx}{x^2+1} = \int \frac{(u-1)^2}{u} \cdot \frac{du}{2} = \int \frac{1}{2} \cdot \frac{u^2 - 2u + 1}{u} du = \int \frac{1}{2} \left(u - 2 + \frac{1}{u} \right) du$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{u^2}{2} - 2u + \ln|u| \right) + C = \frac{1}{2} \left(\frac{(x^2+1)^2}{2} - 2(x^2 + 1) + \ln|x^2 + 1| \right) + C$$

$$5/ \int \frac{4x-1}{4x^2-2x+5} dx = F$$

Đây là một ví dụ cần phải “tinh mắt” một chút. Để ý thấy mẫu có đạo hàm là $8x - 2 = 2(4x - 1)$.

$$\text{Đặt } u = 4x^2 - 2x + 5 \Rightarrow du = (8x - 2) dx = 2(4x - 1) dx \Rightarrow (4x - 1) dx = \frac{du}{2}$$

$$F = \int \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \ln|u| + C = \frac{1}{2} \ln|4x^2 - 2x + 5| + C$$

$$6/ \int \frac{x^3}{x^8-9} dx = F$$

Nếu đặt $u = x^8 - 9$ thì $du = 8x^7 dx$, nếu tách $du = 8 \cdot x^4 \cdot x^3 dx$ thì cần rút được x^4 theo u .

Ta có $x^8 = u + 9 \Rightarrow (x^4)^2 = u + 9 \Rightarrow x^4 = \sqrt{u + 9}$, phức tạp hơn!!!.

Để ý thấy $x^8 - 9 = (x^4 - 3)(x^4 + 3)$ nếu đặt $u = x^4$ thì $du = 4x^3 dx$

$$F = \int \frac{du}{4(u-3)(u+3)} = \int \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{u-3} - \frac{1}{u+3} \right) du = \frac{1}{24} (\ln|u-3| - \ln|u+3|) + C$$

$$= \frac{1}{24} \ln \frac{|u-3|}{|u+3|} + C$$

*Khi gặp số mũ quá lớn, hãy phân tích về số mũ nhỏ hơn trước khi đổi biến.

$$7/ \int \frac{1}{2} \sqrt{2x+1} dx = F$$

Đặt $u = \sqrt{2x+1}$, ta có thể vi phân luôn nhưng sẽ phức tạp, để đơn giản ta làm mất căn bằng cách bình phương hai vế để vi phân đơn giản hơn: $u^2 = 2x + 1$ (1) đến đây nếu bài toán còn thành phần x đơn lẻ thì phải rút $x = \frac{u^2-1}{2}$. Tuy nhiên trong VD này là không có. Ta đã gặp kiểu rút x trong các VD ở trên, các bạn có thể xem lại.

Vi phân hai vế của (1): $2udu = 2dx \Leftrightarrow dx = udu$

$$F = \int \frac{1}{2} u \cdot udu = \int \frac{1}{2} u^2 du = \frac{1}{2} \cdot \frac{u^3}{3} + C = \frac{\sqrt{2x+1}^3}{6} + C$$

$$8/ \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{2-x}} = F$$

$$\text{Đặt } u = \sqrt{2-x} \Rightarrow u^2 = 2-x \Rightarrow x = 2-u^2 \Rightarrow dx = -2udu$$

Không như VD7, ở VD này ta thấy trong hàm cần tính còn thừa x^2 , do vậy mà tôi đã rút x theo u .

$$F = \int \frac{(2-u^2)^2}{u} \cdot (-2u) du = \int -2(4-4u^2+u^4) du = -2\left(4u - \frac{4u^3}{3} + \frac{u^5}{5}\right) + C$$

$$= -2\left(4\sqrt{2-x} - \frac{4}{3}(\sqrt{2-x})^3 + \frac{(\sqrt{2-x})^5}{5}\right) + C$$

$$9/ \int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx = F$$

$$\text{Đặt } u = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow u^2 = 1-x^2 \Leftrightarrow x^2 = 1-u^2 \Rightarrow xdx = -udu$$

$$F = \int \frac{x^2 \cdot xdx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{(1-u^2) \cdot (-udu)}{u} = \int (u^2-1) du = \frac{u^3}{3} - u + C = \frac{(\sqrt{1-x^2})^3}{3} - \sqrt{1-x^2} + C$$

$$10/ \int x^5 \sqrt{(2-5x^2)^2} dx = F$$

$$\text{Trong VD này sẽ phân ra hai hướng đặt } \begin{cases} u = \sqrt[3]{(2-5x^2)^2} & (1) \\ u = \sqrt[3]{2-5x^2} & (2) \end{cases}$$

Tôi sẽ giải theo cả hai cách để các bạn có sự so sánh và rút ra kinh nghiệm làm bài cho mình.

$$\text{Cách 1: } u = \sqrt[3]{(2-5x^2)^2} \Leftrightarrow u^3 = (2-5x^2)^2 \Leftrightarrow \sqrt{u^3} = |2-5x^2| \Leftrightarrow 2-5x^2 = \pm \sqrt{u^3}$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{2 \pm \sqrt{u^3}}{5}. \text{ Vì phân 2 vế: } 2xdx = \pm \frac{3u^2}{10\sqrt{u^3}} du \Leftrightarrow xdx = \pm \frac{3\sqrt{u}}{20} du$$

$$F = \int \sqrt[3]{(2-5x^2)^2} \cdot (x^2)^2 \cdot xdx = \int u \cdot \left(\frac{2 \pm \sqrt{u^3}}{5}\right)^2 \left(\pm \frac{3}{20} \sqrt{u}\right) du = \int \pm \frac{3}{20} \cdot u\sqrt{u} \cdot \frac{4 \pm 4\sqrt{u^3} + (\sqrt{u^3})^2}{25} du$$

$$= \int \pm \frac{3}{500} \cdot u^{\frac{3}{2}} \left(4 \pm 4 \cdot u^{\frac{3}{2}} + u^3\right) du = \int \pm \frac{3}{500} \left(4u^{\frac{3}{2}} \pm 4u^3 + u^{\frac{9}{2}}\right) du$$

$$= \pm \frac{3}{500} \left(4 \cdot \frac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} \pm 4 \cdot \frac{u^4}{4} + \frac{u^{\frac{11}{2}}}{\frac{11}{2}}\right) + C$$

$$= \pm \frac{3}{500} \left(\frac{8}{5} \cdot \left(\sqrt[3]{(2-5x^2)^2}\right)^{\frac{5}{2}} \pm \left(\sqrt[3]{(2-5x^2)^2}\right)^4 + \frac{2}{11} \left(\sqrt[3]{(2-5x^2)^2}\right)^{\frac{11}{2}}\right) + C$$

$$= \pm \frac{3}{500} \left(\frac{8}{5} (\sqrt[3]{2-5x^2})^5 \pm (\sqrt[3]{2-5x^2})^8 + \frac{2}{11} (\sqrt[3]{2-5x^2})^{11}\right) + C$$

$$\text{Cách 2: } u = \sqrt[3]{2-5x^2} \Rightarrow u^3 = 2-5x^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{2-u^3}{5} \Rightarrow 2xdx = -\frac{3}{5} u^2 du \Leftrightarrow xdx = -\frac{3}{10} u^2 du$$

$$F = \int (\sqrt[3]{2-5x^2})^2 \cdot (x^2)^2 xdx = \int u^2 \cdot \left(\frac{2-u^3}{5}\right)^2 \cdot \left(-\frac{3}{10} u^2\right) du = \int -\frac{3}{250} u^4 \cdot (4-4u^3+u^6) du$$

$$= \int -\frac{3}{250} (4u^4 - 4u^7 + u^{10}) du = -\frac{3}{250} \left(4 \cdot \frac{u^5}{5} - 4 \cdot \frac{u^8}{8} + \frac{u^{11}}{11}\right) + C$$

$$= -\frac{3}{250} \left(\frac{4}{5} (\sqrt[3]{2-5x^2})^5 - \frac{1}{2} \cdot (\sqrt[3]{2-5x^2})^8 + \frac{(\sqrt[3]{2-5x^2})^{11}}{11}\right) + C$$

Rõ ràng cách 2 đơn giản hơn rất nhiều.

$$11/ \int \frac{dx}{1+e^x} = F$$

Đặt $u = 1 + e^x \Rightarrow du = e^x dx$. Ta không thấy $e^x dx$ trong hàm cần tính. Tuy nhiên ta sẽ nhân cả tử và mẫu với e^x để làm xuất hiện $e^x dx$.

$$F = \int \frac{e^x dx}{e^x(e^x+1)} = \int \frac{du}{(u-1)u} = \int \left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u}\right) du = \ln|u-1| - \ln|u| + C = \ln \frac{|u-1|}{|u|} + C$$

$$= \ln \frac{|e^x|}{|e^x+1|} + C = \ln \frac{e^x}{e^x+1} + C$$

**Để áp dụng được cách thêm bớt thì cần phải rút được hàm thêm bớt theo biến mới.*

$$12/ \int (x-1)e^{x^2-2x+3} dx = F$$

$$\text{Đặt } u = e^{x^2-2x+3} \Rightarrow du = (2x-2)e^{x^2-2x+3} dx = 2(x-1)e^{x^2-2x+3} dx$$

$$\Rightarrow \frac{du}{2} = (x-1)e^{x^2-2x+3}dx$$

$$F = \int \frac{du}{2} = \frac{u}{2} + C = \frac{e^{x^2-2x+3}}{2} + C$$

Các bạn cũng có thể đặt $u = x^2 - 2x + 3$

$$12/ \int \frac{dx}{e^x - e^{\frac{x}{2}}} = F$$

$$= \int \frac{dx}{\left(\frac{x}{e^{\frac{x}{2}}}\right)^2 - e^{\frac{x}{2}}} = \int \frac{dx}{e^{\frac{x}{2}}(e^{\frac{x}{2}} - 1)}$$

Đổi biến $u = e^{\frac{x}{2}} - 1$; $du = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}dx \Rightarrow 2du = e^{\frac{x}{2}}dx$. Giống như VD11 ta nhân cả tử và mẫu với $e^{\frac{x}{2}}$

$$F = \int \frac{e^{\frac{x}{2}}dx}{e^{\frac{x}{2}}(e^{\frac{x}{2}} - 1)} = \int \frac{2du}{(u+1)u} = \int 2\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}\right) du = 2 \ln \frac{|u|}{|u+1|} + C$$

$$= 2 \ln \frac{\left|e^{\frac{x}{2}}\right|}{\left|e^{\frac{x}{2}} - 1\right|} + C$$

ở câu này để có thể đổi biến được thì cần các bạn phân tích được như ở bước 1, nếu để e^x ta sẽ không thể rút theo biến mới được.

$$13/ \int \frac{dx}{e^x - e^{-x}} = F$$

$$= \int \frac{dx}{e^x - \frac{1}{e^x}} = \int \frac{dx}{\frac{e^{2x} - 1}{e^x}} = \int \frac{e^x dx}{(e^x)^2 - 1} = \int \frac{e^x dx}{(e^x - 1)(e^x + 1)}. \text{ Đặt } u = e^x - 1 \Rightarrow du = e^x dx$$

$$F = \int \frac{du}{u(u+2)} = \int \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+2}\right) du = \ln \frac{|u|}{|u+2|} + C = \ln \left| \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right| + C$$

*lưu ý: $\frac{|a|}{|b|} = \left| \frac{a}{b} \right|$ nên các bạn viết theo kiểu vế trái hay vế phải đều được. Khi có tích nào đó luôn dương thì có thể bỏ luôn dấu trị tuyệt đối ở tích đó.

*Các bạn cũng có thể đặt $u = e^x + 1$

*Bài tập tự luyện

$\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx$	$\int \frac{4x-2}{x^2-x+1} dx$	$\int (x-1)e^{x^2-2x+3} dx$
$\int \frac{\ln^2 x}{x} dx$	$\int \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}} dx$	$\int \frac{1}{x \ln^5 x} dx$
$\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$	$\int \frac{x dx}{\sqrt{2x^2+3}}$	$\int \frac{e^{2x}}{e^x+1} dx$
$\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx$	$\int \frac{x}{(x+1)^2} dx$	$\int x^2(x+1)^3 dx$
$\int \frac{x}{1-x^2} dx$	$\int \frac{dx}{x\sqrt{2\ln x+1}}$	$\int \frac{(2\ln x+3)^3}{x} dx$
$\int \frac{dx}{e^x+1}$	$\int \frac{2x dx}{(x^2+9)^4}$	$\int x \cdot \sin \sqrt{1+x^2} dx$
$\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx$	$\int \frac{dx}{x(x^2+1)}$	$\int \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+5} dx$
$\int \frac{1+\ln \sqrt{x}}{x} dx$	$\int x^3 \sqrt{1-x} dx$	$\int \frac{dx}{\sqrt{2x+1}+4}$
$\int \frac{1-x^4}{x(1+x^4)} dx$	$\int \frac{dx}{x(x^6+1)}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2} \cdot \sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}}$
$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}$	$\int \frac{dx}{2x\sqrt{2x+1}}$	$\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{1+x^2}}$

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{2-x}}$$

$$\int x^3(1-x^2)^5 dx$$

$$\int \frac{\sqrt{1+x^6}}{x} dx$$

5.3. Đổi biến hàm lượng giác

Cần nhớ đạo hàm các hàm lượng giác để có thể nhanh chóng nhận dạng hàm cần đổi biến.

$$(\sin x)' = \cos x; (\sin u)' = u' \cos u \quad (\cos x)' = -\sin x; (\cos u)' = -u' \sin u$$

$$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}; (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$1/ \int 2\sqrt{1+4\sin x} \cdot \cos x dx = F$$

Thấy ngay $(\sin x)' = \cos x$.

$$\text{Đặt } u = \sqrt{1+4\sin x} \Rightarrow u^2 = 1+4\sin x \Rightarrow 2udu = 4\cos x dx \Leftrightarrow \cos x dx = \frac{udu}{2}$$

$$F = \int 2u \cdot \frac{udu}{2} = \int u^2 du = \frac{u^3}{3} + C = \frac{(\sqrt{1+4\sin x})^3}{3} + C$$

$$2/ \int \frac{3\cos x}{2+\sin x} dx = F$$

$$\text{Đặt } u = 2 + \sin x \Rightarrow du = \cos x dx$$

$$F = \int \frac{3du}{u} = 3\ln|u| + C = 3\ln|2 + \sin x| + C$$

$$3/ \int \frac{\cos^3 x}{\sin x} dx = F$$

Đặt $u = \sin x \Rightarrow du = \cos x dx$. Chỉ có $\cos x$ nhưng tử số là $\cos^3 x$!

Ta sẽ tách $\cos^3 x = \cos^2 x \cdot \cos x = (1 - \sin^2 x) \cos x$. Ta cần biến đổi $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ do $\cos$ thì không thể rút trực tiếp theo u được.

$$\begin{aligned} F &= \int \frac{(1-\sin^2 x) \cos x dx}{\sin x} = \int \frac{(1-u^2)du}{u} = \int \left(\frac{1}{u} - u\right) du = \ln|u| - \frac{u^2}{2} + C \\ &= \ln|\sin x| - \frac{\sin^2 x}{2} + C \end{aligned}$$

$$\text{*Lưu ý ta có thể đặt } u = \cos x; du = -\sin x dx. \text{ Khi đó } F = \int \frac{\cos^3 x \cdot \sin x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{\cos^3 x \cdot \sin x dx}{1-\cos^2 x}$$

Bạn đọc có thể tự giải nốt. Tuy nhiên cách giải sẽ phức tạp hơn.

**Ta thấy nhìn chung cách đổi biến hàm lượng giác cũng giống như các hàm hữu tỉ hay căn thức tuy nhiên chúng ta cần phải biến đổi các hàm lượng giác cách linh hoạt, do trong lượng giác có nhiều công thức biến đổi. Chúng ta cần nhớ các công thức lượng giác đã học để có thể vận dụng linh hoạt các công thức đó.*

$$4/ \int \frac{e^{\cot x}}{\sin^2 x} dx = F$$

$$\text{Ta thấy } (\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}. \text{ Do vậy ta sẽ đặt } u = \cot x \Rightarrow du = -\frac{1}{\sin^2 x} dx \Leftrightarrow \frac{dx}{\sin^2 x} = -du$$

$$F = \int e^u \cdot (-du) = \int -e^u du = -e^u + C = -e^{\cot x} + C$$

*Các bạn hãy đổi biến $u = e^{\cot x}$ để so sánh hai cách đặt.

$$5/ \int \tan x \, dx = F$$

$$\text{Cách 1: đặt } u = \tan x \Rightarrow du = \frac{1}{\cos^2 x} dx \Leftrightarrow du = (1 + \tan^2 x) dx \Leftrightarrow dx = \frac{du}{1+u^2}$$

$$F = \int u \cdot \frac{du}{1+u^2}; \text{ Đặt } v = 1 + u^2 \Rightarrow dv = 2u du \Rightarrow u du = \frac{dv}{2}$$

$$F = \int \frac{dv}{2v} = \frac{1}{2} \ln|v| + C = \frac{1}{2} \ln|1 + u^2| + C = \frac{1}{2} \ln|1 + \tan^2 x| + C$$

Ở đây ta đã đổi biến 2 lần.

$$\text{Cách 2. } F = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$$

$$\text{Đặt } u = \cos x; du = -\sin x \, dx \Rightarrow \sin x \, dx = -du$$

$$F = \int -\frac{du}{u} = -\ln|u| = -\ln|\cos x| + C$$

Các bạn hãy chứng minh kết quả ở cách 1 giống kết quả cách 2 với lưu ý: tất cả hằng số tự do gộp lại thành một hằng số C duy nhất.

Cách 3: đặt $u = \sin x$. Đây là cách phức tạp hơn, tuy nhiên các bạn hãy làm để rèn luyện khả năng tính, điều này cũng sẽ giúp các bạn làm bài tập được linh hoạt hơn.

*Lưu ý: các bạn có thể sử dụng trực tiếp hệ thống công thức ở phần đầu 4.2.3 để làm cho nhanh.

$$6/ \int \cot(3x + 1) \, dx = F$$

$$\text{Sử dụng công thức phần 4.2.3 ta được: } F = \frac{1}{3} \cdot \ln|\sin(3x + 1)| + C$$

$$7/ \int \sin^3 \sqrt{\cos x} \, dx = F$$

$$\text{Đặt } u = \sqrt{\cos x} \Rightarrow u^2 = \cos x \Rightarrow 2u du = -\sin x \, dx \Leftrightarrow \sin x \, dx = -2u du$$

$$F = \int \sin^2 x \cdot \sqrt{\cos x} \cdot \sin x \, dx = \int (1 - \cos^2 x) \sqrt{\cos x} \sin x \, dx$$

$$= \int (1 - (u^2)^2) \cdot u \cdot (-2u) du = \int -2u^2(1 - u^4) du = \int -2(u^2 - u^6) du = -2 \left(\frac{u^3}{3} - \frac{u^7}{7} \right) + C$$

$$= -2 \left(\frac{(\sqrt{\cos x})^3}{3} - \frac{(\sqrt{\cos x})^7}{7} \right) + C$$

*Hay thử đổi biến $u = \cos x$!

$$8/ \int \frac{\sin^3 x \cos x}{1 + \sin^2 x} dx = F$$

$$\text{Đặt } u = 1 + \sin^2 x \Rightarrow du = 2 \sin x \cos x \, dx \Leftrightarrow \frac{du}{2} = \sin x \cos x \, dx$$

$$F = \int \frac{\sin^2 x \cdot \sin x \cos x \, dx}{1 + \sin^2 x} = \int \frac{(u-1)}{u} \cdot \frac{du}{2} = \int \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{u} \right) du = \frac{1}{2} (u - \ln|u|) + C$$

$$F = \frac{1}{2} (1 + \sin^2 x - \ln|1 + \sin^2 x|) + C$$

Đến đây có thể dừng lại được. Tuy nhiên đôi khi có bài sẽ yêu cầu rút gọn hằng số tự do.

$$F = \frac{1}{2}(\sin^2 x - \ln|1 + \sin^2 x|) + C$$

$$9/ \int \frac{\sin 2x}{1 + \cos^2 x} dx = F$$

$$\text{Đặt } u = 1 + \cos^2 x \Rightarrow du = -2 \sin x \cos x dx = -\sin 2x dx$$

ở đây ta đã dùng công thức nhân đôi để biến đổi.

$$F = \int \frac{-du}{u} = -\ln|u| + C = -\ln|1 + \cos^2 x| + C$$

**Khi làm các bài tập liên quan đến lượng giác không chỉ yêu cầu kỹ năng phân tích thông thường mà cần chúng ta phải thành thạo các công thức lượng giác mới có thể biến đổi. Vì vậy trước tiên các bạn hãy thuộc tất cả các công thức lượng giác, sau đó làm thật nhiều bài tập để luyện kỹ năng biến đổi lượng giác cho thành thạo.*

$$10/ \int \frac{dx}{\sin x \cdot \cos x} = F$$

Ta thấy ngay trên tử “không có gì” cả ngoài dx. Chúng ta cần nhân cả tử và mẫu với hàm còn thiếu.

Đặt $u = \sin x \Rightarrow du = \cos x dx$. Thiếu $\cos x$ nên ta nhân cả tử và mẫu với $\cos x$

$F = \int \frac{\cos x dx}{\sin x \cdot \cos^2 x} = \int \frac{du}{u \cdot (1-u^2)} = \int \frac{du}{u(1-u)(1+u)}$. Đây là dạng sử dụng phương pháp phân tích đã được giới thiệu. Tôi sẽ vẫn làm chi tiết cho bạn nào cần tham khảo.

$$\text{Ta có: } \frac{1}{u(1-u)(1+u)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{1-u} + \frac{C}{1+u} \Rightarrow A(1-u)(1+u) + Bu(1+u) + Cu(1-u) = 1$$

$$\Rightarrow A(1-u^2) + B(u+u^2) + C(u-u^2) = 1 \Leftrightarrow A - Au^2 + Bu + Bu^2 + Cu - Cu^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow (-A + B - C)u^2 + (B + C)u + A = 1. \text{ Đồng nhất hệ số ta được: } \begin{cases} -A + B - C = 0 \\ B + C = 0 \\ A = 1 \end{cases}$$

$$\text{Giải hệ ta được } A = 1; B = \frac{1}{2}; C = -\frac{1}{2}$$

$$F = \int \left(\frac{1}{u} + \frac{1}{2(1-u)} - \frac{1}{2(1+u)} \right) du = \ln|u| - \frac{1}{2} \ln|1-u| - \frac{1}{2} \ln|1+u| + C \text{ (lưu ý hệ số của } u)$$

$$= \ln|u| - \frac{1}{2} \ln|(1-u)(1+u)| + C = \ln|u| - \frac{1}{2} \ln|1-u^2| + C$$

$(= \frac{1}{2} \cdot \ln|u|^2 - \frac{1}{2} \ln|1-u^2| = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{u^2}{1-u^2} \right| + C)$. Các bạn nên tập luyện biến đổi để làm bài cho linh hoạt và đồng thời cũng là để nhớ công thức.

***Bài tập tự luyện**

Tính các nguyên hàm sau:

$$\int \frac{\cos x}{2-3 \sin x} dx$$

$$\int \frac{3 \sin x - 2 \cos x}{2 \cos x + 2 \sin x} dx$$

$$\int \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} dx$$

$$\int \frac{\cot x}{\sin^2 x} dx$$

$$\int \frac{\sin x}{\cos^5 x} dx$$

$$\int \sin^5 x \cdot \cos x dx$$

$$\int \sin^2 x \cos^3 x dx$$

$$\int \sin^4 x \cos x dx$$

$$\int \sin^4 x \cos^5 x dx$$

$$\begin{array}{lll}
\int \cos 3x \tan x \, dx & \int \frac{1}{\sin x} \, dx & \int 2x \cos x^2 \, dx \\
\int \sin 2x \cos 3x \, dx & \int \frac{\cos x}{1 - \cos^2 x} \, dx & \int \tan^3 x \, dx \\
\int \frac{-2 \sin 2x}{3 - \cos^2 x} \, dx & \int \frac{\cos^5 x}{1 - \sin x} \, dx & \int \cos x \cdot \frac{\sin^3 x \, dx}{1 + \sin^2 x} \\
\int \frac{\cos^2 x}{\sin^8 x} \, dx & \int \frac{dx}{\sin x \cdot \cos^3 x} & \int \frac{\cos x + \sin x \cos x}{2 + \sin x} \, dx \\
* \int \frac{2dx}{2 \sin x - \cos x + 1} & \int \frac{dx}{\sin 2x - 2 \sin x} & \int \frac{\sin x \, dx}{\cos x \sqrt{\sin^2 x + 1}} \\
\text{Phân tích tử là đạo hàm mẫu} & \int \frac{\sin x \cdot \cos^3 x}{1 + \cos^2 x} \, dx & \int \cos^5 x \sqrt{\sin x} \, dx
\end{array}$$

5.4. Đổi biến hàm vô tỉ

Đây là một dạng nguyên hàm khó với rất nhiều dạng đổi biến, với mục đích viết tài liệu phục vụ cho việc tự học của học sinh trung bình và khá, tôi chỉ giới thiệu những dạng đổi biến thường xuất hiện nhiều trong các bài tập và đề thi phổ thông.

Dưới đây là một số dấu hiệu hướng dẫn các bạn đổi biến cho phù hợp bài toán.

Dấu hiệu	Cách chọn
$\sqrt{a^2 - x^2}$	Chọn một trong 2 cách đặt: $\begin{cases} x = a \sin t; t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \\ x = a \cos t; t \in [0; \pi] \end{cases}$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	Chọn một trong 2 cách đặt: $\begin{cases} x = \frac{ a }{\sin t}; t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\} \\ x = \frac{ a }{\cos t}; t \in [0; \pi] \setminus \{\frac{\pi}{2}\} \end{cases}$
$\sqrt{x^2 + a^2}$	Chọn một trong hai cách đặt: $\begin{cases} x = a \tan t; t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \\ x = a \cot t; t \in (0; \pi) \end{cases}$
$\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$ hoặc $\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$	$x = a \cdot \cos 2t$
$\sqrt{(x-a)(b-x)}$	$x = a + (b-a) \sin^2 t$
<i>*Lưu ý: tùy thuộc vào vị trí của căn thức mà điều kiện của t có thể bị thay đổi.</i> <i>*Một số dạng căn thức đã được giới thiệu ở mục 5.1</i> <i>*Tất cả các dấu hiệu trên đều đổi biến thành hàm lượng giác, do vậy để làm được dạng này tất yếu các bạn phải học tính nguyên hàm lượng giác đã được giới thiệu.</i>	

$$1/ \int \sqrt{1 - x^2} \, dx = F$$

Chúng ta đã gặp nguyên hàm chứa căn ở mục 5.1, tuy nhiên đối với VD dạng này khi các bạn đổi biến $u = \sqrt{1 - x^2}$ sẽ gặp khó khăn khi giải do không rút được x theo u hoặc rút được nhưng phức tạp, thậm chí không giải được.

Chúng ta cần có cách đổi biến mới như đã giới thiệu ở trên.

Vì khi đổi biến thành hàm lượng giác việc đưa về biến ban đầu là phức tạp nên tôi chỉ đưa về dạng biến đổi đầu tiên. Và thực chất dạng này chỉ phục vụ cho việc tính tích phân xác định nên không cần phải đưa về biến ban đầu. Bạn nào có nhu cầu tìm hiểu cách đưa về biến đầu tiên xin tham khảo thêm ở những tài liệu khác, các bạn có thể tìm trên mạng, có nhiều tài liệu trình bày vấn đề đó.

$$\text{Đặt } x = \sin t; t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]; dx = \cos t dt$$

$$F = \int \sqrt{1 - \sin^2 t} \cdot \cos t dt = \int \sqrt{\cos^2 t} \cos t dt = \int \cos t \cdot \cos t dt = \int \cos^2 t dt = \int \frac{1 + \cos 2t}{2} dt$$

$$*(\text{ở đây } \sqrt{\cos^2 t} = |\cos t|. \text{ Do } t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \text{ nên } \cos t > 0 \Rightarrow |\cos t| = \cos t)$$

$$= \frac{t + \frac{1}{2} \sin 2t}{2} + C = \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} + C$$

*Các bạn hãy đổi biến $x = \cos t$!

$$2 / \int x^2 \sqrt{2 - x^2} dx = F$$

$$F = \int x^2 \sqrt{(\sqrt{2})^2 - x^2} dx.$$

$$\text{Đặt } x = \sqrt{2} \cos t; t \in [0; \pi]; dx = -\sqrt{2} \sin t dt$$

$$F = \int \cos^2 t \sqrt{2 - 2 \cos^2 t} \cdot (-\sqrt{2} \sin t) dt = \int -\sqrt{2} \cos^2 t \cdot \sqrt{2(1 - \cos^2 t)} \cdot \sin t dt$$

$$= \int -2 \cos^2 t \cdot \sin^2 t dt. \text{ Đến đây sẽ có nhiều hướng giải với nguyên hàm hàm lượng giác.}$$

Hướng 1: ta thấy có $\sin t \cos t$ cùng bậc, ta có thể sử dụng công thức nhân đôi của sin sau đó hạ bậc.

$$F = \int -\frac{1}{2} \cdot (2 \sin t \cos t)^2 dt = \int -\frac{1}{2} \sin^2 2t dt = \int -\frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \cos 4t}{2} dt = \int \left(\frac{\cos 4t}{4} - \frac{1}{4} \right) dt$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{\sin 4t}{4} - \frac{1}{4} t + C = \frac{\sin 4t}{16} - \frac{t}{4} + C$$

Hướng 2: ta thấy có $\sin^2 t; \cos^2 t$ nên có thể dùng công thức hạ bậc luôn.

$$F = \int -2 \cdot \frac{1 + \cos 2t}{2} \cdot \frac{1 - \cos 2t}{2} dt = \int -\frac{1 - \cos^2 2t}{2} dt = \int \frac{\frac{1 + \cos 4t}{2} - 1}{2} dt = \int \left(\frac{\cos 4t}{4} - \frac{1}{4} \right) dt$$

$$= \frac{\sin 4t}{16} - \frac{t}{4} + C$$

$$3 / \int \sqrt{4 + x^2} dx = F$$

$$\text{Đặt } x = 2 \tan t; t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right); dx = \frac{2}{\cos^2 t} dt.$$

$$F = \int \sqrt{4(1 + \tan^2 t)} \cdot \frac{2}{\cos^2 t} dt = \int 4 \cdot \sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}} \cdot \frac{1}{\cos^2 t} dt = \int \frac{4}{\cos t \cdot \cos^2 t} dt$$

(ta có thể bỏ dấu GTTĐ do $\cos t > 0 \forall t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$).

Đến đây bài toán trở về tính nguyên hàm lượng giác.

Ta thấy $(\cos t)' = -\sin t$. Nhưng không có $\sin t$ trên tử, nếu nhân cả tử và mẫu với $\sin t$ thì mẫu lại xuất hiện $\sin t$, nhưng không rút $\sin t$ theo $\cos t$ được.

$(\sin t)' = \cos t$. Tử không có $\cos t$, nếu nhân thêm $\cos x$ thì mẫu thành $\cos^2 t \cdot \cos^2 t$, $\cos^2 t$ có thể rút theo $\sin t$ được.

Đặt $u = \sin t$; $du = \cos t dt$

$$F = \int \frac{4 \cos t}{\cos^2 t \cdot \cos^2 t} dt = \int \frac{4 du}{(1-u^2)(1-u^2)} = \int \frac{4 du}{(1-u)^2(1+u)^2}.$$

Phân tích: $\frac{4}{(1-u)^2(1+u)^2} = \frac{A}{(1-u)^2} + \frac{B}{1-u} + \frac{C}{(1+u)^2} + \frac{D}{1+u}$. Ta tìm A, B, C, D

Qui đồng ta được: $4 = A(1+u)^2 + B(1-u)(1+u)^2 + C(1-u)^2 + D(1+u)(1-u)^2$

$$\Rightarrow 4 = A(1+2u+u^2) + B(1-u)(1+2u+u^2) + C(1-2u+u^2) + D(1+u)(1-2u+u^2)$$

$$\Leftrightarrow 4 = A(1+2u+u^2) + B(1+u-u^2-u^3) + C(1-2u+u^2) + D(1-u-u^2+u^3)$$

$$\Leftrightarrow 4 = (A+B+C+D) + (2A+B-2C-D)u + (A-B+C-D)u^2 + (-B+D)u^3$$

$$\text{Đồng nhất hệ số: } \begin{cases} A+B+C+D=4 \\ 2A+B-2C-D=0 \\ A-B+C-D=0 \\ -B+D=0 \end{cases} \text{ Giải hệ ta được: } A=1; B=1; C=1; D=1$$

$$\text{Vậy } F = \int \left(\frac{1}{(1-u)^2} + \frac{1}{1-u} + \frac{1}{(1+u)^2} + \frac{1}{1+u} \right) dx$$

$$= -\frac{1}{-1(1-u)} + \ln|1-u| - \frac{1}{1(1+u)} + \ln|1+u| + C = \frac{1}{1-u} - \frac{1}{1+u} + \ln|(1-u)(1+u)| + C$$

$$= \frac{2u}{1-u^2} + \ln|1-u^2| + C = \frac{2 \sin t}{1-\sin^2 t} + \ln|1-\sin^2 t| + C = \frac{2 \sin t}{\cos^2 t} + 2 \ln|\cos t| + C$$

$$4 / \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} dx = F$$

$$\text{Đặt } x = \frac{1}{\sin t}; t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \setminus \{0\}; dx = -\frac{\cos t}{\sin^2 t} dt$$

$$F = \int \frac{\left(\frac{1}{\sin^2 t}\right)}{\sqrt{\frac{1}{\sin^2 t}-1}} \cdot \left(-\frac{\cos t}{\sin^2 t}\right) dt = \int -\frac{\cos t dt}{\sin^2 t \cdot \sqrt{\frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t}} \cdot \sin^2 t} dt = \int -\frac{\cos t dt}{\sin^2 t \cdot \frac{\cos t}{|\sin t|} \cdot \sin^2 t} dt$$

$$\text{Xét 2 trường hợp: } |\sin t| = \begin{cases} \sin t; & \text{if } t \in (0; \frac{\pi}{2}) \\ -\sin t; & \text{if } t \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right) \end{cases}$$

$$\text{TH1: } |\sin t| = \sin t$$

$$= \int -\frac{dt}{\sin^3 t} = \int -\frac{\sin t dt}{(\sin^2 t)^2}. \text{ Đặt } u = \cos t; du = -\sin t dt$$

$$F = \int \frac{du}{(1-u^2)^2} = \int \frac{du}{(1-u)^2(1+u)^2} \text{ giống như VD3.}$$

$$F = \int \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{(1-u^2)(1+u)^2} du = \frac{1}{4} \left(\frac{2u}{1-u^2} + \ln|1-u^2| \right) + C = \frac{1}{4} \left(\frac{2\cos t}{\sin^2 t} + 2\ln|\sin t| \right) + C$$

TH2: $|\sin x| = -\sin x$. Vì hai trường hợp ngược dấu nhau nên ta có thể suy luận kết quả

$$F = -\frac{1}{4} \left(\frac{2u}{1-u^2} + \ln|1-u^2| \right) + C = -\frac{1}{4} \left(\frac{2\cos x}{\sin^2 x} + 2\ln|\sin x| \right) + C$$

*Các bạn có thể tự phá trị tuyệt đối.

*Hãy đổi biến $x = \frac{1}{\sin 2t}$; $t \in \left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right) \setminus \{0\}$

$$5/ \int \sqrt{(x-1)(2-x)} dx = F$$

$$\text{Đặt } x = 1 + \sin^2 t; dx = 2 \sin t \cdot \cos t dt = \sin 2t dt$$

$$F = \int \sqrt{(1 + \sin^2 t - 1)(2 - 1 - \sin^2 t)} dt = \int \sqrt{\sin^2 t \cdot (1 - \sin^2 t)} dt$$

$$= \int |\sin t \cdot \cos t| dt = \int \frac{1}{2} \cdot |\sin 2t| dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\pm 2} \cos 2t + C = \pm \frac{1}{4} \cos 2t dt$$

$$6/ \int \sqrt{\frac{2-x}{2+x}} dx = F$$

$$\text{Đặt } x = 2 \cos 2t; dx = -4 \sin 2t dt$$

$$F = \int \sqrt{\frac{2-2\cos 2t}{2+2\cos 2t}} dt = \int \sqrt{\frac{1-\cos 2t}{1+\cos 2t}} dt = \int \frac{2\sin^2 t}{2\cos^2 t} dt = \int \tan^2 t dt = \int \left(\frac{1}{\cos^2 t} - 1 \right) dt$$

$$= \tan t - t + C$$

*Bài tập tự luyện:

$$\int \sqrt{4+x^2} dx$$

$$\int x^2 \sqrt{x^2+1} dx$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{1-x^2}}$$

$$\int \sqrt{x^2-3} dx$$

$$\int x^2 \sqrt{x^2-1} dx$$

$$\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx$$

$$\int x \sqrt{\frac{3-x}{3+x}} dx$$

$$\int (2x+1) \sqrt{\frac{x+2}{2-x}} dx$$

$$\int \sqrt{(x-1)(3-x)} dx$$

$$\int x \sqrt{(2-x)(x-3)} dx$$

$$\int \sqrt{-x^2+3x-2} dx$$

$$\int (x+1) \sqrt{6-5x-x^2} dx$$

6. TÌM NGUYÊN HÀM BẰNG PHƯƠNG PHÁP NGUYÊN HÀM TỪNG PHẦN

*Không thể phân tích về nguyên hàm cơ bản, không thể đổi biến thì ta tiếp tục đến với phương án nguyên hàm từng phần.

6.1. Lý thuyết nguyên hàm từng phần

Lý thuyết: Nếu có hai hàm số $u(x); v(x)$ có đạo hàm và liên tục trên K thì:

$$I = \int u(x) \cdot v'(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x) dx$$

Hay $I = \int u dv = uv - \int v du$

Những bài tập vận dụng cách giải này thường là tích của hai loại hàm khác nhau (Mũ, lượng giác, đa thức, logarit).

Ví dụ mô tả phương pháp nguyên hàm từng phần.

Tính $F = \int x \cdot \ln x \, dx$

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = \int x dx = \frac{x^2}{2} \end{cases}$

$$F = uv - \int v du = \ln x \cdot \left(\frac{x^2}{2}\right) - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^2 \ln x}{2} - \int \frac{1}{2} x dx = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{1}{4} x^2 + C$$

*Sơ đồ giải:

$$F = \int x \cdot \ln x \, dx = \int \ln x \cdot x \, dx$$

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = \int x dx = \frac{x^2}{2} \end{cases}$

$$F = \int u dv = uv - \int v du = \ln x \cdot \left(\frac{x^2}{2}\right) - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx$$

*Ở bước sau khi đặt ta đã thực hiện tính vi phân du và tính nguyên hàm của v. Do khi tính nguyên hàm của v chưa phải là bước tính nguyên hàm cuối cùng nên ta tự cho hằng số C bất kì sao cho dễ tính toán nhất. Ở ví dụ minh họa này tôi đã cho C = 0.

*Thông thường việc chọn u và dv theo thứ tự ưu tiên như sau:

Chọn u: logarit → đa thức → lượng giác → hàm mũ.

Chọn dv = phần còn lại sau khi đã chọn u.

6.2. Các ví dụ minh họa

1/ $F = \int x \cdot \sin x \, dx$

Theo thứ tự ưu tiên ta đặt: $\begin{cases} u = x \\ dv = \sin x \, dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \int \sin x \, dx = -\cos x \end{cases}$

$$F = uv - \int v du = -x \cdot \cos x - \int -\cos x \, dx = -x \cdot \cos x + \sin x + C$$

2/ $F = \int (1 - 2x) e^x \, dx$

Đặt $\begin{cases} u = 1 - 2x \\ dv = e^x \, dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -2dx \\ v = \int e^x \, dx = e^x \end{cases}$

$$F = uv - \int v du = (1 - 2x)e^x - \int e^x \cdot (-2) dx = (1 - 2x)e^x + 2e^x + C = e^x(3 - 2x) + C$$

$$3/ F = \int e^x \cos x dx$$

Theo thứ tự ưu tiên, ta đặt $\begin{cases} u = \cos x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -\sin x dx \\ v = \int e^x dx = e^x \end{cases}$

$$F = \cos x \cdot e^x - \int e^x \cdot (-\sin x) dx = e^x \cos x + \int e^x \cdot \sin x dx$$

$$\text{Đặt } F_1 = \int e^x \sin x dx; \quad \text{đặt } \begin{cases} u_1 = \sin x \\ dv_1 = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du_1 = \cos x \\ v_1 = e^x \end{cases}$$

$$F_1 = \sin x \cdot e^x - \int e^x \cos x dx. \text{ ta thấy } \int e^x \cdot \cos x dx = F \text{ do đó } F_1 = e^x \sin x - F$$

$$\text{Vậy: } F = e^x \cos x + e^x \sin x - F \Leftrightarrow 2F = e^x(\cos x + \sin x) \Rightarrow F = \frac{e^x(\sin x + \cos x)}{2} + C$$

*Nguyên hàm như trên gọi là nguyên hàm lặp. Tức là sau một số bước biến đổi thì ta lại trở về nguyên hàm ban đầu cần tính.

$$4/ F = \int (3x + 2) \ln x dx$$

Theo thứ tự ưu tiên, ta đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = (3x + 2) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = \int (3x + 2) dx = \frac{3x^2}{2} + 2x \end{cases}$

$$F = \ln x \cdot \left(\frac{3x^2}{2} + 2x\right) - \int \left(\frac{3x^2}{2} + 2x\right) \cdot \frac{1}{x} dx = \ln x \cdot \left(\frac{3x^2}{2} + 2x\right) - \int \left(\frac{3x}{2} + 2\right) dx$$

$$= \ln x \cdot \left(\frac{3x^2}{2} + 2x\right) - \left(\frac{3x^2}{4} + 2x\right) + C$$

$$5/ F = \int \ln 3x dx$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln 3x \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = \int dx = x \end{cases}$$

$$F = x \cdot \ln 3x - \int x \cdot \frac{dx}{x} = x \cdot \ln 3x - \int dx = x \cdot \ln 3x - x + C$$

$$6/ F = \int x^2 e^{3x} dx$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x^2 \\ dv = e^{3x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2x dx \\ v = \int e^{3x} dx = \frac{e^{3x}}{3} \end{cases}$$

$$F = x^2 \cdot \frac{e^{3x}}{3} - \int \frac{2}{3} x e^{3x} dx. \text{ Đặt } F_1 = \int \frac{2}{3} x e^{3x} dx$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u_1 = \frac{2}{3} x \\ dv = e^{3x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du_1 = \frac{2}{3} dx \\ v = \int e^{3x} dx = \frac{e^{3x}}{3} \end{cases}$$

$$F_1 = \frac{2}{3} x \cdot \frac{e^{3x}}{3} - \int \frac{2}{3} \cdot \frac{e^{3x}}{3} dx = \frac{2}{9} x e^{3x} - \frac{2}{27} e^{3x}$$

$$F = x^2 \cdot \frac{e^{3x}}{3} - \left(\frac{2}{9} x e^{3x} - \frac{2}{27} e^{3x}\right) + C = e^{3x} \left(\frac{x^2}{3} - \frac{2x}{9} + \frac{2}{27}\right) + C$$

*Ở ví dụ này ta đã sử dụng 2 lần phương pháp nguyên hàm từng phần – đúng bằng bậc của x^2

Dưới đây là một số ví dụ dạng khác dùng nguyên hàm từng phần, ở mức độ vận dụng cao hơn.

$$7/ F = \int \cos(\ln x) dx$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \cos(\ln x) \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -\frac{1}{x} \cdot \sin(\ln x) \\ v = x \end{cases}$$

$$F = x \cdot \cos(\ln x) + \int \sin(\ln x) dx = x \cdot \cos(\ln x) + F_1$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u_1 = \sin(\ln x) \\ dv_1 = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du_1 = \frac{1}{x} \cos(\ln x) \\ v_1 = x \end{cases} \quad F_1 = x \cdot \sin(\ln x) - \int \cos(\ln x) dx$$

F

$$F = x \cdot \cos(\ln x) + x \cdot \sin(\ln x) - F \Leftrightarrow 2F = x \cdot \cos(\ln x) + x \cdot \sin(\ln x)$$

$$\Rightarrow F = \frac{x \cdot \cos(\ln x) + x \cdot \sin(\ln x)}{2} + C$$

Đây cũng là một dạng nguyên hàm lặp.

*Đối với những dạng phức tạp, khi tính nguyên hàm từng phần thường đặt phần phức tạp là u và dv là phần đơn giản có thể dễ dàng tìm được nguyên hàm.

$$8*/ F = \int \frac{x(\ln(x+\sqrt{x^2+1}))}{\sqrt{x^2+1}} dx$$

$$F = \int \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \cdot \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \\ dv = \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}} \\ v = \int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}} (1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx \\ v = \sqrt{x^2+1} \end{cases}$$

(các bạn hãy tự tính đạo hàm của u và nguyên hàm (1))

$$F = \sqrt{x^2 + 1} \cdot \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) - \int dx = \sqrt{x^2 + 1} \cdot \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) - x + C$$

$$9/ F = \int x \cdot \sin^2 x dx$$

$$\text{Ta hạ bậc sin trước. } F = \int x \cdot \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \int \left(\frac{x}{2} - \frac{x \cdot \cos 2x}{2} \right) dx = \frac{x^2}{4} - \int \frac{x \cdot \cos 2x}{2} dx$$

$$\text{Tính } F_1 = \int \frac{x \cdot \cos 2x}{2} dx. \text{ Đặt } \begin{cases} u = \frac{x}{2} \\ dv = \cos 2x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{2} \\ v = \int \cos 2x dx = \frac{1}{2} \sin 2x \end{cases}$$

$$F_1 = \frac{x}{2} \cdot \frac{\sin 2x}{2} - \int \frac{1}{2} \sin 2x \cdot \frac{dx}{2} = \frac{x \cdot \sin 2x}{4} + \frac{1}{8} \cos 2x$$

$$F = \frac{x^2}{4} - \left(\frac{x \cdot \sin 2x}{4} + \frac{1}{8} \cos 2x \right) + C$$

$$10/ F = \int (x^2 - x + 1) \sin x dx$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x^2 - x + 1 \\ dv = \sin x \, dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = (2x - 1)dx \\ v = \int \sin x \, dx = -\cos x \end{cases}$$

$$F = -(x^2 - x + 1) \cos x + \int (2x - 1) \cos x \, dx$$

$$\text{Đặt } F_1 = \int (2x - 1) \cos x \, dx. \text{ Đặt } \begin{cases} u_1 = 2x - 1 \\ dv = \cos x \, dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du_1 = 2dx \\ v = \int \cos x \, dx = \sin x \end{cases}$$

$$F_1 = (2x - 1) \sin x - \int 2 \sin x \, dx = (2x - 1) \sin x + 2 \cos x$$

$$F = -(x^2 - x + 1) \cos x + (2x - 1) \sin x + 2 \cos x + C$$

$$= \cos x \cdot (-x^2 + x + 1) + (2x - 1) \sin x + C$$

*Bài tập tự luyện:

$\int x e^{2x} dx$	$\int (x^2 + 2) e^x dx$	$\int x e^{-x} dx$
$\int x \cdot \cos 2x \, dx$	$\int \ln^2 x \, dx$	$\int (x - 1) \sin x \, dx$
$\int (x^2 + x + 1) \cos x \, dx$	$\int x \cdot \sin x \cdot \cos x \, dx$	$\int (x^2 + 1) \sin 2x \, dx$
$\int x \cdot \sin \sqrt{x} \, dx$	$\int \frac{\ln^2 x}{x^2} dx$	$\int (x^2 + 10) e^{2x+1} dx$
$\int e^{2x} \cos x \, dx$	$\int e^{-2x} \sin 2x \, dx$	$\int \frac{\ln(\sin x)}{\sin^2 x} dx$
$\int \frac{x}{\cos^2 x} dx$	$\int \frac{x^2}{\sin^2 x} dx$	$\int \frac{x+1}{\sin^2 2x} dx$

7. GIỚI THIỆU MỘT SỐ BÀI TẬP ĐỊNH DẠNG TRẮC NGHIỆM

*Chắc chắn đề thi sẽ càng ngày càng hạn chế việc chúng ta có thể tính toán trực tiếp bằng Casio, hãy trang bị kiến thức cho mình để làm bài cho tốt.

*Hầu hết học sinh trung bình không thể nhớ được các công thức tính nhanh, cách tính nhanh nhất là hãy làm thật nhiều bài tập để thành thạo các dạng bài tập!

Có ba dạng hỏi trắc nghiệm chính về nguyên hàm:

Dạng 1: Các câu hỏi lý thuyết

Dạng 2: Tìm nguyên hàm cụ thể

Dạng 3: Tìm một nguyên hàm riêng, tính giá trị của nguyên hàm tìm được

Dù có là dạng nào thì điều quan trọng nhất và đầu tiên là phải tìm được nguyên hàm và hiểu về cách tìm đó.

Các ví dụ minh họa dưới đây đều được trích trong các đề thi thử, đề minh họa, đề thi chính thức của bộ

7.1. Các câu hỏi lý thuyết

Để làm tốt câu hỏi dạng này dĩ nhiên các bạn cần phải nắm rõ kiến thức lý thuyết.

+, Định nghĩa nguyên hàm: cho hàm số f xác định trên K . Hàm số F được gọi là **nguyên hàm** của f trên K nếu $F'(x) = f(x)$ với mọi x thuộc K .

+, Nếu hàm f có một nguyên hàm là $F(x)$ trên K thì hàm $F(x) + C$ cũng là một nguyên hàm của f trên K .

+, $(\int f(x) dx)' = f(x)$; $\int f'(x) dx = f(x) + C$

$$\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx,$$

$$\text{Với mọi số thực } k \neq 0, \int kf(x) dx = k \int f(x) dx$$

$$+, \text{ Nếu } \int f(x) dx = F(x) + C \text{ thì } \int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C, a \neq 0$$

+, Nguyên hàm bằng cách đổi biến: cho hàm $u(x)$ có đạo hàm riêng liên tục trên K và $f(u)$ liên tục sao cho $f(u(x))$ xác định trên K .

Khi đó nếu F là một nguyên hàm của f , tức là $\int f(u) du = F(u) + C$ thì

$$\int f[u(x)]u'(x) dx = F[u(x)] + C$$

+ Nguyên hàm từng phần: nếu u, v là hai hàm có đạo hàm liên tục trên K thì

$$\int u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x) dx$$

Hay viết gọn là: $\int u dv = uv - \int v du$

Câu 1. Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ là hai hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$, có $F(x), G(x)$ lần lượt là một nguyên hàm của $f(x), g(x)$. Xét các mệnh đề sau:

(i): $F(x)+G(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)+g(x)$

(ii): $k.F(x)$ là một nguyên hàm của $kf(x)$, $k \in \mathbb{R}$

(iii): $F(x).G(x)$ là một nguyên hàm của $f(x).g(x)$

Những mệnh đề nào đúng?

A. (i) và (ii)

B. (i), (ii), (iii)

C. (ii)

D. (i)

Giải

(i) là một mệnh đề đúng theo tính chất của nguyên hàm.

(ii) là một mệnh đề sai, mệnh đề đúng thì phải là $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

(iii) là một mệnh đề sai, không có tính chất nguyên hàm của một tích hay thương hai hàm số.

Do vậy đáp án đúng là D

Câu 2. Cho $\int f(x) dx = F(x) + C$. Khi đó với $a \neq 0$, ta có $\int f(ax + b) dx$ bằng:

A. $F(ax+b)+C$

B. $aF(ax + b) + C$

C. $\frac{1}{a+b} F(ax + b) + C$

D. $\frac{1}{a} F(ax + b) + C$

Giải

Đây là câu hỏi về một định lý quan trọng đã trình bày rõ ràng trong tài liệu và SGK.

Đáp án đúng là D

Câu 3. Chọn khẳng định sai?

A. Nếu $f(x), g(x)$ là các hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thì $\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$

B. Nếu $F(x)$ và $G(x)$ đều là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ thì $F(x) - G(x) = C$, với C là hằng số

C. Nếu các hàm số $u(x), v(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thì

$$\int u(x)v'(x)dx + \int v(x)u'(x)dx = u(x)v(x)$$

D. $F(x) = x^2$ là một nguyên hàm của $f(x) = 2x$

Giải

B. đây là khẳng định đúng. Hai nguyên hàm riêng của cùng một hàm số trừ cho nhau thực chất là hai hằng số trừ cho nhau nên kết quả là một hằng số.

C. đây là khẳng định sai. Theo công thức nguyên hàm từng phần ta có:

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx$$

ở đây khi chuyển về nguyên hàm sẽ không tương đương do còn hằng số C khi ta tính nguyên hàm.

Viết đúng phải là: $\int u(x)v'(x)dx + \int v(x)u'(x)dx = u(x)v(x) + C$, khi $C \neq 0$ công thức đưa ra sẽ không đúng.

D. đúng. $\int 2xdx = 2 \cdot \frac{x^2}{2} + C = x^2 + C$. Do đó $F(x) = x^2$ là một nguyên hàm riêng.

Câu 4. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào là **sai**?

A. $\int (f_1(x) + f_2(x))dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$

B. $\int k \cdot f(x)dx = k \int f(x)dx, k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

C. $\int [f(x)g(x)]dx = \int f(x)dx \cdot \int g(x)dx$

D. $(\int f(x)dx)' = f(x)$

Giải

Để thấy các công thức A, B, D là đúng. Đã được trình bày ở phần lý thuyết.

C. Sai. Không có tính chất nguyên hàm của một tích như vậy.

Câu 5. Mệnh đề nào dưới đây sai?

A. $\int f'(x)dx = f(x) + C$ với mọi hàm $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$

B. $\int k \cdot f(x)dx = k \int f(x)dx, k \in \mathbb{R}$, với mọi $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$

C. $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$ với mọi $f(x), g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$

D. $\int \int (f(x) - g(x))dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$ với mọi $f(x), g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$

Giải

Chọn B. K phải khác 0 chứ không phải mọi k thuộc tập số thực.

Câu 6. Tìm khẳng định sai?

A. $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

B. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, a < c < b$

C. $\int [f(x)g(x)]dx = \int f(x)dx \cdot \int g(x)dx$

D. $\int f'(x)dx = f(x) + C$

Giải

Chọn C. (xem câu 4)

Câu 7. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

A. Nếu $F(x), G(x)$ là hai nguyên hàm của hàm số $f(x)$ thì $F(x) + G(x) = C$, với C là hằng số

B. Mọi hàm số liên tục trên K đều có nguyên hàm trên K

C. Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ thì $\int f(x)dx = F(x) + C$, với C là hằng số

D. Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ thì $F(x) + 1$ cũng là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$

Giải

A. Sai. Chỉ có hiệu hai nguyên hàm riêng bị triệt tiêu ẩn chứ tổng không bị tiêu ẩn.

Câu 8. Cho hai hàm số $y = f(x); y = g(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Phát biểu nào sau đây là đúng?

- A. Nếu $\int f(x)dx = \int g(x)dx$ thì $f(x) = g(x), \forall x \in \mathbb{R}$
 B. Nếu $f(x) = g(x) + 2018, \forall x \in \mathbb{R}$ thì $\int f'(x)dx = \int g'(x)dx$
 C. Nếu $\int f(x)dx = \int g(x)dx$ thì $f(x) \neq g(x), \forall x \in \mathbb{R}$
 D. Nếu $\int f'(x)dx = \int g'(x)dx$ thì $f(x) = g(x), \forall x \in \mathbb{R}$

Giải

A. Đúng

B. Sai.

Ta có $f(x) = g(x) + 2018 \Rightarrow f'(x) = g'(x)$

$\int f'(x)dx = f(x) + C_1; \int g'(x)dx = g(x) + C_2$. Khi $C_1 \neq C_2$ thì $\int f'(x)dx \neq \int g'(x)dx$

C. Sai

D. Sai (xem chứng minh ở B)

Câu 9. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên K . Ta nói $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ trên K nếu như:

- A. $F(x) = f'(x) + C$ B. $F'(x) = f(x)$ C. $F'(x) = f(x) + C$ D. $F(x) = f'(x)$

Giải

Theo định nghĩa nguyên hàm ta có: $\int f(x)dx = F(x) \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$

Chọn đáp án B.

Câu 10. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm $f(x)$. Tìm $I = \int [3f(x) + 1] dx$

- A. $I = 3F(x) + C$ B. $I = 3xF(x) + C$ C. $I = 3xF(x) + x + C$ D. $I = 3F(x) + x + C$

Giải

$I = \int [3f(x) + 1] dx = \int 3f(x)dx + \int dx = 3 \int f(x) dx + x + C = 3F(x) + x + C$

Chọn đáp án D

Câu 11. Cho $F(x)$ và $G(x)$ là các nguyên hàm của $f(x)$ trên khoảng $(a; b)$. Xét các mệnh đề sau:

- (i) $F(x) = G(x) + C$ (ii) $G(x) = F(x) + C$

Với C là một hằng số thực. Chọn khẳng định đúng:

- A. (i) đúng, (ii) sai B. (i) sai, (ii) đúng C. Cả (i), (ii) đều đúng D. Cả (i), (ii) đều sai

Giải.

Các nguyên hàm của cùng một hàm số $f(x)$ chỉ khác nhau phần hệ số tự do (hằng số). Do vậy các khẳng định (i), (ii) đều đúng.

Chọn đáp án C

7.2. Tìm nguyên hàm cụ thể

*Dạng này các bạn chỉ cần vận dụng cách giải tự luận để đưa ra phương án chính xác.

Có 2 cách xác định phương án chính xác:

Cách 1: tính trực tiếp nguyên hàm bằng những phương pháp, công thức đã học

Cách 2: tính gián tiếp thông qua tính đạo hàm các phương án dựa theo định nghĩa nguyên hàm:

$$\int f(x)dx = F(x) + C \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$$

Mỗi phương án sẽ cho một hàm $F(x)$, ta sẽ tính đạo hàm ở mỗi phương án để tìm phương án chính xác. Nên chọn phương án dễ tính đạo hàm nhất để kiểm tra trước. Đây cũng là nguyên lý để ta sử dụng máy tính xác định phương án chính xác.

*Ta cũng có thể vận dụng tính tích phân bằng máy tính để tìm phương án chính xác. Tôi không đưa ra cách giải bằng máy tính trong tài liệu này. Xin các bạn truy cập kênh youtube của tôi tại địa chỉ: [youtube.com/c/TonLai](https://www.youtube.com/c/TonLai) để xem hướng dẫn chi tiết cách giải bằng máy tính. Tuy nhiên theo hướng ra đề mới thì việc vận dụng máy tính trực tiếp tìm nguyên hàm đã bị hạn chế rất nhiều, rất ít câu có thể

làm trực tiếp bằng máy tính. Hãy trang bị cho mình một kiến thức tự luận thật tốt để không phụ thuộc máy tính quá nhiều.

Tôi chỉ xin đưa ra những ví dụ cần phải trình bày, những ví dụ mức độ thấp tôi xin không đưa ra mà các bạn sẽ tự làm trong các tài liệu khác, các đề thi thử.

Câu 1. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{5x-2}$

- A. $5 \ln|5x-2| + C$ B. $\frac{1}{5} \ln|5x-2| + C$ C. $\ln|5x-2| + C$ D. $-\frac{1}{2} \ln|5x-2| + C$

Giải

$$\int \frac{1}{5x-2} dx = \frac{1}{5} \ln|5x-2| + C. \text{ Chọn B}$$

Câu 2. Cho $F(x) = (x-1)e^x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)e^{2x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x)e^{2x}$

- A. $\int f'(x)e^{2x} dx = (x-2)e^x + C$ B. $\int f'(x)e^{2x} dx = \frac{2-x}{2}e^x + C$
C. $\int f'(x)e^{2x} dx = (2-x)e^x + C$ D. $\int f'(x)e^{2x} dx = (4-2x)e^x + C$

Giải

$$\text{Xét } F = \int f(x)e^{2x} dx = (x-1)e^x + C$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = f(x) \\ dv = e^{2x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = \frac{e^{2x}}{2} \end{cases}$$

$$F = f(x) \cdot \frac{e^{2x}}{2} - \int \frac{e^{2x}}{2} f'(x) dx = (x-1)e^x + C \Rightarrow \frac{f(x)e^{2x}}{2} - \frac{\int f'(x)e^{2x} dx}{2} = (x-1)e^x + C$$

$$\Leftrightarrow \int f'(x)e^{2x} dx = f(x)e^{2x} - 2(x-1)e^x + C \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác: } F(x) = \int f(x)e^{2x} dx \Rightarrow f(x)e^{2x} = F'(x) = [(x-1)e^x]' = e^x + (x-1)e^x = xe^x$$

$$(1) \Leftrightarrow \int f'(x)e^{2x} dx = xe^x - 2(x-1)e^x + C = (2-x)e^x + C.$$

Chọn đáp án C

*cần lưu ý rằng C là hằng số nên để đơn giản khi tính toán luôn để hệ số C là 1

Câu 3. Cho hàm số $F(x) = \frac{1}{2x^2}$ là một nguyên hàm của hàm số $\frac{f(x)}{x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x) \ln x$.

- A. $\int f'(x) \ln x dx = -\left(\frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{2x^2}\right) + C$ B. $\int f'(x) \ln x dx = \frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{x^2} + C$
C. $\int f'(x) \ln x dx = -\left(\frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{x^2}\right) + C$ D. $\int f'(x) \ln x dx = \frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{2x^2} + C$

Các bạn hãy áp dụng cách làm câu 2 để tìm.

Đáp án: A

Câu 4. Cho hàm số $F(x) = -\frac{1}{3x^3}$ là một nguyên hàm của hàm số $\frac{f(x)}{x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x) \ln x$.

- A. $\int f'(x) \ln x dx = \frac{\ln x}{x^3} + \frac{1}{5x^5} + C$ B. $\int f'(x) \ln x dx = \frac{\ln x}{x^3} - \frac{1}{5x^5} + C$
C. $\int f'(x) \ln x dx = \frac{\ln x}{x^3} + \frac{1}{3x^3} + C$ D. $\int f'(x) \ln x dx = -\frac{\ln x}{x^3} + \frac{1}{3x^3} + C$

Đáp án: B

Câu 5. Xét $I = \int x^3(4x^4 - 3)^5 dx$. Bằng cách đặt $u = 4x^4 - 3$, khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $I = \frac{1}{4} \int u^5 du$ B. $I = \frac{1}{12} \int u^5 du$ C. $I = \frac{1}{16} \int u^5 du$ D. $I = \int u^5 du$

Giải

$$\text{Đặt } u = 4x^4 - 3; du = 16x^3 dx \Rightarrow x^3 dx = \frac{du}{16}$$

$$I = \int (4x^4 - 3)^5 x^3 dx = \int u^5 \cdot \frac{du}{16} = \frac{1}{16} \int u^5 du$$

Đáp án C

*Đây là câu hỏi chỉ hỏi kết quả sau đổi biến, chúng ta cần đọc kỹ đề bài tránh làm “thừa” không cần thiết.

Câu 6. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = e^x(1 - 3e^{-2x})$

A. $F(x) = e^x - 3e^{-3x} + C$

B. $F(x) = e^x + 3e^{-x} + C$

C. $F(x) = e^x - 3x^{-x} + C$

D. $F(x) = e^x + 3e^{-2x} + C$

Giải

Đây là dạng đơn thuần hàm mũ, ta chỉ cần nhân khai triển để tính.

$$F(x) = \int (e^x - 3e^x \cdot e^{-2x}) dx = \int (e^x - 3e^{-x}) dx = e^x + 3e^{-x} + C$$

Đáp án B

Câu 7. Gọi $F(x) = (ax^3 + bx^2 + cx + d)e^x$ là một nguyên hàm của hàm số

$$f(x) = (2x^3 + 9x^2 - 2x + 5)e^x$$

Tính $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$.

A. 244

B. 247

C. 245

D. 246

Giải

Nhắc lại: $F'(x) = f(x)$

$$\Rightarrow (3ax^2 + 2bx + c)e^x + (ax^3 + bx^2 + cx + d)e^x = (2x^3 + 9x^2 - 2x + 5)e^x$$

$$\Leftrightarrow (ax^3 + (3a + b)x^2 + (2b + c)x + (c + d))e^x = (2x^3 + 9x^2 - 2x + 5)e^x$$

$$\text{Đồng nhất hệ số: } \begin{cases} a = 2 \\ 3a + b = 9 \\ 2b + c = -2 \\ c + d = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \\ c = -8 \\ d = 13 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2^2 + 3^2 + (-8)^2 + 13^2 = 246$$

Đáp án D

Câu 8. Xác định các hệ số a, b, c để hàm số $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$ là một nguyên hàm của

$$f(x) = (x^2 - 3x + 2)e^{-x}$$

A. $a=-1; b=1; c=1$

B. $a=-1; b=-5; c=-7$

C. $a=1; b=-3; c=2$

D. $a=1; b=-1; c=1$

Đáp án: A

Câu 9. Họ các nguyên hàm của $f(x) = x \cdot \ln x$ là:

A. $\frac{x^2}{2} \ln x + \frac{1}{4}x^2 + C$

B. $x^2 \ln x - \frac{1}{2}x^2 + C$

C. $\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$

D. $x \cdot \ln x + \frac{1}{2}x + C$

Giải

$$F = \int x \cdot \ln x \, dx. \text{ Đặt } \begin{cases} u = \ln x \\ dv = x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = \frac{x^2}{2} \end{cases}$$

$$F = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + C = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$$

Đáp án C

Câu 10. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{2}(x + \sin \frac{x}{2})$.

A. $\int f(x) dx = \frac{1}{4}x^2 - \cos \frac{x}{2} + C$

B. $\int f(x) dx = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4} \cos \frac{x}{2} + C$

C. $\int f(x) dx = x^2 + \frac{1}{2} \cos \frac{x}{2} + C$

D. $\int f(x) dx = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2} \cos \frac{x}{2} + C$

Giải

$$\int f(x) dx = \int \frac{1}{2} \left(x + \sin \frac{x}{2} \right) dx = \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{\frac{1}{2}} \cos \frac{x}{2} \right) + C = \frac{x^2}{4} - \cos \frac{x}{2} + C$$

Đáp án A

Câu 11. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = xe^x$

- A. $(x+1)e^x + C$ B. $(x-1)e^x + C$ C. $xe^x + C$ D. $-xe^x + C$

Giải

Tôi sẽ trình bày bằng cách xác định nguyên hàm bằng cách tính đạo hàm từ những phương án cho sẵn.

Ta có thể loại ngay phương án C và D

Kiểm tra phương án A ta có: $[(x+1)e^x + C]' = e^x + (x+1)e^x = (2+x)e^x \neq f(x)$ vậy A sai.

Đến đây ta có thể chọn ngay phương án B.

Ta có thể kiểm tra lại: $[(x-1)e^x + C]' = e^x + (x-1)e^x = xe^x = f(x)$

Câu 12. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}(2\sqrt{x}+1)^2}, x > 0$ là:

- A. $-\frac{1}{2(2\sqrt{x}+1)} + C$ B. $\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1} + C$ C. $\frac{1}{2\sqrt{x}+1} + C$ D. $-\frac{1}{2\sqrt{x}+1} + C$

Giải

$$F = \int f(x)dx = \int \frac{1}{\sqrt{x}(2\sqrt{x}+1)^2} dx \text{ đặt } u = 2\sqrt{x} + 1, \sqrt{x} = \frac{u-1}{2} \Rightarrow x = \frac{(u-1)^2}{4} \Rightarrow dx = \frac{u-1}{2} du$$

$$F = \int \frac{1}{\frac{u-1}{2} \cdot u^2} \cdot \frac{u-1}{2} du = \int \frac{1}{u^2} du = -\frac{1}{u} + C = -\frac{1}{2\sqrt{x}+1} + C$$

Đáp án D

*Ở đây do tính đạo hàm các phương án là phức tạp nên tôi tìm trực tiếp bằng phương pháp đổi biến.

Câu 13. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x+1}}$.

- A. $F(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$ B. $F(x) = \sqrt{x+1}$ C. $F(x) = 4\sqrt{x+1}$ D. $F(x) = 2\sqrt{x+1}$

Giải

$$F = \int f(x)dx = \int \frac{2}{\sqrt{x+1}} dx$$

$$\text{Đặt } u = \sqrt{x+1} \Rightarrow x = u^2 - 1; dx = 2udu$$

$$F = \int \frac{2}{u} \cdot 2udu = \int 4du = 4u + C = 4\sqrt{x+1} + C$$

Đáp án C

Câu 14. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos^2 x$.

- A. $\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C$ B. $\frac{x}{2} - \frac{\cos 2x}{4} + C$ C. $\frac{x}{2} + \frac{\cos 2x}{4} + C$ D. $\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C$

Giải

$$F = \int \cos^2 x dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2x) dx = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2} \sin 2x \right) + C = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C$$

Đáp án D

Câu 15. Biết $F(x) = (ax^2 + bx + C)e^x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2 e^x$. Tính a, b, c.

- A. a=1; b=2; c=-2 B. a=2; b=1; c=-2 C. a=-2; b=2; c=1 D. a=1; b=-2; c=2

Giải (xem câu 7)

Đáp án D

Câu 16. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{2x}}$.

- A. $\int f(x)dx = \frac{3}{2} \sqrt[3]{4x^2} + C$ B. $\int f(x)dx = \frac{3}{4} \sqrt[3]{4x^2} + C$
 C. $\int f(x)dx = \frac{3}{4 \sqrt[3]{16x^4}} + C$ D. $\int f(x)dx = -\frac{3}{8 \sqrt[3]{16x^4}} + C$

Giải

$$\begin{aligned} \int f(x)dx &= \int \frac{1}{\sqrt[3]{2x}} dx = \int \frac{1}{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{x}} dx = \int \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \cdot x^{-\frac{1}{3}} dx = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} + C = \frac{3}{2 \sqrt[3]{2}} \cdot x^{\frac{2}{3}} + C \\ &= \frac{3}{2 \sqrt[3]{2}} \cdot \sqrt[3]{x^2} + C = \frac{3}{4} \sqrt[3]{4x^2} + C \end{aligned}$$

Đáp án B

Câu 17. Giả sử một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^3}} + \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}$ có dạng $A\sqrt{1-x^3} + \frac{B}{1+\sqrt{x}}$. Hãy tính $A+B$.

A. $A+B=-2$

B. $A+B=\frac{8}{3}$

C. $A+B=2$

D. $A+B=-\frac{8}{3}$

Giải

Cách 1: tính trực tiếp $\int f(x)dx$ tìm A, B rồi tính $A+B$

Xin các bạn tự giải bằng phương pháp đổi biến.

Cách 2: giải bằng cách tính đạo hàm: $F(x)'=f(x)$

$$\left[A\sqrt{1-x^3} + \frac{B}{1+\sqrt{x}}\right]' = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^3}} + \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2} \Leftrightarrow A \cdot \frac{-3x^2}{2\sqrt{1-x^3}} + \frac{-B \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{(1+\sqrt{x})^2} = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^3}} + \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{3A}{2} \cdot \frac{x^2}{\sqrt{1-x^3}} + \frac{-B}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2} = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^3}} + \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}.$$

Đồng nguyên nhất hệ số: $\begin{cases} -\frac{3A}{2} = 1 \\ -\frac{B}{2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\frac{2}{3} \\ B = -2 \end{cases}$

$$A+B = -\frac{2}{3} + (-2) = -\frac{8}{3}$$

Đáp án D

*Tuy từng bài toán mà các bạn chọn cách giải cho phù hợp. Với bài này ta thấy cách 2 sẽ nhanh hơn.

Câu 18. Phát biểu nào sau đây đúng?

A. $\int \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2}\right)^2 dx = x + \cos x + C$

B. $\int \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2}\right)^2 dx = x - \cos x + C$

C. $\int \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2}\right)^2 dx = x + 2 \cos x + C$

D. $\int \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{3} \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2}\right)^3 + C$

Giải

Thực chất là chúng ta tính nguyên hàm $F = \int \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2}\right)^2 dx$

$$F = \int \left(\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} - 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}\right) dx = \int (1 - \sin x) dx = x + \cos x + C$$

Đáp án A

Câu 19. Tính $\int \ln x dx$

Cách 1: tính trực tiếp bằng nguyên hàm từng phần

Cách 2: tính đạo hàm $F(x)$ từ các phương án.

$$F'_A = (x \cdot \ln x)' = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1 \neq f(x)$$

$$F'_C = (x \cdot \ln x + x)' = \ln x + 1 + 1 = \ln x + 2 \neq f(x)$$

$$F'_D = (x \cdot \ln x - x)' = \ln x + 1 - 1 = \ln x = f(x)$$

Đáp án D

Câu 20. Tìm nguyên hàm $\int \frac{2x^2+1}{\sqrt{x^2+1}} dx$

A. $\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + C$

B. $x\sqrt{1+x^2} + C$

C. $x^2\sqrt{1+x^2} + C$

D. $\frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2} + C$

Giải

Cách 1: tìm trực tiếp bằng đổi biến $x = \tan t$

Cách 2: tính đạo hàm $F'(x)$ ở các phương án

Chọn phương án dễ tính trước.

$$F'_B = (x\sqrt{x^2+1})' = \sqrt{x^2+1} + x \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{x^2+1+x^2}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{2x^2+1}{\sqrt{x^2+1}} = f(x)$$

Đáp án B

Câu 21. Nguyên hàm $\int \frac{(x-2)^{10}}{(x+1)^{12}} dx$ bằng?

- A. $-\frac{1}{11} \left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{11} + C$ B. $\frac{1}{3} \left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{11} + C$ C. $\frac{1}{11} \left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{11} + C$ D. $\frac{1}{33} \left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{11} + C$

Giải

Nhắc lại: $\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$

$$F'_A = \left[-\frac{1}{11} \left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{11}\right]' = -\frac{1}{11} \cdot 11 \cdot \left(\frac{x-2}{x+1}\right)' \left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{10} = -\frac{3}{(x+1)^2} \cdot \left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{10} = -\frac{3(x-2)^{10}}{(x+1)^{12}} \neq f(x)$$

Loại A, từ đó loại luôn C

$$F'_B = \left[\frac{1}{3} \left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{11}\right]' = \frac{1}{3} \cdot 11 \cdot 3 \cdot \frac{(x-2)^{10}}{(x+1)^{12}} \neq f(x)$$

Đáp án D

$$F'_D = \left[\frac{1}{33} \left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{11}\right]' = \frac{1}{33} \cdot 11 \cdot 3 \cdot \frac{(x-2)^{10}}{(x+1)^{12}} = \frac{(x-2)^{10}}{(x+1)^{12}} = f(x)$$

Câu 22. Nguyên hàm $\int \frac{\sin 4x}{\sin x + \cos x} dx$ bằng?

- A. $-\frac{\sqrt{2}}{3} \cos\left(3x + \frac{3\pi}{4}\right) - \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + C$ B. $-\frac{\sqrt{2}}{3} \sin\left(3x + \frac{3\pi}{4}\right) - \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + C$
 C. $-\frac{\sqrt{2}}{3} \sin\left(3x + \frac{3\pi}{4}\right) + \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + C$ D. $-\frac{\sqrt{2}}{3} \sin\left(3x + \frac{3\pi}{4}\right) + \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + C$

Giải

Câu này tính đạo hàm các phương án là đơn giản nhưng cần kỹ thuật biến đổi đưa về dạng $f(x)$, nhìn chung cách này không khả quan cho các bạn học cơ bản.

Ta sẽ tìm trực tiếp.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \frac{\sin 4x}{\sin x + \cos x} &= \frac{2 \sin 2x \cos 2x}{\sin x + \cos x} = \frac{2 \sin 2x (\cos^2 x - \sin^2 x)}{\sin x + \cos x} = \frac{2 \sin 2x (\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)}{\sin x + \cos x} \\ &= 2 \sin 2x (\cos x - \sin x) = 2 \sin 2x \cdot \cos x - 2 \sin 2x \sin x \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2} (\sin 3x + \sin x) - 2 \cdot \frac{1}{2} (\cos 3x - \cos x) = \sin 3x + \sin x + \cos 3x - \cos x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F &= \int \frac{\sin 4x}{\sin x + \cos x} dx = \int (\sin 3x + \cos 3x + \sin x - \cos x) dx \\ &= -\frac{1}{3} \cos 3x + \frac{1}{3} \sin 3x - \cos x - \sin x + C = \frac{1}{3} (\sin 3x - \cos 3x) - (\sin x + \cos x) + C \\ &= -\frac{1}{3} \cdot \sqrt{2} \cdot \sin\left(3x - \frac{3\pi}{4}\right) - \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + C \end{aligned}$$

Đáp án B

*Cái khó ở bài toán này là chúng ta phải có kỹ năng phân tích lượng giác.

Câu 23. Nguyên hàm $\int \frac{dx}{2 \tan x + 1}$ bằng ?

- A. $\frac{x}{5} + \frac{2}{5} \ln|2 \sin x + \cos x| + C$ B. $\frac{2x}{5} - \frac{1}{5} \ln|2 \sin x + \cos x| + C$
 C. $\frac{x}{5} - \frac{1}{5} \ln|2 \sin x + \cos x| + C$ D. $\frac{x}{5} + \frac{1}{5} \ln|2 \sin x + \cos x| + C$

Giải

$$F \int \frac{dx}{2 \frac{\sin x}{\cos x} + 1} = \int \frac{\cos x}{2 \sin x + \cos x} dx$$

Cách 1 : tính trực tiếp

Cách 2 : tính $F'(x)$

$$F'_A = \left(\frac{x}{5} + \frac{2}{5} \ln|2 \sin x + \cos x|\right)' = \frac{1}{5} + \frac{2}{5} \cdot \frac{2 \cos x - \sin x}{2 \sin x + \cos x} = \frac{2 \sin x + \cos x + 4 \cos x - 2 \sin x}{5(2 \sin x + \cos x)} = \frac{\cos x}{2 \sin x + \cos x} = f(x)$$

Đáp án A

Câu 24. Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = (x+1)e^x$ và $\int f(x)dx = (ax+b)e^x + C$. Khi đó :

- A. $a+b=0$ B. $a+b=3$ C. $a+b=2$ D. $a+b=1$

Giải

$$F = \int f(x)dx = (ax + b)e^x + C$$

*tìm f(x)

$$\text{Ta có: } f(x) + C = \int f'(x)dx = \int (x + 1)e^x = (ux + v)e^x + C$$

$$\Rightarrow [(ux + v)e^x]' = (ux + u + v)e^x = (x + 1)e^x$$

$$\begin{cases} u = 1 \\ u + v = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = 1 \\ v = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) + C = xe^x. \text{ Cho } C=0 \Rightarrow f(x) = xe^x$$

*tính $\int f(x)dx$

$$\int f(x)dx = \int xe^x dx = (ax + b)e^x$$

$$[(ax + b)e^x]' = xe^x \Leftrightarrow (ax + a + b)e^x = xe^x$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 1; b = -1. \text{ Vậy } a+b=0$$

Đáp án A

Câu 25. Tính $\int \frac{2x^3+1}{x(x^3-1)} dx$

$$\text{A. } \ln \left| x^2 - \frac{1}{x} \right| + C \quad \text{B. } \ln \left| x^2 + \frac{1}{x} \right| + C \quad \text{C. } \ln \left| x - \frac{1}{x^2} \right| + C \quad \text{D. } \ln \left| x + \frac{1}{x^2} \right| + C$$

Giải

$$F'_A = \frac{\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)'}{\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)} = \frac{2x + \frac{1}{x^2}}{x^2 - \frac{1}{x}} = \frac{\frac{2x^3+1}{x^2}}{\frac{x^3-1}{x}} = \frac{2x^3+1}{x(x^3-1)} = f(x)$$

Đáp án A

Câu 26. Tính $\int \frac{x^2-1}{x(x^2+1)} dx$ bằng?

$$\text{A. } \ln \left| x - \frac{1}{x^2} \right| + C \quad \text{B. } \ln \left| x - \frac{1}{x} \right| + C \quad \text{C. } \ln \left| x + \frac{1}{x} \right| + C \quad \text{D. } \ln \left| x^2 - \frac{1}{x} \right| + C$$

Đáp án C

Câu 27. Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn hệ thức $\int f(x) \sin x dx = -f(x) \cos x + \int \pi^x \cos x dx$. Hỏi $y = f(x)$ là hàm số nào trong các phương án dưới đây:

$$\text{A. } f(x) = -\frac{\pi^x}{\ln \pi} \quad \text{B. } f(x) = \frac{\pi^x}{\ln \pi} \quad \text{C. } f(x) = \pi^x \cdot \ln \pi \quad \text{D. } f(x) = -\pi^x \ln \pi$$

Giải

Ta thấy dạng tích phân của đề bài là dạng tích tích phân từng phần.

$$F = \int f(x) \sin x dx = -f(x) \cos x + \int \pi^x \cos x dx$$

$$\begin{cases} u = f(x) \\ dv = \sin x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = -\cos x \end{cases}$$

$$F = -f(x) \cos x + \int f'(x) \cos x dx = -f(x) \cos x + \int \pi^x \cos x dx$$

$$\Rightarrow f'(x) = \pi^x \Rightarrow \int f'(x) dx = \int \pi^x dx = \frac{\pi^x}{\ln \pi} + C = f(x) + C$$

$$\text{Vậy } f(x) = \frac{\pi^x}{\ln \pi}$$

Đáp án B

Câu 28. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos^5 x \sin x$?

$$\begin{aligned} \text{A. } \int f(x) dx &= \frac{1}{6} \cos^6 x + C & \text{B. } \int f(x) dx &= -\frac{1}{6} \cos^6 x + C \\ \text{C. } \int f(x) dx &= -\frac{1}{6} \sin^6 x + C & \text{D. } \int f(x) dx &= \frac{1}{6} \sin^6 x + C \end{aligned}$$

Giải

Cách 1: $F = \int f(x) dx = \int \cos^5 x \sin x dx$, đặt $u = \cos x$; $du = -\sin x dx$

$$F = \int u^5 (-du) = -\int u^5 du = -\frac{u^6}{6} + C = -\frac{\cos^6 x}{6} + C$$

Đáp án B

Cách 2: tính thông qua đạo hàm các phương án.

Câu 29. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = (\tan x + \cot x)^2$

- A. $\int f(x)dx = -2 \cot(2x + 2018\pi) + C$ B. $\int f(x)dx = \tan x - \cot x + 2x + C$
 C. $\int f(x)dx = \tan x + \cot x + 2x + C$ D. $\int f(x)dx = -\frac{1}{2} \cot 2x + C$

Giải

$$F = \int f(x)dx = \int (\tan^2 x + \cot^2 x + 2)dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 + \frac{1}{\sin^2 x} - 1 + 2 \right) dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx$$

$$= \tan x - \cot x + C$$

Đến đây ta loại ngay B và C.

$$*ta \text{ có thể biến đổi tiếp: } = \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\sin x} + C = \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin x \cos x} + C = -\frac{\cos 2x}{\frac{1}{2} \sin 2x} + C = -2 \cot 2x + C$$

Loại D.

Đáp án A. (do cot tuần hoàn chu kì π nên $-2 \cot(2x + 2018\pi) = -2 \cot 2x$)

*Để kiểm tra bằng máy tính. Ta cho x là một giá trị bất kì (không nên đặc biệt), tính các giá trị F(x).

$$\text{Cho } x = 10^0 \text{ ta có: } F(10) = \tan 10^0 - \cot 10^0 = -5.49495 \dots$$

$$F_D(10^0) = -\frac{1}{2} \cot(2.10^0) = -1.37373 \dots \text{ loại.}$$

$$F_A(10^0) = -2 \cot(2.10^0 + 2017.180) = -5.49495 \dots = F(10)$$

Đáp án A

Câu 30. Tìm nguyên hàm $\int \frac{(x+1)^2}{x^2} dx$

- A. $x + 2 \ln|x| + \frac{1}{x} + C$ B. $x - 2 \ln|x| - \frac{1}{x} + C$ C. $x - 2 \ln|x| + \frac{1}{x} + C$ D. $x + 2 \ln|x| - \frac{1}{x} + C$

Giải

$$F = \int \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2} dx = \int \left(1 + \frac{2}{x} + x^{-2} \right) dx = x + 2 \ln|x| + \frac{x^{-1}}{-1} + C = x + 2 \ln|x| - \frac{1}{x} + C$$

Đáp án D

*các bạn hãy tìm thêm theo cách 2: tính F'(x)

Câu 31. Biết $\int \frac{x+1}{(x-1)(2-x)} dx = a \ln|x-1| + b \ln|x-2| + C$, với $a; b \in \mathbb{Z}$. Tính a+b.

- A. $a + b = 1$ B. $a + b = 5$ C. $a + b = -1$ D. $a + b = -5$

Giải

$$\text{Phân tích: } F = \int \frac{x+1}{(x-1)(2-x)} dx = \int \left(\frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2} \right) dx$$

$$\text{Ta có: } x + 1 = a(x - 2) + b(x - 1) \Leftrightarrow x + 1 = ax + bx - 2a - b$$

$$\text{Đồng nhất hệ số: } \begin{cases} a + b = 1 \\ -2a - b = 1 \end{cases} \Rightarrow a = -2; b = 3$$

$$\text{Do đó } a + b = -2 + 3 = 1$$

Đáp án C

Câu 32. Giá trị m để hàm số $F(x) = mx^3 + (3m + 2)x^2 - 4x + 3$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + 10x - 4$ là:

- A. $m=0$ B. $m=2$ C. $m=3$ D. $m=1$

Giải

$$\text{Cách 1: } \int f(x)dx = F(x) + C$$

$$\Rightarrow \int (3x^2 + 10x - 4)dx = x^3 + 5x^2 - 4x + C = mx^3 + (3m + 2)x^2 - 4x + 3$$

$$\Rightarrow m = 1 \text{ (hệ số } x^3)$$

Đáp án D

Cách 2: $F'(x) = f(x)$

$$\Rightarrow 3mx^2 + 2(3m+2)x - 4 = 3x^2 + 10x - 4$$

$$\Rightarrow 3m = 3 \Leftrightarrow m = 1 \text{ (hệ số } x^2)$$

*ta thấy làm theo cách 2 sẽ ít sai sót hơn do dễ tính toán hơn.

Câu 33. Hàm số nào dưới đây không là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \int \frac{x(x+2)}{(x+1)^2} dx$?

A. $\frac{x^2-x-1}{x+1}$

B. $\frac{x^2}{x+1}$

C. $\frac{x^2+x+1}{x+1}$

D. $\frac{x^2+x-1}{x+1}$

Giải

$$f(x) = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$$

Cách nhanh nhất để xác định đáp án trong trường hợp này là sử dụng công thức: $F'(x) = f(x)$

$$F'_A = \frac{(2x-1)(x+1)-(x^2-x-1)}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2} = f(x)$$

$$F'_B = \frac{2x(x+1)-x^2}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2} = f(x)$$

$$F'_C = \frac{(2x+1)(x+1)-(x^2+x+1)}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2} = f(x)$$

Đáp án D

$$(F'_D = \frac{(2x+1)(x+1)-(x^2+x-1)}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x+2}{(x+1)^2} \neq f(x))$$

Câu 34. Tìm các hàm số $f(x)$ biết $f'(x) = \frac{\cos x}{(2+\sin x)^2}$

A. $f(x) = \frac{\sin x}{(2+\sin x)^2} + C$

B. $f(x) = \frac{1}{2+\cos x} + C$

C. $f(x) = -\frac{1}{2+\sin x} + C$

D. $f(x) = \frac{\sin x}{2+\sin x} + C$

Giải

$$f(x) = \int f'(x)dx = \int \frac{\cos x}{(2+\sin x)^2} dx$$

$$\text{Đổi biến } u = (2 + \sin x) \Rightarrow du = \cos x dx$$

$$f(x) = \int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + C = -\frac{1}{2+\sin x} + C$$

Đáp án C

Câu 35. Biết $\int xe^{2x} dx = axe^{2x} + be^{2x} + C, a, b \in \mathbb{Q}$. Tính a.b

A. $ab = -\frac{1}{4}$

B. $ab = \frac{1}{4}$

C. $ab = -\frac{1}{8}$

D. $ab = \frac{1}{8}$

Giải

Sử dụng công thức: $F'(x) = f(x)$

$$\Rightarrow ae^{2x} + 2axe^{2x} + 2be^{2x} = xe^{2x} \Leftrightarrow a + 2ax + 2b = x. \text{ Đồng nhất hệ số: } \begin{cases} 2a = 1 \\ a + 2b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } ab = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{8}$$

Đáp án C

Câu 36. Cho $I = \int x(1-x^2)^{10} dx$. Đặt $u = 1-x^2$, khi đó viết I theo u và du ta được:

A. $I = \int 2u^{10} du$

B. $I = -2 \int u^{10} du$

C. $I = -\frac{1}{2} \int u^{10} du$

D. $I = \frac{1}{2} \int u^{10} du$

Giải

$$\text{Đặt } u = 1 - x^2; du = -2xdx \Rightarrow xdx = \frac{du}{-2}$$

$$I = \int u^{10} \cdot \frac{du}{-2} = -\frac{1}{2} \int u^{10} du$$

Đáp án C

Câu 37. Biết $\int (x+3)e^{-2x} dx = -\frac{1}{m} e^{-2x} (2x+n) + C$, với $m, n \in \mathbb{Q}$. Tổng $S = m^2 + n^2$ bằng:

A. 10

B. 5

C. 65

D. 41

Đáp án C

Câu 38. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int f(x) dx = 4x^3 - 3x^2 + 2x + C$. Hàm số $f(x)$ là:

A. $f(x) = x^4 - x^3 + x^2 + Cx$ B. $f(x) = 12x^2 - 6x + 2 + C$ C. $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + Cx + C'$ D. $f(x) = 12x^2 - 6x + 2$

Giải

$$f(x) = F'(x) = 12x^2 - 6x + 2$$

Đáp án D

Câu 39. Tìm nguyên hàm $I = \int (x-1) \sin 2x dx$

A. $I = \frac{(1-2x) \cos 2x + \sin 2x}{2} + C$ B. $I = \frac{(2-2x) \cos 2x + \sin 2x}{2} + C$ C. $I = \frac{(1-2x) \cos 2x + \sin 2x}{4} + C$ D. $I = \frac{(2-2x) \cos 2x + \sin 2x}{4} + C$

Giải

Nhìn vào nguyên hàm ta thấy ngay đây là dạng tính nguyên hàm từng phần.

Cách 1: tính trực tiếp

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x-1 \\ dv = \sin 2x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\frac{1}{2} \cos 2x \end{cases}$$

$$I = -\frac{1}{2}(x-1) \cos 2x + \int \frac{1}{2} \cos 2x dx = -\frac{1}{2}(x-1) \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x + C \\ = \frac{-2(x-1) \cos 2x + \sin 2x}{4} + C$$

Đáp án D

Cách 2: tính $F'(x)$

$$F'_A = \frac{-2 \cos 2x - (1-2x) \cdot 2 \sin 2x + 2 \cos 2x}{2} = -(1-2x) \sin 2x \neq f(x)$$

$$\text{Loại luôn C do } F'_C = \frac{F'_A}{2} = \frac{-(1-2x) \sin 2x}{2} \neq f(x)$$

$$F'_B = \frac{-2 \cos 2x - 2(2-2x) \sin 2x + 2 \cos 2x}{2} = -(2-2x) \sin 2x \neq f(x)$$

Đáp án D

$$F'_D = \frac{F'_B}{2} = \frac{-2(1-x) \sin 2x}{2} = (x-1) \sin 2x = f(x)$$

Câu 40. Tìm nguyên hàm của hàm số $y = (x+1) \cos x$

A. $F(x) = (x+1) \sin x - \cos x + C$ B. $F(x) = (x+1) \sin x + \cos x + C$ C. $F(x) = -(x+1) \sin x - \cos x + C$ D. $F(x) = -(x+1) \sin x + \cos x + C$

Đáp án B

Câu 41. (Phú Xuyên A - Lần 1 - 2017) nguyên hàm của hàm số $f(x) = (2 + e^{3x})^2$ là

A. $4x + \frac{4}{3}e^{3x} + \frac{1}{6}e^{6x} + C$ B. $3x + \frac{4}{3}e^{3x} + \frac{1}{6}e^{6x} + C$ C. $4x + \frac{4}{3}e^{3x} - \frac{1}{6}e^{6x} + C$ D. $3x + \frac{4}{3}e^{3x} + \frac{5}{6}e^{6x} + C$

Đáp án A

Câu 42. (Phú Xuyên A - Lần 1 - 2017) nguyên hàm của hàm số $f(x) = x\sqrt{1+x^2}$ là:

A. $\frac{1}{2}(x^2\sqrt{1+x^2}) + C$ B. $\frac{1}{3}(x^2\sqrt{x+x^2})^3$ C. $\frac{1}{3}(\sqrt{1+x^2})^3 + C$ D. $\frac{1}{3}(x^2\sqrt{1+x^2}) + C$

Đáp án C

Câu 43. (Phú Xuyên A – Lần 1 – 2017) nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{2x^2+3x+1}$ là

- A. $\ln \left| \frac{2x+1}{x+1} \right| + C$ B. $\ln \left| \frac{x+1}{2x+1} \right| + C$ C. $\ln \left| \frac{2x-1}{x-1} \right| + C$ D. $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{2x+1}{x+1} \right| + C$

Giải

$$f(x) = \frac{1}{2x^2+3x+1} = \frac{1}{2(x+\frac{1}{2})(x+1)} = \frac{1}{(2x+1)(x+1)} = \frac{2}{2x+1} - \frac{1}{x+1}$$

$$\int f(x)dx = \int \left(\frac{2}{2x+1} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \frac{2}{2} \ln|2x+1| - \ln|x+1| + C = \ln \left| \frac{2x+1}{x+1} \right| + C$$

Đáp án A

Câu 44. (Phú Xuyên A – Lần 1 – 2017) Hàm số $F(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\sin 4x + C$ là nguyên hàm của hàm số nào sau đây:

- A. $\frac{1}{2}\sin 2x$ B. $\cos^2 2x$ C. $\frac{1}{2}\cos 2x$ D. $\sin^2 2x$

Giải

$$F'(x) = \frac{1}{2} - 4 \cdot \frac{1}{8} \cos 4x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 4x = \frac{1 - \cos 4x}{2} = \cos^2 2x \text{ (công thức hạ bậc cos)}$$

Đáp án B

Hoặc các bạn có thể tính nguyên hàm từng phương án để so sánh F(x)

Câu 45. Nếu $\int f(x)dx = e^x + \sin x + C$ thì f(x) là hàm số nào?

- A. $e^x + \sin x$ B. $e^x - \sin x$ C. $e^x - \cos x$ D. $e^x + \cos x$

Đáp án D

Câu 46. Tìm nguyên hàm $\int \frac{x+3}{x^2+3x+2} dx$

- A. $2 \ln|x+2| - \ln|x+1| + C$ B. $2 \ln|x+1| - \ln|x+2| + C$
C. $2 \ln|x+1| + \ln|x+2| + C$ D. $\ln|x+1| + 2 \ln|x+2| + C$

Giải

$$\int \frac{x+3}{x^2+3x+2} dx = \int \frac{x+3}{(x+1)(x+2)} dx = \int \left(\frac{2}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) dx$$

$$= 2 \ln|x+1| - \ln|x+2| + C$$

Đáp án B

Câu 47. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$ B. $\int 2^x dx = 2^x + C$ C. $\int \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{x} + C$ D. $\int \frac{dx}{x+1} = \ln|x| + C$

Giải

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x} + C \text{ vậy A đúng}$$

Các bạn hãy tìm chỗ sai ở các câu B, C, D và sửa lại cho đúng.

Câu 48. Phát biểu nào sau đây là đúng

- A. $\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx$ B. $\int e^x \sin x dx = e^x \cos x - \int e^x \cos x dx$
C. $\int e^x \sin x dx = e^x \cos x + \int e^x \cos x dx$ D. $\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x - \int e^x \cos x dx$

Giải

Nhìn vào các phương án ta thấy đề bài đang muốn tính nguyên hàm $\int e^x \sin x dx$ theo phương pháp nguyên hàm từng phần.

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = e^x \\ dv = \sin x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = e^x dx \\ v = -\cos x \end{cases}$$

$$\text{Do đó: } \int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx$$

Đáp án A

Câu 49. Cho $f(x) = 3^{\sqrt{x}} \cdot \frac{\ln 3}{\sqrt{x}}$. hàm số nào dưới đây không phải là nguyên hàm của f(x)

A. $F(x) = 2(3^{\sqrt{x}} + 1) + C$

B. $F(x) = 2.3^{\sqrt{x}} + C$

C. $F(x) = 2(3^{\sqrt{x}} - 1) + C$

D. $F(x) = 3^{\sqrt{x}}$

Giải

Ta sẽ giải theo công thức: $F'(x) = f(x)$

$$F'_A = 2 \cdot (\sqrt{x})' \cdot 3^{\sqrt{x}} \cdot \ln 3 = 3^{\sqrt{x}} \cdot \frac{\ln 3}{\sqrt{x}} = f(x)$$

Suy ra $F'_B = F'_C = f(x)$ do A, B, C chỉ khác nhau hằng số

Đáp án D là sai.

Ta có thể nhìn nhanh 4 đáp án thấy các đáp án A, B, C đều có dạng $2.3^{\sqrt{x}} + C$

Chỉ có đáp án D là khác.

Câu 50. Trong các hàm số sau, hàm số nào có một nguyên hàm là hàm số $g(x) = \tan x$

(i) $f(x) = \tan^2 x + 2$

(ii) $f(x) = \frac{2}{\cos^2 x}$

(iii) $f(x) = \tan^2 x + 1$

A. (i), (ii), (iii)

B. Chỉ (ii), (iii)

C. Chỉ (iii)

D. Chỉ (ii)

Giải

$$+, \int (\tan^2 x + 2) dx = \int (\tan^2 x + 1 + 1) dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + 1 \right) dx = \tan x + x + C. \text{ Loại (i)}$$

$$+, \int (\tan^2 x + 1) dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C. \text{ Vậy (iii) thỏa mãn}$$

$$+, \int \frac{2}{\cos^2 x} dx = 2 \tan x + C. \text{ Loại (ii)}$$

Đáp án C

7.3. Tìm một nguyên hàm riêng, tính giá trị của nguyên hàm tìm được

+, Đa phần các câu hỏi dạng này cũng đều có hai cách giải như phần 7.2, chúng ta vẫn làm như bình thường, chỉ thêm bước xác định hằng số C cụ thể.

+, Các câu hỏi sẽ yêu cầu mức độ vận dụng lý thuyết nhiều hơn để tính toán.

+, Xin các bạn đăng ký kênh youtube của tôi theo địa chỉ dưới chân trang để xem các video hướng dẫn làm trắc nghiệm nguyên hàm bằng máy tính và nhiều video hướng dẫn sử dụng máy tính làm các dạng trắc nghiệm khác.

+, Trong tài liệu này tôi không hướng dẫn làm bài tập bằng máy tính. Các bạn có thể đăng kí kênh youtube của tôi theo địa chỉ dưới chân trang để xem video hướng dẫn làm bằng máy tính.

+, Có hai công thức của tích phân chúng ta thường dùng vào dạng này là:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$$

$$\int_a^b f'(x) dx = f(x)|_a^b = f(b) - f(a)$$

Lưu ý: $f(x)$, $f'(x)$ phải liên tục trên $[a; b]$ **Câu 1.** Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. Tính $I = F(e) - F(1)$?

A. $I = \frac{1}{2}$

B. $I = \frac{1}{e}$

C. $I = 1$

D. $I = e$

Giải

Cách 1: làm tự luận

$$F(x) = \int f(x) dx = \int \frac{\ln x}{x} dx$$

$$\text{Đặt } u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x}$$

$$F(x) = \int u du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{\ln^2 x}{2} + C$$

$$I = F(e) - F(1) = \frac{\ln^2 e}{2} - \frac{\ln^2 1}{2} = \frac{1}{2}$$

Đáp án A

Cách 2: máy tính

Thực chất đây là tích phân $I = \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$

Bấm máy tính ta được kết quả: $I = 0,5 = \frac{1}{2}$

Câu 2. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x + 2x$ thỏa mãn $F(0) = \frac{3}{2}$. Tìm $F(x)$.

A. $F(x) = e^x + x^2 + \frac{3}{2}$
 C. $F(x) = e^x + x^2 + \frac{5}{2}$

B. $F(x) = 2e^x + x^2 - \frac{1}{2}$
 D. $F(x) = e^x + x^2 + \frac{1}{2}$

Giải

Tìm họ nguyên hàm trước khi tìm nguyên hàm riêng.

$$\int (e^x + 2x) dx = e^x + x^2 + C = F(x)$$

$$F(0) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow e^0 + 0 + C = \frac{3}{2} \Leftrightarrow C + 1 = \frac{3}{2} \Leftrightarrow C = \frac{1}{2}$$

$$\text{Vậy } F(x) = e^x + x^2 + \frac{1}{2}$$

*Các bạn có thể sử dụng công thức $F'(x) = f(x)$, tìm họ nguyên hàm.

$$F'_A = e^x + 2x = f(x) = F'_C = F'_D \text{ (loại B)}$$

$$\Rightarrow F(x) = e^x + x^2 + C$$

Xác định C như trên.

Câu 3. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos 5x \cos x$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$. Tính $F\left(\frac{\pi}{6}\right)$

A. $\frac{\sqrt{3}}{12}$

B. 0

C. $\frac{\sqrt{3}}{8}$

D. $\frac{\sqrt{3}}{6}$

Giải

Cách 1: Tự luận

$$F(x) = \int f(x) dx = \int \cos 5x \cos x dx = \int \frac{1}{2} (\cos 6x + \cos 4x) dx = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6} \sin 6x + \frac{1}{4} \sin 4x \right) + C$$

$$F\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6} \sin\left(6 \cdot \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{4} \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) \right) + C = 0 \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{3}}{16} + C = 0 \Leftrightarrow C = \frac{\sqrt{3}}{16}$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6} \sin 6x + \frac{1}{4} \sin 4x \right) + \frac{\sqrt{3}}{16}$$

$$F\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{8}$$

Đáp án C

Cách 2: Máy tính

$$\text{Ta tính tích phân: } I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} \cos 5x \cos x dx \approx 0,2165 = F\left(\frac{\pi}{6}\right) - F\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Rightarrow F\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0,2165 + F\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0,2165 + 0 = 0,2165. \text{ Kiểm tra đáp án ta được kết quả } \frac{\sqrt{3}}{8}$$

Câu 4. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = xe^{\frac{x}{2}}$ và $f(0) = -1$. Tính $F(4)$

A. $F(4)=3$

B. $F(4) = \frac{7}{4}e^2 - \frac{3}{4}$

C. $F(4) = 4e^2 + 3$

D. $F(4) = 4e^2 - 3$

Đáp án C

Câu 5. Biết một nguyên hàm của $f(x)$ là $F(x) = x^2 + 4x + 1$. Khi đó giá trị của hàm số $y = f(x)$ tại $x=3$ là:

A. $f(3)=6$

B. $f(3)=10$

C. $f(3)=22$

D. $f(3)=30$

Giải

Ta tìm $f(x)$ trước.

$$f(x) = F'(x) = 2x + 4$$

$$\Rightarrow f(3) = 2 \cdot 3 + 4 = 10$$

Đáp án B

Câu 6. Một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \sin x + \frac{1}{\cos^2 x}$ thỏa mãn điều kiện $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ là:

A. $F(x) = -\cos x + \tan x + C$

B. $F(x) = -\cos x + \tan x - \sqrt{2} + 1$

C. $F(x) = \cos x + \tan x + \sqrt{2} - 1$

D. $F(x) = -\cos x + \tan x + \sqrt{2} - 1$

Đáp án D

Câu 7. Cho $f(x)$ có $f'(x) = 1 - 4 \sin 2x$ và $f(0) = 10$. Tính $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$

A. $\frac{\pi}{4} + 10$

B. $\frac{\pi}{4} + 12$

C. $\frac{\pi}{4} + 6$

D. $\frac{\pi}{4} + 8$

Giải

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int (1 - 4 \sin 2x) dx = x + 2 \cos 2x + C$$

$$f(0) = 0 + 2 \cos 0 + C = 10 \Leftrightarrow C = 8$$

$$\Rightarrow f(x) = x + 2 \cos 2x + 8. \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} + 8$$

Đáp án D

*Các bạn cũng có thể sử dụng máy tính tích phân:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f'(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - 4 \sin 2x) dx = f\left(\frac{\pi}{4}\right) - f(0)$$

$$\text{Do công thức } f(x) = \int f'(x) dx$$

Câu 8. Cho $f'(x) = 2 - 7 \sin x$ và $f(0) = 14$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{2}$

B. $f(\pi) = 2\pi$

C. $f(x) = 2x + 7 \cos x + 14$

D. $f(x) = 2x - 7 \cos x + 14$

Giải

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int (2 - 7 \sin x) dx = 2x + 7 \cos x + C \text{ (loại D)}$$

$$f(0) = 14 \Leftrightarrow 0 + 7 + C = 14 \Leftrightarrow C = 7 \text{ (loại C)}$$

$$\Rightarrow f(x) = 2x + 7 \cos x + 7$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi + 7 \text{ (loại A)}$$

Đáp án B

$$f(\pi) = 2\pi - 7 + 7 = 2\pi$$

*các bạn có thể kiểm chứng A, B bằng máy tính như tôi đã giới thiệu ở những câu trên.

Câu 9. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$ và $F(e) = 3$. Tính $F(e^2)$

A. $F(e^2) = 3 + 2 \ln 2$

B. $F(e^2) = 3 + \ln 2$

C. $F(e^2) = 1 + \ln 3$

D. $F(e^2) = 3 - \ln 2$

Đáp án B

Câu 10. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cot x$ và $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$. Tính $F\left(\frac{\pi}{6}\right)$

A. $F\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1 + \ln \frac{\sqrt{3}}{2}$

B. $F\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1 - \ln 2$

C. $F\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1 - \ln \frac{\sqrt{3}}{2}$

D. $F\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1 + \ln 2$

Đáp án B

Câu 11. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $[a; b]$, $f(b) = 5$, $\int_a^b f'(x) dx = 3\sqrt{5}$. Tính $f(a)$

A. $f(a) = \sqrt{5}(\sqrt{5} - 3)$

B. $f(a) = 3\sqrt{5}$

C. $f(a) = \sqrt{5}(3 - \sqrt{5})$

D. $f(a) = \sqrt{3}(\sqrt{5} - 3)$

Giải

$$\text{Ta có: } \int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a) \Rightarrow f(a) = f(b) - \int_a^b f'(x) dx = 5 - 3\sqrt{5} = \sqrt{5}(\sqrt{5} - 3)$$

Đáp án A

Câu 12. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x^2+3x-3}{x+2}$ thỏa mãn $F(1)=2$. Tính $F(2)$.

A. $F(2) = \frac{9}{2} + 5 \ln \frac{3}{4}$

B. $F(2) = \frac{9}{2} + 5 \ln \frac{4}{3}$

C. $F(2) = 5 \ln 3 - 10 \ln 2$

D. $F(2) = -5 \ln 3 + 10 \ln 2$

Giải

$$F(2) - F(1) = \int_1^2 \frac{x^2+3x-3}{x+2} dx \Rightarrow F(2) = F(1) + \int_1^2 \frac{x^2+3x-3}{x+2} dx = 2 + 1.061589 = 3.061589$$

Đáp án A

Câu 13. Cho hàm số $f(x)$ có $f'(x) = \frac{1}{1-x}$ và $f(0)=1$. Tính $f(5)$

A. $f(5) = 2 \ln 2$

B. $f(5) = \ln 4 + 1$

C. $f(5) = -2 \ln 2 + 1$

D. $f(5) = -2 \ln 2$

Giải

Do $f'(x) = \frac{1}{1-x}$ không liên tục trên $[0; 5]$ nên ta không thể áp dụng công thức tính tích phân mà phải làm thủ công.

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int \frac{1}{1-x} dx = -\ln|1-x| + C$$

$$f(0) = -\ln|1-0| + C = 1 \Rightarrow C = 1$$

$$\Rightarrow f(x) = -\ln|1-x| + 1. \text{ Vậy } f(5) = -\ln 4 + 1 = -2 \ln 2 + 1$$

Đáp án C

Câu 14. Cho hàm số $y = \int x \cdot \sin 2x dx$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A. $y' \left(\frac{\pi}{6} \right) = \frac{\pi}{24}$

B. $y' \left(\frac{\pi}{6} \right) = \frac{\pi}{12}$

C. $y' \left(\frac{\pi}{6} \right) = \frac{\pi\sqrt{3}}{12}$

D. $y' \left(\frac{\pi}{6} \right) = \frac{\pi\sqrt{3}}{6}$

Giải

$$\text{Ta có: } y = \int y' dx = \int x \cdot \sin 2x dx$$

$$\Rightarrow y' = x \cdot \sin 2x.$$

$$y' \left(\frac{\pi}{6} \right) = \frac{\pi}{6} \cdot \sin \left(2 \cdot \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\pi\sqrt{3}}{12}$$

Đáp án C.

*Rất nhiều người nếu không nhớ công thức lý thuyết $f(x) = \int f'(x) dx$ thì sẽ đi tính nguyên hàm của đề bài, rồi lại tính đạo hàm. Đây là việc làm thừa, không có ý nghĩa.

Câu 15. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn điều kiện $f'(x) = 2 + \cos 2x$ và $f \left(\frac{\pi}{2} \right) = 2\pi$. Mệnh đề nào dưới đây là sai?

A. $f(x) = 2x - \frac{\sin 2x}{2} + \pi$

B. $f(0) = \pi$

C. $f(x) = 2x + \frac{\sin 2x}{2} + \pi$

D. $f \left(-\frac{\pi}{2} \right) = 0$

Giải

*tìm $f(x)$ trước

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int (2 + \cos 2x) dx = 2x + \frac{1}{2} \sin 2x + C$$

$$f \left(\frac{\pi}{2} \right) = 2\pi \Leftrightarrow \pi + C = 2\pi \Leftrightarrow C = \pi$$

$$f(x) = 2x + \frac{1}{2} \sin 2x + \pi$$

Đáp án A sai

Câu 16. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = (x^2 - 1)e^{x^3-3x}$, biết rằng đồ thị hàm số $F(x)$ có điểm cực tiểu nằm trên trục hoành.

A. $F(x) = e^{x^3-3x} - e^2$

B. $F(x) = \frac{e^{x^3-3x+2}-1}{3e^2}$

C. $F(x) = \frac{e^{x^3-3x}-e^2}{3}$

D. $F(x) = \frac{e^{x^3-3x}-1}{3}$

Giải

*Tìm họ nguyên hàm

Cách 1: $F(x) = \int (x^2 - 1)e^{x^3-3x} dx$

Đổi biến $u = x^3 - 3x$; $du = (3x^2 - 3)dx = 3(x^2 - 1)dx \Rightarrow \frac{du}{3} = (x^2 - 1)dx$

$$F(x) = \int \frac{e^u}{3} du = \frac{e^u}{3} + C = \frac{e^{x^3-3x}}{3} + C$$

Cách 2: Ta thấy tất cả các phương án đều có dạng: $F(x) = ae^{x^3-3x} + C$. Ta đi tìm a và C

$$F'(x) = a(3x^2 - 3)e^{x^3-3x} = 3a(x^2 - 1)e^{x^3-3x} = f(x) = (x^2 - 1)e^{x^3-3x}$$

$$\Rightarrow 3a = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{e^{x^3-3x}}{3} + C$$

*Tìm nguyên hàm riêng (tìm C)

$$F'(x) = f(x) = (x^2 - 1)e^{x^3-3x}; F''(x) = (F'(x))' = \frac{d}{dx}(F'(x)) \quad (\text{xác định bằng máy tính})$$

$$\text{Đồ thị hàm số } F(x) \text{ có điểm cực tiểu nằm trên trục } Ox \text{ thì } \begin{cases} F'(x) = 0 \\ F''(x) \neq 0 \\ F(x) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = 0 \\ F''(x) > 0 \\ \frac{e^{x^3-3x}}{3} + C = 0 \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1; x = -1$$

$$+, \text{ với } x=1 \text{ thì } F''(1) = 0,27 > 0^{\text{TM}}$$

$$F(1) = \frac{e^{-2}}{3} + C = 0 \Rightarrow C = -\frac{e^{-2}}{3} = -\frac{1}{3e^2}$$

$$\text{Vậy } F(x) = \frac{e^{x^3-3x}}{3} - \frac{1}{3e^2} = \frac{e^{x^3-3x} \cdot e^2 - 1}{3e^2} = \frac{e^{x^3-3x+2} - 1}{3e^2}$$

Đáp án B

Câu 17. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin^3 x \cos x$ và $F(0) = \pi$. Tìm $F(\frac{\pi}{2})$.

A. $F(\frac{\pi}{2}) = -\pi$

B. $F(\frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{4} + \pi$

C. $F(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{4} + \pi$

D. $F(\frac{\pi}{2}) = \pi$

Giải

$$\text{Ta có: } F(\frac{\pi}{2}) - F(0) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos x dx$$

$$\Rightarrow F(\frac{\pi}{2}) = F(0) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos x dx = \pi + 0,25 = \pi + \frac{1}{4}$$

Đáp án C

Câu 18. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cot x$ trên khoảng $(0; \frac{2\pi}{3})$ thỏa mãn $F(\frac{\pi}{4}) = 0$

Tính $F(\frac{\pi}{2})$

A. $F(\frac{\pi}{2}) = -\ln \sqrt{2}$

B. $F(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2} \ln 2$

C. $F(\frac{\pi}{2}) = -\ln 2$

D. $F(\frac{\pi}{2}) = -2 \ln 2$

Đáp án B

Câu 19. Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = ax + \frac{b}{x^2}$ ($a, b \in \mathbb{R}; x \neq 0$), biết $F(-1)=1; F(1)=4, f(1)=0$.

A. $F(x) = \frac{3x^2}{4} + \frac{3}{2x} + \frac{7}{4}$

B. $F(x) = \frac{3x^2}{4} - \frac{3}{2x} - \frac{7}{4}$

C. $F(x) = \frac{3x^2}{2} + \frac{3}{4x} - \frac{7}{4}$

D. $F(x) = \frac{3x^2}{2} - \frac{3}{2x} - \frac{1}{2}$

Giải

$$\int \left(ax + \frac{b}{x^2}\right) dx = \frac{ax^2}{2} - \frac{b}{x} + C = F(x)$$

Giải hệ:
$$\begin{cases} F(-1) = 1 \\ F(1) = 4 \\ f(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{2} + b + C = 1 \\ \frac{a}{2} - b + C = 4 \\ a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{3}{2}; b = -\frac{3}{2}; C = \frac{7}{4}$$

Vậy $F(x) = \frac{3x^2}{4} - \frac{3}{2x} + \frac{7}{4}$

Đáp án A

Câu 20. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\sin x}{1+3\cos x}$ và $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$. Tính $F(0)$

A. $F(0) = -\frac{1}{3}\ln 2 + 2$ B. $F(0) = -\frac{2}{3}\ln 2 + 2$ C. $F(0) = -\frac{2}{3}\ln 2 - 2$ D. $F(0) = -\frac{1}{3}\ln 2 - 2$

Đáp án B

*các bạn cần lưu ý khi dùng máy tính tích phân hàm $f(x)$ cần liên tục trên $[a; b]$

Câu 21. Cho hàm số $f(x) = (2x + 1)^{2018}$. Tìm tất cả các hàm số $F(x)$ thỏa mãn $F'(x) = f(x)$ và $F\left(-\frac{1}{2}\right) = 2018$

A. $F(x) = \frac{(2x+1)^{2019}}{4038} + 2018$

B. $F(x) = 2018(2x + 1)^{2017} + 2018$

C. $F(x) = \frac{(2x+1)^{2019}}{2018} + 2018$

D. $F(x) = 4036(2x + 1)^{2017} + 2018$

Giải

Ta có: $F'(x) = f(x) \Leftrightarrow F(x) = \int f(x)dx$

$\Rightarrow F(x) = \int (2x + 1)^{2018} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2x+1)^{2019}}{2019} + C = \frac{(2x+1)^{2019}}{4038} + C$

Đáp án A (không cần tìm C do bốn phương án đều có $C=2018$)

$F\left(-\frac{1}{2}\right) = 0 + C = 2018 \Rightarrow C = 2018$

Câu 22. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin(1 - 2x)$ và thỏa mãn $F\left(\frac{1}{2}\right) = 1$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $F(x) = -\frac{1}{2}\cos(1 - 2x) + \frac{3}{2}$

B. $F(x) = \cos(1 - 2x)$

C. $F(x) = \cos(1 - 2x) + 1$

D. $F(x) = \frac{1}{2}\cos(1 - 2x) + \frac{1}{2}$

Đáp án D

Câu 23. Cho hàm số $f(x) = \frac{a}{\pi} + \cos^2 x$. Tìm tất cả các giá trị của a để $f(x)$ có một nguyên hàm $F(x)$ thỏa mãn $F(0) = \frac{1}{4}$; $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$

A. $\pi - 2$

B. $\pi - 1$

C. $\frac{\pi}{2} - 1$

D. $\frac{\pi}{2} - 2$

Giải

$\int \left(\frac{a}{\pi} + \cos^2 x\right) dx = \int \left(\frac{a}{\pi} + \frac{1+\cos 2x}{2}\right) dx = \int \left(\frac{a}{\pi} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x\right) dx = \left(\frac{a}{\pi} + \frac{1}{2}\right)x + \frac{1}{4}\sin 2x + C = F(x)$

$$\begin{cases} F(0) = \frac{1}{4} \\ F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = \frac{1}{4} \\ \left(\frac{a}{\pi} + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$\Rightarrow \left(\frac{a}{\pi} + \frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}}{\frac{\pi}{4}} = 1 - \frac{2}{\pi} \Rightarrow \frac{a}{\pi} = 1 - \frac{2}{\pi} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \Rightarrow a = \frac{\pi}{2} - 2$

Đáp án D

Cách 2: dùng máy tính

$F\left(\frac{\pi}{4}\right) - F(0) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{a}{\pi} + \cos^2 x\right) dx \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{a}{\pi} + \cos^2 x\right) dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4} = 0.535398$

Với $a = \pi - 2$ thì $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\pi-2}{\pi} + \cos^2 x\right) dx = 0.928$

Với $a = \pi - 1$ thì $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\pi-1}{\pi} + \cos^2 x \right) dx = 1.178$

Với $a = \frac{\pi}{2} - 1$ thì $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\pi/2-1}{\pi} + \cos^2 x \right) dx = \frac{1}{4}\pi$

Với $a = \frac{\pi}{2} - 2$ thì $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\pi/2-2}{\pi} + \cos^2 x \right) dx = 0.535398$

Đáp án D

Câu 24. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f''(x) = 12x^2 + 6x - 4$; $f(0) = 1$; $f(1) = 3$. Tính $f(-1)$

A. $f(-1) = -5$

B. $f(-1) = 3$

C. $f(-1) = -3$

D. $f(-1) = -1$

Giải

Ta có: $f(x) = \int f'(x) dx = \int (\int f''(x) dx) dx = \int (\int (12x^2 + 6x - 4) dx) dx$
 $= \int (4x^3 + 3x^2 - 4x + C) dx = x^4 + x^3 - 2x^2 + Cx + C'$

$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(1) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C' = 1 \\ 1 + 1 - 2 + C + 1 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C' = 1 \\ C = 2 \end{cases}$

Vậy $f(x) = x^4 + x^3 - 2x^2 + 2x + 1$

$f(-1) = 1 - 1 - 2 - 2 + 1 = -3$

Đáp án C

Câu 25. Cho hàm số $f(x) = a \cdot \sin 2x - b \cdot \cos 2x$ thỏa mãn $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2$ và $\int_a^b adx = 3$. Tính $a+b$

A. 3

B. 4

C. 5

D. 8

Giải

Ta có: $f'(x) = 2a \cos 2x + 2b \sin 2x$. $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2a = -2 \Rightarrow a = 1$

$\int_a^b adx = ax|_a^b = ab - a^2 = 3 \Rightarrow b - 1 = 3 \Leftrightarrow b = 4$

Vậy $a + b = 1 + 4 = 5$

Đáp án C

Câu 26. Cho $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{e^{x+3}}$ và $F(0) = -\frac{1}{3} \ln 4$. Tập nghiệm S của phương trình $3F(x) + \ln(e^x + 3) = 2$ là:

A. $S = \{2\}$

B. $S = \{-2; 2\}$

C. $S = \{1; 2\}$

D. $S = \{-2; 1\}$

Giải

Ta có: $F = \int \frac{1}{e^{x+3}} dx$. Đặt $u = e^x \Rightarrow du = e^x dx = u dx \Rightarrow dx = \frac{du}{u}$

$F = \int \frac{du}{u(u+3)} = \int \left(\frac{1}{3u} - \frac{1}{3(u+3)} \right) du = \frac{1}{3} \ln|u| - \frac{1}{3} \ln|u+3| + C = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{u}{u+3} \right| + C = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{e^x}{e^{x+3}} \right| + C$

$F(0) = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{1}{4} \right| + C = -\frac{1}{3} \ln 4 \Rightarrow C = -\frac{1}{3} \ln 4 - \frac{1}{3} \ln \frac{1}{4} = -\frac{1}{3} \ln 1 = 0$

Vậy $F(x) = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{e^x}{e^{x+3}} \right|$

Giải hệ: $3F(x) + \ln(e^x + 3) = 2$

$\Leftrightarrow \ln \frac{e^x}{e^{x+3}} + \ln(e^x + 3) = 2 \Leftrightarrow \ln e^x = 2 \Leftrightarrow e^x = e^2 \Leftrightarrow x = 2$

Đáp án A.

Câu 27. Giả sử $f(x) = \int \sin 2x \cos 3x dx = F(x) + C$, $F(x)$ không chứa hệ số tự do và $f(0) = 0$. Giá trị của C là

A. $-\frac{4}{5}$

B. $\frac{2}{5}$

C. $-\frac{2}{5}$

D. $\frac{4}{5}$

Đáp án C

Câu 28. Hãy xác định hàm số $F(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 1$. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f(1) = 2$; $f(2) = 3$; $f(3) = 4$.

A. $F(x) = x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + 1$

B. $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + 2x + 1$

$$C. F(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + 1$$

$$D. F(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + 1$$

Câu 29. Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \sin x \cos x$, biết $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$

$$A. F(x) = -\frac{1}{4}\cos 2x + 1$$

$$B. F(x) = -\frac{1}{2}\cos^2 x + 1$$

$$C. F(x) = -\frac{1}{2}\cos 2x + 1$$

$$D. F(x) = -\cos x \sin x + 1$$

Đáp án B

Câu 30. Xác định hàm số $y = f(x)$ biết $f'(x) = \sqrt[3]{x} + x^3 + 1$ và $f(1) = 2$

$$A. f(x) = \frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}} + \frac{x^4}{4} + x - \frac{7}{2}$$

$$B. f(x) = \frac{4}{3}x^{\frac{4}{3}} + \frac{x^4}{4} + x - \frac{7}{2}$$

$$C. f(x) = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + \frac{x^4}{4} + x$$

$$D. f(x) = \frac{3}{4}x^{\frac{3}{4}} + \frac{x^4}{4} + x - \frac{7}{2}$$

Đáp án C

Câu 31. Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{\sin^2 2x}$, $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ và đồ thị hàm số $F(x)$ đi qua $N\left(\frac{\pi}{8}; 1\right)$. Tìm hàm số $F(x)$

$$A. F(x) = -\frac{1}{2}\cot 2x$$

$$B. F(x) = -\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{2}$$

$$C. F(x) = -\frac{1}{2}\cot 2x - \frac{1}{2}$$

$$D. F(x) = -\frac{1}{2}\cot 2x + 1$$

Giải

$$\text{Ta có: } F(x) = \int \frac{1}{\sin^2 2x} dx = -\frac{1}{2}\cot 2x + C$$

$$\text{Điểm N thuộc hàm số } y=F(x) \text{ nên } F\left(\frac{\pi}{8}\right) = 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}\cot 2 \cdot \frac{\pi}{8} + C = 1 \Rightarrow C = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Đáp án B

Câu 32. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{\ln^2 x + 1} \cdot \frac{\ln x}{x}$ và $F(1) = \frac{1}{3}$. Tính $[F(e)]^2$

$$A. [F(e)]^2 = \frac{8}{3}$$

$$B. [F(e)]^2 = \frac{8}{9}$$

$$C. [F(e)]^2 = \frac{1}{3}$$

$$D. [F(e)]^2 = \frac{1}{9}$$

Đáp án B

Câu 33. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x - 3\cos x$ và $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4}$. Tính $F(\pi)$

$$A. F(\pi) = \pi^2 - 3$$

$$B. F(\pi) = \pi^2 + 3$$

$$C. F(\pi) = \pi + 3$$

$$D. F(\pi) = \pi - 3$$

Đáp án B

Câu 34. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin x$ và đồ thị hàm số $y = F(x)$ đi qua điểm $M(0; 1)$. Tính $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$$A. F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$$

$$B. F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

$$C. F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$D. F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

Câu 35. Tìm hàm số $f(x)$ biết $f'(x) = \frac{2x+3}{x+1}$ và $f(0)=1$

$$A. f(x) = x^2 + \ln|x+1|$$

$$B. f(x) = 2x + \ln|x+1| - 1$$

$$C. f(x) = 2x + \ln|x+1| + 1$$

$$D. f(x) = x + \ln|x+1| + 1$$

Đáp án C

Câu 36. Biết hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = 2x + 3$ và $f(0)=1$. Tính $f(2)$

$$A. 11$$

$$B. 8$$

$$C. 10$$

$$D. 7$$

Đáp án A

Câu 37. Giả sử $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = 4x - 1$. Đồ thị hàm số $y = F(x)$ và $y = f(x)$ cắt nhau tại một điểm trên trục tung. Tọa độ các điểm chung của hai đồ thị trên là :

$$A. (0; -1) \text{ và } \left(\frac{5}{2}; 3\right)$$

$$B. (0; -2) \text{ và } \left(\frac{8}{3}; 14\right)$$

$$C. (0; -2) \text{ và } \left(\frac{5}{2}; 8\right)$$

$$D. (0; -1) \text{ và } \left(\frac{5}{2}; 9\right)$$

Đáp án D