

PHƯƠNG PHÁP ĐÁNH GIÁ VÀ SỬ DỤNG TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ ĐỂ GIẢI PHƯƠNG TRÌNH- BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LOGARIT

NỘI DUNG ĐỀ BÀI

- Câu 1. (THPT GIA LỘC HẢI DƯƠNG NĂM 2018-2019 LẦN 02)** Cho hai số thực a, b thỏa mãn $\log_{100} a = \log_{40} b = \log_{16} \frac{a-4b}{12}$. Giá trị của $\frac{a}{b}$ bằng
- A. 6. B. 12. C. 2. D. 4.
- Câu 2. (THPT CHUYÊN BẮC GIANG NAM 2018-2019 LẦN 01)** Phương trình $2^{x-3} = 5^{x^2-5x+6}$ có một nghiệm dạng $x = b + \log_a b$ với a, b là các số nguyên dương thuộc khoảng $(1;7)$. Khi đó $a+2b$ bằng
- A. 7 B. 24 C. 9 D. 16
- Câu 3.** Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $\log_3 \frac{1-y}{x+3xy} = 3xy + x + 3y - 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của $P = x + y$.
- A. $P_{\min} = \frac{4\sqrt{3}-4}{3}$. B. $P_{\min} = \frac{4\sqrt{3}+4}{3}$. C. $P_{\min} = \frac{4\sqrt{3}+4}{9}$. D. $P_{\min} = \frac{4\sqrt{3}-4}{9}$.
- Câu 4. (THPT - YÊN ĐỊNH THANH HÓA 2018 2019- LẦN 2)** Cho x, y là hai số thực không âm thỏa mãn $x^2 + 2x - y + 1 = \log_2 \frac{\sqrt{2y+1}}{x+1}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = e^{2x-1} + 4x^2 - 2y + 1$ là
- A. $\frac{1}{2}$. B. -1 . C. $-\frac{1}{2}$. D. 1.
- Câu 5. (THPT BA ĐÌNH NĂM 2018-2019 LẦN 02)** Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $2019^{2(x^2-y+1)} = \frac{2x+y}{(x+1)^2}$. Giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức $P = 2y - x$ bằng
- A. $P_{\min} = \frac{1}{4}$. B. $P_{\min} = \frac{1}{2}$. C. $P_{\min} = \frac{7}{8}$. D. $P_{\min} = \frac{15}{8}$.
- Câu 6. (MĐ 104 BGD&ĐT NĂM 2019-2020)** Xét các số thực không âm x và y thỏa mãn $2x + y \cdot 4^{x+y-1} \geq 3$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + y^2 + 4x + 2y$ bằng
- A. $\frac{33}{8}$. B. $\frac{9}{8}$. C. $\frac{21}{4}$. D. $\frac{41}{8}$.
- Câu 7. (MĐ 104 BGD&ĐT NĂM 2019-2020)** Có bao nhiêu số nguyên x sao cho ứng với mỗi x có không quá 255 số nguyên y thỏa mãn $\log_3(x^2 + y) \geq \log_2(x + y)$?
- A. 80. B. 79. C. 157. D. 158
- Câu 8. (CHUYÊN LÊ THÁNH TÔNG NĂM 2018-2019 LẦN 02)** Cho hai số dương $x; y$ thỏa $\log_2(4x + y + 2xy + 2)^{y+2} = 8 - (2x-2)(y+2)$. Giá trị nhỏ nhất của $P = 2x + y$ là số có dạng $M = a\sqrt{b} + c$ với $a, b \in \mathbb{N}, a > 2$. Tính $S = a + b + c$.
- A. $S = 17$. B. $S = 7$. C. $S = 19$. D. $S = 3$.

- Câu 9. (THPT CHUYÊN THÁI BÌNH NĂM 2018-2019 LẦN 04)** Cho các số thực x, y với $x \geq 0$ thỏa mãn $e^{x+3y} + e^{xy+1} + x(y+1) + 1 = e^{-xy-1} + \frac{1}{e^{x+3y}} - 3y$. Gọi m là giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = x + 2y + 1$. Mệnh đề nào sau đây đúng?
- A. $m \in (2; 3)$. B. $m \in (-1; 0)$. C. $m \in (0; 1)$. D. $m \in (1; 2)$.
- Câu 10. (THPT CHUYÊN VINH PHÚC LẦN 02 NĂM 2018-2019)** Kí hiệu $\max\{a; b\}$ là số lớn nhất trong hai số a, b . Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\max\left\{\log_2 x; \log_{\frac{1}{3}} x\right\} < 1$.
- A. $S = \left(\frac{1}{3}; 2\right)$. B. $S = (0; 2)$. C. $S = \left(0; \frac{1}{3}\right)$. D. $S = (2; +\infty)$.
- Câu 11. (CHUYÊN QUANG TRUNG BÌNH PHƯỚC NĂM 2018-2019 LẦN 07)** Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 12x^2 + 2018x - 2019$. Số giá trị $m \in \mathbb{Z}, m \in [-12; 12]$ thỏa bất phương trình $f(\log_{0,2}(\log_2(m-1)) - 2019) < f(f(0))$ là
- A. 9. B. 10. C. 11. D. 12.
- Câu 12.** Cho các số $m > 0, n > 0, p > 0$ thỏa mãn $4^m = 10^n = 25^p$. Tính giá trị biểu thức $T = \frac{n}{2m} + \frac{n}{2p}$.
- A. $T = 1$. B. $T = \frac{5}{2}$. C. $T = 2$. D. $T = \frac{1}{10}$.
- Câu 13.** Cho a, b, c là các số thực khác 0 thỏa mãn $4^a = 9^b = 6^c$. Khi đó $\frac{c}{a} + \frac{c}{b}$ bằng
- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{1}{6}$. C. $\sqrt{6}$. D. 2.
- Câu 14.** Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $0 \leq x \leq 2020$ và $1 \leq y \leq 2020$ và $4^{x+1} + \log_2(y+3) = 16 \cdot 2^y + \log_2(2x+1)$?
- A. 2019. B. 2020. C. 1010. D. 1011.
- Câu 15.** Biết x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $\log_7\left(\frac{4x^2 - 4x + 1}{2x}\right) + 4x^2 + 1 = 6x$ và $x_1 + 2x_2 = \frac{1}{4}(a + \sqrt{b})$ với a, b là hai số nguyên dương. Tính $a + b$.
- A. $a + b = 13$. B. $a + b = 11$. C. $a + b = 16$. D. $a + b = 14$.
- Câu 16.** Cho phương trình $2\log_3(\cot x) = \log_2(\cos x)$. Phương trình này có bao nhiêu nghiệm trên khoảng $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{9\pi}{2}\right)$?
- A. 4. B. 3. C. 2. D. 6.
- Câu 17.** Biết m, n là hai số thực thỏa mãn $x \cdot 2^x + 3 \cdot 2^{3-x} - 3x - 8 = 0$ và $m + n = a + \log_2 b, (a, b \in \mathbb{N}^*)$, tính $S = a + b$.
- A. $S = 4$. B. $S = 6$. C. $S = 5$. D. $S = 9$.

- Câu 18. (MĐ 102 BGD&ĐT NĂM 2017-2018)** Cho $a > 0, b > 0$ thỏa mãn $\log_{10a+3b+1}(25a^2 + b^2 + 1) + \log_{10ab+1}(10a + 3b + 1) = 2$. Giá trị của $a + 2b$ bằng
- A. $\frac{5}{2}$ B. 6 C. 22 D. $\frac{11}{2}$
- Câu 19.** Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $e^{2x^2+mx+m^2-4m} - e^{x^2-mx-m^2+4m} + x^2 + 2mx + 2m^2 - 8m = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 phân biệt thỏa mãn $x_1 + x_2 \geq -2$?
- A. $(0; 1]$. B. $[0; 8]$. C. $(0; 2]$. D. $[2; 8]$.
- Câu 20.** Biết m, n là hai số thực thỏa mãn $x.2^x + 3.2^{3-x} - 3x - 8 = 0$ và $m + n = a + \log_2 b, (a, b \in \mathbb{N}^*)$, tính $S = a + b$.
- A. $S = 4$. B. $S = 6$. C. $S = 5$. D. $S = 9$.
- Câu 21. (THPT CHUYÊN NGUYỄN QUANG ĐIỀU 2018-2019 LẦN 2)** Hỏi phương trình $3.2^x + 4.3^x + 5.4^x = 6.5^x$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực?
- A. 0. B. 1. C. 3. D. 2.
- Câu 22. (THPT CHUYÊN VĨNH PHÚC LẦN 02 NĂM 2018-2019)** Biết rằng phương trình $e^x - e^{-x} = 2\cos ax$ (a là tham số) có 3 nghiệm thực phân biệt. Hỏi phương trình $e^x + e^{-x} = 2\cos ax + 4$ có bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?
- A. 5 B. 10 C. 6 D. 11
- Câu 23. (THPT CHUYÊN LAM SƠN THANH HÓA NĂM 2018-2019 LẦN 01)** Cho hai phương trình $x^2 + 7x + 3 - \ln(x + 4) = 0$ (1) và $x^2 - 9x + 11 - \ln(5 - x) = 0$ (2). Đặt T là tổng các nghiệm phân biệt của hai phương trình đã cho, ta có:
- A. 2 B. 8 C. 4 D. 6
- Câu 24.** Phương trình $4^x + 1 = 2^x.m.\cos(\pi x)$ có nghiệm duy nhất. Số giá trị của tham số m thỏa mãn là
- A. Vô số B. 1 C. 2 D. 0
- Câu 25. (CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG NAM ĐỊNH NĂM 2018-2019)** Cho $0 \leq x \leq 2020$ và $\log_2(2x + 2) + x - 3y = 8^y$. Có bao nhiêu cặp số $(x; y)$ nguyên thỏa mãn các điều kiện trên?
- A. 2019. B. 2018. C. 1. D. 4.
- Câu 26.** Tổng tất cả các nghiệm thực của phương trình $15x.5^x = 5^{x+1} + 27x + 23$ là
- A. 1. B. 0. C. 2. D. -1.
- Câu 27. (CHUYÊN THÁI BÌNH NĂM 2018-2019 LẦN 03)** Tập nghiệm của bất phương trình $3^{x^2-9} + (x^2 - 9).5^{x+1} < 1$ là khoảng $(a; b)$. Tính $b - a$
- A. 6. B. 3. C. 8. D. 4.
- Câu 28. (THPT ĐOAN THƯỢNG HẢI DƯƠNG NĂM 2018-2019 LẦN 02)** Biết x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) là hai nghiệm của phương trình $\log_3(\sqrt{x^2 - 3x + 2} + 2) + 5^{x^2 - 3x + 1} = 2$ và $x_1 + 2x_2 = \frac{1}{2}(a + \sqrt{b})$ với a, b là hai số nguyên dương. Tính $a - 2b$.
- A. 5. B. -1. C. 1. D. 9.

- Câu 29.** Phương trình $\log_3 \frac{2x-1}{(x-1)^2} = 3x^2 - 8x + 5$ có hai nghiệm là a và $\frac{a}{b}$ (Với $a, b \in \mathbb{N}^*$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản). Giá trị của b là
A. 1. B. 4. C. 2. D. 3.
- Câu 30.** (THPT NINH BÌNH BẠC LIÊU NĂM 2018-2019 LẦN 04) Tính tích tất cả các nghiệm thực của phương trình $\log_2 \left(\frac{2x^2+1}{2x} \right) + 2^{\left(x+\frac{1}{2x}\right)} = 5$.
A. 0. B. 2. C. 1. D. $\frac{1}{2}$.
- Câu 31.** (LIÊN TRƯỜNG THPT TP VINH NGHỆ AN NĂM 2018-2019) Biết phương trình $\log_{2018} \left(\frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x} \right) = 2 \log_{2019} \left(\frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \right)$ có nghiệm duy nhất $x = a + b\sqrt{2}$ trong đó a, b là những số nguyên. Khi đó $a+b$ bằng
A. 5 B. -1 C. 2 D. 1
- Câu 32.** (Đề thi chuyên vinh lần 1-2019) Cho hàm số $f(x) = 2^x - 2^{-x}$. Gọi m_0 là số lớn nhất trong các số nguyên m thỏa mãn $f(m) + f(2m - 2^{12}) < 0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?
A. $m_0 \in [1513; 2019)$. B. $m_0 \in [1009; 1513)$. C. $m_0 \in [505; 1009)$. D. $m_0 \in [1; 505)$.
- Câu 33.** Cho phương trình $5^x + m = \log_5(x - m)$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in (-20; 20)$ để phương trình đã cho có nghiệm?
A. 20 B. 19 C. 9 D. 21
- Câu 34.** Để giải phương trình $\log_2(\cot x - \tan x) = 1 + \cos 2x - \sin 2x$ trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$, bạn Tuấn giải theo các bước sau:
Bước 1: Do $x \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \cot x - \tan x > 0$. Ta có: $\cot x - \tan x = \frac{2\cos 2x}{\sin 2x}$. Phương trình đã cho tương đương với: $\log_2 \cos 2x - \cos 2x = \log_2 \sin 2x - \sin 2x$ (*) (Do $x \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right) : \sin 2x > 0, \cos 2x > 0$).
Bước 2: Xét hàm số $f(t) = \log_2 t - t, t \in (0; 1) \Rightarrow f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} - 1 > 0, \forall t \in (0; 1)$. Do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0; 1)$.
Bước 3: Phương trình (2) có dạng: $f(\cos 2x) = f(\sin 2x) \Leftrightarrow \cos 2x = \sin 2x \Leftrightarrow \tan 2x = 1$
 $\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z})$. Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \left\{ \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} / k \in \mathbb{Z} \right\}$.
Bạn Tuấn giải đã đúng chưa? Và nếu sai thì bạn Tuấn giải sai bắt đầu từ bước nào?
A. Bài giải đúng. B. Sai từ bước 1. C. Sai từ bước 2. D. Sai từ bước 3.
- Câu 35.** (THPT CHUYÊN VĨNH PHÚC NĂM 2018-2019 LẦN 3) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $e^{3m} + e^m = 2\left(x + \sqrt{1-x^2}\right)\left(1 + x\sqrt{1-x^2}\right)$ có nghiệm.

A. $\left(0; \frac{1}{2} \ln 2\right)$ B. $\left(-\infty; \frac{1}{2} \ln 2\right]$ C. $\left(0; \frac{1}{e}\right)$ D. $\left[\frac{1}{2} \ln 2; +\infty\right)$

Câu 36. (THPT CHUYÊN VĨNH PHÚC NĂM 2018-2019 LẦN 3) Tìm tập S tất cả các giá trị thực của tham số m để tồn tại duy nhất cặp số $(x; y)$ thỏa mãn $\log_{x^2+y^2+2}(4x+4y-6+m^2) \geq 1$ và $x^2+y^2+2x-4y+1=0$.

A. $S = \{-1; 1\}$ B. $S = \{-5; -1; 1; 5\}$ C. $S = \{-5; 5\}$ D. $S = \{-7; -5; -1; 1; 5; 7\}$

Câu 37. (CỤM 8 TRƯỜNG CHUYÊN LẦN 1) Số giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2019; 2]$ để phương trình $(x-1)[\log_3(4x+1)+\log_5(2x+1)]=2x-m$ có đúng hai nghiệm thực là

A. 2. B. 2022. C. 1. D. 2021.

Câu 38. (CHUYÊN KHTN NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho số thực α sao cho phương trình $2^x - 2^{-x} = 2 \cos(\alpha x)$ có đúng 2019 nghiệm thực. Số nghiệm của phương trình $2^x + 2^{-x} = 4 + 2 \cos(\alpha x)$ là

A. 2019. B. 2018. C. 4037. D. 4038.

Câu 39. (CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU NGHỆ AN NĂM 2018-2019 LẦN 04) Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-100; 100]$ để phương trình $2019^x = mx + 1$ có hai nghiệm phân biệt?

A. 94 B. 92 C. 184 D. 100.

Câu 40. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $\ln(m + \ln(m + \sin x)) = \sin x$ có nghiệm.

A. $\frac{1}{e} + 1 \leq m \leq e - 1$. B. $1 \leq m \leq e - 1$. C. $1 \leq m \leq \frac{1}{e} + 1$. D. $1 \leq m < e - 1$.

Câu 41. (CHUYÊN SƠN LA NĂM 2018-2019 LẦN 03) Tổng tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $2^{x^2+4x+5-m^2} = \log_{x^2+4x+6}(m^2+1)$ có đúng 1 nghiệm là

A. 1. B. 0. C. -2. D. 4.

Câu 42. (THPT CHUYÊN VĨNH PHÚC NĂM 2018-2019 LẦN 02) Biết rằng phương trình $e^x - e^{-x} = 2 \cos ax$ (a là tham số) có 3 nghiệm thực phân biệt. Hỏi phương trình $e^x + e^{-x} = 2 \cos ax + 4$ có bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?

A. 5 B. 10 C. 6 D. 11

Câu 43. (CHUYÊN HƯNG YÊN NĂM 2018-2019 LẦN 03) Cho hàm số $f(x) = 3^{x-4} + (x+1) \cdot 2^{7-x} - 6x + 3$.

Giả sử $m_0 = \frac{a}{b}$ ($a, b \in \mathbb{Z}$, $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản) là giá trị nhỏ nhất của tham số thực m sao cho phương trình $f\left(7 - 4\sqrt{6x - 9x^2}\right) + 2m - 1 = 0$ có số nghiệm nhiều nhất. Tính giá trị của biểu thức

$P = a + b^2$.

A. $P = 11$. B. $P = 7$. C. $P = -1$. D. $P = 9$.

Câu 44. (ĐTK BGD&ĐT NĂM 2019-2020 LẦN 01) Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $0 \leq x \leq 2020$ và $\log_3(3x+3) + x = 2y + 9^y$?

A. 2019. B. 6. C. 2020. D. 4.

Câu 45. (ĐTK BGD&ĐT NĂM 2019-2020 LẦN 02) Có bao nhiêu số nguyên x sao cho tồn tại số thực y thỏa mãn $\log_3(x+y) = \log_4(x^2+y^2)$?

- A. 3. B. 2. C. 1. D. Vô số
- Câu 46.** Cho $a > 0, b > 0$ thỏa mãn $\log_{3a+2b+1}(9a^2 + b^2 + 1) + \log_{6ab+1}(3a + 2b + 1) = 2$. Giá trị của $a + 2b$ bằng
- A. 6 B. 9 C. $\frac{7}{2}$ D. $\frac{5}{2}$
- Câu 47.** Cho phương trình $3^x + m = \log_3(x - m)$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in (-15; 15)$ để phương trình đã cho có nghiệm?
- A. 16 B. 9 C. 14 D. 15
- Câu 48.** (MĐ 103 BGD&ĐT NĂM 2016-2017) Xét hàm số $f(t) = \frac{9^t}{9^t + m^2}$ với m là tham số thực. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho $f(x) + f(y) = 1$ với mọi x, y thỏa mãn $e^{x+y} \leq e(x+y)$. Tìm số phần tử của S .
- A. 0. B. 1. C. Vô số. D. 2.
- Câu 49.** (SỞ GD&ĐT PHÚ THỌ NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho $a > 0, b > 0$ thỏa mãn $\log_{16}(a + 3b) = \log_9 a = \log_{12} b$. Giá trị của $\frac{a^3 - ab^2 + b^3}{a^3 + a^2b + 3b^3}$ bằng
- A. $\frac{6 - \sqrt{13}}{11}$ B. $\frac{8 - 17\sqrt{13}}{69}$ C. $\frac{5 - \sqrt{13}}{6}$ D. $\frac{3 + \sqrt{13}}{11}$
- Câu 50.** (THPT NGUYỄN KHUYẾN TP.HCM NĂM 2018-2019) Cho a, b là các số dương thỏa mãn $\log_9 a = \log_{16} b = \log_{12} \frac{5b - a}{2}$. Giá trị của $\frac{a}{b}$ bằng
- A. $\frac{a}{b} = -1 + \sqrt{6}$. B. $\frac{a}{b} = \frac{7 + 2\sqrt{6}}{25}$. C. $\frac{a}{b} = \frac{1 + \sqrt{6}}{5}$. D. $\frac{a}{b} = 7 - 2\sqrt{6}$.
- Câu 51.** (KSCL THPT NGUYỄN KHUYẾN LẦN 05 NĂM 2018-2019) Với các số thực x, y dương thỏa mãn $\log_9 x = \log_6 y = \log_4 \left(\frac{x+y}{6} \right)$. Tính tỉ số $\frac{x}{y}$.
- A. 3 B. 5 C. 2 D. 4
- Câu 52.** (SỞ GD&ĐT HÀ NỘI NĂM 2018-2019) Cho phương trình $2^x = \sqrt{m \cdot 2^x \cdot \cos(\pi x)} - 4$, với m là tham số. Gọi m_0 là giá trị của m sao cho phương trình trên có đúng một nghiệm thực. Khẳng định nào sau đây là đúng?
- A. $m_0 \in [-5; -1)$. B. $m_0 < -5$. C. $m_0 \in [-1; 0)$. D. $m_0 > 0$.
- Câu 53.** (SỞ GD&ĐT NINH BÌNH LẦN 01 NĂM 2018-2019) Số nghiệm của phương trình $50^x + 2^{x+5} = 3 \cdot 7^x$ là:
- A. 1. B. 2. C. 3. D. 0.
- Câu 54.** (THPT CHUYÊN LAM SƠN THANH HÓA NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho a là số thực dương, $a \neq 1$. Biết bất phương trình $2\log_a x \leq x - 1$ nghiệm đúng với mọi $x > 0$. Số a thuộc tập hợp nào sau đây?
- A. $(7; 8)$ B. $(3; 5]$ C. $(2; 3)$ D. $(8; +\infty)$
- Câu 55.** (SỞ GD&ĐT VĨNH PHÚC NĂM 2018-2019 LẦN 02) Số nghiệm thực của phương trình $\log_3 |x^2 - \sqrt{2}x| = \log_5 (x^2 - \sqrt{2}x + 2)$ là

- A. 4. B. 3. C. 1. D. 2.
- Câu 56. (THPT Chuyên Vĩnh Phúc-lần 2-năm 2017-2018)** Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $\ln\left(\frac{1-2x}{x+y}\right) = 3x+y-1$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của $P = \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{xy}}$.
- A. $P_{\min} = 8$. B. $P_{\min} = 4$. C. $P_{\min} = 2$. D. $P_{\min} = 16$.
- Câu 57. (THPT Số 3-486 tháng 12 năm 2017-2018)** Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $\log_{\sqrt{3}} \frac{x+y}{x^2+y^2+xy+2} = x(x-3)+y(y-3)+xy$. Tìm giá trị lớn nhất $P_{\max}$ của biểu thức $P = \frac{3x+2y+1}{x+y+6}$.
- A. 3. B. 2. C. 1. D. 4.
- Câu 58. (SỞ GD&ĐT BẮC NINH NĂM 2018-2019 LẦN 01)** Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2\left(x\sqrt{x^2+2}+4-x^2\right)+2x+\sqrt{x^2+2} \leq 1$ là $\left(-\sqrt{a};-\sqrt{b}\right]$. Khi đó $a.b$ bằng
- A. $\frac{15}{16}$. B. $\frac{12}{5}$. C. $\frac{16}{15}$. D. $\frac{5}{12}$.
- Câu 59. (MĐ 103 BGD&ĐT NĂM 2019-2020)** Có bao nhiêu số nguyên x sao cho ứng với mỗi x có không quá 127 số nguyên y thỏa mãn $\log_3(x^2+y) \geq \log_2(x+y)$?
- A. 89. B. 46. C. 45. D. 90.
- Câu 60. (MĐ 103 BGD&ĐT NĂM 2019-2020)** Xét các số thực không âm x và y thỏa mãn $2x+y.4^{x+y-1} \geq 3$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + y^2 + 2x + 4y$ bằng
- A. $\frac{33}{8}$. B. $\frac{9}{8}$. C. $\frac{21}{4}$. D. $\frac{41}{8}$.
- Câu 61. (THPT Trần Hưng Đạo-TP HCM năm 2017-2018)** Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $2018^{2(x^2-y+1)} = \frac{2x+y}{(x+1)^2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của $P = 2y - 3x$.
- A. $P_{\min} = \frac{1}{2}$. B. $P_{\min} = \frac{7}{8}$. C. $P_{\min} = \frac{3}{4}$. D. $P_{\min} = \frac{5}{6}$.
- Câu 62. (THPT Mộ Đức-Quảng Ngãi-lần 1 năm 2017-2018)** Cho hai số thực dương x, y thay đổi thỏa mãn đẳng thức $(xy-1).2^{2xy-1} = (x^2+y).2^{x^2+y}$. Tìm giá trị nhỏ nhất $y_{\min}$ của y .
- A. $y_{\min} = 3$. B. $y_{\min} = 2$. C. $y_{\min} = 1$. D. $y_{\min} = \sqrt{3}$.
- Câu 63. (THPT Chuyên Thái Bình – Thái Bình – Lần 5 năm 2017 – 2018)** Cho 2 số thực dương x, y thỏa mãn $\log_3\left[(x+1)(y+1)\right]^{y+1} = 9 - (x-1)(y+1)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + 2y$ là
- A. $P_{\min} = \frac{11}{2}$. B. $P_{\min} = \frac{27}{5}$. C. $P_{\min} = -5 + 6\sqrt{3}$. D. $P_{\min} = -3 + 6\sqrt{2}$.
- Câu 64.** Cho các số thực x, y với $x > 2$ thỏa mãn $\log_2(x-2) + 4x^3 + 48x - 31 = y + 4.8^{y-24x^2-1}$. Giá trị lớn nhất của $P = 2^{y-24x^2} \cdot (6-x)$ là
- A. 14. B. 6. C. 32. D. 8.

Câu 65. [PHÁT TRIỂN 47 - ĐỀ THI THAM KHẢO – 2020] Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x; y)$

với $y \leq 2020$ thỏa mãn: $\log_2 \frac{x+2}{y+1} < 4y^4 + 8y^3 - (x^2 + 4x)y^2 + 1$

A. 2019.2020. B. 2020.2021. C. 2019². D. 2020²

Câu 66. [PHÁT TRIỂN 47 - ĐỀ THI THAM KHẢO – 2020] Biết rằng bất phương trình

$$x\sqrt{x+2} = (8x+4) \cdot 2^{\frac{-x^3+4x+1}{x^2}}, \text{ có một nghiệm dương là } x = \frac{a+\sqrt{b}}{c} \text{ với } a, b, c \in \mathbb{N}; b \leq 20. \text{ Khi đó}$$

biểu thức $P = a + b + c$ bằng giá trị nào sau đây ?

A. 18. B. 16. C. 10. D. 8.

Câu 67. Cho hàm số $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$. Có tất cả bao nhiêu số nguyên m thỏa mãn bất phương

$$\text{trình } f(\log m) + f\left(\log_m \frac{1}{2019}\right) \leq 0?$$

A. 65. B. 66. C. 64. D. 63.

Câu 68. [PHÁT TRIỂN 47 - ĐỀ THI THAM KHẢO – 2020] Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $\ln(m + 3\sin x + \ln(m + 4\sin x)) = \sin x$ có nghiệm thực?

A. 6. B. 10. C. 5. D. 9.

HẾT

Huế, ngày 09 tháng 12 năm 2020

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1. (THPT GIA LỘC HẢI DƯƠNG NĂM 2018-2019 LẦN 02) Cho hai số thực a, b thỏa mãn

$$\log_{100} a = \log_{40} b = \log_{16} \frac{a-4b}{12}. \text{ Giá trị của } \frac{a}{b} \text{ bằng}$$

A. 6.

B. 12.

C. 2.

D. 4.

Lời giải:

Điều kiện: $a, b > 0$ và $a - 4b > 0$

$$\text{Đặt } \log_{100} a = \log_{40} b = \log_{16} \frac{a-4b}{12} = t \Rightarrow \begin{cases} a = 100^t \\ b = 40^t \\ a - 4b = 12 \cdot 16^t \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } 100^t - 4 \cdot 40^t - 12 \cdot 16^t = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{5}{2}\right)^{2t} - 4 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^t - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{5}{2}\right)^t = 6 \\ \left(\frac{5}{2}\right)^t = -2 \text{ (l)} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } \frac{a}{b} = \left(\frac{5}{2}\right)^t = 6.$$

Câu 2. (THPT CHUYÊN BẮC GIANG NAM 2018-2019 LẦN 01) Phương trình $2^{x-3} = 5^{x^2-5x+6}$ có một nghiệm dạng $x = b + \log_a b$ với a, b là các số nguyên dương thuộc khoảng $(1; 7)$. Khi đó $a + 2b$ bằng

A. 7

B. 24

C. 9

D. 16

Lời giải:

$$\text{Ta có } 2^{x-3} = 5^{x^2-5x+6} \Leftrightarrow \log_2 2^{x-3} = \log_2 5^{x^2-5x+6} \Leftrightarrow x-3 = (x^2-5x+6)\log_2 5$$

$$\Leftrightarrow x-3 = (x-3)(x-2)\log_2 5 \Leftrightarrow \begin{cases} x-3=0 \\ (x-2)\log_2 5=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=2+\log_5 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b=2 \\ a=5 \end{cases} \Rightarrow a+2b=5+2 \cdot 2=9$$

Câu 3. Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $\log_3 \frac{1-y}{x+3xy} = 3xy + x + 3y - 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của $P = x + y$.

A. $P_{\min} = \frac{4\sqrt{3}-4}{3}$.

B. $P_{\min} = \frac{4\sqrt{3}+4}{3}$.

C. $P_{\min} = \frac{4\sqrt{3}+4}{9}$.

D. $P_{\min} = \frac{4\sqrt{3}-4}{9}$.

Lời giải:

Để $\frac{1-y}{x+3xy} > 0$ mà từ giả thiết $x, y > 0$ suy ra $1-y > 0 \Leftrightarrow y < 1$. Vậy ĐKXD: $x > 0; 0 < y < 1$.

$$\text{Ta có: } \log_3 \frac{1-y}{x+3xy} = 3xy + x + 3y - 4 \Leftrightarrow \frac{1-y}{x+3xy} = 3^{3xy+x+3y-4} \Leftrightarrow \frac{3(1-y)}{x+3xy} = 3^{3xy+x+3y-3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3(1-y)}{x+3xy} = \frac{3^{3xy+x}}{3^{3-3y}} \Leftrightarrow (3-3y).3^{3-3y} = (3xy+x).3^{3xy+x} (*)$$

Xét $f(t) = t.3^t$ với $t > 0$. Ta có $f'(t) = 3^t + t.3^t \ln 3 > 0$ với $\forall t > 0$, suy ra $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$. Từ (*) ta có $f(3-3y) = f(3xy+x)$ với $3-3y > 0, 3xy+x > 0$ nên

$$3-3y = 3xy+x \Leftrightarrow y = \frac{3-x}{3(x+1)}.$$

$$\text{Ta có } P = x+y = x + \frac{3-x}{3(x+1)} = (x+1) + \left(\frac{3-x}{3(x+1)} + \frac{1}{3} \right) - \frac{4}{3}$$

$$P = (x+1) + \frac{4}{3(x+1)} - \frac{4}{3} \geq 2 \sqrt{(x+1) \cdot \frac{4}{3(x+1)}} - \frac{4}{3} = \frac{4\sqrt{3}-4}{3}.$$

$$\text{Vậy } P_{\min} = \frac{4\sqrt{3}-4}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = \frac{4}{3(x+1)} \\ y = \frac{3-x}{3(x+1)} \\ x > 0; 0 < y < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2\sqrt{3}-3}{3} \\ y = \frac{2\sqrt{3}-1}{3} \end{cases}.$$

Câu 4. (THPT - YÊN ĐỊNH THANH HÓA 2018 2019- LẦN 2) Cho x, y là hai số thực không âm thỏa

mãn $x^2 + 2x - y + 1 = \log_2 \frac{\sqrt{2y+1}}{x+1}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = e^{2x-1} + 4x^2 - 2y + 1$ là

A. $\frac{1}{2}$.

B. -1 .

C. $-\frac{1}{2}$.

D. 1 .

Lời giải:

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x > -1 \\ y > -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } x^2 + 2x - y + 1 = \log_2 \frac{\sqrt{2y+1}}{x+1} \Leftrightarrow 2(x+1)^2 - 2y - 1 = \log_2 (2y+1) - \log_2 [2(x+1)^2]$$

$$\Leftrightarrow 2(x+1)^2 + \log_2 [2(x+1)^2] = 2y+1 + \log_2 (2y+1) \quad (1).$$

Xét hàm số $f(t) = t + \log_2 t, t > 0$

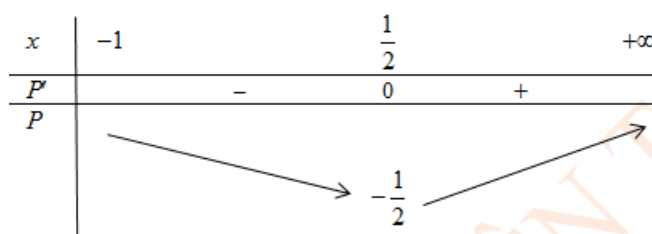
Ta có: $f'(t) = 1 + \frac{1}{t \ln 2} > 0, \forall t > 0$ suy ra $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

$$\text{Phương trình (1)} \Leftrightarrow f(2(x+1)^2) = f(2y+1) \Leftrightarrow 2y+1 = 2(x+1)^2 \Leftrightarrow 2y = 2(x+1)^2 - 1.$$

$$\text{Ta có: } P = e^{2x-1} + 4x^2 - 2y + 1 = e^{2x-1} + 2x^2 - 4x$$

$$P' = 2e^{2x-1} + 4x - 4; P' = 0 \Leftrightarrow e^{2x-1} = 2 - 2x \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Bảng biến thiên



Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = e^{2x-1} + 4x^2 - 2y + 1$ là $-\frac{1}{2}$.

Câu 5. (THPT BA ĐÌNH NĂM 2018-2019 LẦN 02) Xét các số thực dương x, y thỏa mãn

$2019^{2(x^2-y+1)} = \frac{2x+y}{(x+1)^2}$. Giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức $P = 2y - x$ bằng

A. $P_{\min} = \frac{1}{4}$.

B. $P_{\min} = \frac{1}{2}$.

C. $P_{\min} = \frac{7}{8}$.

D. $P_{\min} = \frac{15}{8}$.

Lời giải:

Ta có: $2019^{2(x^2-y+1)} = \frac{2x+y}{(x+1)^2} \Leftrightarrow (x+1)^2 \cdot 2019^{2(x^2+1)} = (2x+y) \cdot 2019^{2y}$

$\Leftrightarrow (x+1)^2 \cdot 2019^{2(x+1)^2-4x} = (2x+y) \cdot 2019^{2y} \Leftrightarrow (x+1)^2 \cdot 2019^{2(x+1)^2} = (2x+y) \cdot 2019^{2(2x+y)}$. (1)

Đặt $u = (x+1)^2, v = 2x+y, (u > 0, v > 0)$, khi đó (1) trở thành $u \cdot 2019^{2u} = v \cdot 2019^{2v}$. (2)

Xét hàm đặc trưng $f(t) = t \cdot 2019^{2t}, (t > 0)$, ta có

$f'(t) = 2019^{2t} + 2t \cdot 2019^{2t} \cdot \ln 2019 > 0, \forall t \in (0; +\infty) \Rightarrow$ Hàm $f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Phương trình (2) $\Leftrightarrow f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v \Leftrightarrow (x+1)^2 = 2x+y \Leftrightarrow y = x^2 + 1$.

Vậy $P = 2y - x = 2x^2 - x + 2$. Do P là hàm bậc hai có hệ số $a = 2 > 0$ nên

$\min P = P\left(-\frac{b}{2a}\right) = P\left(\frac{1}{4}\right) = 2 \cdot \frac{1}{16} - \frac{1}{4} + 2 = \frac{15}{8}$.

Câu 6. (MĐ 104 BGD&ĐT NĂM 2019-2020) Xét các số thực không âm x và y thỏa mãn

$2x + y \cdot 4^{x+y-1} \geq 3$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + y^2 + 4x + 2y$ bằng

A. $\frac{33}{8}$.

B. $\frac{9}{8}$.

C. $\frac{21}{4}$.

D. $\frac{41}{8}$.

Lời giải:

Ta có $2x + y \cdot 4^{x+y-1} \geq 3 \Leftrightarrow (2x-3) \cdot 4^{-x} + y \cdot 4^{y-1} \geq 0 \Leftrightarrow 2y \cdot 2^{2y} \geq (3-2x)2^{3-2x}$

Xét TH $3-2x \leq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{3}{2}$. đúng với mọi giá trị $\begin{cases} x \geq \frac{3}{2} \\ y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow P = x^2 + y^2 + 4x + 2y \geq \frac{33}{4}$

Xét TH $3-2x > 0 \Leftrightarrow 0 \leq x < \frac{3}{2}$.

Xét hàm số $f(t) = t \cdot 2^t$ với $t \geq 0$

$\Rightarrow f'(t) = 2^t + t \cdot 2^t \cdot \ln 2 > 0$ với mọi $t \geq 0$

$\Leftrightarrow f(2y) \geq f(3-2x) \Leftrightarrow 2y \geq 3-2x \Leftrightarrow y \geq \frac{3}{2} - x$

$$\Rightarrow P = x^2 + y^2 + 4x + 2y \geq x^2 + \left(\frac{3}{2} - x\right)^2 + 4x + (3 - 2x) = 2x^2 - x + \frac{21}{4}$$

$$\Rightarrow P = 2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{41}{8} \geq \frac{41}{8}$$

So sánh và ta thấy GTNN của P là $\frac{41}{8}$ khi $x = \frac{1}{4}, y = \frac{5}{4}$

Câu 7. (MĐ 104 BGD&ĐT NĂM 2019-2020) Có bao nhiêu số nguyên x sao cho ứng với mỗi x có không quá 255 số nguyên y thỏa mãn $\log_3(x^2 + y) \geq \log_2(x + y)$?

A. 80.

B. 79.

C. 157.

D. 158

Lời giải:

$$\text{Ta có: } \log_3(x^2 + y) \geq \log_2(x + y) \Leftrightarrow x^2 + y \geq 3^{\log_2(x+y)} \Leftrightarrow x^2 + y \geq (x + y)^{\log_2 3} \quad (1)$$

Đk: $x + y \geq 1$

$$\text{Đặt } t = x + y \geq 1, \text{ nên từ (1)} \Rightarrow x^2 - x \geq t^{\log_2 3} - t \quad (2)$$

Để (1) không có quá 255 nghiệm nguyên y khi và chỉ khi bất phương trình (2) có không quá 255 nghiệm nguyên dương t .

$$\text{Đặt } M = f(255) \text{ với } f(t) = t^{\log_2 3} - t.$$

Vì f là hàm đồng biến trên $[1, +\infty)$ nên (2) $\Leftrightarrow 1 \leq t \leq f^{-1}(x^2 - x)$ khi $x^2 - x \geq 0$.

Vậy (2) có không quá 255 nghiệm nguyên $\Leftrightarrow f^{-1}(x^2 - x) \leq 255 \Leftrightarrow x^2 - x \leq 255 \Leftrightarrow -78 \leq x \leq 79$ ($x \in \mathbb{Z}$).

Vậy có 158 số nguyên x thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 8. (CHUYÊN LÊ THÁNH TÔNG NĂM 2018-2019 LẦN 02) Cho hai số dương $x; y$ thỏa $\log_2(4x + y + 2xy + 2)^{y+2} = 8 - (2x - 2)(y + 2)$. Giá trị nhỏ nhất của $P = 2x + y$ là số có dạng

$M = a\sqrt{b} + c$ với $a, b \in \mathbb{N}, a > 2$. Tính $S = a + b + c$.

A. $S = 17$.

B. $S = 7$.

C. $S = 19$.

D. $S = 3$.

Lời giải:

Với hai số dương $x; y$ thỏa $\log_2(4x + y + 2xy + 2)^{y+2} = 8 - (2x - 2)(y + 2)$

Ta có $(y + 2)\log_2(4x + y + 2xy + 2) = 8 - (2x - 2)(y + 2)$

$$\Leftrightarrow (y + 2)\log_2(2x + 1)(y + 2) = 8 - (2x + 1)(y + 2) + 3(y + 2)$$

$$\Leftrightarrow \log_2(2x + 1) + \log_2(y + 2) = \frac{8}{y + 2} - (2x + 1) + 3 \Leftrightarrow \log_2(2x + 1) + (2x + 1) = \log_2\left(\frac{8}{y + 2}\right) + \frac{8}{y + 2} \quad (1).$$

Xét hàm đặc trưng $f(t) = \log_2 t + t$ trên $(0; +\infty)$ có $f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + 1 > 0, \forall t > 0$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

$$\text{Phương trình (1) có dạng: } f(2x + 1) = f\left(\frac{8}{y + 2}\right) \Rightarrow 2x + 1 = \frac{8}{y + 2} \Leftrightarrow y = \frac{8}{2x + 1} - 2.$$

$$P = 2x + y = 2x + \frac{8}{2x+1} - 2 = (2x+1) + \left(\frac{8}{2x+1}\right) - 3 \stackrel{AM-GM}{\geq} 4\sqrt{2} - 3.$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi } 2x+1 = \frac{8}{2x+1} \Leftrightarrow (2x+1)^2 = 8 \Leftrightarrow x = \frac{-1+2\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Vậy } S = a + b + c = 3.$$

Câu 9. (THPT CHUYÊN THÁI BÌNH NĂM 2018-2019 LẦN 04) Cho các số thực x, y với $x \geq 0$ thỏa

mãn $e^{x+3y} + e^{xy+1} + x(y+1) + 1 = e^{-xy-1} + \frac{1}{e^{x+3y}} - 3y$. Gọi m là giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$T = x + 2y + 1$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $m \in (2; 3)$.

B. $m \in (-1; 0)$.

C. $m \in (0; 1)$.

D. $m \in (1; 2)$.

Lời giải:

$$\text{Từ giả thiết } e^{x+3y} + e^{xy+1} + x(y+1) + 1 = e^{-xy-1} + \frac{1}{e^{x+3y}} - 3y$$

$$\Leftrightarrow e^{x+3y} - \frac{1}{e^{x+3y}} + (x+3y) = e^{-xy-1} - \frac{1}{e^{-xy-1}} + (-xy-1) \quad (1).$$

Xét hàm số $f(t) = e^t - \frac{1}{e^t} + t$ với $t \in \mathbb{R}$ ta có $f'(t) = e^t + \frac{1}{e^t} + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow f(t)$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Phương trình (1) có dạng } f(x+3y) = f(-xy-1) \Rightarrow x+3y = -xy-1 \Rightarrow y = \frac{-x-1}{x+3} (x \geq 0).$$

$$\text{Khi đó } T = x + 2y + 1 = x - \frac{2x+2}{x+3} + 1 \Rightarrow T' = 1 - \frac{4}{(x+3)^2} = \frac{x^2+6x+5}{(x+3)^2} > 0, \forall x \geq 0$$

$$\Rightarrow T_{\min} = 0 - \frac{2 \cdot 0 + 2}{0 + 3} + 1 = \frac{1}{3} = m.$$

Câu 10. (THPT CHUYÊN VĨNH PHÚC LẦN 02 NĂM 2018-2019) Kí hiệu $\max\{a; b\}$ là số lớn nhất

trong hai số a, b . Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\max\left\{\log_2 x; \log_{\frac{1}{3}} x\right\} < 1$.

A. $S = \left(\frac{1}{3}; 2\right)$.

B. $S = (0; 2)$.

C. $S = \left(0; \frac{1}{3}\right)$.

D. $S = (2; +\infty)$.

Lời giải:

$$y = \log_2 x - \log_{\frac{1}{3}} x = \log_2 x + \log_3 x$$

$$y' = \frac{1}{x \ln 2} + \frac{1}{x \ln 3} > 0, \forall x > 0 \text{ nên phương trình } y = 0 \text{ có nghiệm duy nhất}$$

Mà phương trình $y = 0$ có nghiệm $x = 1$ do đó

$$\text{TH1: } x < 1: \log_2 x < \log_{\frac{1}{3}} x$$

$$\text{Ta có } \max\left\{\log_2 x; \log_{\frac{1}{3}} x\right\} < 1 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{3}} x < 1 \Leftrightarrow x > \frac{1}{3}. \text{ Do đó } \frac{1}{3} < x < 1$$

$$\text{TH2: } x \geq 1: \log_2 x \geq \log_{\frac{1}{3}} x$$

Ta có $\max\left\{\log_2 x; \log_{\frac{1}{3}} x\right\} < 1 \Leftrightarrow \log_2 x < 1 \Leftrightarrow x < 2$. Do đó $1 \leq x < 2$. Vậy $S = \left(\frac{1}{3}; 2\right)$.

Câu 11. (CHUYÊN QUANG TRUNG BÌNH PHƯỚC NĂM 2018-2019 LẦN 07) Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 12x^2 + 2018x - 2019$. Số giá trị $m \in \mathbb{Z}, m \in [-12; 12]$ thỏa bất phương trình $f(\log_{0,2}(\log_2(m-1)) - 2019) < f(f(0))$ là

A. 9.

B. 10.

C. 11.

D. 12.

Lời giải:

Ta có $y' = 3x^2 - 24x + 2018 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow y = f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó $f(\log_{0,2}(\log_2(m-1)) - 2019) < f(f(0)) \Leftrightarrow \log_{0,2}(\log_2(m-1)) - 2019 < -2019$

$\Leftrightarrow \log_{0,2}(\log_2(m-1)) < 0 \Leftrightarrow \log_2(m-1) > 1 \Leftrightarrow m-1 > 2 \Leftrightarrow m > 3$. Do đó $m \in \{4; 5; 6; \dots; 12\}$

Câu 12. Cho các số $m > 0, n > 0, p > 0$ thỏa mãn $4^m = 10^n = 25^p$. Tính giá trị biểu thức $T = \frac{n}{2m} + \frac{n}{2p}$.

A. $T = 1$.

B. $T = \frac{5}{2}$.

C. $T = 2$.

D. $T = \frac{1}{10}$.

Lời giải:

Vì $4^m = 10^n \Rightarrow n = m \log 4 \Rightarrow \frac{n}{2m} = \frac{\log 4}{2} = \log 2$.

Vì $10^n = 25^p \Rightarrow n = p \log 25 \Rightarrow \frac{n}{2p} = \frac{\log 25}{2} = \log 5$.

Suy ra $T = \frac{n}{2m} + \frac{n}{2p} = \log 2 + \log 5 = \log 10 = 1$.

Câu 13. Cho a, b, c là các số thực khác 0 thỏa mãn $4^a = 9^b = 6^c$. Khi đó $\frac{c}{a} + \frac{c}{b}$ bằng

A. $\frac{1}{2}$.

B. $\frac{1}{6}$.

C. $\sqrt{6}$.

D. 2.

Lời giải:

Đặt $t = 4^a = 9^b = 6^c$ với $0 < t \neq 1$, khi đó:

$\log_4 t = a \Leftrightarrow \frac{1}{a} = \frac{2}{\log_2 t} \Rightarrow a = \frac{\log_2 t}{2}; \log_9 t = b \Leftrightarrow \frac{1}{b} = \frac{2}{\log_3 t} \Rightarrow b = \frac{\log_3 t}{2}$.

$\log_6 t = c \Leftrightarrow \frac{1}{c} = \log_t 6 = \log_t 2 + \log_t 3 = \frac{1}{\log_2 t} + \frac{1}{\log_3 t} \Rightarrow c = \frac{\log_2 t \cdot \log_3 t}{\log_2 t + \log_3 t}$.

Suy ra: $\frac{c}{a} + \frac{c}{b} = \frac{2 \log_3 t + 2 \log_2 t}{\log_3 t + \log_2 t} = 2$.

Câu 14. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $0 \leq x \leq 2020$ và $1 \leq y \leq 2020$ và $4^{x+1} + \log_2(y+3) = 16 \cdot 2^y + \log_2(2x+1)$?

A. 2019.

B. 2020.

C. 1010.

D. 1011.

Lời giải:

Điều kiện bài toán: $\begin{cases} 0 \leq x \leq 2020 \\ 1 \leq y \leq 2020 \end{cases}$

Ta có: $4^{x+1} + \log_2(y+3) = 16 \cdot 2^y + \log_2(2x+1) \Leftrightarrow 2^{2x+2} - \log_2(2x+1) = 2^{y+4} - \log_2(y+3) (*)$

Xét hàm số $f(t) = 2^{t+1} - \log_2 t$ trên $[1; +\infty)$.

Ta có $f'(t) = 2^{t+1} \ln 2 - \frac{1}{t \ln 2} = \frac{t \cdot 2^{t+1} \cdot \ln^2 2 - 1}{t \ln 2} > 0, \forall t \in [1; +\infty) \Rightarrow$ hàm số đồng biến trên $[1; +\infty)$.

Khi đó $(*) \Leftrightarrow f(2x+1) = f(y+3) \Leftrightarrow 2x+1 = y+3 \Leftrightarrow y = 2x-2$

Vì $1 \leq y \leq 2020 \Leftrightarrow 1 \leq 2x-2 \leq 2020 \Leftrightarrow \frac{3}{2} \leq x \leq 1011$.

Do x nguyên nên $x \in \{2; 3; 4; \dots; 1011\}$. Rõ ràng, với mỗi x ta xác định được tương ứng duy nhất một giá trị y nguyên thỏa mãn. Vậy có 1010 cặp số nguyên $(x; y)$.

Câu 15. Biết x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $\log_7\left(\frac{4x^2-4x+1}{2x}\right) + 4x^2 + 1 = 6x$ và

$x_1 + 2x_2 = \frac{1}{4}(a + \sqrt{b})$ với a, b là hai số nguyên dương. Tính $a + b$.

A. $a + b = 13$.

B. $a + b = 11$.

C. $a + b = 16$.

D. $a + b = 14$.

Lời giải:

Điều kiện: $x > 0, x \neq \frac{1}{2}$.

Ta có: $\log_7\left(\frac{4x^2-4x+1}{2x}\right) + 4x^2 + 1 = 6x \Leftrightarrow \log_7(4x^2-4x+1) + 4x^2 - 4x + 1 = \log_7(2x) + 2x$.

Xét hàm số $f(t) = \log_7 t + t$ có $f'(t) = \frac{1}{t \ln 7} + 1 > 0 \quad \forall t > 0$ nên là hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Do đó ta có $4x^2 - 4x + 1 = 2x \Leftrightarrow 4x^2 - 6x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{4}$.

Khi đó: $x_1 + 2x_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{4} + 2 \cdot \frac{3 + \sqrt{5}}{4} = \frac{1}{4}(9 + \sqrt{5})$ hoặc $x_1 + 2x_2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{4} + 2 \cdot \frac{3 - \sqrt{5}}{4} = \frac{1}{4}(9 - \sqrt{5})$.

Vậy $x_1 = \frac{3 - \sqrt{5}}{4}; x_2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{4}$. Do đó $a = 9; b = 5$ và $a + b = 9 + 5 = 14$.

Câu 16. Cho phương trình $2\log_3(\cot x) = \log_2(\cos x)$. Phương trình này có bao nhiêu nghiệm trên khoảng $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{9\pi}{2}\right)$?

A. 4.

B. 3.

C. 2.

D. 6.

Lời giải:

Điều kiện: $\begin{cases} \sin x > 0 \\ \cos x > 0 \end{cases}$.

Đặt $2\log_3(\cot x) = \log_2(\cos x) = t \Rightarrow \begin{cases} \cot^2 x = 3^t \\ \cos x = 2^t \end{cases} \Rightarrow 1 + 3^t = \frac{1}{1 - 4^t} \Leftrightarrow 1 - 4^t + 3^t - 12^t = 1$

$$\Leftrightarrow 12^t + 4^t = 3^t \Leftrightarrow 4^t + \left(\frac{4}{3}\right)^t = 1 \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t) = 4^t + \left(\frac{4}{3}\right)^t \Rightarrow f'(t) = 4^t \ln 4 + \left(\frac{4}{3}\right)^t \ln \frac{4}{3} > 0, \forall t \in \mathbb{R}$, suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$, mà $f(-1) = 1 \Rightarrow t = -1$ là nghiệm duy nhất của phương trình (1).

$$t = -1 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases}.$$

Vì $\begin{cases} \sin x > 0 \\ \cos x > 0 \end{cases}$, suy ra điểm biểu diễn của các họ nghiệm phải thuộc góc phần tư thứ nhất nên

chỉ có họ nghiệm $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$ là thỏa mãn. Khi đó $\frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{3} + k2\pi < \frac{9\pi}{2} \Leftrightarrow 1 < 2 + 12k < 27$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{12} < k < \frac{25}{12}$. Vì $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k \in \{0; 1; 2\}$. Do đó phương trình có 3 nghiệm thỏa mãn.

Câu 17. Biết m, n là hai số thực thỏa mãn $x.2^x + 3.2^{3-x} - 3x - 8 = 0$ và $m + n = a + \log_2 b$, ($a, b \in \mathbb{N}^*$), tính $S = a + b$.

A. $S = 4$.

B. $S = 6$.

C. $S = 5$.

D. $S = 9$.

Lời giải:

Ta có: $x.2^x + 3.2^{3-x} - 3x - 8 = 0 \Leftrightarrow x.2^x + \frac{24}{2^x} - 3x - 8 = 0 \Leftrightarrow x.(2^x)^2 - (3x + 8).2^x + 24 = 0 \quad (1)$

Xem (1) là phương trình bậc hai theo 2^x , có $\Delta = (3x + 8)^2 - 96x = 9x^2 - 48x + 84 = (3x - 8)^2$.

$$\text{Phương trình} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = \frac{3x + 8 + (3x - 8)}{2x} = 3 \\ 2^x = \frac{3x + 8 - (3x - 8)}{2x} = \frac{8}{x} \end{cases}.$$

+) Với $2^x = 3 \Leftrightarrow x = \log_2 3$.

+) Với $2^x = \frac{8}{x}$ (2), trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(0; +\infty)$, vế phải (2) nghịch biến và vế trái (2) đồng biến nên phương trình (2) có nghiệm duy nhất, mặt khác $x = 2$ thỏa mãn nên $x = 2$ là nghiệm duy nhất của (2).

Suy ra: $m + n = 2 + \log_2 3 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow S = a + b = 5$.

Câu 18. (MĐ 102 BGD&ĐT NĂM 2017-2018) Cho $a > 0, b > 0$ thỏa mãn $\log_{10a+3b+1}(25a^2 + b^2 + 1) + \log_{10ab+1}(10a + 3b + 1) = 2$. Giá trị của $a + 2b$ bằng

A. $\frac{5}{2}$

B. 6

C. 22

D. $\frac{11}{2}$

Lời giải:

Từ giả thiết ta có $25a^2 + b^2 + 1 > 0, 10a + 3b + 1 > 0, 10a + 3b + 1 > 1, 10ab + 1 > 1$.

Áp dụng Cô-si, ta có $25a^2 + b^2 + 1 \geq 2\sqrt{25a^2b^2} + 1 = 10ab + 1$. Khi đó,

$$\log_{10a+3b+1}(25a^2 + b^2 + 1) + \log_{10ab+1}(10a + 3b + 1) \geq \log_{10a+3b+1}(10ab + 1) + \log_{10ab+1}(10a + 3b + 1) \geq 2.$$

Dấu “=” xảy ra khi $\begin{cases} 5a = b \\ \log_{10a+3b+1}(10ab + 1) = \log_{10ab+1}(10a + 3b + 1) = 1 \end{cases}$

Suy ra $\begin{cases} b = \frac{5}{2} \\ a = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow a + 2b = \frac{11}{2}.$

Câu 19. Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $e^{2x^2+mx+m^2-4m} - e^{x^2-mx-m^2+4m} + x^2 + 2mx + 2m^2 - 8m = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 phân biệt thỏa mãn $x_1 + x_2 \geq -2$?

A. $(0;1]$.

B. $[0;8]$.

C. $(0;2]$.

D. $[2;8]$.

Lời giải:

Phương trình $\Leftrightarrow e^{x^2-mx-m^2+4m} + (x^2 - mx - m^2 + 4m) = e^{2x^2+mx+m^2-4m} + (2x^2 + mx + m^2 - 4m)$ (2)

Xét hàm số $f(t) = e^t + t, t \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(t) = e^t + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ nên $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Phương trình (2) có dạng:

$$f(x^2 - mx - m^2 + 4m) = f(2x^2 + mx + m^2 - 4m) \Leftrightarrow x^2 - mx - m^2 + 4m = 2x^2 + mx + m^2 - 4m$$

$$\Leftrightarrow g(x) = x^2 + 2mx + 2m^2 - 8m = 0 \quad (3).$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_g > 0 \\ x_1 + x_2 \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8m - m^2 > 0 \\ -2m \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in (0;8) \\ m \leq 1 \end{cases} \Rightarrow m \in (0;1].$

Câu 20. Biết m, n là hai số thực thỏa mãn $x.2^x + 3.2^{3-x} - 3x - 8 = 0$ và $m + n = a + \log_2 b, (a, b \in \mathbb{N}^*)$, tính $S = a + b$.

A. $S = 4$.

B. $S = 6$.

C. $S = 5$.

D. $S = 9$.

Lời giải:

Ta có: $x.2^x + 3.2^{3-x} - 3x - 8 = 0 \Leftrightarrow x.2^x + \frac{24}{2^x} - 3x - 8 = 0 \Leftrightarrow x.(2^x)^2 - (3x + 8).2^x + 24 = 0$ (1)

Xem (1) là phương trình bậc hai theo 2^x , có $\Delta = (3x + 8)^2 - 96x = 9x^2 - 48x + 64 = (3x - 8)^2$.

Phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = \frac{3x + 8 + (3x - 8)}{2x} = 3 \\ 2^x = \frac{3x + 8 - (3x - 8)}{2x} = \frac{8}{x} \end{cases}$

+) Với $2^x = 3 \Leftrightarrow x = \log_2 3$.

+) Với $2^x = \frac{8}{x}$ (2), trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(0; +\infty)$, vế phải (2) nghịch biến và vế trái (2) đồng biến nên phương trình (2) có nghiệm duy nhất, mặt khác $x = 2$ thỏa mãn nên $x = 2$ là nghiệm duy nhất của (2).

Suy ra: $m + n = 2 + \log_2 3 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow S = a + b = 5.$

- Câu 21. (THPT CHUYÊN NGUYỄN QUANG ĐIỀU 2018-2019 LẦN 2)** Hỏi phương trình $3.2^x + 4.3^x + 5.4^x = 6.5^x$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực ?
 A. 0. **B. 1.** C. 3. D. 2.

Lời giải:

$$\text{Ta có : } 3.2^x + 4.3^x + 5.4^x = 6.5^x \Leftrightarrow 3\left(\frac{2}{5}\right)^x + 4\left(\frac{3}{5}\right)^x + 5\left(\frac{4}{5}\right)^x - 6 = 0.$$

$$\text{Xét hàm số } f(x) = 3\left(\frac{2}{5}\right)^x + 4\left(\frac{3}{5}\right)^x + 5\left(\frac{4}{5}\right)^x - 6, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Có $f'(x) = 3\left(\frac{2}{5}\right)^x \ln \frac{2}{5} + 4\left(\frac{3}{5}\right)^x \ln \frac{3}{5} + 5\left(\frac{4}{5}\right)^x \ln \frac{4}{5} < 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ suy ra phương trình $f(x) = 0$ có nhiều nhất một nghiệm (1).

Mặt khác $f(1).f(2) = \frac{8}{5} \cdot \left(-\frac{22}{25}\right) = -\frac{176}{125} < 0$ nên phương trình có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(1; 2)$. Từ (1) và (2) suy ra phương trình đã cho có nghiệm duy nhất.

- Câu 22. (THPT CHUYÊN VĨNH PHÚC LẦN 02 NĂM 2018-2019)** Biết rằng phương trình $e^x - e^{-x} = 2\cos ax$ (a là tham số) có 3 nghiệm thực phân biệt. Hỏi phương trình $e^x + e^{-x} = 2\cos ax + 4$ có bao nhiêu nghiệm thực phân biệt ?
 A. 5 B. 10 C. 6 **D. 11**

Lời giải:

$$e^x - e^{-x} = 2\cos ax \quad (1)$$

$$\text{Ta có : } e^x + e^{-x} = 2\cos ax + 4 \Leftrightarrow \left(e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}\right)^2 = 2(1 + \cos ax) \Leftrightarrow \left(e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}\right)^2 = 4\cos^2 \frac{ax}{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}} = 2\cos \frac{ax}{2} & (2) \\ e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}} = -2\cos \frac{ax}{2} & (3) \end{cases}$$

Ta thấy nếu x_0 là nghiệm phương trình (1) thì $x_0 \neq 0$.

Khi đó $2x_0$ là nghiệm phương trình (2) và $-2x_0$ là nghiệm phương trình (3).

Do phương trình (1) có 3 nghiệm nên phương trình (2) có 3 nghiệm và phương trình (3) có 3 nghiệm, đồng thời các nghiệm phương trình (2), (3) khác nhau.

Vậy phương trình $e^x + e^{-x} = 2\cos ax + 4$ có 6 nghiệm thực phân biệt.

- Câu 23. (THPT CHUYÊN LAM SƠN THANH HÓA NĂM 2018-2019 LẦN 01)** Cho hai phương trình $x^2 + 7x + 3 - \ln(x+4) = 0$ (1) và $x^2 - 9x + 11 - \ln(5-x) = 0$ (2). Đặt T là tổng các nghiệm phân biệt của hai phương trình đã cho, ta có:
A. 2 B. 8 C. 4 D. 6

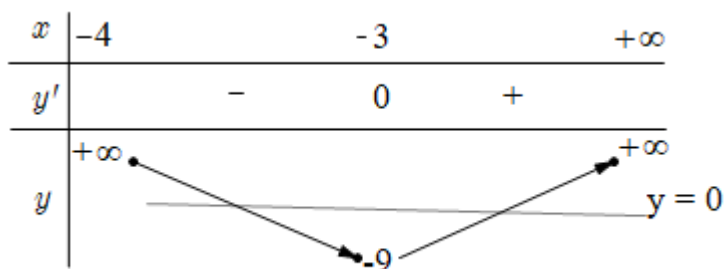
Lời giải:

Cách 1: Gọi hai phương trình là (1) và (2)

$$f(x) = x^2 + 7x + 3 - \ln(x+4), \text{ với } x \in (-4; +\infty).$$

$$f'(x) = 2x + 7 + 3 - \frac{1}{x+4} = \frac{2x^2 + 15x + 27}{x+4}, f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 15x + 17 = 0 \Leftrightarrow x = -3, x = -\frac{9}{2} (L)$$

Bảng biến thiên



Theo bảng biến thiên thì (1) có hai nghiệm phân biệt, gọi hai nghiệm là $x_1; x_2$

Giải sử x_0 là nghiệm của phương trình (1), đặt $t_0 = 1 - x_0 \Leftrightarrow x_0 = 1 - t_0$ ta có

$$x^2 + 7x + 3 - \ln(x+4) = 0 \Leftrightarrow (1-t_0)^2 + 7(1-t_0) + 3 - \ln(1-t_0+4) = 0$$

$$t_0^2 - 9t_0 + 11 - \ln(5-t_0) = 0. \text{ Do đó } t_0 \text{ là nghiệm của phương trình (2)}$$

Như vậy (2) cũng có đúng hai nghiệm là $t_1 = 1 - x_1$ và $t_2 = 1 - x_2$

Vậy tổng các nghiệm của hai phương trình là $T = x_1 + x_2 + t_1 + t_2 = x_1 + x_2 + 1 - x_1 + 1 - x_2 = 2$

Cách 2: Dùng máy tính casio dò nghiệm rồi cộng lại.

Câu 24. Phương trình $4^x + 1 = 2^x \cdot m \cdot \cos(\pi x)$ có nghiệm duy nhất. Số giá trị của tham số m thỏa mãn là

A. Vô số

B. 1

C. 2

D. 0

Lời giải:

$$\text{Ta có } 4^x + 1 = 2^x m \cos(\pi x) \Leftrightarrow 2^x + 2^{-x} = m \cos(\pi x)$$

Ta thấy nếu $x = x_0$ là một nghiệm của phương trình thì $x = -x_0$ cũng là nghiệm của phương trình nên để phương trình có nghiệm duy nhất thì $x_0 = 0$.

Với $x_0 = 0$ là nghiệm của phương trình thì $m = 2$.

Thử lại: Với $m = 2$ ta được phương trình $2^x + 2^{-x} = 2 \cos(\pi x) (*)$

$$VT \geq 2; VP \leq 2 \text{ nên } (*) \begin{cases} 2^x + 2^{-x} = 2 \\ 2 \cos(\pi x) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0 \text{ thỏa mãn. Vậy } m = 2.$$

Câu 25. (CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG NAM ĐỊNH NĂM 2018-2019) Cho $0 \leq x \leq 2020$ và $\log_2(2x+2) + x - 3y = 8^y$. Có bao nhiêu cặp số $(x; y)$ nguyên thỏa mãn các điều kiện trên?

A. 2019.

B. 2018.

C. 1.

D. 4.

Lời giải:

Do $0 \leq x \leq 2020$ nên $\log_2(2x+2)$ luôn có nghĩa.

$$\text{Ta có } \log_2(2x+2) + x - 3y = 8^y \Leftrightarrow \log_2(x+1) + x + 1 = 3y - 2^{3y} \Leftrightarrow \log_2(x+1) + 2^{\log_2(x+1)} = 3y + 2^{3y} \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t) = t + 2^t$. Tập xác định $D = \mathbb{R}$ và $f'(t) = 1 + 2^t \ln 2 \Rightarrow f'(t) > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Do đó } (1) \Leftrightarrow \log_2(x+1) = 3y \Leftrightarrow x+1 = 2^{3y} \Leftrightarrow y = \log_8(x+1).$$

Ta có $0 \leq x \leq 2020$ nên $1 \leq x+1 \leq 2021$ suy ra $0 \leq \log_8(x+1) \leq \log_8 2021$.

Lại có $\log_8 2021 \approx 3,66$ nên nếu $y \in \mathbb{Z}$ thì $y \in \{0; 1; 2; 3\}$.

Vậy có 4 cặp số $(x; y)$ nguyên thỏa yêu cầu bài toán là các cặp $(0; 0), (7; 1), (63; 2), (511; 3)$.

Câu 26. Tổng tất cả các nghiệm thực của phương trình $15x.5^x = 5^{x+1} + 27x + 23$ là

- A. 1. B. 0. C. 2. D. -1.

Lời giải:

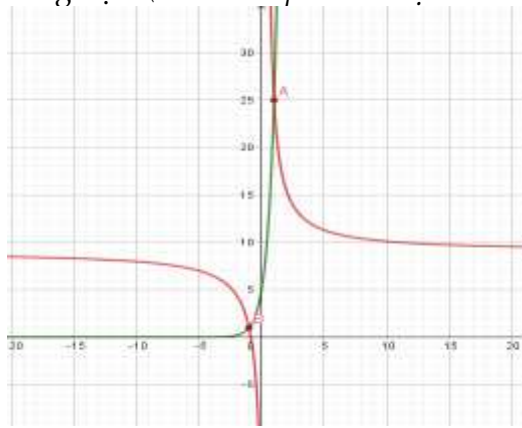
Ta thấy $x = \frac{1}{3}$ không là nghiệm của phương trình, do đó

$$15x.5^x = 5^{x+1} + 27x + 23 \Leftrightarrow 5^{x+1} = \frac{27x + 23}{3x - 1}$$

Xét hai hàm số $f(x) = 5^{x+1}$ và $g(x) = \frac{27x + 23}{3x - 1}$ trên tập $D = \left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$

Ta có $f'(x) = 5^{x+1} \cdot \ln 5 > 0, \forall x \neq \frac{1}{3}$ và $g'(x) = \frac{-96}{(3x-1)^2} < 0, \forall x \neq \frac{1}{3}$.

Do vậy hàm số $f(x)$ là hàm đồng biến và $g(x)$ là hàm nghịch biến trên từng khoảng xác định nên phương trình có tối đa 02 nghiệm. (xem thêm phần đồ thị minh họa)



Nhận thấy $x = \pm 1$ là hai nghiệm của phương trình trên.

Vậy tổng các nghiệm của phương trình là 0.

Câu 27. (CHUYÊN THÁI BÌNH NĂM 2018-2019 LẦN 03) Tập nghiệm của bất phương trình

$3^{x^2-9} + (x^2 - 9).5^{x+1} < 1$ là khoảng $(a; b)$. Tính $b - a$

- A. 6. B. 3. C. 8. D. 4.

Lời giải:

$3^{x^2-9} + (x^2 - 9).5^{x+1} < 1$ (1). Ta có $5^{x+1} > 0 \forall x$.

Xét $x^2 - 9 = 0$, VT (1) $= 3^0 + 0 = 1$ (loại).

Xét $x^2 - 9 > 0 \Rightarrow \begin{cases} 3^{x^2-9} > 3^0 = 1 \\ (x^2 - 9).5^{x+1} > 0 \end{cases} \Rightarrow \text{VT (1)} > 1$ (loại).

Xét $x^2 - 9 < 0 \Rightarrow \begin{cases} 3^{x^2-9} < 3^0 = 1 \\ (x^2 - 9).5^{x+1} < 0 \end{cases} \Rightarrow \text{VT (1)} < 1$ luôn đúng.

Có $x^2 - 9 < 0 \Leftrightarrow x \in (-3; 3)$.

$\Rightarrow$ Tập nghiệm của bất phương trình là: $(-3;3) \Rightarrow b-a=6$.

Câu 28. (THPT ĐOAN THƯỢNG HẢI DƯƠNG NĂM 2018-2019 LẦN 02) Biết x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) là hai nghiệm của phương trình $\log_3(\sqrt{x^2-3x+2}+2)+5^{x^2-3x+1}=2$ và $x_1+2x_2=\frac{1}{2}(a+\sqrt{b})$ với a, b là hai số nguyên dương. Tính $a-2b$.

A. 5.

B. -1.

C. 1.

D. 9.

Lời giải:

Điều kiện xác định của phương trình: $x^2-3x+2 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq 1 \end{cases}$.

Đặt $t = \sqrt{x^2-3x+2}$ với $t \geq 0$. Phương trình đã cho trở thành $\log_3(t+2)+5^{t^2-1}-2=0$.

Xét hàm số $f(t) = \log_3(t+2)+5^{t^2-1}-2$. Ta có: $f'(t) = \frac{1}{(t+2)\ln 3} + 2t \cdot 5^{t^2-1} \ln 5 > 0, \forall t \geq 0$.

Suy ra $f(t)$ luôn đồng biến trên $(0;+\infty)$. Mà $f(0) = \log_3 2 - \frac{9}{5} < 0$

Do đó phương trình $f(t)=0$ có đúng 1 nghiệm trên khoảng $(0;+\infty)$.

Xét $t=1$ ta có $\log_3(1+2)+5^{1^2-1}-2=0$ (đúng)

Suy ra $t=1$ là nghiệm duy nhất.

$$t=1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-3x+2}=1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \\ x_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Rightarrow x_1+2x_2 = \frac{1}{2}(9+\sqrt{5}). \text{ Suy ra } a=9, b=5. \text{ Vậy } a-2b=-1.$$

Câu 29. Phương trình $\log_3 \frac{2x-1}{(x-1)^2} = 3x^2-8x+5$ có hai nghiệm là a và $\frac{a}{b}$ (Với $a, b \in \mathbb{N}^*$ và $\frac{a}{b}$ là phân số

tối giản). Giá trị của b là

A. 1.

B. 4.

C. 2.

D. 3.

Lời giải:

Điều kiện: $\frac{2x-1}{(x-1)^2} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ x \neq 1 \end{cases}$.

$$\text{Phương trình } \log_3 \frac{2x-1}{(x-1)^2} = 3x^2-8x+5 \Leftrightarrow \log_3(2x-1) + (2x-1) - 1 = \log_3(x-1)^2 + 3(x-1)^2$$

$$\Leftrightarrow \log_3 \frac{(2x-1)}{3} + (2x-1) = \log_3(x-1)^2 + 3(x-1)^2.$$

Xét hàm số $f(t) = \log_3 t + 3t, t > 0$ ta có $f'(t) = \frac{1}{t \ln 3} + 3 > 0, \forall t > 0$ nên $f(t)$ là hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

$$\text{Phương trình có dạng } f\left(\frac{2x-1}{3}\right) = f((x-1)^2) \Rightarrow \frac{2x-1}{3} = (x-1)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x=2=a \\ x=\frac{2}{3}=\frac{a}{b} \end{cases}. \text{ Vậy ta có } b=3.$$

Câu 30. (THPT NINH BÌNH BẠC LIÊU NĂM 2018-2019 LẦN 04) Tính tích tất cả các nghiệm thực của

$$\text{phương trình } \log_2 \left(\frac{2x^2 + 1}{2x} \right) + 2^{\left(x + \frac{1}{2x}\right)} = 5.$$

A. 0.

B. 2.

C. 1.

D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải:

Điều kiện $x > 0$. Đặt $t = x + \frac{1}{2x}$, ($t \geq \sqrt{2}$).

Phương trình trở thành: $\log_2 t + 2^t = 5$ (1). Xét $f(t) = \log_2 t + 2^t$ với $t \geq \sqrt{2}$.

Ta có $f(2) = 5$ nên $x = 2$ là một nghiệm của phương trình (1).

$$f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + 2^t \ln 2 > 0 \quad \forall t \geq \sqrt{2} \Rightarrow f(t) \text{ luôn đồng biến trên khoảng } (\sqrt{2}; +\infty)$$

$\Rightarrow$ Đồ thị hàm số $y = f(t)$ cắt đường thẳng $y = 5$ nhiều nhất tại 1 điểm.

Vậy $t = 2$ là nghiệm duy nhất của phương trình (1).

Với $t = 2$: $x + \frac{1}{2x} = 2 \Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 1 = 0$ (2). Phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt và tích tất

cả các nghiệm thực của phương trình là $\frac{1}{2}$.

Câu 31. (LIÊN TRƯỜNG THPT TP VINH NGHỆ AN NĂM 2018-2019) Biết phương trình

$$\log_{2018} \left(\frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x} \right) = 2 \log_{2019} \left(\frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) \text{ có nghiệm duy nhất } x = a + b\sqrt{2} \text{ trong đó } a, b \text{ là những}$$

số nguyên. Khi đó $a + b$ bằng

A. 5

B. -1

C. 2

D. 1

Lời giải:

Điều kiện: $x > 1$. Xét $f(x) = \log_{2018} \left(\frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x} \right)$ trên $(1; +\infty)$

$$f'(x) = \frac{-\sqrt{x} - 1}{(2x\sqrt{x} + x) \ln 2018} < 0 \quad \forall x > 1 \Rightarrow \text{hàm số nghịch biến trên } (1; +\infty).$$

$$\text{Mặt khác: } f(x) = 0 \Leftrightarrow \log_{2018} \left(\frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x} \right) = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x} = 1 \Leftrightarrow x - 2\sqrt{x} - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 3 + 2\sqrt{2}.$$

$$\text{Xét } g(x) = 2 \log_{2019} \left(\frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) \text{ trên } (1; +\infty).$$

$$g'(x) = \frac{2(x+1)}{(x^2 - x) \ln 2019} > 0, \forall x > 1 \Rightarrow \text{hàm số đồng biến trên } (1; +\infty).$$

$$\text{Mặt khác: } g(x) = 0 \Leftrightarrow \log_{2019} \left(\frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = 1 \Leftrightarrow x - 2\sqrt{x} - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 3 + 2\sqrt{2}.$$

$$\text{Xét phương trình } \log_{2018} \left(\frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x} \right) = 2 \log_{2019} \left(\frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) \Leftrightarrow f(x) = g(x).$$

Do $f(x)$ nghịch biến trên $(1; +\infty)$, $g(x)$ đồng biến trên $(1; +\infty)$ và $f(3+2\sqrt{2}) = g(3+2\sqrt{2})$ nên phương trình $f(x) = g(x)$ có nghiệm duy nhất $x = 3+2\sqrt{2}$.

Vậy $a = 3$, $b = 2$, do đó $a + b = 5$.

Câu 32. (Đề thi chuyên Vinh lần 1-2019) Cho hàm số $f(x) = 2^x - 2^{-x}$. Gọi m_0 là số lớn nhất trong các số nguyên m thỏa mãn $f(m) + f(2m - 2^{12}) < 0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $m_0 \in [1513; 2019)$. B. $m_0 \in [1009; 1513)$. C. $m_0 \in [505; 1009)$. D. $m_0 \in [1; 505)$.

Lời giải:

Ta có $f(-x) = 2^{-x} - 2^{-(-x)} = -(2^x - 2^{-x}) = -f(x)$; $f'(x) = 2^x \ln 2 + 2^{-x} \ln 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

hàm số $f(x) = 2^x - 2^{-x}$ hàm số lẻ và tăng trên $\mathbb{R}$

Yêu cầu bài toán $f(2m - 2^{12}) < -f(m) = f(-m) \Leftrightarrow 2m - 2^{12} < -m \Leftrightarrow m < \frac{2^{12}}{3}$

m nguyên lớn nhất là: $m_0 = \left\lfloor \frac{2^{12}}{3} \right\rfloor = 1365$

Câu 33. Cho phương trình $5^x + m = \log_5(x - m)$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in (-20; 20)$ để phương trình đã cho có nghiệm?

A. 20 B. 19 C. 9 D. 21

Lời giải:

Điều kiện: $x > m$

Đặt: $t = \log_5(x - m) \Rightarrow \begin{cases} x - m = 5^t \\ 5^x + m = t \end{cases} \Rightarrow 5^x + x = 5^t + t \quad (1).$

Xét hàm số $f(u) = 5^u + u \Rightarrow f'(u) = 5^u \ln 5 + 1 > 0, \forall u \in \mathbb{R}$.

Do đó: $(1) \Leftrightarrow x = t \Leftrightarrow x = 5^x + m \Leftrightarrow m = x - 5^x$.

Xét hàm số $f(x) = x - 5^x, x > m$

Do: $5^x > 0 \Rightarrow m < x$, suy ra phương trình có nghiệm luôn thỏa điều kiện.

$f'(x) = 1 - 5^x \ln 5, f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - 5^x \ln 5 = 0 \Leftrightarrow x = \log_5\left(\frac{1}{\ln 5}\right)$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$\approx -0,295$	$+\infty$
y'	+	0	-
y	$-\infty$	$\approx -0,917$	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên $\Rightarrow m \leq \approx -0,917 \xrightarrow{m \in (-20; 20)} m = \{-19; -18; \dots; -1\}$.

Vậy có 19 giá trị nguyên của m thỏa ycbt.

Câu 34. Để giải phương trình $\log_2(\cot x - \tan x) = 1 + \cos 2x - \sin 2x$ trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$, bạn Tuấn giải theo các bước sau:

Bước 1: Do $x \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \cot x - \tan x > 0$. Ta có: $\cot x - \tan x = \frac{2\cos 2x}{\sin 2x}$. Phương trình đã cho tương

đương với: $\log_2 \cos 2x - \cos 2x = \log_2 \sin 2x - \sin 2x$ (*) (Do $x \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right) : \sin 2x > 0, \cos 2x > 0$).

Bước 2: Xét hàm số $f(t) = \log_2 t - t, t \in (0; 1) \Rightarrow f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} - 1 > 0, \forall t \in (0; 1)$. Do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0; 1)$.

Bước 3: Phương trình (2) có dạng: $f(\cos 2x) = f(\sin 2x) \Leftrightarrow \cos 2x = \sin 2x \Leftrightarrow \tan 2x = 1$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z})$. Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \left\{ \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} / k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Bạn Tuấn giải đã đúng chưa? Và nếu sai thì bạn Tuấn giải sai bắt đầu từ bước nào?

A. Bài giải đúng. B. Sai từ bước 1. C. Sai từ bước 2. **D. Sai từ bước 3.**

Lời giải:

Sai bước 3 vì điều kiện là giải phương trình trên tập $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$, nhưng kết luận

$S = \left\{ \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} / k \in \mathbb{Z} \right\}$ là chưa chính xác

Câu 35. (THPT CHUYÊN VĨNH PHÚC NĂM 2018-2019 LẦN 3) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $e^{3m} + e^m = 2(x + \sqrt{1-x^2})(1 + x\sqrt{1-x^2})$ có nghiệm.

A. $\left(0; \frac{1}{2} \ln 2\right)$ B. $\left(-\infty; \frac{1}{2} \ln 2\right]$ C. $\left(0; \frac{1}{e}\right)$ D. $\left[\frac{1}{2} \ln 2; +\infty\right)$

Lời giải:

Đặt $t = x + \sqrt{1-x^2} \Rightarrow t^2 = 1 + 2x\sqrt{1-x^2} \Rightarrow x\sqrt{1-x^2} = \frac{t^2-1}{2}$.

Ta có $t' = \frac{\sqrt{1-x^2} - x}{\sqrt{1-x^2}}, t' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

x	-1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1
t'		+	0 -
t	1	$\sqrt{2}$	1

Vậy $t \in [-1; \sqrt{2}]$.

Phương trình trở thành $e^{3m} + e^m = 2t \left(1 + \frac{t^2 - 1}{2}\right) \Leftrightarrow e^{3m} + e^m = t^3 + t \Leftrightarrow e^m = t$. (sử dụng hàm đặc

trung). Phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $-1 \leq e^m \leq \sqrt{2} \Leftrightarrow m \leq \ln \sqrt{2} \Leftrightarrow m \in (-\infty; \frac{1}{2} \ln 2]$.

Câu 36. (THPT CHUYÊN VĨNH PHÚC NĂM 2018-2019 LẦN 3) Tìm tập S tất cả các giá trị thực của tham số m để tồn tại duy nhất cặp số $(x; y)$ thỏa mãn $\log_{x^2+y^2+2}(4x+4y-6+m^2) \geq 1$ và $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$.

A. $S = \{-1; 1\}$

B. $S = \{-5; -1; 1; 5\}$

C. $S = \{-5; 5\}$

D. $S = \{-7; -5; -1; 1; 5; 7\}$

Lời giải:

Ta có

$$\log_{x^2+y^2+2}(4x+4y-6+m^2) \geq 1 \Leftrightarrow 4x+4y-6+m^2 \geq x^2+y^2+2 \Leftrightarrow x^2+y^2-4x-4y+8-m^2 \leq 0$$

$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-2)^2 \leq m^2$ là một hình tròn (C_1) tâm $I(2;2)$, bán kính $R_1 = |m|$ với $m \neq 0$ hoặc là điểm $I(2;2)$ với $m = 0$ và $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-2)^2 = 4$ là một đường tròn (C_2) tâm $J(-1;2)$, bán kính $R_2 = 2$.

TH1: Với $m = 0$ ta có: $I(2;2) \notin (C_2)$ suy ra $m = 0$ không thỏa mãn điều kiện bài toán.

TH2: Với $m \neq 0$. Để hệ $\begin{cases} \log_{x^2+y^2+2}(4x+4y-6+m^2) \geq 1 \\ x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0 \end{cases}$ tồn tại duy nhất cặp số $(x; y)$ thì hình

tròn (C_1) và đường tròn (C_2) tiếp xúc ngoài với nhau

$$\Leftrightarrow IJ = R_1 + R_2 \Leftrightarrow \sqrt{3^2 + 0^2} = |m| + 2 \Leftrightarrow |m| = 1 \Leftrightarrow m = \pm 1.$$

Câu 37. (CỤM 8 TRƯỜNG CHUYÊN LẦN 1) Số giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2019; 2]$ để phương trình $(x-1)[\log_3(4x+1) + \log_5(2x+1)] = 2x - m$ có đúng hai nghiệm thực là

A. 2.

B. 2022.

C. 1.

D. 2021.

Lời giải:

$$\text{Điều kiện: } x > \frac{-1}{4}.$$

Trường hợp 1: $m = 2$, phương trình đã cho trở thành:

$$(x-1)[\log_3(4x+1) + \log_5(2x+1) - 2] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ \log_3(4x+1) + \log_5(2x+1) - 2 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Xét hàm số $f(x) = \log_3(4x+1) + \log_5(2x+1) - 2$ là hàm đồng biến trên khoảng $\left(\frac{-1}{4}; +\infty\right)$.

Khi đó, nếu x_0 là nghiệm của phương trình (1) thì x_0 là nghiệm duy nhất.

Ta có: $f(0) = -2$; $f(1) > 0$, suy ra $f(0)f(1) < 0$.

Theo hệ quả của định lý trung gian, tồn tại $x_0 \in (0; 1)$ sao cho $f(x_0) = 0$.

Do vậy: $m = 2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Trường hợp 2: $m < 2$, dẫn đến $x = 1$ không phải là nghiệm của phương trình đã cho.

Phương trình đã cho trở thành: $\log_3(4x+1) + \log_5(2x+1) - \frac{2x-m}{x-1} = 0$

Xét hàm số $g(x) = \log_3(4x+1) + \log_5(2x+1) - \frac{2x-m}{x-1}$, có tập xác định: $D = \left(-\frac{1}{4}; 1\right) \cup (1; +\infty)$

Đạo hàm: $g'(x) = \frac{4}{(4x+1)\ln 3} + \frac{2}{(2x+1)\ln 5} + \frac{2-m}{(x-1)^2} > 0, \forall x \in D$.

Bảng biến thiên:

x	$-\frac{1}{4}$	1	$+\infty$
$g'(x)$	+		+
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta suy ra: phương trình $g(x) = 0$ có đúng hai nghiệm $x_1 \in \left(-\frac{1}{4}; 1\right)$; $x_2 \in (1; +\infty)$ với mọi $m < 2$.

Vậy với mọi giá trị nguyên của tham số $m \in [-2019; 2]$ thì phương trình đã cho luôn có hai nghiệm thực phân biệt.

Có 2022 giá trị nguyên m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

- Đây là bài toán về sự tương giao.
- Tuy nhiên nếu chúng ta cô lập m thì việc khảo sát hàm biến x khá phức tạp. Ý tưởng của tương ứng phương trình có 1 nghiệm

Bài toán tổng quát

$F(x, m) = f(x) + \frac{ax+b}{cx+d} = 0$ với $f'(x) > 0$ và $ad-bc > 0$

Cách 2: Đặt $f(x) = \log_3(4x+1) + \log_5(2x+1)$

TH1: $m = 2$, Phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ f(x) = 2 \end{cases}$

Vì $f(x)$ là hàm số tăng trên $\left(-\frac{1}{4}; +\infty\right) \Rightarrow f(x) = 2$ có nghiệm duy nhất khác 1.

Vậy $m = 2$ thỏa mãn bài toán.

TH2: $m < 2$, dẫn đến $x = 1$ không phải là nghiệm của phương trình đã cho.

Phương trình đã cho trở thành: $f(x) - \frac{2x-m}{x-1} = 0$

Đặt $g(x) = f(x) - \frac{2x-m}{x-1}$; $g'(x) = f'(x) + \frac{2-m}{(x-1)^2} > 0$.

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\frac{1}{4}$	1	$+\infty$
$g'(x)$	+		+
$g(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$		$-\infty \nearrow +\infty$

$\Rightarrow g(x) = 0$ có đúng hai nghiệm phân biệt.

Vậy $m \in [-2019; 2]$ nên ta có 2022 giá trị nguyên m .

Bài toán tương tự:

Bài toán 50.1 Tìm số giá trị nguyên $m \in [3; 2019]$ sao cho phương trình

$x \log_2(x+1) - \log_2(x+1)^m + (x-m)e^x = mx - 9$ có đúng hai nghiệm thực.

Câu 38. (CHUYÊN KHTN NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho số thực α sao cho phương trình $2^x - 2^{-x} = 2 \cos(\alpha x)$ có đúng 2019 nghiệm thực. Số nghiệm của phương trình $2^x + 2^{-x} = 4 + 2 \cos(\alpha x)$ là

A. 2019.

B. 2018.

C. 4037.

D. 4038.

Lời giải:

$$\text{Ta có: } 2^x + 2^{-x} = 4 + 2 \cos(\alpha x) \Leftrightarrow \left(2^{\frac{x}{2}} - 2^{-\frac{x}{2}} \right)^2 = 4 \cos^2 \frac{\alpha x}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{\frac{x}{2}} - 2^{-\frac{x}{2}} = 2 \cos \frac{\alpha x}{2} & (1) \\ 2^{\frac{x}{2}} - 2^{-\frac{x}{2}} = -2 \cos \frac{\alpha x}{2} & (2) \end{cases}$$

Nhận xét

1. Phương trình (1) có 2019 nghiệm khác 0 (do giả thiết và 0 không là nghiệm).

2. x_0 là nghiệm của phương trình (1) khi và chỉ khi $-x_0$ là nghiệm của phương trình (2) vì

$$2^{\frac{x_0}{2}} - 2^{-\frac{x_0}{2}} = 2 \cos \frac{\alpha x_0}{2} \Leftrightarrow 2^{\frac{(-x_0)}{2}} - 2^{-\frac{(-x_0)}{2}} = -2 \cos \frac{\alpha (-x_0)}{2}.$$

3. Hai phương trình (1) và (2) không có nghiệm chung vì

$$\begin{cases} 2^{\frac{x}{2}} - 2^{-\frac{x}{2}} = 2 \cos \frac{\alpha x}{2} \\ 2^{\frac{x}{2}} - 2^{-\frac{x}{2}} = -2 \cos \frac{\alpha x}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \frac{\alpha x}{2} = 0 \\ 2^{\frac{x}{2}} - 2^{-\frac{x}{2}} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 0 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset.$$

Vậy số nghiệm của phương trình $2^x + 2^{-x} = 4 + 2 \cos(\alpha x)$ là 4038.

Câu 39. (CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU NGHỆ AN NĂM 2018-2019 LẦN 04) Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-100; 100]$ để phương trình $2019^x = mx + 1$ có hai nghiệm phân biệt?

A. 94

B. 92

C. 184

D. 100.

Lời giải:

*) TH1: $m < 0$

+ Vế trái của phương trình là hàm số đồng biến trên tập $\mathbb{R}$.

+ Vế phải của phương trình là hàm số nghịch biến trên tập $\mathbb{R}$.

Nếu phương trình đã cho có nghiệm thì nghiệm đó là duy nhất (không thỏa mãn đề bài).

*) TH2: $m = 0$. Khi đó phương trình trở thành: $2019^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 0$ (không thỏa mãn đề bài).

*) TH3: $m > 0$. Xét hàm số $f(x) = 2019^x - mx - 1$ trên $\mathbb{R}$. $f'(x) = 2019^x \cdot \ln 2019 - m$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \log_{2019} \frac{m}{\ln 2019}.$$

$$\text{Đặt } a = \log_{2019} \frac{m}{\ln 2019} \Rightarrow f(a) = \frac{m}{\ln 2019} - m \cdot \log_{2019} \frac{m}{\ln 2019} - 1.$$

Bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$:

x	$-\infty$	a	$+\infty$
f'(x)	-	0	+
f(x)	$+\infty$	$f(a)$	$+\infty$

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt thì đồ thị hàm số $y = f(x)$ phải cắt trục hoành tại hai

điểm phân biệt. Điều đó tương đương với $f(a) < 0 \Leftrightarrow \frac{m}{\ln 2019} - m \cdot \log_{2019} \frac{m}{\ln 2019} - 1 < 0$ (1).

Đặt $t = \frac{m}{\ln 2019}$ ($t > 0$). Khi đó $m = t \cdot \ln 2019$.

Bất phương trình (1) trở thành: $t - t \cdot \ln 2019 \cdot \log_{2019} t - 1 < 0 \Leftrightarrow t - t \cdot \ln t - 1 < 0 \Leftrightarrow t \cdot \ln t - t + 1 > 0$.

Xét hàm số $g(t) = t \cdot \ln t - t + 1$ trên $(0; +\infty)$; $g'(t) = \ln t$; $g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$.

Bảng biến thiên của hàm số $y = g(t)$

t	0	1	$+\infty$
g'(t)	-	0	+
g(t)		0	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy $g(t) > 0$ với $t \neq 1$. Vậy $\frac{m}{\ln 2019} \neq 1 \Leftrightarrow m \neq \ln 2019$.

Kết luận: $\begin{cases} m > 0 \\ m \neq \ln 2019 \end{cases}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Do $m \in \mathbb{Z}$ và $m \in [-100; 100]$ nên $m \in \{1; 2; 3; \dots; 100\}$. Vậy có 100 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 40. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $\ln(m + \ln(m + \sin x)) = \sin x$ có nghiệm.

A. $\frac{1}{e} + 1 \leq m \leq e - 1$.

B. $1 \leq m \leq e - 1$.

C. $1 \leq m \leq \frac{1}{e} + 1$.

D. $1 \leq m < e - 1$.

Lời giải:

Đặt $u = \ln(m + \sin x)$ ta được hệ phương trình: $\begin{cases} u = \ln(m + \sin x) \\ \ln(m + u) = \sin x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^u = m + \sin x \\ e^{\sin x} = m + u \end{cases}$

Từ hệ phương trình ta suy ra: $e^u + u = e^{\sin x} + \sin x$ (*)

Xét hàm số $f(t) = e^t + t$ có $f'(t) = e^t + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$. Hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

(*) $\Leftrightarrow f(u) = f(\sin x) \Leftrightarrow u = \sin x$

Khi đó ta được: $\ln(m + \sin x) = \sin x \Leftrightarrow e^{\sin x} - \sin x = m$ (**)

Đặt $z = \sin x, z \in [-1; 1]$. Phương trình (**) trở thành: $e^z - z = m$ (***)

Xét hàm số: $g(z) = e^z - z$ trên $[-1; 1]$.

Hàm số $g(z) = e^z - z$ liên tục trên $[-1; 1]$ và có $\max_{[-1; 1]} g(z) = g(1) = e - 1, \min_{[-1; 1]} g(z) = g(0) = 1$

Hệ phương trình ban đầu có nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình (**) có nghiệm $\Leftrightarrow 1 \leq m \leq e - 1$.

Câu 41. (CHUYÊN SƠN LA NĂM 2018-2019 LẦN 03) Tổng tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $2^{x^2+4x+5-m^2} = \log_{x^2+4x+6}(m^2+1)$ có đúng 1 nghiệm là

A. 1.

B. 0.

C. -2.

D. 4.

Lời giải:

Ta có $2^{x^2+4x+5-m^2} = \log_{x^2+4x+6}(m^2+1) \Leftrightarrow 2^{x^2+4x+6-(m^2+1)} = \log_{x^2+4x+6}(m^2+1)$.

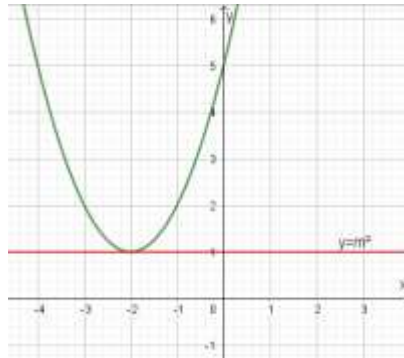
Đặt $\begin{cases} a = x^2 + 4x + 6 \\ b = m^2 + 1 \end{cases}$, ta có $a \geq 2; b \geq 1$, phương trình đã cho trở thành $2^{a-b} = \log_a b$.

+) Nếu $a > b$ thì $\begin{cases} 2^{a-b} > 1 \\ \log_a b < 1 \end{cases}$ không thỏa mãn.

+) Nếu $a < b$ thì $\begin{cases} 2^{a-b} < 1 \\ \log_a b > 1 \end{cases}$ không thỏa mãn.

Do đó $a = b$, khi đó phương trình đã cho tương đương với $x^2 + 4x + 6 = m^2 + 1 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 5 = m^2$. Số nghiệm của phương trình đã cho bằng số giao điểm của parabol $y = x^2 + 4x + 5$ và đường thẳng $y = m^2$.

Ta có hình ảnh minh họa sau



Dựa vào đồ thị, phương trình đã cho có đúng 1 nghiệm khi và chỉ khi $m^2 = 1 \Leftrightarrow m = \pm 1$.

Vậy tổng các giá trị của tham số m là 0.

Câu 42. (THPT CHUYÊN VĨNH PHÚC NĂM 2018-2019 LẦN 02) Biết rằng phương trình $e^x - e^{-x} = 2\cos ax$ (a là tham số) có 3 nghiệm thực phân biệt. Hỏi phương trình $e^x + e^{-x} = 2\cos ax + 4$ có bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?

- A. 5 B. 10 **C. 6** D. 11

Lời giải:

Ký hiệu $e^x - e^{-x} = 2\cos ax$ là phương trình (1) và $e^x + e^{-x} = 2\cos ax + 4$ là phương trình (2).

$$\text{Ta có } e^x + e^{-x} = 2\cos ax + 4 \Leftrightarrow e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}} + 2 = 2(\cos ax + 1) \Leftrightarrow \left(e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}\right)^2 = \left(2\cos \frac{ax}{2}\right)^2.$$

$$\text{Do đó } e^x + e^{-x} = 2\cos ax + 4 \Leftrightarrow \begin{cases} e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}} = 2\cos \frac{ax}{2} \\ e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}} = -2\cos \frac{ax}{2} \end{cases}.$$

Suy ra cứ mỗi nghiệm của phương trình (1) sẽ có 2 nghiệm của phương trình (2).

Thật vậy, với x_0 là nghiệm của (1) thì $2x_0$ và $-2x_0$ là các nghiệm của (2).

Vậy phương trình cần tìm có 6 nghiệm.

Câu 43. (CHUYÊN HƯNG YÊN NĂM 2018-2019 LẦN 03) Cho hàm số $f(x) = 3^{x-4} + (x+1).2^{7-x} - 6x + 3$.

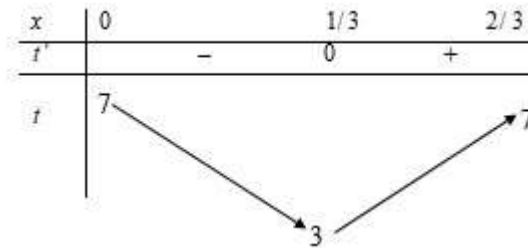
Giả sử $m_0 = \frac{a}{b}$ ($a, b \in \mathbb{Z}$, $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản) là giá trị nhỏ nhất của tham số thực m sao cho phương trình $f\left(7 - 4\sqrt{6x - 9x^2}\right) + 2m - 1 = 0$ có số nghiệm nhiều nhất. Tính giá trị của biểu thức

$$P = a + b^2.$$

- A. $P = 11$. B. $P = 7$. C. $P = -1$. **D. $P = 9$.**

Lời giải:

$$\text{Đặt } t = 7 - 4\sqrt{6x - 9x^2} \text{ (1) thì } f(t) = 1 - 2m(2); t' = \frac{-4(6 - 18x)}{2\sqrt{6x - 9x^2}} \Rightarrow t' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}.$$

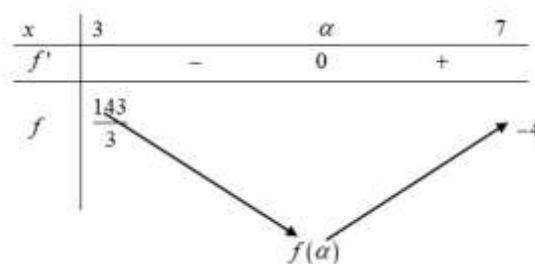


Từ BBT suy ra nếu $t \in (3; 7]$ thì phương trình (1) có 2 nghiệm x .

$$\text{Xét hàm số } f(x) = 3^{x-4} + (x+1).2^{7-x} - 6x + 3; f'(x) = 3^{x-4} \ln 3 + 2^{7-x} - (x+1)2^{7-x} \ln 2 - 6$$

$$f''(x) = 3^{x-4} \ln^2 3 + (2^{7-x} \ln 2) [(x+1) \ln 2 - 2] > 0 \forall x \in (3; 7]$$

Do đó hàm số $f'(x)$ đồng biến trên $(3; 7)$. Mặt khác, $f'(6).f'(7) < 0$ nên phương trình $f'(x) = 0$ có một nghiệm $x = \alpha \in (6; 7)$.



Vậy, phương trình $f(t) = 1 - 2m$ có nhiều nghiệm nhất khi

$$f(\alpha) < 1 - 2m \leq -4 \Leftrightarrow \frac{5}{2} \leq m < \frac{1 - f(\alpha)}{2}$$

Kết luận, GTNN của m là $\frac{5}{2} \Rightarrow a = 5, b = 2$.

Câu 44. (ĐTK BGD&ĐT NĂM 2019-2020 LẦN 01) Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $0 \leq x \leq 2020$ và $\log_3(3x+3) + x = 2y + 9^y$?

A. 2019.

B. 6.

C. 2020.

D. 4.

Lời giải:

Điều kiện: $x > -1$

Ta có: $\log_3(3x+3) + x = 2y + 9^y \Leftrightarrow \log_3(x+1) + (x+1) = 2y + 3^{2y}$ (*)

Xét hàm số $f(t) = t + 3^t, t \in \mathbb{R}$ có $f'(t) = 1 + 3^t \ln 3 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$, tức hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$. Khi đó (*) $\Leftrightarrow f(\log_3(x+1)) = f(2y) \Leftrightarrow \log_3(x+1) = 2y \Leftrightarrow x = 9^y - 1$

Vì $0 \leq x \leq 2020$ nên $0 \leq 9^y - 1 \leq 2020 \Leftrightarrow 0 \leq y \leq \log_9 2021$.

Do y nguyên nên $y \in \{0; 1; 2; 3\}$.

$\Rightarrow (x; y) \in \{(0; 0); (8; 1); (80; 2); (728; 3)\}$ nên tổng cộng có 4 cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa đề.

Câu 45. (ĐTK BGD&ĐT NĂM 2019-2020 LẦN 02) Có bao nhiêu số nguyên x sao cho tồn tại số thực y thỏa mãn $\log_3(x+y) = \log_4(x^2+y^2)$?

A. 3.

B. 2.

C. 1.

D. Vô số

Lời giải:

Điều kiện $x + y > 0; x^2 + y^2 \neq 0$.

Ta đặt: $\log_3(x+y) = \log_4(x^2+y^2) = t$. Ta có $\begin{cases} x+y = 3^t \\ x^2+y^2 = 4^t \end{cases}$ (1)

$$\text{Vì } (x+y)^2 \leq 2(x^2+y^2) \Rightarrow (3^t)^2 \leq 2 \cdot 4^t \Rightarrow t \leq \log_{\frac{9}{4}} 2$$

Thế thì $x^2 + y^2 = 4^t \leq 4^{\log_{\frac{9}{4}} 2} \approx 3,27$, vì x nguyên vậy nên $x^2 \in \{0; 1\}$.

• Với $x = 0$, ta có hệ $\begin{cases} y = 3^t \\ y^2 = 4^t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ y = 1 \end{cases}$

• Với $x = 1$, ta có hệ $\begin{cases} y = 3^t - 1 \\ y^2 = 4^t - 1 \end{cases}$. Hệ này có nghiệm $\begin{cases} t = 0 \\ y = 0 \end{cases}$.

⊙ Với $x = -1$, ta có hệ $\begin{cases} y = 3^t + 1 \\ y^2 = 4^t - 1 \end{cases}$. Ta có phương trình $(3^t + 1)^2 = 4^t - 1 \Leftrightarrow 9^t + 2 \cdot 3^t - 4^t + 2 = 0 (*)$

Đặt $f(t) = 9^t + 2 \cdot 3^t - 4^t + 2$, ta có

Với $t \geq 0 \Rightarrow 9^t \geq 4^t \Rightarrow f(t) > 0$

Với $t < 0 \Rightarrow 4^t < 2 \Rightarrow f(t) > 0$

Vậy phương trình (*) vô nghiệm

Kết luận: Vậy $x \in \{0; 1\}$

Câu 46. Cho $a > 0, b > 0$ thỏa mãn $\log_{3a+2b+1}(9a^2 + b^2 + 1) + \log_{6ab+1}(3a + 2b + 1) = 2$. Giá trị của $a + 2b$ bằng

A. 6

B. 9

C. $\frac{7}{2}$

D. $\frac{5}{2}$

Lời giải:

$a > 0, b > 0$ nên ta có $\log_{3a+2b+1}(6ab + 1) > 0; \log_{6ab+1}(3a + 2b + 1) > 0$.

Ta có $9a^2 + b^2 \geq 6ab$. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = 3b$.

Do đó, ta có:

$$\log_{3a+2b+1}(9a^2 + b^2 + 1) + \log_{6ab+1}(3a + 2b + 1) \geq \log_{3a+2b+1}(6ab + 1) + \log_{6ab+1}(3a + 2b + 1)$$

$$\geq 2\sqrt{\log_{3a+2b+1}(6ab + 1) \cdot \log_{6ab+1}(3a + 2b + 1)} = 2\sqrt{\log_{3a+2b+1}(3a + 2b + 1)} = 2.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} b = 3a > 0 \\ \log_{3a+2b+1}(6ab + 1) = \log_{6ab+1}(3a + 2b + 1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 3a > 0 \\ \log_{9a+1}(18a^2 + 1) = \log_{18a^2+1}(9a + 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3a > 0 \\ \log_{9a+1}(18a^2 + 1) = 1 \end{cases} \text{ (do } \log_{9a+1}(18a^2 + 1) > 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 3a > 0 \\ 18a^2 + 1 = 9a + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{3}{2} \\ a = \frac{1}{2} \end{cases}. \text{ Suy ra } a + 2b = \frac{7}{2}.$$

Câu 47. Cho phương trình $3^x + m = \log_3(x - m)$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in (-15; 15)$ để phương trình đã cho có nghiệm?

A. 16

B. 9

C. 14

D. 15

Lời giải:

Ta có: $3^x + m = \log_3(x - m) \Leftrightarrow 3^x + x = \log_3(x - m) + x - m \quad (*)$.

Xét hàm số $f(t) = 3^t + t$, với $t \in \mathbb{R}$. Có $f'(t) = 3^t \ln 3 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên tập xác định. Mặt khác phương trình (*) có dạng: $f(x) = f(\log_3(x - m))$. Do đó ta có $f(x) = f(\log_3(x - m)) \Leftrightarrow x = \log_3(x - m) \Leftrightarrow 3^x = x - m \Leftrightarrow 3^x - x = -m$

Xét hàm số $g(x) = 3^x - x$, với $x \in \mathbb{R}$. Có $g'(x) = 3^x \ln 3 - 1, g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \log_3\left(\frac{1}{\ln 3}\right)$

Bảng biến thiên

Câu 50. (THPT NGUYỄN KHUYẾN TP.HCM NĂM 2018-2019) Cho a, b là các số dương thỏa mãn

$$\log_9 a = \log_{16} b = \log_{12} \frac{5b-a}{2}. \text{ Giá trị của } \frac{a}{b} \text{ bằng}$$

A. $\frac{a}{b} = -1 + \sqrt{6}.$

B. $\frac{a}{b} = \frac{7+2\sqrt{6}}{25}.$

C. $\frac{a}{b} = \frac{1+\sqrt{6}}{5}.$

D. $\frac{a}{b} = 7 - 2\sqrt{6}.$

Lời giải:

$$\log_9 a = \log_{16} b = \log_{12} \frac{5b-a}{2} = t. \text{ Khi đó } \begin{cases} a = 9^t \\ b = 16^t \\ \frac{5b-a}{2} = 12^t \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{b} = \left(\frac{3}{4}\right)^{2t}.$$

$$\text{Ta có: } 5 \cdot 16^t - 9^t = 2 \cdot 12^t \Leftrightarrow 5 - \left(\frac{9}{16}\right)^t = 2 \cdot \left(\frac{12}{16}\right)^t \Leftrightarrow -\left(\frac{3}{4}\right)^{2t} - 2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^t + 5 = 0.$$

$$\text{Suy ra } \left(\frac{3}{4}\right)^t = -1 + \sqrt{6} \Rightarrow \frac{a}{b} = \left(\frac{3}{4}\right)^{2t} = 7 - 2\sqrt{6}.$$

Câu 51. (KSCL THPT NGUYỄN KHUYẾN LẦN 05 NĂM 2018-2019) Với các số thực x, y dương thỏa

$$\text{mãn } \log_9 x = \log_6 y = \log_4 \left(\frac{x+y}{6}\right). \text{ Tính tỉ số } \frac{x}{y}.$$

A. 3

B. 5

C. 2

D. 4

Lời giải:

$$\text{Đặt } t = \log_9 x = \log_6 y = \log_4 \left(\frac{x+y}{6}\right) \Rightarrow \begin{cases} x = 9^t \\ y = 6^t \\ x+y = 6 \cdot 4^t \end{cases}.$$

$$\text{Suy ra } 9^t + 6^t = 6 \cdot 4^t \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{2t} + \left(\frac{3}{2}\right)^t - 6 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^t = 2 \Rightarrow \frac{x}{y} = 2.$$

Câu 52. (SỞ GD&ĐT HÀ NỘI NĂM 2018-2019) Cho phương trình $2^x = \sqrt{m \cdot 2^x \cdot \cos(\pi x)} - 4$, với m là tham số. Gọi m_0 là giá trị của m sao cho phương trình trên có đúng một nghiệm thực. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $m_0 \in [-5; -1).$

B. $m_0 < -5.$

C. $m_0 \in [-1; 0).$

D. $m_0 > 0.$

Lời giải:

$$\text{Phương trình } 4^x = m \cdot 2^x \cdot \cos(\pi x) - 4 \Leftrightarrow 2^x + 2^{2-x} = m \cdot \cos(\pi x)$$

Điều kiện cần: nếu x_0 là một nghiệm của phương trình thì $2 - x_0$ cũng là nghiệm. Vì phương trình có nghiệm duy nhất nên $x_0 = 1$

Thay vào phương trình ta có: $m = -4.$

Điều kiện đủ:

$$\text{Với } m = -4 \text{ ta có } 4^x + 4 \cdot 2^x \cos(\pi x) + 4 = 0 \Leftrightarrow [2^x + 2 \cos(\pi x)]^2 + 4 \sin^2(\pi x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = -2\cos(\pi x) \\ \sin(\pi x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = -2\cos(\pi x) \\ \cos(\pi x) = 1 \\ \cos(\pi x) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = 2 \\ \cos(\pi x) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

Vậy $m = -4$ thỏa mãn.

Câu 53. (SỞ GD&ĐT NINH BÌNH LẦN 01 NĂM 2018-2019) Số nghiệm của phương trình $50^x + 2^{x+5} = 3.7^x$ là:

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 0.

Lời giải:

Phương trình $50^x + 2^{x+5} = 3.7^x \Leftrightarrow 50^x + 2^{x+5} - 3.7^x = 0$.

Xét hàm số $f(x) = 50^x + 2^{x+5} - 3.7^x$

$$f'(x) = 50^x \ln 50 + 2^{x+5} \ln 2 - 3.7^x \ln 7$$

$$f''(x) = 50^x (\ln 50)^2 + 2^{x+5} (\ln 2)^2 - 3.7^x (\ln 7)^2$$

$$\text{Khi } x \geq 0 \text{ thì } f''(x) = 7^x \left(\left(\frac{50}{7} \right)^x (\ln 50)^2 - 3(\ln 7)^2 \right) + 2^{x+5} (\ln 2)^2$$

$$f''(x) \geq 7^x \left(\left(\frac{50}{7} \right)^0 (\ln 50)^2 - 3(\ln 7)^2 \right) + 2^{x+5} (\ln 2)^2 > 0$$

$$\text{Khi } x < 0 \text{ thì } f''(x) = 7^x \left(\left(\frac{2}{7} \right)^x 32(\ln 2)^2 - 3(\ln 7)^2 \right) + 50^x (\ln 50)^2$$

$$f''(x) > 7^x \left(\left(\frac{2}{7} \right)^0 32(\ln 2)^2 - 3(\ln 7)^2 \right) + 50^x (\ln 50)^2 > 0$$

Suy ra $f''(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Nên $f'(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Mà $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = 0$ nên $f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Suy ra $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Mà $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ nên $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Suy ra phương trình $f(x) = 0$ vô nghiệm.

Câu 54. (THPT CHUYÊN LAM SƠN THANH HÓA NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho a là số thực dương, $a \neq 1$. Biết bất phương trình $2\log_a x \leq x - 1$ nghiệm đúng với mọi $x > 0$. Số a thuộc tập hợp nào sau đây?

A. (7;8)

B. $(3;5]$

C. $(2;3)$

D. $(8;+\infty)$

Lời giải:

Ta có: với $x = 1$ thì $2\log_a 1 = 0 = 1 - 1$

Ta sẽ tìm a để đường thẳng $y = x - 1$ nhận làm tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = 2\log_a x$ tại điểm $x = 1$

$$\text{Có } y' = \frac{2}{x \ln a} \Rightarrow y'(1) = \frac{2}{\ln a}. \text{ Phương trình tiếp tuyến } y = \frac{2}{\ln a}(x - 1)$$

Vậy để đường thẳng $y = x - 1$ nhận làm tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = 2\log_a x$ thì

$$\frac{2}{\ln a} = 1 \Leftrightarrow \ln a = 2 \Leftrightarrow a = e^2$$

Thử lại $a = e^2$ ta sẽ chứng minh $2\log_{e^2} x \leq x-1 \Leftrightarrow \ln x \leq x-1$
 $\Leftrightarrow f(x) = \ln x - x + 1 \leq 0 \quad \forall x > 0$

Có $f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x} \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Bảng biến thiên

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$			

Từ bảng biến thiên suy ra $f(x) \leq 0 \Leftrightarrow \ln x \leq x-1 \quad \forall x > 0$

Câu 55. (SỞ GD&ĐT VINH PHÚC NĂM 2018-2019 LẦN 02) Số nghiệm thực của phương trình

$$\log_3 |x^2 - \sqrt{2}x| = \log_5 (x^2 - \sqrt{2}x + 2) \text{ là}$$

A. 4.

B. 3.

C. 1.

D. 2.

Lời giải:

$$\text{Xét phương trình } \log_3 |x^2 - \sqrt{2}x| = \log_5 (x^2 - \sqrt{2}x + 2) \quad (1)$$

$$\text{Điều kiện: } x^2 - \sqrt{2}x \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq \sqrt{2} \end{cases}$$

$$\text{Đặt } t = \log_3 |x^2 - \sqrt{2}x|, \text{ ta có: } |x^2 - \sqrt{2}x| = 3^t \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - \sqrt{2}x = 3^t \\ x^2 - \sqrt{2}x = -3^t \end{cases}$$

□ **Trường hợp 1:** $x^2 - \sqrt{2}x = 3^t$

$$\text{Phương trình (1) viết lại: } t = \log_5 (3^t + 2) \Leftrightarrow 5^t = 3^t + 2 \Leftrightarrow 1 = \left(\frac{3}{5}\right)^t + 2\left(\frac{1}{5}\right)^t \quad (2)$$

Dễ thấy phương trình (2) có nghiệm $t = 1$.

Lại có: hàm số $f(t) = \left(\frac{3}{5}\right)^t + 2\left(\frac{1}{5}\right)^t$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ nên $t = 1$ là nghiệm duy nhất của (2).

Với $t = 1$, ta có: $x^2 - \sqrt{2}x = 3 \Leftrightarrow x^2 - \sqrt{2}x - 3 = 0$ (phương trình này có 2 nghiệm thực).

□ **Trường hợp 2:** $x^2 - \sqrt{2}x = -3^t$

$$\text{Phương trình (1) viết lại: } t = \log_5 (2 - 3^t) \Leftrightarrow 5^t = 2 - 3^t \Leftrightarrow 5^t + 3^t = 2 \quad (3)$$

Tương tự như trường hợp 1, ta có $t = 0$ là nghiệm duy nhất của (3)

Với $t = 0$, ta có: $x^2 - \sqrt{2}x = -1 \Leftrightarrow x^2 - \sqrt{2}x + 1 = 0$ (phương trình này không có nghiệm thực).

Vậy phương trình đã cho có tất cả 2 nghiệm thực.

Câu 56. (THPT Chuyên Vĩnh Phúc-lần 2-năm 2017-2018) Xét các số thực dương x, y thỏa mãn

$$\ln \left(\frac{1-2x}{x+y} \right) = 3x + y - 1. \text{ Tìm giá trị nhỏ nhất } P_{\min} \text{ của } P = \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{xy}}.$$

A. $P_{\min} = 8$.

B. $P_{\min} = 4$.

C. $P_{\min} = 2$.

D. $P_{\min} = 16$.

Lời giải:

Điều kiện $0 < x < \frac{1}{2}$.

Từ giả thiết $\ln\left(\frac{1-2x}{x+y}\right) = 3x+y-1 \Leftrightarrow \ln(1-2x) + (1-2x) = \ln(x+y) + (x+y)$ (1)

Xét hàm số $f(t) = \ln t + t$ trên $(0; +\infty)$ có $f'(t) = \frac{1}{t} + 1 > 0, \forall t > 0$ do đó hàm $f(t)$ đơn điệu.

Vậy (1) $\Leftrightarrow 1-2x = x+y \Leftrightarrow 3x+y=1$ (2)

Có $P = \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{xy}} \geq \frac{1}{x} + \frac{2}{x+y} = \frac{1}{x} + \frac{2}{1-2x}$

Đặt $g(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{1-2x}$, ta có $g'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{4}{(1-2x)^2}$ suy ra $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$.

Do đó $\min_{\left(0; \frac{1}{2}\right)} g(x) = 8$. Vậy $P_{\min} = 8$.

Câu 57. (THTT Số 3-486 tháng 12 năm 2017-2018) Xét các số thực dương x, y thỏa mãn

$\log_{\sqrt{3}} \frac{x+y}{x^2+y^2+xy+2} = x(x-3) + y(y-3) + xy$. Tìm giá trị lớn nhất $P_{\max}$ của biểu thức

$$P = \frac{3x+2y+1}{x+y+6}.$$

A. 3.

B. 2.

C. 1.

D. 4.

Lời giải:

Ta có: $\log_{\sqrt{3}} \frac{x+y}{x^2+y^2+xy+2} = x(x-3) + y(y-3) + xy$

$$\Leftrightarrow \log_{\sqrt{3}} 3(x+y) + 3(x+y) = \log_{\sqrt{3}} (x^2+y^2+xy+2) + x^2+y^2+xy+2.$$

Xét hàm số $f(t) = \log_{\sqrt{3}} t + t, t > 0$ có $f'(t) = \frac{1}{t \ln \sqrt{3}} + 1 > 0, \forall t > 0$. Vậy hàm số $f(t)$ luôn đồng biến và liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$.

$$\text{Do đó: } f(3(x+y)) = f(x^2+y^2+xy+2) \Leftrightarrow 3(x+y) = x^2+y^2+xy+2 \quad (1)$$

Cách 1: Từ (1) $\Leftrightarrow xy = (x+y)^2 - 3(x+y) + 2$.

$$\text{Ta có } x = x + xy - xy = x(y+1) - xy \leq \left(\frac{x+y+1}{2}\right)^2 - xy$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y+1$.

$$\text{Do đó từ (1), suy ra: } x \leq \frac{(x+y+1)^2}{4} - (x+y)^2 + 3(x+y) - 2.$$

Đặt $t = x+y, t > 0$.

$$\text{Suy ra: } P = \frac{2(x+y)+1+x}{x+y+6} \leq \frac{2t+1+\frac{(t+1)^2}{4}-t^2+3t-2}{t+6} = \frac{-3t^2+22t-3}{4(t+6)} = f(t).$$

Ta có: $f'(t) = \frac{-3t^2 - 36t + 135}{4(t+6)^2} = 0 \Leftrightarrow t = 3$ (nhận)

Bảng biến thiên

t	0	3	$+\infty$
$f'(t)$		0	
$f(t)$			

Dựa vào BBT, ta có $\max P = \max_{(0;+\infty)} f(t) = f(3) = 1$ khi và chỉ khi $\begin{cases} x = y + 1 \\ x + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$.

Cách 2: (Trắc nghiệm)

Ta có: $P = 2 + \frac{x-11}{x+y+6}$.

Trong (1) coi y là ẩn, x là tham số. Ta có $y^2 + (x-3)y + x^2 - 3x + 2 = 0$ có nghiệm khi

$$\Delta = (x-3)^2 - 4(x^2 - 3x + 2) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{3-2\sqrt{3}}{3} \leq x \leq \frac{3+2\sqrt{3}}{3} < 3 \text{ nên } x-11 < 0$$

Vậy $P < 2$ nên trong 4 phương án thì $P_{\max} = 1$ khi đó $x = 2, y = 1$.

Cách 3: (Trắc nghiệm)

Ta có: $P = 3 - \frac{y+17}{x+y+6} < 3$ với $x, y > 0$.

+ Nếu $P = 2$ thì $\frac{3x+2y+1}{x+y+6} = 2 \Leftrightarrow x = 11$. Thay vào (1) ta được: $y^2 + 3y + 90 = 0$ (vô lý).

+ Nếu $P = 1$ thì $\frac{3x+2y+1}{x+y+6} = 1 \Leftrightarrow 2x + y = 5 \Leftrightarrow y = 5 - 2x$. Thay vào (1), ta được:

$$3(x+5-2x) = x^2 + (5-2x)^2 + x(5-2x) + 2 \Leftrightarrow 3x^2 - 12x + 12 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow y = 1.$$

Vậy $P_{\max} = 1$.

Câu 58. (SỞ GD&ĐT BẮC NINH NĂM 2018-2019 LẦN 01) Tập nghiệm của bất phương trình

$$\log_2(x\sqrt{x^2+2} + 4 - x^2) + 2x + \sqrt{x^2+2} \leq 1 \text{ là } (-\sqrt{a}; -\sqrt{b}].$$

Khi đó $a.b$ bằng

A. $\frac{15}{16}$.

B. $\frac{12}{5}$.

C. $\frac{16}{15}$.

D. $\frac{5}{12}$.

Lời giải:

$$\text{Ta có: } x\sqrt{x^2+2} - x^2 = x(\sqrt{x^2+2} - x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+2} + x}.$$

$$\text{Ta có: } \log_2(x\sqrt{x^2+2} + 4 - x^2) + 2x + \sqrt{x^2+2} \leq 1 \Leftrightarrow \log_2\left(x(\sqrt{x^2+2} - x) + 4\right) + 2x + \sqrt{x^2+2} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \log_2\left(\frac{2x}{\sqrt{x^2+2} + x} + 4\right) + 2x + \sqrt{x^2+2} \leq 1 \Leftrightarrow \log_2\frac{2(3x+2\sqrt{x^2+2})}{\sqrt{x^2+2} + x} + 2x + \sqrt{x^2+2} \leq 1, (1)$$

Ta có $\sqrt{x^2+2}+x>0, \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Điều kiện: } 3x+2\sqrt{x^2+2}>0 \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2+2}>-3x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x < 0 \\ 4x^2+8>9x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x > -\sqrt{\frac{8}{5}}, (*)$$

Với điều kiện (*), ta có

$$(1) \Leftrightarrow \log_2(3x+2\sqrt{x^2+2})+3x+2\sqrt{x^2+2} \leq \log_2(\sqrt{x^2+2}+x)+\sqrt{x^2+2}+x, (2)$$

Xét hàm số $f(t)=\log_2 t+t$ với $t>0$. Có $f'(t)=\frac{1}{t \ln 2}+1>0, \forall t \in (0;+\infty)$.

Hàm số $f(t)=\log_2 t+t$ đồng biến trên $(0;+\infty)$, $(3x+2\sqrt{x^2+2}) \in (0;+\infty)$ và $(\sqrt{x^2+2}+x) \in (0;+\infty)$

$$\text{Nên } (2) \Leftrightarrow f(3x+2\sqrt{x^2+2}) \leq f(\sqrt{x^2+2}+x)$$

$$\Leftrightarrow 3x+2\sqrt{x^2+2} \leq \sqrt{x^2+2}+x \Leftrightarrow \sqrt{x^2+2} \leq -2x \Leftrightarrow \begin{cases} -2x \geq 0 \\ x^2+2 \leq 4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ 3x^2 \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \leq -\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Kết hợp với ĐK ta có tập nghiệm bất phương trình là $\left[-\sqrt{\frac{8}{5}}; -\sqrt{\frac{2}{3}}\right]$ hay $a.b = \frac{16}{15}$.

Câu 59. (MĐ 103 BGD&ĐT NĂM 2019-2020) Có bao nhiêu số nguyên x sao cho ứng với mỗi x có không quá 127 số nguyên y thỏa mãn $\log_3(x^2+y) \geq \log_2(x+y)$?

A. 89.

B. 46.

C. 45.

D. 90.

Lời giải:

$$\text{Ta có } \log_3(x^2+y) \geq \log_2(x+y) (1)$$

Đặt $t = x+y \in \mathbb{N}^*$

$$(1) \Leftrightarrow \log_3(x^2-x+t) \geq \log_2 t \Leftrightarrow g(t) = \log_2 t - \log_3(x^2-x+t) \leq 0 (2)$$

Đạo hàm $g'(t) = \frac{1}{t \ln 2} - \frac{1}{(x^2-x+t) \ln 3} > 0$ với mọi y . Do đó $g(t)$ đồng biến trên $[1;+\infty)$

Vì mỗi x nguyên có không quá 127 giá trị $t \in \mathbb{N}^*$ nên ta có

$$g(128) > 0 \Leftrightarrow \log_2 128 - \log_3(x^2-x+128) > 0$$

$$\Leftrightarrow x^2-x+128 < 3^7 \Leftrightarrow -44,8 \leq x \leq 45,8$$

Như vậy có 90 giá trị thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 60. (MĐ 103 BGD&ĐT NĂM 2019-2020) Xét các số thực không âm x và y thỏa mãn $2x+y.4^{x+y-1} \geq 3$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + y^2 + 2x + 4y$ bằng

A. $\frac{33}{8}$.

B. $\frac{9}{8}$.

C. $\frac{21}{4}$.

D. $\frac{41}{8}$.

Lời giải:

$$\text{Ta có } 2x+y.4^{x+y-1} \geq 3 \Leftrightarrow (2x-3).4^{-x} + y.4^{y-1} \geq 0 \Leftrightarrow 2y.2^{2y} \geq (3-2x)2^{3-2x}$$

$$\text{Xét TH: } 3-2x \leq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{3}{2}. \text{ đúng với mọi giá trị } \begin{cases} x \geq \frac{3}{2} \\ y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow P = x^2 + y^2 + 2x + 4y \geq \frac{21}{4}$$

Xét TH: $3 - 2x > 0 \Leftrightarrow 0 \leq x < \frac{3}{2}$.

Xét hàm số $f(t) = t \cdot 2^t$ với $t \geq 0$

$\Rightarrow f'(t) = 2^t + t \cdot 2^t \cdot \ln 2 > 0$ với mọi $t \geq 0$

$\Leftrightarrow f(2y) \geq f(3 - 2x) \Leftrightarrow 2y \geq 3 - 2x \Leftrightarrow y \geq \frac{3}{2} - x$. Khi đó:

$$P = x^2 + y^2 + 2x + 4y \geq x^2 + \left(\frac{3}{2} - x\right)^2 + 2x + 2(3 - 2x) = 2x^2 - 5x + \frac{33}{4} = 2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{41}{8} \geq \frac{41}{8}$$

So sánh và ta thấy GTNN của P là $\frac{41}{8}$ khi $x = \frac{5}{4}, y = \frac{1}{4}$.

Câu 61. (THPT Trần Hưng Đạo-TP HCM năm 2017-2018) Xét các số thực dương x, y thỏa mãn

$2018^{2(x^2 - y + 1)} = \frac{2x + y}{(x + 1)^2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của $P = 2y - 3x$.

A. $P_{\min} = \frac{1}{2}$.

B. $P_{\min} = \frac{7}{8}$.

C. $P_{\min} = \frac{3}{4}$.

D. $P_{\min} = \frac{5}{6}$.

Lời giải:

Cách 1: Ta có $2018^{2(x^2 - y + 1)} = \frac{2x + y}{(x + 1)^2} \Leftrightarrow 2(x^2 - y + 1) = \log_{2018} \frac{2x + y}{(x + 1)^2}$

$$\Leftrightarrow 2(x + 1)^2 - 2(2x + y) = \log_{2018} (2x + y) - \log_{2018} (x + 1)^2$$

$$\Leftrightarrow 2(x + 1)^2 + \log_{2018} (x + 1)^2 = 2(2x + y) + \log_{2018} (2x + y)$$

Có dạng $f[(x + 1)^2] = f(2x + y)$ với $f(t) = 2t + \log_{2018} t, (\forall t > 0)$.

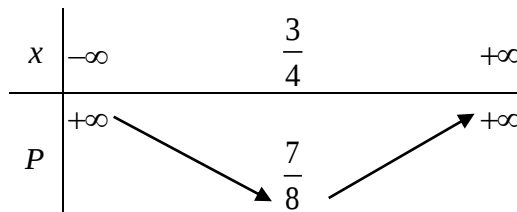
Xét hàm số $f(t) = 2t + \log_{2018} t, (\forall t > 0)$, ta có $f'(t) = 2 + \frac{1}{t \cdot \ln 2018} > 0$ ($\forall t > 0$) nên hàm số

$f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$. Khi đó $f[(x + 1)^2] = f(2x + y) \Leftrightarrow (x + 1)^2 = 2x + y$

$$\Leftrightarrow y = x^2 + 1.$$

Ta có $P = 2y - 3x = 2(x^2 + 1) - 3x = 2x^2 - 3x + 2$.

Bảng biến thiên



Vậy $P_{\min} = \frac{7}{8}$ khi $x = \frac{3}{4}$.

$$\begin{aligned} \text{Cách 2: Ta có } 2018^{2(x^2-y+1)} &= \frac{2x+y}{(x+1)^2} \Leftrightarrow 2018^{2(x^2+2x+1-2x-y)} = \frac{2x+y}{(x+1)^2} \Leftrightarrow \frac{2018^{2(x^2+2x+1)}}{2018^{2(2x+y)}} = \frac{2x+y}{(x+1)^2} \\ &\Leftrightarrow \frac{2018^{2(x+1)^2}}{2018^{2(2x+y)}} = \frac{2x+y}{(x+1)^2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Đặt } u &= (x+1)^2, v = 2x+y \text{ với } u, v > 0. \text{ Phương trình trên có dạng: } \frac{2018^{2u}}{2018^{2v}} = \frac{v}{u} \\ &\Leftrightarrow u \cdot 2018^{2u} = v \cdot 2018^{2v} \quad (1) \text{ với } u, v > 0. \end{aligned}$$

Xét hàm đặc trưng $f(t) = t \cdot 2018^t$ có $f'(t) = 2018^t + t \cdot 2018^t \ln 2018 > 0$ với $(\forall t > 0)$, suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$. Do đó phương trình (1) có dạng $f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow (x+1)^2 = 2x+y \Leftrightarrow y = x^2 + 1. \text{ Khi đó } P = 2y - 3x = 2(x^2 + 1) - 3x = 2x^2 - 3x + 2 \text{ có đồ thị là} \\ &\text{một đường cong Parabol, đỉnh là điểm thấp nhất có tọa độ } I\left(\frac{3}{4}; \frac{7}{8}\right). \text{ Do vậy, } P_{\min} = \frac{7}{8} \text{ khi} \end{aligned}$$

$$x = \frac{3}{4}.$$

Câu 62. (THPT Mộ Đức-Quảng Ngãi-lần 1 năm 2017-2018) Cho hai số thực dương x, y thay đổi thỏa mãn đẳng thức $(xy-1) \cdot 2^{2xy-1} = (x^2+y) \cdot 2^{x^2+y}$. Tìm giá trị nhỏ nhất $y_{\min}$ của y .

A. $y_{\min} = 3.$ B. $y_{\min} = 2.$ C. $y_{\min} = 1.$ D. $y_{\min} = \sqrt{3}.$

Lời giải:

$$\text{Ta có } (xy-1)2^{2xy-1} = (x^2+y)2^{x^2+y} \Leftrightarrow (2xy-1-1)2^{2xy-1} = (x^2+y)2^{x^2+y+1} \quad (1)$$

$$\text{Xét hàm } f(t) = (t-1) \cdot 2^t \text{ với } t \geq 1.$$

$$\text{Khi đó } f'(t) = 2^t + (t-1) \cdot 2^t \ln 2 > 0 \text{ với } \forall t \geq 1.$$

$$\text{Từ (1)} \Leftrightarrow 2xy-1 = x^2+y+1 \Leftrightarrow y = \frac{x^2+2}{2x-1}$$

$$y' = \frac{2x^2-2x-4}{(2x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow 2x^2-2x-4=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-1 \end{cases}$$

$$\text{Loại } x = -1 \text{ vì điều kiện của } t \text{ nên } f(2) = 2.$$

Câu 63. (THPT Chuyên Thái Bình – Thái Bình – Lần 5 năm 2017 – 2018) Cho 2 số thực dương x, y thỏa mãn $\log_3[(x+1)(y+1)]^{y+1} = 9 - (x-1)(y+1)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + 2y$ là

A. $P_{\min} = \frac{11}{2}.$ B. $P_{\min} = \frac{27}{5}.$ C. $P_{\min} = -5 + 6\sqrt{3}.$ D. $P_{\min} = -3 + 6\sqrt{2}.$

Lời giải:

$$\text{Ta có } \log_3[(x+1)(y+1)]^{y+1} = 9 - (x-1)(y+1)$$

$$\Leftrightarrow (y+1)[\log_3(x+1) + \log_3(y+1)] + (x-1)(y+1) = 9.$$

$$\Leftrightarrow (y+1)[\log_3(x+1) + \log_3(y+1) + x-1] = 9$$

$$\Leftrightarrow \log_3(x+1) + x - 1 = \frac{9}{y+1} - \log_3(y+1)$$

$$\Leftrightarrow \log_3(x+1) + x + 1 - 2 = \frac{9}{y+1} - 2 + \log_3 \frac{9}{y+1} (*)$$

Xét hàm số $f(t) = \log_3 t + t - 2$ với $t > 0$ có $f'(t) = \frac{1}{t \ln 3} + 1 > 0$ với mọi $t > 0$ nên hàm số $f(t)$ luôn đồng biến và liên tục trên $(0; +\infty)$.

Từ (*) suy ra $x+1 = \frac{9}{y+1} \Leftrightarrow x = \frac{9}{y+1} - 1 = \frac{8-y}{y+1}$, do $x > 0$ nên $y \in (0; 8)$.

$$\text{Vậy } P = x + 2y = \frac{8-y}{y+1} + 2y = 2y - 1 + \frac{9}{y+1} = 2(y+1) + \frac{9}{y+1} - 3 \geq -3 + 6\sqrt{2}.$$

$$\text{Vậy } P_{\min} = -3 + 6\sqrt{2} \text{ khi } 2(y+1) = \frac{9}{y+1} \Leftrightarrow y = \frac{3}{\sqrt{2}} - 1.$$

Câu 64. Cho các số thực x, y với thỏa mãn $\log_2(x-2) + 4x^3 + 48x - 31 = y + 4.8^{y-24x^2-1}$. Giá trị lớn nhất của $P = 2^{y-24x^2} \cdot (6-x)$ là

A. 14. B. 6. C. 32. **D. 8.**

Lời giải:

Điều kiện $x > 2$

Ta có:

$$\log_2(2x-4) + 4x^3 + 48x - 32 = y + 4.8^{y-24x^2-1}$$

$$\Leftrightarrow 2\log_2(2x-4) + 8x^3 + 96x - 64 = 2y + 8^{y-24x^2}$$

$$\Leftrightarrow 2\log_2(2x-4) + 8x^3 - 48x^2 + 96x - 64 = 2y - 48x^2 + 8^{y-24x^2}$$

$$\Leftrightarrow 2\log_2(2x-4) + (2x-4)^3 = (2y - 48x^2) + 2^{3(y-24x^2)}$$

Xét hàm số $f(t) = 2t + 2^{3t}$ trên $\mathbb{R}$ thấy ngay đây là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Phương trình có dạng

$$f(\log_2(2x-4)) = f(y - 24x^2) \Leftrightarrow \log_2(2x-4) = y - 24x^2 \Leftrightarrow (2x-4) = 2^{y-24x^2}$$

$$\text{Xét } P = 2^{y-24x^2} \cdot (6-x) = \frac{1}{2}(2x-4)(12-2x) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{2x-4+12-2x}{2} \right)^2 = 8$$

Dấu bằng xảy ra khi $x = 4 \Rightarrow$ **Chọn D.**

Câu 65. [PHÁT TRIỂN 47 - ĐỀ THI THAM KHẢO - 2020] Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x; y)$

$$\text{với } y \leq 2020 \text{ thỏa mãn: } \log_2 \frac{x+2}{y+1} < 4y^4 + 8y^3 - (x^2 + 4x)y^2 + 1$$

A. 2019.2020. B. 2020.2021. C. 2019². **D. 2020²**

Lời giải:

Ta có

$$\log_2 \frac{x+2}{y+1} < 4y^4 + 8y^3 - (x^2 + 4x)y^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow \log_2 \frac{x+2}{2y+2} < 4y^4 + 8y^3 + 4y^2 - (x^2y^2 + 4xy^2 + 4y^2)$$

$$\Leftrightarrow \log_2 \frac{xy+2y}{2y^2+2y} < (2y^2+2y) - (xy+y)^2$$

$$\Leftrightarrow \log_2 (xy+2y) + (xy+2y)^2 < \log (2y^2+2y) + (2y^2+2y)^2$$

Xét hàm $f(t) = \log_2(t) + t^2$ thấy ngay đây là hàm đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Bất phương trình có dạng $f(xy+2y) < f(2y^2+2y) \Leftrightarrow xy+2y < 2y^2+2y \Leftrightarrow x < 2y$

Do $(x; y)$ và $y \leq 2020$ nên

Với $y = 1 \Rightarrow x < 2 \Rightarrow x = 1$

Với $y = 2 \Rightarrow x < 4 \Rightarrow x \in \{1; 2; 3\}$

Với $y = 3 \Rightarrow x < 6 \Rightarrow x \in \{1; 2; 3; 4; 5\}$

.....

Với $y = 2020 \Rightarrow x < 4040 \Rightarrow x \in \{1, 2; 3....4039\}$

Vậy số cặp nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn là $1+3+5+...4039 = 2020^2 \Rightarrow$ **Chọn D.**

Câu 66. [PHÁT TRIỂN 47 - ĐỀ THI THAM KHẢO – 2020] Biết rằng bất phương trình

$x\sqrt{x+2} = (8x+4) \cdot 2^{\frac{-x^3+4x+1}{x^2}}$, có một nghiệm dương là $x = \frac{a+\sqrt{b}}{c}$ với $a, b, c \in \mathbb{N}; b \leq 20$. Khi đó

biểu thức $P = a + b + c$ bằng giá trị nào sau đây ?

A. 18.

B. 16.

C. 10.

D. 8.

Lời giải:

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x \geq -2 \\ x \neq 0 \end{cases}.$$

$$+\text{Bất phương trình } \Leftrightarrow \sqrt{x+2} = \frac{2x+1}{x} \cdot 2^{\frac{4x^2+4x+1}{x^2}-x-2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+2} \cdot 2^{(\sqrt{x+2})^2} = \left(\frac{2x+1}{x}\right) \cdot 2^{\left(\frac{2x+1}{x}\right)^2}$$

Xét hàm số $f(t) = t2^{t^2}, \forall t \in \mathbb{R}$.

Ta có $f'(t) = 2^{t^2} + 2t^2 \cdot 2^{t^2} \ln 2 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$. do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên khoảng $\mathbb{R}$.

Phương trình có dạng $f(\sqrt{x+2}) = f\left(\frac{2x+1}{x}\right)$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+2} = \frac{2x+1}{x} \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - 4x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3+\sqrt{13}}{2}, (do x > 0).$$

Vậy $a + b + c = 18$.

Câu 67. Cho hàm số $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$. Có tất cả bao nhiêu số nguyên m thỏa mãn bất phương trình $f(\log m) + f\left(\log_m \frac{1}{2019}\right) \leq 0$?

- A. 65. B. 66. **C. 64.** D. 63.

Lời giải:

Điều kiện: $m > 1$ (do m là số nguyên và $m > 0, m \neq 1$), suy ra $\log m > 0$.

Hàm số $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ có TXĐ $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $f(-x) = \ln(-x + \sqrt{x^2 + 1}) = \ln \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = -\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

Mặt khác $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} > 0, \forall x$, nên $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Khi đó ta có

$$\begin{aligned} f(\log m) + f\left(\log_m \frac{1}{2019}\right) \leq 0 &\Leftrightarrow f(\log m) \leq -f\left(\log_m \frac{1}{2019}\right) \Leftrightarrow f(\log m) \leq f\left(-\log_m \frac{1}{2019}\right) \\ &\Leftrightarrow \log m \leq -\log_m \frac{1}{2019} \Leftrightarrow \log m \leq \frac{\log 2019}{\log m} \Leftrightarrow m \leq 10^{\sqrt{\log 2019}} \approx 65,77. \end{aligned}$$

Suy ra $m \in \{2; 3; \dots; 65\}$. Vậy có tất cả 64 số nguyên m thỏa mãn.

Câu 68. **[PHÁT TRIỂN 47 - ĐỀ THI THAM KHẢO – 2020]** Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $\ln(m + 3\sin x + \ln(m + 4\sin x)) = \sin x$ có nghiệm thực?

- A. 6.** B. 10. C. 5. D. 9.

Lời giải:

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} m + 3\sin x + \ln(m + 4\sin x) > 0 \\ m + 4\sin x > 0 \end{cases}.$$

Phương trình đã cho tương đương: $m + 3\sin x + \ln(m + 4\sin x) = e^{\sin x}$

$$\Leftrightarrow m + 4\sin x + \ln(m + 4\sin x) = e^{\sin x} + \sin x$$

$$\Leftrightarrow e^{\ln(m + 4\sin x)} + \ln(m + 4\sin x) = e^{\sin x} + \sin x \quad (1).$$

Xét $f(t) = e^t + t, t \in \mathbb{R}$.

Ta có $f'(t) = e^t + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$. Nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Vậy } (1) \Leftrightarrow f[\ln(m + 4\sin x)] = f(\sin x) \Leftrightarrow \ln(m + 4\sin x) = \sin x.$$

Đặt $a = \sin x, a \in [-1; 1]$. Phương trình trở thành: $\ln(m + 4a) = a \Leftrightarrow m = e^a - 4a$.

Xét $g(a) = e^a - 4a, a \in [-1; 1]$. Ta có $g'(a) = e^a - 4 < 0 \quad \forall a \in [-1; 1]$.

Vậy để phương trình có nghiệm thực thì $g(1) \leq m \leq g(-1) \Leftrightarrow e - 4 \leq m \leq \frac{1}{e} + 4$.

Vậy có 4 giá trị nguyên của tham số m là: $-1; 0; 1; 2; 3; 4$.

HẾT

Huế, ngày 09 tháng 12 năm 2020