



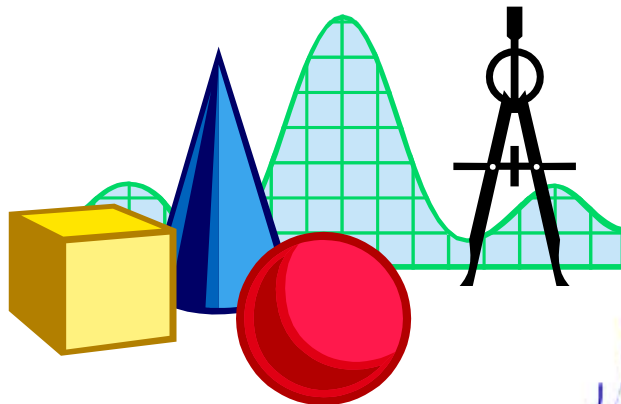
Giáo viên: **LÊ BÁ BẢO**_ Trường THPT Đặng Huy Trứ, Huế

SĐT: 0935.785.115

Đăng kí học theo địa chỉ: **116/04 Nguyễn Lộ Trạch, TP Huế**
Hoặc Trung tâm Km 10 Hương Trà

TÍCH PHÂN – ỨNG DỤNG

HÀM ẨN



Phiên bản 2020

Lê Bá Bảo!

Cố lên các em nhé!

Huế, tháng 02/2021



PHIẾU ÔN TẬP SỐ 01

CHUYÊN ĐỀ

TÍCH PHÂN - ỨNG DỤNG

Tích phân _ Hàm ẩn

Lớp Toán thầy LÊ BÁ BẢO

Trường THPT Đặng Huy Trứ SĐT: 0935.785.115 Facebook: Lê Bá Bảo
116/04 Nguyễn Lộ Trạch, TP Huế Trung tâm KM 10 Hương Trà, Huế.

NỘI DUNG ĐỀ BÀI

Câu 1: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f(x) = f(2020 - x)$ và $\int_4^{2016} f(x)dx = 2$.

Tính $\int_4^{2016} xf(x)dx$.

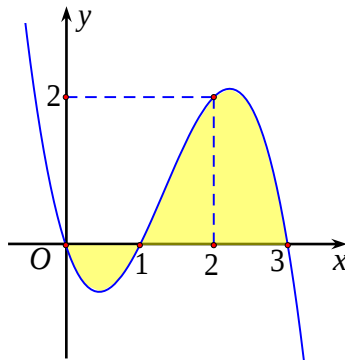
- A. 16160. B. 2020. C. 4040. D. 8080.

Câu 2: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0; +\infty)$ và thỏa mãn $f(x^2 + 4x) = -2x^2 - 7x + 1, \forall x \in [0; +\infty)$.

Biết $f(5) = -8$, tính $I = \int_0^5 x \cdot f'(x)dx$.

- A. $I = -\frac{68}{3}$. B. $I = -\frac{35}{3}$. C. $I = -\frac{52}{3}$. D. $I = -\frac{62}{3}$.

Câu 3: Cho $y = f(x)$ là hàm số đa thức bậc ba có đồ thị như hình vẽ. Tính diện tích hình phẳng được tô đậm.



- A. $\frac{9}{4}$. B. $\frac{37}{12}$. C. $\frac{5}{12}$. D. $\frac{8}{3}$.

Câu 4: Cho hàm số $f(x) > 0$ và có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $(x+1)f'(x) = \frac{\sqrt{f(x)}}{x+2}$ và

$f(0) = \left(\frac{\ln 2}{2}\right)^2$. Giá trị $f(3)$ bằng

- A. $\frac{1}{2}(4\ln 2 - \ln 5)^2$. B. $4(4\ln 2 - \ln 5)^2$. C. $\frac{1}{4}(4\ln 2 - \ln 5)^2$. D. $2(4\ln 2 - \ln 5)^2$.

Câu 5: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \cdot f(\cos^2 x) dx = 2$ và $\int_e^{e^2} \frac{f(\ln^2 x)}{x \ln x} dx = 2$. Tính $\int_{\frac{1}{4}}^2 \frac{f(2x)}{x} dx$.

- A. 4. B. 1. C. 0. D. 8.

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm, nhận giá trị dương trên $(0; +\infty)$ và thỏa mãn $2f'(x^2) = 9x\sqrt{f(x^2)}$ với mọi $x \in (0; +\infty)$. Biết $f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}$, tính $f\left(\frac{1}{3}\right)$.

- A. $\frac{1}{4}$. B. $\frac{1}{3}$. C. $\frac{1}{12}$. D. $\frac{1}{6}$.

Câu 7: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, đồ thị của $y = f(x)$ đi qua điểm $A(1;0)$ và nhận điểm $I(2;2)$ làm tâm đối xứng. Tính tích phân $I = \int_1^3 x(x-2)(f(x) + f'(x)) dx$.

- A. $-\frac{16}{3}$. B. $\frac{16}{3}$. C. $-\frac{8}{3}$. D. $\frac{8}{3}$.

Câu 8: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) \cdot [f(x)]^4 = \sin x \cdot \sin^2 2x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$. Giá trị của $[f(\pi)]^5$ bằng

- A. $-\frac{11}{3}$. B. $\frac{11}{5}$. C. $\frac{23}{15}$. D. $\frac{11}{3}$.

Câu 9: Cho hàm số $f(x)$ xác định, có đạo hàm, liên tục và đồng biến trên $[1;4]$ thỏa mãn $x + 2xf(x) = [f'(x)]^2, \forall x \in [1;4], f(1) = \frac{3}{2}$. Giá trị $f(4)$ bằng

- A. $\frac{391}{18}$. B. $\frac{361}{18}$. C. $\frac{381}{18}$. D. $\frac{371}{18}$.

Câu 10: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(x) = 6x^2 \cdot f(x^3) - \frac{6}{\sqrt{3x+1}}$. Tính $\int_0^1 f(x) dx$.

- A. 2. B. 4. C. -1. D. 6.

Câu 11: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ thỏa $4x \cdot f(x^2) + 3f(1-x) = \sqrt{1-x^2}$. Tính $\int_0^1 f(x) dx$.

- A. $\frac{\pi}{4}$. B. $\frac{\pi}{6}$. C. $\frac{\pi}{20}$. D. $\frac{\pi}{16}$.

Câu 12: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ và thỏa mãn $x^2 f^2(x) + (2x-1)f(x) = xf'(x) - 1$ với $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ và $f(1) = -2$. Tính $\int_1^2 f(x) dx$.

- A. $-\frac{1}{2} - \ln 2$. B. $-\frac{3}{2} - \ln 2$. C. $-1 - \frac{\ln 2}{2}$. D. $-\frac{3}{2} - \frac{\ln 2}{2}$.

Câu 13: Cho hàm số $f(x)$ có $f(2) = 0$ và $f'(x) = \frac{x+7}{\sqrt{2x-3}}, \forall x \in \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$. Biết rằng $\int_4^7 f\left(\frac{x}{2}\right) dx = \frac{a}{b}$ ($a, b \in \mathbb{Z}, b > 0, \frac{a}{b}$ là phân số tối giản). Khi đó $a+b$ bằng

A. 250. B. 251. C. 133. D. 221.

Câu 14: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x^5 + 4x + 3) = 2x + 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $\int_{-2}^8 f(x)dx$ bằng

A. 2. B. 10. C. $\frac{32}{3}$. D. 72.

Câu 15: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $2f(1) - 3f(0) = 0$, $\int_0^1 f(x)dx = 7$. Tính

$$I = \int_0^2 (6-x) f'\left(\frac{x}{2}\right) dx.$$

A. $I = 40$. B. $I = 28$. C. $I = 18$. D. $I = 42$.

Câu 16: Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-1; 2]$ và thỏa mãn $f(x) + 2xf(x^2 - 2) + 3f(1-x) = 4x^3$. Tính giá trị của tích phân $I = \int_{-1}^2 f(x)dx$.

A. $I = 3$. B. $I = 5$. C. $I = 15$. D. $I = 6$.

Câu 17: Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[0; 1]$ thỏa mãn $f(1) = 4$ và $\int_0^1 f(x)dx = 2$. Tính

$$\int_0^1 x^3 f'(x^2) dx.$$

A. 16. B. 5. C. 1. D. 2.

Câu 18: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0; 1]$ thỏa mãn $f(1) = 0$, $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 7$ và

$$\int_0^1 x^2 f(x) dx = \frac{1}{3}. \text{ Tính } \int_0^1 f(x) dx.$$

A. $\frac{7}{5}$ B. 1 C. $\frac{7}{4}$ D. 4

Câu 19: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $xf(x^2) - f(2x) = 2x^3 + 2x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Tính giá trị $I = \int_1^2 f(x)dx$.

A. $I = 25$. B. $I = 21$. C. $I = 27$. D. $I = 23$.

Câu 20: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $(0; +\infty)$, thỏa mãn $f(1) = \frac{1}{2}$ và $3xf(x) - x^2 f'(x) = 2[f(x)]^2$, $f(x) \neq 0$ với $x \in (0; +\infty)$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[1; 2]$. Tổng $M + m$ bằng

A. $\frac{21}{10}$. B. $\frac{7}{5}$. C. $\frac{9}{10}$. D. $\frac{6}{5}$.

HẾT

Huế, ngày 07 tháng 02 năm 2021



CHUYÊN ĐỀ

TÍCH PHÂN - ỨNG DỤNG

Tích phân _ Hàm ẩn

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f(x) = f(2020 - x)$ và $\int_4^{2016} f(x)dx = 2$.

Tính $\int_4^{2016} xf(x)dx$.

A. 16160.

B. 2020.

C. 4040.

D. 8080.

Lời giải:

Xét $I = \int_4^{2016} xf(x)dx$. Đặt $t = 2020 - x \Rightarrow dt = -dx$ và $x = 4 \Rightarrow t = 2016$
 $x = 2016 \Rightarrow t = 4$

Do đó $I = \int_4^{2016} xf(x)dx = \int_{2016}^4 (2020 - t)f(2020 - t)(-dt) = \int_4^{2016} (2020 - x)f(2020 - x)dx$

$$= \int_4^{2016} (2020 - x)f(x)dx = 2020 \int_4^{2016} f(x)dx - \int_4^{2016} xf(x)dx = 2020 \cdot 2 - I$$

$$\Rightarrow I = 4040 - I \Leftrightarrow 2I = 4040 \Leftrightarrow I = 2020.$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án B.**

Câu 2: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0; +\infty)$ và thỏa mãn $f(x^2 + 4x) = -2x^2 - 7x + 1, \forall x \in [0; +\infty)$.

Biết $f(5) = -8$, tính $I = \int_0^5 x \cdot f'(x)dx$.

A. $I = -\frac{68}{3}$.

B. $I = -\frac{35}{3}$.

C. $I = -\frac{52}{3}$.

D. $I = -\frac{62}{3}$.

Lời giải:

Ta có $f(x^2 + 4x) = -2x^2 - 7x + 1 \Leftrightarrow (2x + 4)f(x^2 + 4x) = (-2x^2 - 7x + 1)(2x + 4)$.

Lấy tích phân cận chạy từ $0 \rightarrow 1$ hai vế ta được:

$$\int_0^1 (2x + 4)f(x^2 + 4x)dx = \int_0^1 (-2x^2 - 7x + 1)(2x + 4)dx = -\frac{52}{3}.$$

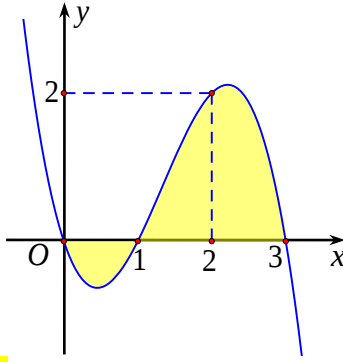
Xét $\int_0^1 (2x + 4)f(x^2 + 4x)dx$. Đặt $\begin{cases} t = x^2 + 4x \Rightarrow dt = (2x + 4)dx \\ x = 0 \rightarrow t = 0, x = 1 \rightarrow t = 5 \end{cases}$. Khi đó ta có

$$\int_0^1 (2x + 4)f(x^2 + 4x)dx = \int_0^5 f(t)dt = \int_0^5 f(x)dx = -\frac{52}{3}.$$

$$\text{Xét } I = \int_0^5 x \cdot f'(x)dx = xf(x) \Big|_0^5 - \int_0^5 f(x)dx = -40 - \left(-\frac{52}{3}\right) = -\frac{68}{3}.$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án A.**

Câu 3: Cho $y = f(x)$ là hàm số đa thức bậc ba có đồ thị như hình vẽ. Tính diện tích hình phẳng được tô đậm.



A. $\frac{9}{4}$.

B. $\frac{37}{12}$.

C. $\frac{5}{12}$.

D. $\frac{8}{3}$.

Lời giải:

Giả sử $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị (C) như hình vẽ trên.

Điểm $O(0;0) \in (C) \Rightarrow d = 0 \Rightarrow f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$.

Các điểm $A(1;0), B(2;2), D(3;0) \in (C) \Rightarrow \begin{cases} a + b + c = 0 \\ 4a + 2b + c = 1 \\ 9a + 3b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 4 \\ c = -3 \end{cases} \Rightarrow f(x) = -x^3 + 4x^2 - 3x$.

Diện tích hình phẳng cần tìm là

$$S = \int_0^1 [0 - f(x)] dx + \int_1^3 [f(x) - 0] dx = \int_0^1 (x^3 - 4x^2 + 3x) dx + \int_1^3 (-x^3 + 4x^2 - 3x) dx = \frac{37}{12}$$

$\Rightarrow$ Chọn đáp án B.

Câu 4: Cho hàm số $f(x) > 0$ và có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $(x+1)f'(x) = \frac{\sqrt{f(x)}}{x+2}$ và

$f(0) = \left(\frac{\ln 2}{2}\right)^2$. Giá trị $f(3)$ bằng

A. $\frac{1}{2}(4\ln 2 - \ln 5)^2$.

B. $4(4\ln 2 - \ln 5)^2$.

C. $\frac{1}{4}(4\ln 2 - \ln 5)^2$.

D. $2(4\ln 2 - \ln 5)^2$.

Lời giải:

Với $x \in [0;3]$ ta có:

$$(x+1)f'(x) = \frac{\sqrt{f(x)}}{x+2} \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} = \frac{1}{(x+1)(x+2)}$$

$$\Rightarrow \int_0^3 \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx = \int_0^3 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) dx \Rightarrow 2\sqrt{f(x)} \Big|_0^3 = \ln \left| \frac{x+1}{x+2} \right| \Big|_0^3$$

$$\Rightarrow 2(\sqrt{f(3)} - \sqrt{f(0)}) = \ln \frac{4}{5} - \ln \frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{f(3)} - \sqrt{\left(\frac{\ln 2}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \ln \frac{8}{5}$$

$$\Rightarrow \sqrt{f(3)} = \frac{1}{2} \left(\ln \frac{8}{5} + \ln 2 \right) = \frac{1}{2} (4\ln 2 - \ln 5) \Rightarrow f(3) = \frac{1}{4} (4\ln 2 - \ln 5)^2$$

$\Rightarrow$ Chọn đáp án C.

Câu 5: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \cdot f(\cos^2 x) dx = 2$ và $\int_e^{e^2} \frac{f(\ln^2 x)}{x \ln x} dx = 2$. Tính

$$\int_{\frac{1}{4}}^2 \frac{f(2x)}{x} dx.$$

A. 4.

B. 1.

C. 0.

D. 8.

Lời giải:

Xét $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \cdot f(\cos^2 x) dx = 2$.

Đặt $t = \cos^2 x \Rightarrow \begin{cases} dt = -2 \sin x \cos x dx = -2 \tan x \cdot \cos^2 x dx \Rightarrow -\frac{dt}{2t} = \tan x dx \\ x = 0 \Rightarrow t = 1; x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = \frac{1}{2} \end{cases}$.

Suy ra $I_1 = -\int_1^{\frac{1}{2}} \frac{f(t)}{2t} dt = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{f(t)}{2t} dt = 2 \Rightarrow \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{f(t)}{t} dt = 4$.

Xét $I_2 = \int_e^{e^2} \frac{f(\ln^2 x)}{x \ln x} dx = 2$.

Đặt $t = \ln^2 x \Rightarrow \begin{cases} dt = \frac{2 \ln x}{x} dx = \frac{1}{x \ln x} 2 \ln^2 x dx \Rightarrow \frac{dt}{2t} = \frac{1}{x \ln x} dx \\ x = e \Rightarrow t = 1; x = e^2 \Rightarrow t = 4 \end{cases}$.

Suy ra $I_2 = \int_1^4 \frac{f(t)}{2t} dt = 2 \Rightarrow \int_1^4 \frac{f(t)}{t} dt = 4$.

Xét $I = \int_{\frac{1}{4}}^2 \frac{f(2x)}{x} dx$. Đặt $t = 2x \Rightarrow \begin{cases} dt = 2 dx = \frac{2x}{x} dx \Rightarrow \frac{1}{x} dx = \frac{dt}{t} \\ x = \frac{1}{4} \Rightarrow t = \frac{1}{2}; x = 2 \Rightarrow t = 4 \end{cases}$.

Suy ra $I = \int_{\frac{1}{2}}^4 \frac{f(t)}{t} dt = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{f(t)}{t} dt + \int_1^4 \frac{f(t)}{t} dt = 4 + 4 = 8$.

$\Rightarrow$ Chọn đáp án D.

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm, nhận giá trị dương trên $(0; +\infty)$ và thỏa mãn

$2f'(x^2) = 9x\sqrt{f(x^2)}$ với mọi $x \in (0; +\infty)$. Biết $f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}$, tính $f\left(\frac{1}{3}\right)$.

A. $\frac{1}{4}$.

B. $\frac{1}{3}$.

C. $\frac{1}{12}$.

D. $\frac{1}{6}$.

Lời giải:

Ta có $2f'(x^2) = 9x\sqrt{f(x^2)} \Leftrightarrow \frac{2xf'(x)}{2\sqrt{f(x^2)}} = \frac{9}{2}x^2 \Leftrightarrow \frac{[f(x^2)]'}{2\sqrt{f(x^2)}} = \frac{9}{2}x^2 \Leftrightarrow [\sqrt{f(x^2)}]' = \frac{9}{2}x^2$

Do đó $\sqrt{f(x^2)} = \int \frac{9}{2} x^2 dx = \frac{3}{2} x^3 + C$. Mà $f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3} \Rightarrow \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} + C \Leftrightarrow C = 0$.

Suy ra $f(x^2) = \frac{9}{4} x^6 \Leftrightarrow f(x) = \frac{9}{4} x^3 \Rightarrow f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{9}{4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{12}$.

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án C.**

Câu 7: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, đồ thị của $y = f(x)$ đi qua điểm $A(1;0)$ và nhận điểm $I(2;2)$ làm tâm đối xứng. Tính tích phân $I = \int_1^3 x(x-2)(f(x) + f'(x)) dx$.

A. $-\frac{16}{3}$.

B. $\frac{16}{3}$.

C. $-\frac{8}{3}$.

D. $\frac{8}{3}$.

Lời giải:

+ Từ giả thiết, suy ra đẳng thức $f(x) + f(4-x) = 4, \forall x$ (*).

$$\begin{aligned} + \text{Ta có } I &= \int_1^3 x(x-2)(f(x) + f'(x)) dx = \int_1^3 (x^2 - 2x) f(x) dx + \int_1^3 (x^2 - 2x) df(x) \\ &= \int_1^3 (x^2 - 2x) f(x) dx + \left[(x^2 - 2x) f(x) \right]_1^3 - \int_1^3 (2x - 2) f(x) dx \\ &= \int_1^3 (x^2 - 4x + 2) f(x) dx + 3f(3) + f(1). \end{aligned}$$

+ Từ giả thiết và (*) suy ra $f(1) = 0$ và $f(3) = 4$.

+ Kí hiệu $J = \int_1^3 (x^2 - 4x + 2) f(x) dx$, dùng phép đổi biến $t = 4 - x$ dẫn đến

$$J = \int_1^3 ((4-x)^2 - 4(4-x) + 2) f(4-x) dx = \int_1^3 (x^2 - 4x + 2) f(4-x) dx.$$

Suy ra

$$2J = \int_1^3 (x^2 - 4x + 2)(f(x) + f(4-x)) dx = 4 \int_1^3 (x^2 - 4x + 2) dx = -\frac{40}{3} \Rightarrow J = -\frac{20}{3}.$$

$$\text{Vậy } I = -\frac{20}{3} + 3 \cdot 4 + 0 = \frac{16}{3}.$$

Cách dự đoán đáp số: Chọn $f(x) = 2(x-2)^3 + 2$ thỏa mãn các đk đề bài, thu được $I = \frac{16}{3}$.

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án B.**

Câu 8: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) \cdot [f(x)]^4 = \sin x \cdot \sin^2 2x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$. Giá trị

của $[f(\pi)]^5$ bằng

A. $-\frac{11}{3}$.

B. $\frac{11}{5}$.

C. $\frac{23}{15}$.

D. $\frac{11}{3}$.

Lời giải:

$$\text{Ta có } \sin x \cdot \sin^2 2x = \frac{1}{2} \sin x (1 - \cos 4x) = \frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{4} \sin 5x + \frac{1}{4} \sin 3x.$$

$$\text{Vậy } f'(x) \cdot [f(x)]^4 = \sin x \cdot \sin^2 2x \Rightarrow \int f'(x) \cdot [f(x)]^4 dx = \int \sin x \cdot \sin^2 2x dx$$

$$\Leftrightarrow \int f^4(x) df(x) = \int \left(\frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{4} \sin 5x + \frac{1}{4} \sin 3x \right) dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{f^5(x)}{5} = -\frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{20} \cos 5x - \frac{1}{12} \cos 3x + C.$$

$$\text{Do } f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \Leftrightarrow C = \frac{1}{5}. \text{ Vậy } f^5(\pi) = 5 \left[-\frac{1}{2} \cos \pi + \frac{1}{20} \cos 5\pi - \frac{1}{12} \cos 3\pi + \frac{1}{5} \right] = \frac{11}{3}.$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án D.**

Câu 9: Cho hàm số $f(x)$ xác định, có đạo hàm, liên tục và đồng biến trên $[1;4]$ thỏa mãn $x + 2xf(x) = [f'(x)]^2, \forall x \in [1;4], f(1) = \frac{3}{2}$. Giá trị $f(4)$ bằng

A. $\frac{391}{18}$.

B. $\frac{361}{18}$.

C. $\frac{381}{18}$.

D. $\frac{371}{18}$.

Lời giải:

$$\text{Ta có } x + 2xf(x) = [f'(x)]^2 \Leftrightarrow x(1 + 2f(x)) = [f'(x)]^2 \Leftrightarrow \frac{[f'(x)]^2}{1 + 2f(x)} = x \Rightarrow \frac{f'(x)}{\sqrt{1 + 2f(x)}} = \sqrt{x}$$

$$\Rightarrow \int_1^4 \frac{f'(x)}{\sqrt{1 + 2f(x)}} dx = \int_1^4 \sqrt{x} dx \Leftrightarrow \sqrt{1 + 2f(x)} \Big|_1^4 = \frac{14}{3} \Leftrightarrow \sqrt{1 + 2f(4)} - 2 = \frac{14}{3} \Leftrightarrow f(4) = \frac{391}{18}.$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án A.**

Câu 10: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(x) = 6x^2 \cdot f(x^3) - \frac{6}{\sqrt{3x+1}}$. Tính $\int_0^1 f(x) dx$.

A. 2.

B. 4.

C. -1.

D. 6.

Lời giải:

$$f(x) = 6x^2 \cdot f(x^3) - \frac{6}{\sqrt{3x+1}} \Rightarrow I = \int_0^1 f(x) dx = 2 \int_0^1 \left(3x^2 \cdot f(x^3) - \frac{3}{\sqrt{3x+1}} \right) dx = A - B$$

$$\text{Gọi } A = 2 \int_0^1 3x^2 \cdot f(x^3) dx. \text{ Đặt } t = x^3 \Rightarrow dt = 3x^2 dx. \text{ Đổi cận } x = 0 \Rightarrow t = 0; x = 1 \Rightarrow t = 1$$

$$\text{Ta có: } A = 2 \int_0^1 f(t) dt = 2 \int_0^1 f(x) dx = 2I$$

$$I = 2I - B \Rightarrow I = B = 6 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{3x+1}} dx = 6 \int_0^1 (3x+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{3} d(3x+1) = 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3x+1} \Big|_0^1 = 4.$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án B.**

Câu 11: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ thỏa $4x \cdot f(x^2) + 3f(1-x) = \sqrt{1-x^2}$. Tính $\int_0^1 f(x) dx$.

A. $\frac{\pi}{4}$.

B. $\frac{\pi}{6}$.

C. $\frac{\pi}{20}$.

D. $\frac{\pi}{16}$.

Lời giải:

$$4x \cdot f(x^2) + 3f(1-x) = \sqrt{1-x^2}$$

$$\Leftrightarrow 2 \int_0^1 2x \cdot f(x^2) dx + 3 \int_0^1 f(1-x) dx = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx \Leftrightarrow 2A + 3B = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx (*)$$

$$A = \int_0^1 2x \cdot f(x^2) dx \text{ Đặt } t = x^2 \Rightarrow dt = 2x dx; x = 0 \Rightarrow t = 0; x = 1 \Rightarrow t = 1$$

$$A = \int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 f(x)dx$$

$$B = \int_0^1 f(1-x)dx \text{ Đặt } t = 1-x \Rightarrow dt = -dx; x=0 \Rightarrow t=1, x=1 \Rightarrow t=0$$

$$B = \int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 f(x)dx$$

$$(*) \Leftrightarrow 2 \int_0^1 f(x)dx + 3 \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx \Leftrightarrow 5 \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$$

$$\text{Đặt: } x = \sin t \Rightarrow dx = \cos t dt, t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right); x=0 \Rightarrow t=0, x=1 \Rightarrow t=\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t} \cdot \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \frac{1}{2} \cdot \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t\right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{Vậy } \int_0^1 f(x)dx = \frac{\pi}{20}.$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án C.**

Câu 12: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ và thỏa mãn $x^2 f^2(x) + (2x-1)f(x) = xf'(x) - 1$ với $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ và $f(1) = -2$. Tính $\int_1^2 f(x)dx$.

A. $-\frac{1}{2} - \ln 2$.

B. $-\frac{3}{2} - \ln 2$.

C. $-1 - \frac{\ln 2}{2}$.

D. $-\frac{3}{2} - \frac{\ln 2}{2}$.

Lời giải:

$$\text{Biến đổi } x^2 f^2(x) + 2xf(x) + 1 = f(x) + xf'(x) \Leftrightarrow (xf(x) + 1)^2 = f(x) + xf'(x) (*).$$

$$\text{Đặt } h(x) = xf(x) + 1 \Rightarrow h'(x) = f(x) + x.f'(x), \text{ Khi đó } (*) \text{ có dạng:}$$

$$h^2(x) = h'(x) \Rightarrow \frac{h'(x)}{h^2(x)} = 1 \Rightarrow \int \frac{h'(x)}{h^2(x)} dx = \int dx \Leftrightarrow \int \frac{dh(x)}{h^2(x)} = x + C \Leftrightarrow -\frac{1}{h(x)} = x + C.$$

$$\Rightarrow h(x) = -\frac{1}{x+C} \Rightarrow xf(x) + 1 = -\frac{1}{x+C} \xrightarrow{f(1)=-2} -2+1 = -\frac{1}{1+C} \Rightarrow C=0.$$

$$\text{Khi đó } xf(x) + 1 = -\frac{1}{x} \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}.$$

$$\text{Suy ra: } \int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} dx = -\frac{1}{2} - \ln 2.$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án A.**

Câu 13: Cho hàm số $f(x)$ có $f(2) = 0$ và $f'(x) = \frac{x+7}{\sqrt{2x-3}}, \forall x \in \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$. Biết rằng $\int_4^7 f\left(\frac{x}{2}\right)dx = \frac{a}{b}$

($a, b \in \mathbb{Z}, b > 0, \frac{a}{b}$ là phân số tối giản). Khi đó $a+b$ bằng

A. 250.

B. 251.

C. 133.

D. 221.

Lời giải:

$$\text{Lấy nguyên hàm hai vế của } f'(x) = \frac{x+7}{\sqrt{2x-3}} \text{ ta được } f(x) = \int \frac{x+7}{\sqrt{2x-3}} dx, \forall x \in \left(\frac{3}{2}; +\infty\right).$$

Đặt $u = \sqrt{2x-3} \Rightarrow x = \frac{u^2+3}{2}$ suy ra $dx = udu$.

$$\text{Suy ra } f(x) = \frac{1}{2} \int (u^2 + 17) du = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{(2x-3)^3}}{3} + 17\sqrt{(2x-3)} \right) + C.$$

$$\text{Theo giả thiết ta có } f(2) = 0 \text{ suy ra } C = -\frac{26}{3}. \text{ Do đó } f(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{(2x-3)^3}}{3} + 17\sqrt{(2x-3)} \right) - \frac{26}{3}.$$

Ta có $\int_4^7 f\left(\frac{x}{2}\right) dx$. Đặt $\frac{x}{2} = t \Rightarrow dx = 2dt$. Đổi cận với $x = 4 \Rightarrow t = 2$, với $x = 7 \Rightarrow t = \frac{7}{2}$.

$$\text{Suy ra } \int_4^7 f\left(\frac{x}{2}\right) dx = 2 \int_2^{\frac{7}{2}} f(t) dt = 2 \int_2^{\frac{7}{2}} f(x) dx.$$

$$\text{Vậy } 2 \int_2^{\frac{7}{2}} f(x) dx = \int_2^{\frac{7}{2}} \left(\frac{\sqrt{(2x-3)^3}}{3} + 17\sqrt{(2x-3)} - \frac{13}{3} \right) dx = \frac{236}{15}.$$

Suy ra $a = 236, b = 15$ nên $a + b = 236 + 15 = 251$.

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án B.**

Câu 14: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x^5 + 4x + 3) = 2x + 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $\int_{-2}^8 f(x) dx$ bằng

A. 2.

B. 10.

C. $\frac{32}{3}$.

D. 72.

Lời giải:

$$\text{Ta có } (5x^4 + 4) \cdot f(x^5 + 4x + 3) = (5x^4 + 4)(2x + 1).$$

$$\text{Đặt } t = x^5 + 4x + 3 \text{ ta có } dt = (5x^4 + 4)dx \text{ và } f(t) = 2x + 1.$$

Đổi cận

$$+ t = -2 \Rightarrow x^5 + 4x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -1.$$

$$+ t = 8 \Rightarrow x^5 + 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

$$\text{Do đó } \int_{-2}^8 f(t) dt = \int_{-1}^1 (2x + 1)(5x^4 + 4) dx = 10.$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án B.**

Câu 15: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $2f(1) - 3f(0) = 0$, $\int_0^1 f(x) dx = 7$. Tính

$$I = \int_0^2 (6-x) f'\left(\frac{x}{2}\right) dx.$$

A. $I = 40$.

B. $I = 28$.

C. $I = 18$.

D. $I = 42$.

Lời giải:

$$\text{Xét } I = \int_0^2 (6-x) f'\left(\frac{x}{2}\right) dx$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = 6 - x \\ dv = f'\left(\frac{x}{2}\right) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -dx \\ v = 2f\left(\frac{x}{2}\right) \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó: } I = 2(6-x) f\left(\frac{x}{2}\right) \Big|_0^2 + 2 \int_0^2 f\left(\frac{x}{2}\right) dx = 4[2f(1) - 3f(0)] + 2J = 2J.$$

$$\text{Xét } J = \int_0^2 f\left(\frac{x}{2}\right) dx$$

$$+ \text{Đặt } t = \frac{x}{2} \Rightarrow dt = \frac{1}{2} dx.$$

$$+ \text{Đổi cận: } x = 0 \Rightarrow t = 0; x = 2 \Rightarrow t = 1.$$

$$\text{Lúc này: } J = 2 \int_0^1 f(t) dt = 2 \cdot 7 = 14. \text{ Vậy } I = 2J = 2 \cdot 14 = 28.$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án B.**

Câu 16: Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-1; 2]$ và thỏa mãn $f(x) + 2xf(x^2 - 2) + 3f(1 - x) = 4x^3$. Tính giá

$$\text{trị của tích phân } I = \int_{-1}^2 f(x) dx.$$

A. $I = 3$.

B. $I = 5$.

C. $I = 15$.

D. $I = 6$.

Lời giải:

Lấy nguyên hàm hai vế giả thiết ta có

$$\int [f(x) + 2xf(x^2 - 2) + 3f(1 - x)] dx = \int 4x^3 dx$$

$$\Rightarrow \int f(x) dx + \int f(x^2 - 2) d(x^2 - 2) - \int 3f(1 - x) d(1 - x) = x^4 + C$$

$$\text{Đặt } \int f(t) dx = F(t) \Rightarrow F(x) + F(x^2 - 2) - 3F(1 - x) = x^4 + C.$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} x = 1 \Rightarrow F(-1) + F(-1) - 3F(2) = 1 + C \\ x = 2 \Rightarrow F(2) + F(2) - 3F(-1) = 16 + C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2F(-1) - 3F(2) = 1 + C \\ 2F(2) - 3F(-1) = 16 + C \end{cases}$$

$$\text{Trừ từng vế thu được } 5F(2) - 5F(-1) = 15 \Rightarrow F(2) - F(-1) = 3 \Rightarrow I = \int_{-1}^2 f(x) dx = 3.$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án A.**

Câu 17: Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[0; 1]$ thỏa mãn $f(1) = 4$ và $\int_0^1 f(x) dx = 2$. Tính

$$\int_0^1 x^3 f'(x^2) dx.$$

A. 16.

B. 5.

C. 1.

D. 2.

Lời giải:

$$\text{Đặt } x^2 = t \Rightarrow 2x dx = dt. \text{ Khi đó ta có } x dx = \frac{dt}{2}.$$

$$\text{Suy ra: } \int_0^1 x^3 f'(x^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 t f'(t) dt = \frac{1}{2} \left(t f(t) \Big|_0^1 - \int_0^1 f(t) dt \right) = \frac{1}{2} f(1) - \frac{1}{2} \int_0^1 f(t) dt = 1.$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án C.**

Câu 18: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $f(1) = 0$, $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 7$ và

$$\int_0^1 x^2 f(x) dx = \frac{1}{3}. \text{ Tính } \int_0^1 f(x) dx.$$

A. $\frac{7}{5}$

B. 1

C. $\frac{7}{4}$

D. 4

Lời giải:

$$\text{Đặt } u = f(x) \Rightarrow du = f'(x) dx, dv = x^2 dx \Rightarrow v = \frac{x^3}{3}.$$

$$\text{Ta có } \frac{1}{3} = \frac{x^3}{3} f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^3}{3} f'(x) dx \Rightarrow \int_0^1 x^3 f'(x) dx = -1$$

$$\text{Ta có } \int_0^1 49x^6 dx = 7, \int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 7, \int_0^1 2.7x^3 \cdot f'(x) dx = -14 \Rightarrow \int_0^1 [7x^3 + f'(x)]^2 dx = 0$$

$$\Rightarrow 7x^3 + f'(x) = 0 \Rightarrow f(x) = -\frac{7x^4}{4} + C, \text{ mà } f(1) = 0 \Rightarrow C = \frac{7}{4}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \left(-\frac{7x^4}{4} + \frac{7}{4} \right) dx = \frac{7}{5}.$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án A.**

Câu 19: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $xf(x^2) - f(2x) = 2x^3 + 2x, \forall x \in \mathbb{R}$. Tính giá

$$\text{trị } I = \int_1^2 f(x) dx.$$

A. $I = 25$.

B. $I = 21$.

C. $I = 27$.

D. $I = 23$.

Lời giải:

$$\text{Ta có: } xf(x^2) - f(2x) = 2x^3 + 2x \Rightarrow \int_1^2 [xf(x^2) - f(2x)] dx = \int_1^2 (2x^3 + 2x) dx$$

$$\Leftrightarrow \int_1^2 [xf(x^2)] dx - \int_1^2 [f(2x)] dx = \left(\frac{x^4}{2} + x^2 \right) \Big|_1^2 \Leftrightarrow \int_1^2 [xf(x^2)] dx - \int_1^2 [f(2x)] dx = \frac{21}{2}. (*)$$

$$+ \text{ Tính } \int_1^2 [xf(x^2)] dx:$$

$$\text{Đặt } u = x^2 \Rightarrow du = 2x dx \Leftrightarrow x dx = \frac{du}{2}; x=1 \Rightarrow u=1; x=2 \Rightarrow u=4.$$

$$\text{Suy ra } \int_1^2 [xf(x^2)] dx = \int_1^4 \frac{f(u)}{2} du = \frac{1}{2} \int_1^4 f(x) dx.$$

$$+ \text{ Tính } \int_1^2 [f(2x)] dx. \text{ Đặt } t = 2x \Rightarrow dt = 2dx \Leftrightarrow dx = \frac{dt}{2}; x=1 \Rightarrow t=2; x=2 \Rightarrow t=4.$$

$$\text{Suy ra } \int_1^2 [f(2x)] dx = \int_2^4 \frac{f(t)}{2} dt = \frac{1}{2} \int_2^4 f(x) dx.$$

$$\text{Thay vào (*) ta được } \frac{1}{2} \int_1^4 f(x) dx - \frac{1}{2} \int_2^4 f(x) dx = \frac{21}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \int_1^2 f(x) dx + \frac{1}{2} \int_2^4 f(x) dx - \frac{1}{2} \int_2^4 f(x) dx = \frac{21}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \int_1^2 f(x) dx = \frac{21}{2} \Leftrightarrow \int_1^2 f(x) dx = 21.$$

$\Rightarrow$ Chọn đáp án B.

Câu 20: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $(0; +\infty)$, thỏa mãn $f(1) = \frac{1}{2}$ và $3xf(x) - x^2 f'(x) = 2[f(x)]^2$, $f(x) \neq 0$ với $x \in (0; +\infty)$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[1; 2]$. Tổng $M + m$ bằng

A. $\frac{21}{10}$.

B. $\frac{7}{5}$.

C. $\frac{9}{10}$.

D. $\frac{6}{5}$.

Lời giải:

+) Xét hàm số $f(x)$ trên $(0; +\infty)$ ta có: $3xf(x) - x^2 f'(x) = 2f^2(x)$

$$\Leftrightarrow 3x^2 f(x) - x^3 f'(x) = 2xf^2(x) \Leftrightarrow \frac{(x^3)' f(x) - x^3 f'(x)}{f^2(x)} = 2x \Leftrightarrow \left(\frac{x^3}{f(x)} \right)' = 2x \quad (1).$$

Lấy nguyên hàm hai vế của (1) ta được: $\int \left(\frac{x^3}{f(x)} \right)' dx = \int 2x dx \Leftrightarrow \frac{x^3}{f(x)} = x^2 + C.$

Mà $f(1) = \frac{1}{2}$ nên $\frac{1^3}{f(1)} = 1^2 + C \Leftrightarrow C = 1$. Suy ra $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}.$

+) Xét hàm số $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$ trên $[1; 2]$.

Xét hàm số $f'(x) = \frac{3x^2(x^2 + 1) - 2x \cdot x^3}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x^4 + 3x^2}{(x^2 + 1)^2} > 0$ với $\forall x \in [1; 2]$.

Suy ra $M = \max_{[1; 2]} f(x) = f(2) = \frac{8}{5}; m = \min_{[1; 2]} f(x) = f(1) = \frac{1}{2}.$

Vậy $M + m = \frac{1}{2} + \frac{8}{5} = \frac{21}{10}.$

$\Rightarrow$ Chọn đáp án A.

HẾT

Huế, ngày 07 tháng 02 năm 2021



CHUYÊN ĐỀ

TÍCH PHÂN - ỨNG DỤNG

Tích phân _ Hàm ẩn

Lớp Toán thầy LÊ BÁ BẢO

Trường THPT Đặng Huy Trứ

SĐT: 0935.785.115 Facebook: Lê Bá Bảo

116/04 Nguyễn Lộ Trạch, TP Huế Trung tâm KM 10 Hương Trà, Huế.

NỘI DUNG ĐỀ BÀI

Câu 1: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[2; 4]$ và thỏa mãn $f(2) = 2, f(4) = 2020$.

Tính tích phân $I = \int_1^2 f'(2x) dx$.

A. $I = 1009$.

B. $I = 2022$.

C. $I = 2018$.

D. $I = 1011$.

Câu 2: Cho a là hằng số thực và hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int_1^2 f(x-a) dx = 2021$. Giá trị

của tích phân $I = \int_{1-a}^{2-a} f(x) dx$ là

A. $I = 2021$.

B. $I = -2021$.

C. $I = 2021 + a$.

D. $I = 2021 - a$.

Câu 3: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$ và thỏa mãn

$f(x^2 + 1) + \frac{f(\sqrt{x})}{4x\sqrt{x}} = \frac{2x+1}{2x} \cdot \ln(x+1)$. Biết $\int_1^{17} f(x) dx = a \ln 5 - 2 \ln b + c$ với $a, b, c \in \mathbb{R}$. Giá trị

của $a + b + 2c$ bằng

A. $\frac{29}{2}$.

B. 5.

C. 7.

D. 37.

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(1) = e$ và $(x+2)f(x) = xf'(x) - x^3$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Tính $f(2)$.

A. $4e^2 - 4e + 4$

B. $4e^2 - 2e + 1$

C. $2e^3 - 2e + 2$

D. $4e^2 + 4e - 4$

Câu 5: Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(1) = 1$ và $\int_0^1 f(t) dt = \frac{1}{3}$, tính

$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \cdot f'(\sin x) dx$.

A. $I = \frac{4}{3}$.

B. $I = \frac{2}{3}$.

C. $I = -\frac{2}{3}$.

D. $I = \frac{1}{3}$.

Câu 6: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm xác định trên $\mathbb{R}$. Biết $f(1) = 2$ và

$\int_0^1 x^2 f'(x) dx = \int_1^4 \frac{1+3\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} f(2-\sqrt{x}) dx = 4$. Giá trị của $\int_0^1 f(x) dx$ bằng

A. 1.

B. $\frac{5}{7}$.

C. $\frac{3}{7}$.

D. $\frac{1}{7}$.

- Câu 7:** Cho hàm số $y = f(x)$ đồng biến và có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $(f'(x))^2 = f(x) \cdot e^x, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 2$. Khi đó $f(2)$ thuộc khoảng nào sau đây?
A. (12;13). B. (9;10). C. (11;12). D. (13;14).
- Câu 8:** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x) + f(-x) = 2 \cos 2x, \forall x \in \mathbb{R}$. Khi đó $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$ bằng
A. -2. B. 4. C. 2. D. 0.
- Câu 9:** Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên tập số thực $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x^3 + 3x + 1) = x + 2$. Tính $I = \int_1^5 f(x) dx$.
A. $\frac{41}{4}$. B. $\frac{527}{3}$. C. $\frac{61}{6}$. D. $\frac{464}{3}$.
- Câu 10:** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 2 & \text{khi } 0 \leq x < 2 \\ -x + 5 & \text{khi } 2 \leq x \leq 5 \end{cases}$. Khi đó $\int_1^{e^2} \frac{f(\ln x)}{x} dx + \int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{6}} xf(\sqrt{x^2 + 1}) dx$ bằng
A. $\frac{19}{2}$. B. $\frac{37}{2}$. C. $\frac{27}{2}$. D. 5.
- Câu 11:** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $\int_0^1 x \cdot f'(x) dx = 10$ và $f(1) = 3$, tính $\int_0^1 f(x) dx$.
A. 30. B. 7. C. 13. D. -7.
- Câu 12:** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn $4x \cdot f(x^2) + 3f(1-x) = \sqrt{1-x^2}$. Tính $\int_0^1 f(x) dx$.
A. $\frac{\pi}{16}$. B. $\frac{\pi}{4}$. C. $\frac{\pi}{20}$. D. $\frac{\pi}{6}$.
- Câu 13:** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) \cdot [f(x)]^4 = \sin x \cdot \sin^2 2x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$. Giá trị của $[f(\pi)]^5$ bằng
A. $-\frac{11}{3}$. B. $\frac{11}{5}$. C. $\frac{23}{15}$. D. $\frac{11}{3}$.
- Câu 14:** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x) = e^x + \int_0^1 tf(t) dt, \forall x \in \mathbb{R}$. Tính $f(\ln(5620))$.
A. 5622. B. 5621. C. 5620. D. 5619.
- Câu 15:** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int_0^1 f(x) dx = 10, f(1) = \cot 1$. Tính tích phân $I = \int_0^1 [f(x) \tan^2 x + f'(x) \tan x] dx$.
A. $1 - \ln(\cos 1)$. B. -1. C. -9. D. $1 - \cot 1$.

Câu 16: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và thỏa mãn $f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 3x$ với mọi $x \in \left[\frac{1}{2}; 2\right]$. Tính

$$\int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{f(x)}{x} dx.$$

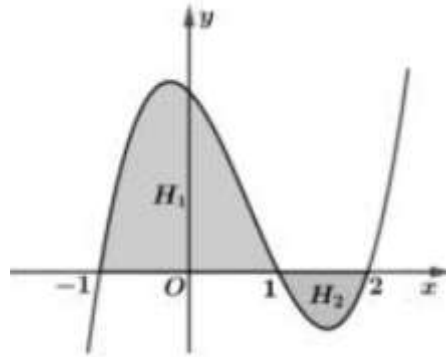
- A. $\frac{3}{2}$. B. $\frac{9}{2}$. C. $-\frac{9}{2}$. D. $-\frac{3}{2}$.

Câu 17: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $(0; +\infty)$ sao cho $x^2 + xf(e^x) + f(e^x) = 1$ với mọi

$$x \in (0; +\infty). \text{ Tính tích phân } I = \int_{\sqrt{e}}^e \frac{(\ln x) f(x)}{x} dx.$$

- A. $I = -\frac{1}{8}$. B. $I = -\frac{2}{3}$. C. $I = \frac{1}{12}$. D. $I = \frac{3}{8}$.

Câu 18: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ. Biết H_1 có diện tích bằng 7 (đvdt), H_2 có diện tích bằng 3 (đvdt).



$$\text{Tính } I = \int_{-2}^{-1} (2x+6) f(x^2+6x+7) dx.$$

- A. 11 (đvdt). B. 4 (đvdt). C. 1 (đvdt). D. 10 (đvdt).

Câu 19: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $[f(x)]^3 + f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$. Tính $I = \int_0^2 f(x) dx$.

- A. $I = -\frac{4}{5}$. B. $I = \frac{4}{5}$. C. $I = -\frac{5}{4}$. D. $I = \frac{5}{4}$.

Câu 20: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa $xf(x^3) + f(1-x^2) = -x^{10} + x^6 - 2x, \forall x \in \mathbb{R}$. Khi đó

$$\int_{-1}^0 f(x) dx \text{ bằng}$$

- A. $-\frac{17}{20}$. B. $-\frac{13}{4}$. C. $\frac{17}{4}$. D. -1.

HẾT

Huế, ngày 07 tháng 02 năm 2021



CHUYÊN ĐỀ

TÍCH PHÂN - ỨNG DỤNG

Tích phân _ Hàm ẩn

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[2; 4]$ và thỏa mãn $f(2) = 2, f(4) = 2020$.

Tính tích phân $I = \int_1^2 f'(2x) dx$.

A. $I = 1009$.

B. $I = 2022$.

C. $I = 2018$.

D. $I = 1011$.

Lời giải:

Đặt $t = 2x \Rightarrow dx = \frac{1}{2} dt$. Đổi cận: $x = 1 \Rightarrow t = 2; x = 2 \Rightarrow t = 4$.

Do đó, ta có $I = \int_1^2 f'(2x) dx = \frac{1}{2} \int_2^4 f'(t) dt = \frac{1}{2} f(t) \Big|_2^4 = \frac{1}{2} (f(4) - f(2)) = 1009$.

$\Rightarrow$ Chọn đáp án A.

Câu 2: Cho a là hằng số thực và hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int_1^2 f(x-a) dx = 2021$. Giá trị

của tích phân $I = \int_{1-a}^{2-a} f(x) dx$ là

A. $I = 2021$.

B. $I = -2021$.

C. $I = 2021 + a$.

D. $I = 2021 - a$.

Lời giải:

Đặt: $t = x - a \Rightarrow dt = dx$.

Đổi cận: Với $x = 1$ ta có $t = 1 - a$; với $x = 2$ ta có $t = 2 - a$.

$$\Rightarrow I = \int_{1-a}^{2-a} f(t) dt = \int_{1-a}^{2-a} f(x) dx = \int_1^2 f(x-a) dx = 2021.$$

$\Rightarrow$ Chọn đáp án A.

Câu 3: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$ và thỏa mãn

$f(x^2 + 1) + \frac{f(\sqrt{x})}{4x\sqrt{x}} = \frac{2x+1}{2x} \cdot \ln(x+1)$. Biết $\int_1^{17} f(x) dx = a \ln 5 - 2 \ln b + c$ với $a, b, c \in \mathbb{R}$. Giá trị

của $a + b + 2c$ bằng

A. $\frac{29}{2}$.

B. 5.

C. 7.

D. 37.

Lời giải:

Cách 1:

Do $f(x)$ liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$ nên tồn tại $F(x) = \int f(x) dx, \forall x > 0$.

Với $x > 0$, ta có:

$$f(x^2 + 1) + \frac{f(\sqrt{x})}{4x\sqrt{x}} = \frac{2x+1}{2x} \cdot \ln(x+1) \Leftrightarrow 2x \cdot f(x^2 + 1) + \frac{f(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} = (2x+1) \cdot \ln(x+1).$$

Xét vế trái: $g(x) = 2x.f(x^2+1) + \frac{f(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} \Rightarrow \int g(x)dx = F(x^2+1) + F(\sqrt{x}) + C_1.$

Xét vế phải: $h(x) = (2x+1).\ln(x+1)$

$$\Rightarrow \int h(x)dx = \int (2x+1)\ln(x+1)dx = \int \ln(x+1)d(x^2+x) = (x^2+x)\ln(x+1) - \int (x^2+x)\frac{1}{x+1}dx$$

$$= (x^2+x)\ln(x+1) - \int xdx = (x^2+x)\ln(x+1) - \frac{x^2}{2} + C_2.$$

Suy ra $F(x^2+1) + F(\sqrt{x}) = (x^2+x)\ln(x+1) - \frac{x^2}{2} + C \quad (1).$

Thay $x=4$ vào (1) ta có: $F(17) + F(2) = 20\ln 5 - 8 + C.$

Thay $x=1$ vào (1) ta có: $F(2) + F(1) = 2\ln 2 - \frac{1}{2} + C.$

Nên $\int_1^{17} f(x)dx = F(17) - F(1) = 20\ln 5 - 2\ln 2 - \frac{15}{2}$, suy ra $a=20, b=2, c=-\frac{15}{2}.$

Vậy: $a+b+2c = 20+2-15 = 7.$

Cách 2:

Do $f(x)$ liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$ nên tồn tại $F(x) = \int f(x)dx, \forall x > 0.$

Với $x > 0$, ta có:

$$f(x^2+1) + \frac{f(\sqrt{x})}{4x\sqrt{x}} = \frac{2x+1}{2x}.\ln(x+1) \Leftrightarrow 2x.f(x^2+1) + \frac{f(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} = (2x+1).\ln(x+1).$$

Lấy tích phân hai vế cận từ 1 đến 4 ta được:

$$\int_1^4 f(x^2+1)d(x^2+1) + \int_1^4 f(\sqrt{x})d\sqrt{x} = \int_1^4 (2x+1).\ln(x+1)dx$$

$$\Leftrightarrow \int_2^{17} f(t)dt + \int_1^2 f(t)dt = (x^2+x)\ln(x+1)\Big|_1^4 - \int_1^4 \frac{x^2+x}{x+1}dx$$

$$\Leftrightarrow \int_1^{17} f(t)dt = 20\ln 5 - 2\ln 2 - \int_1^4 xdx \Leftrightarrow \int_1^{17} f(x)dx = 20\ln 5 - 2\ln 2 - \frac{15}{2}.$$

Vậy: $a+b+2c = 20+2-15 = 7.$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án C.**

Câu 4: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(1)=e$ và $(x+2)f(x)=xf'(x)-x^3, \forall x \in \mathbb{R}$. Tính $f(2)$.

A. $4e^2 - 4e + 4$

B. $4e^2 - 2e + 1$

C. $2e^3 - 2e + 2$

D. $4e^2 + 4e - 4$

Lời giải:

Ta có: $(x+2)f(x) = xf'(x) - x^3 \Leftrightarrow \frac{xf'(x) - (x+2)f(x)}{x^3} = 1$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{e^{-x}f(x)}{x^2} \right]' = e^{-x} \Rightarrow \int_1^2 \left[\frac{e^{-x}f(x)}{x^2} \right]' dx = \int_1^2 e^{-x} dx \Rightarrow \frac{e^{-2}f(2)}{2^2} - \frac{e^{-1}f(1)}{1^2} = -[e^{-2} - e^{-1}]$$

$$\Rightarrow \frac{e^{-2}f(2)}{4} - \frac{e^{-1}f(1)}{1} = e^{-1} - e^{-2} \Rightarrow f(2) = 4[ef(1) + e - 1] = 4e^2 + 4e - 4.$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án D.**

Câu 5: Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(1)=1$ và $\int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{3}$, tính

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \cdot f'(\sin x) dx.$$

A. $I = \frac{4}{3}$.

B. $I = \frac{2}{3}$.

C. $I = -\frac{2}{3}$.

D. $I = \frac{1}{3}$.

Lời giải:

Đặt $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$. Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = 0$; $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1$.

Khi đó $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \cdot f'(\sin x) dx = \int_0^1 2t \cdot f'(t) dt$. Đặt $\begin{cases} u = 2t \\ dv = f'(t) dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2dt \\ v = f(t) \end{cases}$

$$\text{Vậy } I = \left[2t \cdot f(t) \right]_0^1 - 2 \int_0^1 f(t) dt = 2f(1) - 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{3}.$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án A.**

Câu 6: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm xác định trên $\mathbb{R}$. Biết $f(1)=2$ và

$$\int_0^1 x^2 f'(x) dx = \int_1^4 \frac{1+3\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} f(2-\sqrt{x}) dx = 4. \text{ Giá trị của } \int_0^1 f(x) dx \text{ bằng}$$

A. 1.

B. $\frac{5}{7}$.

C. $\frac{3}{7}$.

D. $\frac{1}{7}$.

Lời giải:

$$\text{Ta có: } 4 = \int_0^1 x^2 f'(x) dx = \int_0^1 x^2 d(f(x)) = \left(x^2 f(x) \right) \Big|_0^1 - \int_0^1 2xf(x) dx$$

$$\Leftrightarrow 4 = f(1) - 2 \int_0^1 xf(x) dx \Leftrightarrow 4 = 2 - 2 \int_0^1 xf(x) dx \Rightarrow \int_0^1 xf(x) dx = -1.$$

$$\text{Xét } \int_1^4 \frac{1+3\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} f(2-\sqrt{x}) dx. \text{ Đặt } t = 2 - \sqrt{x} \Rightarrow dt = -\frac{1}{2\sqrt{x}} dx.$$

Với $x=1 \Rightarrow t=1$ và $x=4 \Rightarrow t=0$.

$$\text{Khi đó } 4 = \int_1^4 \frac{1+3\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} f(2-\sqrt{x}) dx = - \int_1^0 [1+3(2-t)] f(t) dt$$

$$\Leftrightarrow 4 = \int_0^1 (7-3t) f(t) dt \Leftrightarrow 4 = 7 \int_0^1 f(t) dt - 3 \int_0^1 t f(t) dt \Leftrightarrow 4 = 7 \int_0^1 f(t) dt - 3(-1) \Leftrightarrow \int_0^1 f(t) dt = \frac{1}{7}.$$

$$\text{Vậy } \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{7}.$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án D.**

Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ đồng biến và có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$(f'(x))^2 = f(x) \cdot e^x, \forall x \in \mathbb{R} \text{ và } f(0) = 2. \text{ Khi đó } f(2) \text{ thuộc khoảng nào sau đây?}$$

A. (12;13).

B. (9;10).

C. (11;12).

D. (13;14).

Lời giải:

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên ta có $\begin{cases} f'(x) \geq 0 \\ f(x) > f(0), \forall x > 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow (f'(x))^2 = f(x).e^x \Leftrightarrow f'(x) = \sqrt{f(x)}.e^{\frac{x}{2}} \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}$$

$$\Rightarrow \int_0^2 \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} dx = \int_0^2 \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}} dx \Leftrightarrow \sqrt{f(x)} \Big|_0^2 = e^{\frac{x}{2}} \Big|_0^2 \Leftrightarrow \sqrt{f(2)} - \sqrt{f(0)} = e - 1$$

$$\Rightarrow f(2) = (e + \sqrt{2} - 1)^2 \in (9; 10).$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án B.**

Câu 8: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x) + f(-x) = 2 \cos 2x, \forall x \in \mathbb{R}$. Khi đó

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx \text{ bằng}$$

A. -2.

B. 4.

C. 2.

D. 0.

Lời giải:

Với $f(x) + f(-x) = 2 \cos 2x, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (f(x) + f(-x)) dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos 2x dx \Leftrightarrow \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(-x) dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos 2x dx \quad (*)$$

$$\text{Tính } I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(-x) dx. \text{ Đặt } t = -x \Rightarrow dt = -dx. \text{ Đổi cận: } x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = -\frac{\pi}{2}; x = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{Khi đó } I = - \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} f(t) dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(t) dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx.$$

$$\text{Từ } (*), \text{ ta được: } 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos 2x dx = \sin 2x \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 0 \Rightarrow \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = 0.$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án D.**

Câu 9: Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên tập số thực $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x^3 + 3x + 1) = x + 2$. Tính

$$I = \int_1^5 f(x) dx.$$

A. $\frac{41}{4}$.

B. $\frac{527}{3}$.

C. $\frac{61}{6}$.

D. $\frac{464}{3}$.

Lời giải:

Đặt $x = t^3 + 3t + 1$. Đổi cận: $x = 1 \Rightarrow t = 0, x = 5 \Rightarrow t = 1$.

Ta có: $dx = d(t^3 + 3t + 1) = (3t^2 + 3)dt$.

$$\text{Khi đó: } I = \int_1^5 f(x) dx = \int_0^1 f(t^3 + 3t + 1) (3t^2 + 3) dt = \int_0^1 (t + 2) (3t^2 + 3) dt = \frac{41}{4}.$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án A.**

Câu 10: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 2 & \text{khi } 0 \leq x < 2 \\ -x + 5 & \text{khi } 2 \leq x \leq 5 \end{cases}$. Khi đó $\int_1^{e^2} \frac{f(\ln x)}{x} dx + \int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{6}} xf(\sqrt{x^2+1}) dx$ bằng

A. $\frac{19}{2}$. B. $\frac{37}{2}$. C. $\frac{27}{2}$. D. 5.

Lời giải:

Xét $I_1 = \int_1^{e^2} \frac{f(\ln x)}{x} dx$. Đặt $t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{1}{x} dx$. Đổi cận $\begin{cases} x=1 \Rightarrow t=0 \\ x=e^2 \Rightarrow t=2 \end{cases}$

Suy ra $I_1 = \int_1^{e^2} \frac{f(\ln x)}{x} dx = \int_0^2 f(t) dt = \int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 \left(\frac{1}{2}x + 2 \right) dx = \left(\frac{x^2}{4} + 2x \right) \Big|_0^2 = 5$.

Xét $I_2 = \int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{6}} xf(\sqrt{x^2+1}) dx$. Đặt $t = \sqrt{x^2+1} \Rightarrow t^2 = x^2+1 \Rightarrow tdt = xdx$.

Đổi cận $\begin{cases} x=\sqrt{3} \Rightarrow t=2 \\ x=2\sqrt{6} \Rightarrow t=5 \end{cases}$

Suy ra $I_2 = \int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{6}} xf(\sqrt{x^2+1}) dx = \int_2^5 f(t) dt = \int_2^5 f(x) dx = \int_2^5 (-x+5) dx = \left(-\frac{x^2}{2} + 5x \right) \Big|_2^5 = \frac{9}{2}$.

Vậy $\int_1^{e^2} \frac{f(\ln x)}{x} dx + \int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{6}} xf(\sqrt{x^2+1}) dx = 5 + \frac{9}{2} = \frac{19}{2}$.

$\Rightarrow$ Chọn đáp án A.

Câu 11: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $\int_0^1 x.f'(x) dx = 10$ và $f(1) = 3$, tính $\int_0^1 f(x) dx$.

A. 30. B. 7. C. 13. D. -7.

Lời giải:

Xét tích phân $\int_0^1 x.f'(x) dx = 10$. Đặt $\begin{cases} u=x \\ dv=f'(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=dx \\ v=f(x) \end{cases}$.

Do đó, $\int_0^1 x.f'(x) dx = 10 \Leftrightarrow x.f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 f(x) dx = 10 \Leftrightarrow f(1) - 10 = \int_0^1 f(x) dx$.

Suy ra $\int_0^1 f(x) dx = 3 - 10 = -7$.

$\Rightarrow$ Chọn đáp án D.

Câu 12: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn $4x.f(x^2) + 3f(1-x) = \sqrt{1-x^2}$. Tính $\int_0^1 f(x) dx$.

A. $\frac{\pi}{16}$. B. $\frac{\pi}{4}$. C. $\frac{\pi}{20}$. D. $\frac{\pi}{6}$.

Lời giải:

Từ giả thiết $4x.f(x^2) + 3f(1-x) = \sqrt{1-x^2}$, lấy tích phân hai vế ta được:

$$\int_0^1 [4x.f(x^2)] dx + 3 \int_0^1 f(1-x) dx = \int_0^1 (\sqrt{1-x^2}) dx (*)$$

Tính $A = \int_0^1 [4x \cdot f(x^2)] dx$. Đặt $t = x^2 \Rightarrow dt = 2x \cdot dx$. Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 0$; $x = 1 \Rightarrow t = 1$.

$$\Rightarrow A = \int_0^1 [4x \cdot f(x^2)] dx = 2 \int_0^1 f(x^2) 2x \cdot dx = 2 \int_0^1 f(t) dt = 2 \int_0^1 f(x) dx$$

Tính $B = \int_0^1 3f(1-x) dx$

Đặt $t = 1 - x \Rightarrow dt = -dx$. Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 1$; $x = 1 \Rightarrow t = 0$.

$$\Rightarrow B = \int_0^1 3f(1-x) dx = -3 \int_1^0 f(t) dt = 3 \int_0^1 f(t) dt = 3 \int_0^1 f(x) dx$$

Tính $C = \int_0^1 (\sqrt{1-x^2}) dx$

Đặt $x = \sin t \Rightarrow dx = \cos t \cdot dt$. Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 0$; $x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$.

$$\Rightarrow C = \int_0^1 (\sqrt{1-x^2}) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \cdot dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2} \cdot dt = \left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

Thay A, B, C vào (*) ta được: $5 \int_0^1 f(x) dx = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx = \frac{\pi}{20}$.

$\Rightarrow$ Chọn đáp án C.

Câu 13: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) \cdot [f(x)]^4 = \sin x \cdot \sin^2 2x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$. Giá trị của $[f(\pi)]^5$ bằng

A. $-\frac{11}{3}$.

B. $\frac{11}{5}$.

C. $\frac{23}{15}$.

D. $\frac{11}{3}$.

Lời giải:

Ta có $\sin x \cdot \sin^2 2x = \frac{1}{2} \sin x (1 - \cos 4x) = \frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{4} \sin 5x + \frac{1}{4} \sin 3x$.

Vậy $f'(x) \cdot [f(x)]^4 = \sin x \cdot \sin^2 2x \Rightarrow \int f'(x) \cdot [f(x)]^4 dx = \int \sin x \cdot \sin^2 2x dx$

$$\Leftrightarrow \int f^4(x) df(x) = \int \left(\frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{4} \sin 5x + \frac{1}{4} \sin 3x \right) dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{f^5(x)}{5} = -\frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{20} \cos 5x - \frac{1}{12} \cos 3x + C.$$

Do $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \Leftrightarrow C = \frac{1}{5}$. Vậy $f^5(\pi) = 5 \left[-\frac{1}{2} \cos \pi + \frac{1}{20} \cos 5\pi - \frac{1}{12} \cos 3\pi + \frac{1}{5} \right] = \frac{11}{3}$.

$\Rightarrow$ Chọn đáp án D.

Câu 14: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x) = e^x + \int_0^1 tf(t) dt, \forall x \in \mathbb{R}$. Tính $f(\ln(5620))$.

A. 5622.

B. 5621.

C. 5620.

D. 5619.

Lời giải:

Theo giả thiết, ta có: $f(x) = e^x + c$, với $c = \int_0^1 tf(t) dt$ là hằng số.

Khi đó: $c = \int_0^1 t(e^t + c) dt = \int_0^1 te^t dt + \int_0^1 ctdt = I_1 + I_2$, với $I_1 = \int_0^1 te^t dt$, $I_2 = \int_0^1 ctdt$.

Vì $I_1 = \int_0^1 te^t dt = \int_0^1 td(e^t) = (te^t)|_0^1 - \int_0^1 e^t dt = e - (e^t)|_0^1 = e - (e - 1) = 1$, $I_2 = \int_0^1 ctdt = (\frac{ct^2}{2})|_0^1 = \frac{c}{2}$ nên

$$c = I_1 + I_2 \Leftrightarrow c = 1 + \frac{c}{2} \Leftrightarrow c = 2. \text{ Vậy } f(x) = e^x + 2, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Do đó $f(\ln(5620)) = e^{\ln(5620)} + 2 = 5620 + 2 = 5622$.

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án A.**

Câu 15: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int_0^1 f(x) dx = 10$, $f(1) = \cot 1$. Tính tích

$$\text{phân } I = \int_0^1 [f(x) \tan^2 x + f'(x) \tan x] dx.$$

A. $1 - \ln(\cos 1)$.

B. -1 .

C. -9 .

D. $1 - \cot 1$.

Lời giải:

Cách 1:

$$+ I = \int_0^1 [f(x) \tan^2 x + f'(x) \tan x] dx = \int_0^1 f(x) \tan^2 x dx + \int_0^1 f'(x) \tan x dx \quad (1).$$

$$+ \text{Tính } J = \int_0^1 f'(x) \tan x dx.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \tan x \\ dv = f'(x) dx \end{cases}, \text{ ta có } \begin{cases} du = (1 + \tan^2 x) dx \\ v = f(x) \end{cases}.$$

$$\Rightarrow J = f(x) \tan x|_0^1 - \int_0^1 f(x) \cdot (1 + \tan^2 x) dx = f(1) \tan 1 - f(0) \tan 0 - \int_0^1 f(x) \tan^2 x dx - \int_0^1 f(x) dx$$

$$= \cot 1 \tan 1 - \int_0^1 f(x) \tan^2 x dx - 10 = 1 - \int_0^1 f(x) \tan^2 x dx - 10 = -9 - \int_0^1 f(x) \tan^2 x dx.$$

$$\text{Thay } J \text{ vào (1) ta được: } I = \int_0^1 f(x) \tan^2 x dx + \left(-9 - \int_0^1 f(x) \tan^2 x dx \right) = -9.$$

Cách 2:

$$\text{Ta có: } (f(x) \tan x)' = f'(x) \tan x + f(x) (\tan^2 x + 1) = f'(x) \tan x + f(x) \tan^2 x + f(x)$$

$$\Rightarrow f'(x) \tan x + f(x) \tan^2 x = [f(x) \tan x]' - f(x).$$

$$\Rightarrow I = \int_0^1 [f(x) \tan^2 x + f'(x) \tan x] dx = \int_0^1 \left([f(x) \tan x]' - f(x) \right) dx$$

$$= f(x) \tan x|_0^1 - \int_0^1 f(x) dx = f(1) \tan 1 - 10 = \cot 1 \tan 1 - 10 = -9.$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án C.**

Câu 16: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và thỏa mãn $f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 3x$ với mọi $x \in \left[\frac{1}{2}; 2\right]$. Tính

$$\int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{f(x)}{x} dx.$$

A. $\frac{3}{2}$.

B. $\frac{9}{2}$.

C. $-\frac{9}{2}$.

D. $-\frac{3}{2}$.

Lời giải:

$$\text{Ta có } f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 3x \Rightarrow f\left(\frac{1}{x}\right) + 2f(x) = \frac{3}{x}$$

Từ đó ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 3x \\ 4f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{6}{x} \end{cases} \Rightarrow f(x) = \frac{2}{x} - x \Rightarrow \frac{f(x)}{x} = \frac{2}{x^2} - 1. \text{ Do đó } I = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{f(x)}{x} dx = \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(\frac{2}{x^2} - 1\right) dx = \frac{3}{2}.$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án A.**

Câu 17: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $(0; +\infty)$ sao cho $x^2 + xf(e^x) + f(e^x) = 1$ với mọi

$$x \in (0; +\infty). \text{ Tính tích phân } I = \int_{\sqrt{e}}^e \frac{(\ln x) f(x)}{x} dx.$$

A. $I = -\frac{1}{8}$.

B. $I = -\frac{2}{3}$.

C. $I = \frac{1}{12}$.

D. $I = \frac{3}{8}$.

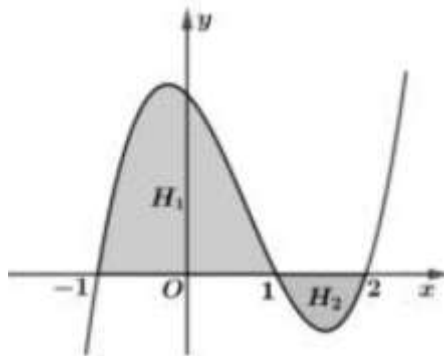
Lời giải:

$$\text{Với } x \in (0; +\infty) \text{ ta có } x^2 + xf(e^x) + f(e^x) = 1 \Rightarrow f(e^x) = \frac{1-x^2}{1+x} = 1-x$$

$$\text{Đặt } \ln x = t \Rightarrow dt = \frac{dx}{x} \Rightarrow I = \int_{\frac{1}{2}}^1 tf(e^t) dt = \int_{\frac{1}{2}}^1 t(1-t) dt = \frac{1}{12}.$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án C.**

Câu 18: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ. Biết H_1 có diện tích bằng 7 (đvdt), H_2 có diện tích bằng 3 (đvdt).



$$\text{Tính } I = \int_{-2}^{-1} (2x+6) f(x^2+6x+7) dx.$$

A. 11 (đvdt).

B. 4 (đvdt).

C. 1 (đvdt).

D. 10 (đvdt).

Lời giải:

Dựa vào đồ thị ta thấy
$$\begin{cases} S_{H_1} = \int_{-1}^1 f(x)dx \\ S_{H_2} = \int_1^2 [-f(x)]dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \int_{-1}^1 f(x)dx = 7 \\ \int_1^2 f(x)dx = -3 \end{cases}.$$

Xét $I = \int_{-2}^{-1} (2x+6)f(x^2+6x+7)dx.$

Đặt $t = x^2 + 6x + 7 \Rightarrow dt = (2x+6)dx$. Đổi cận: $\begin{cases} x = -2 \Rightarrow t = -1 \\ x = -1 \Rightarrow t = 2 \end{cases}.$

Khi đó $I = \int_{-1}^2 f(t)dt = \int_{-1}^2 f(x)dx = \int_{-1}^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx = 7 + (-3) = 4$ (đvdt).

$\Rightarrow$ Chọn đáp án B.

Câu 19: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $[f(x)]^3 + f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$. Tính $I = \int_0^2 f(x)dx$.

A. $I = -\frac{4}{5}.$

B. $I = \frac{4}{5}.$

C. $I = -\frac{5}{4}.$

D. $I = \frac{5}{4}.$

Lời giải:

Đặt $u = f(x)$, ta thu được $u^3 + u = x$. Suy ra $(3u^2 + 1)du = dx$.

Từ $u^3 + u = x$, ta đổi cận $\begin{cases} x = 0 \rightarrow u = 0 \\ x = 2 \rightarrow u = 1 \end{cases}$. Khi đó $I = \int_0^1 u(3u^2 + 1)du = \frac{5}{4}.$

Cách khác: Nếu bài toán cho $f(x)$ có đạo hàm liên tục thì ta làm như sau:

Từ giả thiết $f^3(x) + f(x) = x \Rightarrow \begin{cases} f^3(0) + f(0) = 0 \\ f^3(2) + f(2) = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f(0) = 0 \\ f(2) = 1 \end{cases} \quad (*)$

Cũng từ giả thiết $f^3(x) + f(x) = x$, ta có $f'(x) \cdot f^3(x) + f'(x) \cdot f(x) = x \cdot f'(x)$.

Lấy tích phân hai vế $\int_0^2 [f'(x) \cdot f^3(x) + f'(x) \cdot f(x)]dx = \int_0^2 x \cdot f'(x)dx$

$\Rightarrow \left(\frac{[f(x)]^4}{4} + \frac{[f(x)]^2}{2} \right) \Big|_0^2 = x f(x) \Big|_0^2 - \int_0^2 f(x)dx \Rightarrow \int_0^2 f(x)dx = \frac{5}{4}.$

$\Rightarrow$ Chọn đáp án D.

Câu 20: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa $xf(x^3) + f(1-x^2) = -x^{10} + x^6 - 2x, \forall x \in \mathbb{R}$. Khi đó

$\int_{-1}^0 f(x)dx$ bằng

A. $-\frac{17}{20}.$

B. $-\frac{13}{4}.$

C. $\frac{17}{4}.$

D. $-1.$

Lời giải:

Với $\forall x \in \mathbb{R}$ ta có: $xf(x^3) + f(1-x^2) = -x^{10} + x^6 - 2x$

$\Rightarrow x^2 f(x^3) + xf(1-x^2) = -x^{11} + x^7 - 2x^2 \quad (*)$

$\Rightarrow \int_0^1 x^2 f(x^3)dx + \int_0^1 xf(1-x^2)dx = \int_0^1 (-x^{11} + x^7 - 2x^2)dx$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3} \int_0^1 f(x^3) d(x^3) - \frac{1}{2} \int_0^1 f(1-x^2) d(1-x^2) = -\frac{5}{8} \Leftrightarrow \frac{1}{3} \int_0^1 f(x) dx + \frac{1}{2} \int_0^1 f(x) dx = -\frac{5}{8} \Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx = -\frac{3}{4}$$

Mặt khác : (*) $\Rightarrow \int_{-1}^0 x^2 f(x^3) dx + \int_{-1}^0 x f(1-x^2) dx = \int_{-1}^0 (-x^{11} + x^7 - 2x^2) dx$

$$(*) \Rightarrow \frac{1}{3} \int_{-1}^0 f(x^3) d(x^3) - \frac{1}{2} \int_{-1}^0 f(1-x^2) d((1-x)^2) = -\frac{17}{24}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} \int_{-1}^0 f(x) dx - \frac{1}{2} \int_0^1 f(x) dx = -\frac{17}{24} \Rightarrow \int_{-1}^0 f(x) dx = 3 \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{-3}{4} - \frac{17}{24} \right) = -\frac{13}{4}.$$

Cách khác tham khảo câu 48: Chọn hàm

Từ giả thiết : $xf(x^3) + f(1-x^2) = -x^{10} + x^6 - 2x, \forall x \in \mathbb{R}$

ta suy ra $f(x)$ là bậc ba có $a = -1$. Nên $f(x) = -x^3 + bx^2 + cx + d$

Cho $x=0 \Rightarrow f(1)=0 \Rightarrow b+c+d=1$.

Cho $x=1 \Rightarrow f(1)+f(0)=-2 \Rightarrow f(0)=-2 \Rightarrow d=-2$

Cho $x=-1 \Rightarrow -f(-1)+f(0)=2 \Rightarrow f(-1)=-4 \Rightarrow 1+b-c+d=-4$.

Suy ra $\Rightarrow b=0; c=3$. Từ đó có $f(x) = -x^3 + 3x - 2 \Rightarrow \int_{-1}^0 f(x) dx = \int_{-1}^0 (-x^3 + 3x - 2) dx = -\frac{13}{4}$.

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án B.**

HẾT

Huế, ngày 07 tháng 02 năm 2021



CHUYÊN ĐỀ

TÍCH PHÂN - ỨNG DỤNG

Tích phân _ Hàm ẩn

Lớp Toán thầy LÊ BÁ BẢO

Trường THPT Đặng Huy Trứ SĐT: 0935.785.115 Facebook: Lê Bá Bảo
116/04 Nguyễn Lộ Trạch, TP Huế Trung tâm KM 10 Hương Trà, Huế.

NỘI DUNG ĐỀ BÀI

Câu 1: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x) = f(10-x), \forall x \in \mathbb{R}$. Biết $\int_3^7 f(x) dx = 4$.

Tính $I = \int_3^7 xf(x) dx$

- A. $I = 40$. B. $I = 80$. C. $I = 60$. D. $I = 20$.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $2f(x) + f'(x) = 2x + 1$ và $f(0) = 1$. Tính $\int_0^1 f(x) dx$.

- A. $1 - \frac{1}{2e^2}$ B. $\frac{1}{2e^2}$ C. $1 + \frac{1}{2e^2}$ D. $-\frac{1}{2e^2}$

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn:
 $5f(x) - 7f(1-x) = 4x - 6x^2, \forall x \in \mathbb{R}$. Biết rằng $\int_2^3 [f'(x)]^2 dx = \frac{a}{b}$ ($\frac{a}{b}$ là phân số tối giản). Tính $a - 143b$.

- A. 3. B. 2. C. 0. D. 1.

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(1) = 0$, $\int_1^9 \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = 5$ và

$\int_0^{\frac{1}{2}} xf'(x) dx = \frac{1}{2}$. Khi đó $\int_0^3 f(x) dx$ bằng

- A. 7. B. $\frac{1}{2}$. C. 3. D. $\frac{9}{2}$.

Câu 5: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x) = \begin{cases} x+m & \text{khi } x \geq 0 \\ e^{2x} & \text{khi } x < 0 \end{cases}$ (m là hằng số). Biết

$\int_{-1}^2 f(x) dx = a + b.e^{-2}$ trong đó a, b là các số hữu tỷ. Tính $a + b$.

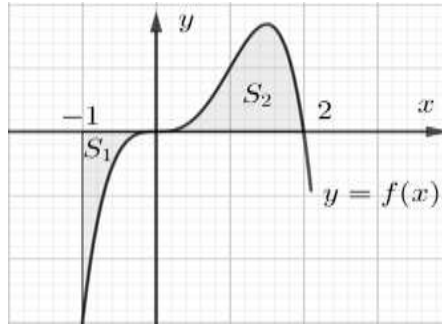
- A. 1. B. 4. C. 3. D. 0.

Câu 6: Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục và dương trên $\mathbb{R}$; thỏa mãn $f(0) = 1$ và $(x^2 + 1)f'(x) = x.f(x)$.

Khi đó $I = \int_1^2 f^2(x) dx$ thuộc khoảng nào sau đây?

- A. (1;4). B. (72;74). C. (8;10). D. (4;6).

- Câu 7:** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm và đồng biến $[1;4]$ thỏa mãn $x+2xf(x)=[f'(x)]^2$ với mọi $x \in [1;4]$. Biết rằng $f(1)=\frac{3}{2}$, tính $I=\int_1^4 f(x)dx$.
- A. $I=\frac{1183}{45}$. B. $I=\frac{1187}{45}$. C. $I=\frac{1186}{45}$. D. $I=\frac{9}{2}$.
- Câu 8:** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $[f(x)]^3+2f(x)=1-x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.
 Tính $\int_{-2}^1 f(x)dx$.
- A. $-\frac{7}{4}$. B. $-\frac{17}{4}$. C. $\frac{17}{4}$. D. $\frac{7}{4}$.
- Câu 9:** Cho hàm số $f(x)$ xác định và dương trên $(0;+\infty)$, thỏa mãn $[f'(x)]^2=12x^2-f(x).f''(x)$ với mọi $x \in (0;+\infty)$ và $f'(1)=1; f(1)=4$. Giá trị của $f(2)$ bằng
- A. $\sqrt{46}$. B. 7. C. $3\sqrt{5}$. D. $2\sqrt{10}$.
- Câu 10:** Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên đoạn $[0,5]$ và thỏa mãn điều kiện $f''(x)=f''(5-x), \forall x \in [0,5], f'(0)=1, f'(5)=7$. Tính $\int_1^4 f'(x)dx-4$.
- A. 12. B. 8. C. 24. D. 20.
- Câu 11:** Cho hàm số $f(x)=x^3+ax^2+bx+c, (a;b;c \in \mathbb{R})$. Nếu phương trình $f(x)=0$ có ba nghiệm thực phân biệt thì phương trình $2f(x).f''(x)=[f'(x)]^2$ có nhiều nhất bao nhiêu nghiệm thực?
- A. 1. B. 2. C. 4. D. 3.
- Câu 12:** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x)-2019f(x)=2019.x^{2018}.e^{2019x}, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0)=2019$. Giá trị của $f(1)$ là
- A. $f(1)=2019.e^{-2019}$. B. $f(1)=2019.e^{2019}$. C. $f(1)=2020.e^{2019}$. D. $f(1)=2020.e^{-2019}$.
- Câu 13:** Biết rằng hàm số $f(x)=ax^2+bx+c$ thỏa mãn $\int_0^1 f(x)dx=-\frac{7}{2}, \int_0^2 f(x)dx=-2$ và $\int_0^3 f(x)dx=\frac{13}{2}$ (với $a,b,c \in \mathbb{R}$). Tính $P=a+b+c$.
- A. $P=-\frac{3}{4}$. B. $P=-\frac{4}{3}$. C. $P=\frac{4}{3}$. D. $P=\frac{3}{4}$.
- Câu 14:** Giả sử hàm f có đạo hàm cấp 2 trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(1)=1$ và $f(1-x)+x^2f''(x)=2x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Tính $\int_0^1 xf'(x)dx$.
- A. 1. B. 0. C. 2. D. $\frac{2}{3}$.
- Câu 15:** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $4f(x)+2=f(2x+1)-8x, \forall x \in \mathbb{R}$. Biết rằng $\int_0^1 f(x)dx=3$. Tính $I=\int_0^3 f(x)dx$.
- A. $I=36$. B. $I=21$. C. $I=33$. D. $I=39$.
- Câu 16:** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[-1;2]$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



Biết S_1, S_2 có diện tích lần lượt là 2 và 6. Tích phân $\int_{-1}^2 (x+1)f'(x)dx$ bằng

- A. -2. B. -12. C. 6. D. -4.

Câu 17: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(2x) = 3f(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Biết rằng $\int_0^1 f(x)dx = 1$. Tính

$$I = \int_1^2 f(x)dx.$$

- A. $I = 5$. B. $I = 6$. C. $I = 3$. D. $I = 2$.

Câu 18: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ và thỏa mãn $f(x) + xf'(x) = 3x^2, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(2) = 8$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại giao điểm với trục hoành.

- A. $y = x - 1$. B. $y = 2x - 4$. C. $y = 4x$. D. $y = -6x - 12$.

Câu 19: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ và thỏa mãn $x^2 f(x) + f(1-x) = 2x - x^4$. Tính tích phân $I = \int_0^1 f(x)dx$.

- A. $I = \frac{1}{2}$. B. $I = \frac{3}{5}$. C. $I = \frac{2}{3}$. D. $I = \frac{4}{3}$.

Câu 20: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ thỏa mãn

$$f(0) = 0, \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f'(x)]^2 dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x f(x) dx = \frac{\pi}{4}. \text{ Tính } \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx.$$

- A. $\frac{\pi}{4}$. B. $\frac{\pi}{2}$. C. 2. D. 1.

HẾT

Huế, ngày 07 tháng 02 năm 2021



CHUYÊN ĐỀ

TÍCH PHÂN - ỨNG DỤNG

Tích phân _ Hàm ẩn

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x) = f(10-x), \forall x \in \mathbb{R}$. Biết $\int_3^7 f(x) dx = 4$.

Tính $I = \int_3^7 xf(x) dx$

A. $I = 40$.

B. $I = 80$.

C. $I = 60$.

D. $I = 20$.

Lời giải:

Ta có $\int_3^7 (10-x) f(x) dx = \int_3^7 10 f(x) dx - \int_3^7 xf(x) dx = 40 - I \quad (1)$.

Theo bài ra $f(x) = f(10-x), \forall x \in \mathbb{R}$ suy ra: $\int_3^7 (10-x) f(x) dx = \int_3^7 (10-x) f(10-x) dx$.

$(1) \Leftrightarrow 40 - I = \int_3^7 (10-x) f(10-x) dx \Leftrightarrow 40 - I = \int_3^7 tf(t) dt$

$\Leftrightarrow 40 - I = \int_3^7 xf(x) dx \Leftrightarrow 40 - I = I \Leftrightarrow I = 20$.

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án D.**

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $2f(x) + f'(x) = 2x + 1$ và

$f(0) = 1$. Tính $\int_0^1 f(x) dx$.

A. $1 - \frac{1}{2e^2}$

B. $\frac{1}{2e^2}$.

C. $1 + \frac{1}{2e^2}$.

D. $-\frac{1}{2e^2}$.

Lời giải:

Ta có: $2f(x) + f'(x) = 2x + 1 \Leftrightarrow 2e^{2x} \cdot f(x) + e^{2x} \cdot f'(x) = (2x + 1) \cdot e^{2x}$

$\Leftrightarrow (e^{2x} \cdot f(x))' = (2x + 1) \cdot e^{2x} \Leftrightarrow e^{2x} \cdot f(x) = \int (2x + 1) \cdot e^{2x} dx \quad (*)$

Xét $I = \int (2x + 1) \cdot e^{2x} dx$. Đặt $u = 2x + 1 \Rightarrow du = 2dx; dv = e^{2x} dx \Rightarrow v = \frac{1}{2} e^{2x}$

$I = (2x + 1) \cdot \frac{1}{2} e^{2x} - \int \frac{1}{2} e^{2x} \cdot 2dx = \frac{1}{2} (2x + 1) \cdot e^{2x} - \frac{1}{2} e^{2x} + C$

Thay vào (*) ta có: $e^{2x} \cdot f(x) = \frac{1}{2} (2x + 1) \cdot e^{2x} - \frac{1}{2} e^{2x} + C \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{2} (2x + 1) - \frac{1}{2} + \frac{C}{e^{2x}}$

$f(0) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + C = 1 \Leftrightarrow C = 1 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2} (2x + 1) - \frac{1}{2} + \frac{1}{e^{2x}} = x + e^{-2x}$

Vậy $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (x + e^{-2x}) dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} e^{-2x} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2e^2} + \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2e^2}$.

⇒ **Chọn đáp án A.**

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn:

$5f(x) - 7f(1-x) = 4x - 6x^2, \forall x \in \mathbb{R}$. Biết rằng $\int_2^3 [f'(x)]^2 dx = \frac{a}{b}$ ($\frac{a}{b}$ là phân số tối giản). Tính $a - 143b$.

A. 3.

B. 2.

C. 0.

D. 1.

Lời giải:

Theo giả thiết: $5f(x) - 7f(1-x) = 4x - 6x^2, \forall x \in \mathbb{R}$.

Thay x bởi $1-x$ ta được: $5f(1-x) - 7f(x) = 4(1-x) - 6(1-x)^2 = -6x^2 + 8x - 2$.

Ta được hệ:
$$\begin{cases} 5f(x) - 7f(1-x) = 4x - 6x^2 \\ -7f(x) + 5f(1-x) = -6x^2 + 8x - 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 25f(x) - 49f(x) = 5(4x - 6x^2) + 7(-6x^2 + 8x - 2) \Rightarrow -24f(x) = -72x^2 + 76x - 14$$

$$\Rightarrow f(x) = 3x^2 - \frac{19}{6}x + \frac{7}{12} \Rightarrow f'(x) = 6x - \frac{19}{6}.$$

Khi đó: $\int_2^3 [f'(x)]^2 dx = \int_2^3 \left(6x - \frac{19}{6}\right)^2 dx = \frac{5149}{36}$. Vậy $a = 5149, b = 36$ nên $a - 143b = 1$.

⇒ **Chọn đáp án D.**

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(1) = 0$, $\int_1^9 \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = 5$ và

$$\int_0^{\frac{1}{2}} xf'(x) dx = \frac{1}{2}. \text{ Khi đó } \int_0^3 f(x) dx \text{ bằng}$$

A. 7.

B. $\frac{1}{2}$.

C. 3.

D. $\frac{9}{2}$.

Lời giải:

$$\text{Xét } I_1 = \int_1^9 \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = 2 \int_1^3 f(\sqrt{x}) d(\sqrt{x}) = 5 \Rightarrow \int_1^3 f(t) dt = \frac{5}{2}.$$

$$\text{Xét } I_2 = \int_0^{\frac{1}{2}} xf'(2x) dx = \frac{1}{2}. \text{ Đặt } t = 2x \Rightarrow dt = 2dx \Rightarrow I_2 = \frac{1}{4} \int_0^1 tf'(t) dt.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = t \\ dv = f'(t) dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dt \\ v = f(t) \end{cases}$$

$$\text{Do đó: } I_2 = \frac{1}{4} \left(tf(t) \Big|_0^1 - \int_0^1 f(t) dt \right) = \frac{1}{2} \Rightarrow \int_0^1 f(t) dt = -2.$$

$$\text{Vậy } \int_0^3 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^3 f(x) dx = -2 + \frac{5}{2} = \frac{1}{2}.$$

⇒ **Chọn đáp án B.**

Câu 5: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x) = \begin{cases} x+m & \text{khi } x \geq 0 \\ e^{2x} & \text{khi } x < 0 \end{cases}$ (m là hằng số). Biết

$\int_{-1}^2 f(x) dx = a + b.e^{-2}$ trong đó a, b là các số hữu tỷ. Tính $a + b$.

A. 1.

B. 4.

C. 3.

D. 0.

Lời giải:

Do hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ nên hàm số liên tục tại $x = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0)$

$\Leftrightarrow m = 1$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó ta có } \int_{-1}^2 f(x) dx &= \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^2 f(x) dx = \int_{-1}^0 e^{2x} dx + \int_0^2 (x+1) dx \\ &= \frac{e^{2x}}{2} \Big|_{-1}^0 + \left(\frac{x^2}{2} + x \right) \Big|_0^2 = \frac{1}{2} - \frac{e^{-2}}{2} + 4 = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} e^{-2} \end{aligned}$$

Do đó : $a = \frac{9}{2}; b = -\frac{1}{2}$. Vậy $a + b = 4$.

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án B.**

Câu 6: Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục và dương trên $\mathbb{R}$; thỏa mãn $f(0) = 1$ và $(x^2 + 1)f'(x) = x.f(x)$.

Khi đó $I = \int_1^2 f^2(x) dx$ thuộc khoảng nào sau đây?

A. (1;4).

B. (72;74).

C. (8;10).

D. (4;6).

Lời giải:

$$\text{Ta có } (x^2 + 1)f'(x) = x.f(x) \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{x}{x^2 + 1}$$

$$\Rightarrow (\ln(f(x)))' = \frac{1}{2} (\ln(x^2 + 1))' \Rightarrow \ln(f(x)) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C$$

$$\text{Mà } f(0) = 1 \Rightarrow C = 0 \Leftrightarrow \ln(f(x)) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) \Rightarrow f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

$$\text{Vậy } I = \int_1^2 f^2(x) dx = \int_1^2 (x^2 + 1) dx = \frac{10}{3}.$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án A.**

Câu 7: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm và đồng biến $[1;4]$ thỏa mãn $x + 2xf(x) = [f'(x)]^2$ với mọi

$x \in [1;4]$. Biết rằng $f(1) = \frac{3}{2}$, tính $I = \int_1^4 f(x) dx$.

A. $I = \frac{1183}{45}$.

B. $I = \frac{1187}{45}$.

C. $I = \frac{1186}{45}$.

D. $I = \frac{9}{2}$.

Lời giải:

Vì $f(x)$ đồng biến $[1;4]$ và $f(1) = \frac{3}{2}$ nên $f(x) > 0, \forall x \in [1;4]$.

$$\text{Ta có } x + 2xf(x) = [f'(x)]^2 \Leftrightarrow f'(x) = \sqrt{x} \cdot \sqrt{1 + 2f(x)} \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{\sqrt{1 + 2f(x)}} = \sqrt{x}.$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{f'(x)}{\sqrt{1+2f(x)}} dx = \int \sqrt{x} dx \Leftrightarrow \sqrt{1+2f(x)} = \frac{2}{3} x\sqrt{x} + C. \text{ Mà } f(1) = \frac{3}{2} \text{ nên } C = \frac{4}{3}.$$

$$\text{Suy ra } \sqrt{1+2f(x)} = \frac{2}{3} x\sqrt{x} + \frac{4}{3} \Leftrightarrow f(x) = \frac{\left(\frac{2}{3} x\sqrt{x} + \frac{4}{3}\right)^2 - 1}{2} \Leftrightarrow f(x) = \frac{4x^3 + 16x\sqrt{x} + 7}{18}.$$

$$\text{Do đó } I = \int_1^4 f(x) dx = \int_1^4 \frac{4x^3 + 16x\sqrt{x} + 7}{18} dx = \frac{1186}{45}.$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án C.**

Câu 8: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $[f(x)]^3 + 2f(x) = 1 - x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Tính $\int_{-2}^1 f(x) dx$.

A. $-\frac{7}{4}$.

B. $-\frac{17}{4}$.

C. $\frac{17}{4}$.

D. $\frac{7}{4}$.

Lời giải:

Đặt $t = f(x)$ thì $t^3 + 2t = 1 - x$, suy ra $(3t^2 + 2)dt = -dx$.

Với $x = -2$ ta có $t^3 + 2t - 3 = 0$, suy ra $t = 1$.

Với $x = 1$ ta có $t^3 + 2t = 0$, suy ra $t = 0$.

$$\text{Vậy } \int_{-2}^1 f(x) dx = -\int_1^0 t(3t^2 + 2) dt = \int_0^1 (3t^3 + 2t) dt = \left(\frac{3}{4} t^4 + t^2 \right) \Big|_0^1 = \frac{7}{4}.$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án D.**

Câu 9: Cho hàm số $f(x)$ xác định và dương trên $(0; +\infty)$, thỏa mãn $[f'(x)]^2 = 12x^2 - f(x) \cdot f''(x)$ với mọi $x \in (0; +\infty)$ và $f'(1) = 1; f(1) = 4$. Giá trị của $f(2)$ bằng

A. $\sqrt{46}$.

B. 7.

C. $3\sqrt{5}$.

D. $2\sqrt{10}$.

Lời giải:

$$\text{Ta có: } [f'(x)]^2 = 12x^2 - f(x) \cdot f''(x) \Leftrightarrow [f'(x)]^2 + f(x) \cdot f''(x) = 12x^2$$

$$\Leftrightarrow [f(x) \cdot f'(x)]' = 12x^2 \Leftrightarrow f(x) \cdot f'(x) = 4x^3 + C.$$

$$\text{Thay } x = 1 \text{ ta được: } f(1) \cdot f'(1) = 4 + C \Leftrightarrow 4 = 4 + C \Leftrightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) \cdot f'(x) = 4x^3$$

$$\Rightarrow \int f(x) \cdot f'(x) dx = \int 4x^3 dx \Leftrightarrow \frac{f^2(x)}{2} = x^4 + C'.$$

$$\text{Thay } x = 1 \text{ ta được: } \frac{f^2(1)}{2} = 1 + C' \Leftrightarrow 8 = 1 + C' \Leftrightarrow C' = 7 \Rightarrow f^2(x) = 2(x^4 + 7)$$

$$\Rightarrow f(2) = \sqrt{2(2^4 + 7)} = \sqrt{46}.$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án A.**

Câu 10: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên đoạn $[0, 5]$ và thỏa mãn điều kiện

$$f''(x) = f''(5-x), \forall x \in [0, 5], f'(0) = 1, f'(5) = 7. \text{ Tính } \int_1^4 f'(x) dx - 4.$$

A. 12.

B. 8.

C. 24.

D. 20.

Lời giải:

Cách 1.

$$\text{Ta có } \int_1^4 f'(x)dx - 4 = \left[f'(x) \cdot x \right]_1^4 - \int_1^4 x \cdot f''(x)dx - 4 = 4f'(4) - f'(1) - 4 - I_1.$$

$$\text{Xét } I_1 = \int_1^4 x \cdot f''(x)dx = - \int_1^4 x \cdot f''(x)d(5-x) = - \int_4^1 (5-t) \cdot f''(5-t)dt = \int_1^4 (5-t) \cdot f''(5-t)dt.$$

$$\text{Suy ra } I_1 = \int_1^4 (5-x) \cdot f''(5-x)dx = \int_1^4 (5-x) \cdot f''(x)dx.$$

$$\text{Khi đó } 2I_1 = \int_1^4 x \cdot f''(x)dx + \int_1^4 (5-x) \cdot f''(x)dx = \int_1^4 5f''(x)dx = 5f'(x) \Big|_1^4 = 5f'(4) - 5f'(1).$$

$$\text{Do đó } I_1 = \frac{5}{2}f'(4) - \frac{5}{2}f'(1) \Rightarrow \int_1^4 f'(x)dx - 4 = \frac{3}{2}[f'(4) + f'(1)] - 4.$$

$$\text{Lại có } f''(x) = f''(5-x) \Leftrightarrow f'(x) = -f'(5-x) + C \Rightarrow C = f'(x) + f'(5-x).$$

$$\text{Thay } x=0 \text{ và } x=1 \text{ ta được } C = f'(1) + f'(4) = f'(0) + f'(5) = 8.$$

$$\text{Vậy } \int_1^4 f'(x)dx - 4 = \frac{3}{2}[f'(4) + f'(1)] - 4 = \frac{3}{2} \cdot 8 - 4 = 8.$$

Cách 2.

$$\text{Ta có } \int_1^4 f'(x)dx - 4 = f(x) \Big|_1^4 - 4 = f(4) - f(1) - 4.$$

$$\text{Vì } f''(x) = f''(5-x) \Leftrightarrow f'(x) = -f'(5-x) + C \Rightarrow C = f'(x) + f'(5-x).$$

$$\text{Thay } x=0 \text{ ta được } C = f'(0) + f'(5) = 8.$$

$$\text{Khi đó } 8 = f'(x) + f'(5-x) \Rightarrow \int_1^4 8dx = \int_1^4 [f'(x) + f'(5-x)]dx = [f(x) - f(5-x)] \Big|_1^4.$$

$$\text{Suy ra } (8x) \Big|_1^4 = [f(4) - f(1) - f(1) + f(4)] \Rightarrow f(4) - f(1) = 12.$$

$$\text{Vậy } \int_1^4 f'(x)dx - 4 = f(x) \Big|_1^4 - 4 = f(4) - f(1) - 4 = 12 - 4 = 8.$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án B.**

Câu 11: Cho hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, ($a; b; c \in \mathbb{R}$). Nếu phương trình $f(x) = 0$ có ba nghiệm thực phân biệt thì phương trình $2f(x) \cdot f''(x) = [f'(x)]^2$ có nhiều nhất bao nhiêu nghiệm thực?

A. 1.

B. 2.

C. 4.

D. 3.

Lời giải:

$$\text{Ta có: } f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b; f''(x) = 6x + 2a; f'''(x) = 6.$$

Gọi ba nghiệm của phương trình $f(x) = 0$ lần lượt là $a; b; c$

$$\text{Đặt } h(x) = 2f(x) \cdot f''(x) - (f'(x))^2$$

$$h'(x) = 2f'(x) \cdot f''(x) + 2f(x) \cdot f'''(x) - 2f'(x) \cdot f''(x) = 2f(x) \cdot f'''(x) = 12 \cdot f(x)$$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ x = b \\ x = c \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $h(x)$:

x	$-\infty$	a	b	c	$+\infty$			
$h'(x)$		-	0	+	0	-	0	+
$h(x)$	$+\infty$							$+\infty$

$-(f'(a))^2$ $-(f'(b))^2$ $-(f'(c))^2$

Lại có phương trình $f(x)=0$ có ba nghiệm thực phân biệt

$$a; b; c \Rightarrow f(b)=0 \Leftrightarrow f'(b) \neq 0 \Rightarrow -(f'(b))^2 < 0$$

Khi đó ta có bảng biến thiên của hàm số $h(x)$:

x	$-\infty$	a		b		c		$+\infty$	
$h'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	
$h(x)$	$+\infty$	$y = 0$							$+\infty$

$-(f'(a))^2$ $-(f'(b))^2$ $-(f'(c))^2$

Từ bảng biến thiên phương trình $h(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt hay $2f(x).f''(x)=[f'(x)]^2$ có hai nghiệm phân biệt.

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án B.**

Câu 12: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x) - 2019f(x) = 2019.x^{2018}.e^{2019x}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 2019$. Giá trị của $f(1)$ là

A. $f(1) = 2019.e^{-2019}$. B. $f(1) = 2019.e^{2019}$. **C. $f(1) = 2020.e^{2019}$.** D. $f(1) = 2020.e^{-2019}$.

Lời giải:

Từ giả thiết $f'(x) - 2019f(x) = 2019.x^{2018}.e^{2019x}$.

$$\Rightarrow f'(x).e^{-2019x} - 2019.f(x).e^{-2019x} = 2019.x^{2018} \Leftrightarrow (e^{-2019x}f(x))' = 2019.x^{2018}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 (e^{-2019x}.f(x))' dx = \int_0^1 2019.x^{2018} dx \Leftrightarrow e^{-2019x}.f(x) \Big|_0^1 = x^{2019} \Big|_0^1 \Leftrightarrow e^{-2019}.f(1) - f(0) = 1$$

$$\Rightarrow f(1) = (1 + f(0)).e^{2019} = 2020.e^{2019}.$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án C.**

Câu 13: Biết rằng hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ thỏa mãn $\int_0^1 f(x) dx = -\frac{7}{2}$, $\int_0^2 f(x) dx = -2$ và

$$\int_0^3 f(x) dx = \frac{13}{2} \text{ (với } a, b, c \in \mathbb{R} \text{)}. \text{ Tính } P = a + b + c.$$

A. $P = -\frac{3}{4}$.

B. $P = -\frac{4}{3}$.

C. $P = \frac{4}{3}$.

D. $P = \frac{3}{4}$.

Lời giải:

$$\int_0^1 (ax^2 + bx + c) dx = \left(\frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx \right) \Big|_0^1 = \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c = -\frac{7}{2}$$

$$\int_0^2 (ax^2+bx+c)dx = \left(\frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx \right) \Big|_0^2 = \frac{8a}{3} + \frac{4b}{2} + 2c = -2$$

$$\int_0^3 (ax^2+bx+c)dx = \left(\frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx \right) \Big|_0^3 = \frac{27a}{3} + \frac{9b}{2} + 3c = \frac{13}{2}$$

$$\text{Suy ra : } \begin{cases} \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c = -\frac{7}{2} \\ \frac{8a}{3} + \frac{4b}{2} + 2c = -2 \\ \frac{27a}{3} + \frac{9b}{2} + 3c = \frac{13}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \\ z = -\frac{16}{3} \end{cases} \Rightarrow P = a + b + c = -\frac{4}{3}.$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án B.**

Câu 14: Giả sử hàm f có đạo hàm cấp 2 trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(1)=1$ và $f(1-x) + x^2 f''(x) = 2x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Tính $\int_0^1 x f'(x) dx$.

A. 1.

B. 0.

C. 2.

D. $\frac{2}{3}$.

Lời giải:

Ta có $f(1-x) + x^2 f''(x) = 2x$ (1)

Thay $x=0$ vào (1) ta được $f(1)=0$.

Mặt khác, lấy tích phân hai vế cận từ 0 đến 1 của (1) ta có:

$$\int_0^1 f(1-x) dx + \int_0^1 x^2 f''(x) dx = \int_0^1 2x dx$$

$$\Leftrightarrow -\int_0^1 f(1-x) d(1-x) + f'(1) - 2 \int_0^1 x f'(x) dx = 1 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx - 2 \int_0^1 x f'(x) dx = 0 \quad (2)$$

$$\forall 1 \int_0^1 x f'(x) dx = f(1) - \int_0^1 f(x) dx = - \int_0^1 f(x) dx \quad (3)$$

$$\text{Thay (3) vào (2) ta được } \int_0^1 f(x) dx = 3 \Rightarrow \int_0^1 x f'(x) dx = 0.$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án B.**

Câu 15: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $4f(x) + 2 = f(2x+1) - 8x, \forall x \in \mathbb{R}$. Biết rằng

$$\int_0^1 f(x) dx = 3. \text{ Tính } I = \int_0^3 f(x) dx.$$

A. $I = 36$.

B. $I = 21$.

C. $I = 33$.

D. $I = 39$.

Lời giải:

Ta có: $4f(x) + 2 = f(2x+1) - 8x \Leftrightarrow f(2x+1) = 4f(x) + 8x + 2$.

$$\Rightarrow \int_0^1 f(2x+1) dx = 4 \int_0^1 f(x) dx + \int_0^1 (8x+2) dx = 4 \cdot 3 + 6 = 18.$$

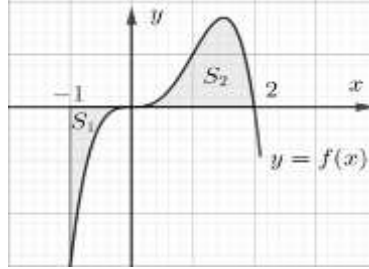
$$\text{Đặt } t = 2x+1 \Rightarrow dx = \frac{dt}{2}; x=0 \Rightarrow t=1; x=1 \Rightarrow t=3.$$

$$\text{Ta có } \int_0^1 f(2x+1)dx = \frac{1}{2} \int_1^3 f(t)dt = 18 \Rightarrow \int_1^3 f(t)dt = 36 \Rightarrow \int_1^3 f(x)dx = 36.$$

$$\text{Do đó } \int_0^3 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^3 f(x)dx = 3 + 36 = 39. \text{ Vậy } I = 39.$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án D.**

Câu 16: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[-1; 2]$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



Biết S_1, S_2 có diện tích lần lượt là 2 và 6. Tích phân $\int_{-1}^2 (x+1)f'(x)dx$ bằng

A. -2.

B. -12.

C. 6.

D. -4.

Lời giải:

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x+1 \Rightarrow du = dx \\ dv = f'(x)dx \Rightarrow v = f(x) \end{cases} \Rightarrow \int_{-1}^2 (x+1)f'(x)dx = (x+1)f(x) \Big|_{-1}^2 - \int_{-1}^2 f(x)dx$$

$$= 3f(2) + 0f(-1) - (S_2 - S_1) = 3 \cdot 0 - (6 - 2) = -4.$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án D.**

Câu 17: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(2x) = 3f(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Biết rằng $\int_0^1 f(x)dx = 1$. Tính

$$I = \int_1^2 f(x)dx.$$

A. $I = 5$.

B. $I = 6$.

C. $I = 3$.

D. $I = 2$.

Lời giải:

$$\text{Ta có: } 3 = 3 \cdot 1 = 3 \cdot \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 3f(x)dx = \int_0^1 f(2x)dx = \frac{1}{2} \int_0^1 f(2x)d(2x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Đặt } 2x = t \Rightarrow d(2x) = dt, \text{ với } x = 0 \Rightarrow t = 0; x = 1 \Rightarrow t = 2.$$

$$\Leftrightarrow 3 = \frac{1}{2} \int_0^1 f(2x)d(2x) = \frac{1}{2} \int_0^2 f(t)dt = \frac{1}{2} \int_0^2 f(x)dx, \forall x \in \mathbb{R} \text{ (do hàm số } f(x) \text{ liên tục trên } \mathbb{R}).$$

$$\Leftrightarrow \int_0^2 f(x)dx = 6, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx = 6, \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\Leftrightarrow 1 + \int_1^2 f(x)dx = 6, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \int_1^2 f(x)dx = 5, \forall x \in \mathbb{R}.$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án A.**

Câu 18: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ và thỏa mãn $f(x) + xf'(x) = 3x^2, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(2) = 8$.

Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại giao điểm với trục hoành.

A. $y = x - 1$.

B. $y = 2x - 4$.

C. $y = 4x$.

D. $y = -6x - 12$.

Lời giải:

$$\text{Ta có: } f(x) + xf'(x) = 3x^2 \Leftrightarrow (xf(x))' = 3x^2 \Rightarrow \int (xf(x))' dx = \int 3x^2 dx \Rightarrow xf(x) = x^3 + C$$

Vì $f(2)=8$ nên $C=8 \Rightarrow f(x)=\frac{x^3+8}{x}$.

Gọi M là giao điểm của đồ thị hàm số $f(x)=\frac{x^3+8}{x}$ với trục hoành, suy ra $M(-2;0)$

$$pttt: y-0=f'(-2)(x+2)=-6(x+2)+0=-6x-12.$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án D.**

Câu 19: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ và thỏa mãn $x^2f(x)+f(1-x)=2x-x^4$. Tính tích phân $I=\int_0^1 f(x)dx$.

A. $I=\frac{1}{2}$.

B. $I=\frac{3}{5}$.

C. $I=\frac{2}{3}$.

D. $I=\frac{4}{3}$.

Lời giải:

Từ giả thiết, thay x bằng $1-x$ ta được $(1-x)^2 f(1-x)+f(x)=2(1-x)-(1-x)^4$

$$\Leftrightarrow (x^2-2x+1)f(1-x)+f(x)=1+2x-6x^2+4x^3-x^4. \quad (1)$$

Ta có $x^2f(x)+f(1-x)=2x-x^4 \Rightarrow f(1-x)=2x-x^4-x^2f(x)$.

Thay vào (1) ta được: $(x^2-2x+1)[2x-x^4-x^2f(x)]+f(x)=1+2x-6x^2+4x^3-x^4$

$$\Leftrightarrow (1-x^2+2x^3-x^4)f(x)=x^6-2x^5+2x^3-2x^2+1$$

$$\Leftrightarrow (1-x^2+2x^3-x^4)f(x)=(1-x^2)(1-x^2+2x^3-x^4) \Rightarrow f(x)=1-x^2.$$

Vậy $I=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 (1-x^2)dx=\left(x-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^1=\frac{2}{3} \Rightarrow$ **Chọn đáp án C.**

Câu 20: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ thỏa mãn

$$f(0)=0, \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f'(x)]^2 dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x f(x) dx = \frac{\pi}{4}. \text{ Tính } \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx.$$

A. $\frac{\pi}{4}$.

B. $\frac{\pi}{2}$.

C. 2.

D. 1.

Lời giải:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x f(x) dx = \left[-\cos x f(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x f'(x) dx. \text{ Suy ra } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x f'(x) dx = \frac{\pi}{4}.$$

$$\text{Hơn nữa ta tính được } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \left[\frac{2x+\sin 2x}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

$$\text{Do đó } \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f'(x)]^2 dx - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x f'(x) dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx = 0 \Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f'(x) - \cos x]^2 dx = 0.$$

Suy ra $f'(x)=\cos x$, do đó $f(x)=\sin x+C$. Vì $f(0)=0$ nên $C=0$.

Ta được $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 1 \Rightarrow$ **Chọn đáp án D.**

HẾT

Huế, ngày 07 tháng 02 năm 2021



PHIẾU ÔN TẬP SỐ 04

CHUYÊN ĐỀ

TÍCH PHÂN - ỨNG DỤNG

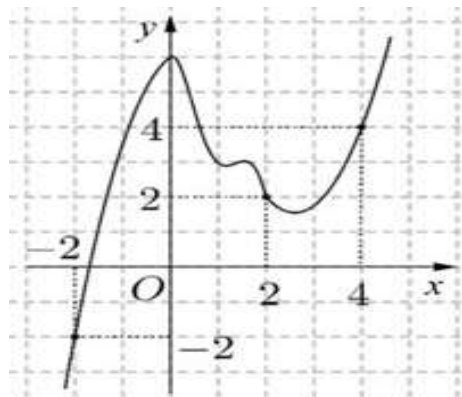
Tích phân _ Hàm ẩn

Lớp Toán thầy LÊ BÁ BẢO

Trường THPT Đặng Huy Trứ SĐT: 0935.785.115 Facebook: Lê Bá Bảo
116/04 Nguyễn Lộ Trạch, TP Huế Trung tâm KM 10 Hương Trà, Huế.

NỘI DUNG ĐỀ BÀI

- Câu 1:** Cho hàm số $f(x)$ có $f(2) = 0$, $f'(x) = \ln(x-1) + \frac{x}{x-1} \forall x > 1$. Giá trị $\int_2^3 f(x)dx$ thuộc khoảng nào sau đây?
A. $(-\infty; -1)$. B. $(2; 4)$. C. $(1; 2)$. D. $(-1; 1)$.
- Câu 2:** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}^+$ thỏa mãn $f'(x) \geq x + \frac{1}{x}, \forall x \in (0; +\infty)$ và $f(1) = 1$. Giá trị nhỏ nhất của $f(2)$ là
A. 2. B. 4. C. $\frac{5}{2} + \ln 2$. D. 3.
- Câu 3:** Cho hàm số $y = f(x)$ có $f(0) = 1$ và $f'(x) = \tan^3 x + \tan x, \forall x \in \mathbb{R}$. Biết $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx = \frac{a+\pi}{b}$ với $a, b \in \mathbb{Z}$. Khi đó hiệu $b - a$ bằng
A. 0. B. 12. C. -4. D. 4.
- Câu 4:** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Giá trị của $\int_0^2 f'(x+2)dx + \int_0^4 f'(x-2)dx$ bằng

- A. 2 B. -4. C. 6 D. 4
- Câu 5:** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\sin x f(\cos x) + \cos x f(\sin x) = \sin 2x - \frac{1}{2} \sin^3 2x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Tính tích phân $I = \int_0^1 f(x)dx$.
A. 1. B. $\frac{1}{6}$. C. $\frac{2}{3}$. D. $\frac{1}{3}$.

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x) - x \cdot f(x) = 0$, $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 1$. Giá trị của $f(\sqrt{2})$ bằng

A. e . B. $\frac{1}{e}$. C. e^2 . D. $\sqrt{e}$.

Câu 7: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa $\int_0^7 f(x)dx = 10$ và $\int_0^3 f(x)dx = 6$. Tính $I = \int_{-2}^3 f|3-2x|dx$.

A. 16. B. 3. C. 15. D. 8.

Câu 8: Cho $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(2) = 16, \int_0^1 f(2x)dx = 2$. Tính $\int_0^2 xf'(x)dx$.

A. 30. B. 28. C. 36. D. 16.

Câu 9: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ thỏa $f'(\sin x) = \frac{1}{\cos^3 x}, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ và $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Khi đó, $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{5}} f(x)dx$ bằng

A. $\frac{5\sqrt{3}-8}{10}$. B. $\frac{8-5\sqrt{3}}{10}$. C. $\frac{3}{10}$. D. $-\frac{3}{10}$.

Câu 10: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{2}{2x-1}, f(0) = 1$ và $f(1) = 2$. Giá trị biểu thức $f(-1) + f(3)$ bằng

A. $4 + \ln 15$. B. $2 + \ln 15$. C. $3 + \ln 15$. D. $\ln 15$.

Câu 11: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn $f(x) = 6x^2 f(x^3) - \frac{6}{\sqrt{3x+1}}$. Giá trị $\int_0^1 f(x)dx$ bằng

A. 2. B. 4. C. 6. D. -1.

Câu 12: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $(f'(x))^2 + 4f(x) = 8x^2 + 4, \forall x \in [0;1]$ và $f(1) = 2$. Tính $\int_0^1 f(x)dx$.

A. $\frac{4}{3}$. B. $\frac{1}{3}$. C. $\frac{21}{4}$. D. 2.

Câu 13: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ thỏa mãn: $x^2 f^2(x) + (2x-1)f(x) = xf'(x) - 1, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ đồng thời $f(1) = -2$. Tính $\int_1^2 f(x)dx$.

A. $-\ln 2 - \frac{1}{2}$. B. $-\ln 2 - \frac{3}{2}$. C. $-\frac{\ln 2}{2} - \frac{3}{2}$. D. $-\frac{\ln 2}{2} - 1$.

Câu 14: Cho hàm số $f(x)$ có $f(x) + f(-x) = \cos x \cos^2 2x, \forall x \in \mathbb{R}$. Khi đó $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$ bằng

A. $\frac{14}{15}$. B. $\frac{28}{15}$. C. $\frac{14}{30}$. D. $\frac{30}{14}$.

Câu 15: Cho hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$, có $f'(x)[f'(x) - \cos x \cdot \cos^2 2x] = 4 - 2\cos(\pi - x) \cdot \cos^2 2x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 0$. Khi đó $\int_0^\pi f(x)dx$ bằng

A. $\frac{242}{225} + \pi^2$. B. $\frac{242}{225}$. C. $\frac{149 + 225\pi^2}{225}$. D. $\frac{242 + \pi^2}{225}$.

Câu 16: Cho hàm $f: \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm liên tục thỏa mãn điều kiện:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[(f(x))^2 - 2f(x)(\sin x - \cos x) \right] dx = 1 - \frac{\pi}{2}. \text{ Tính } \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx.$$

A. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = -1$. B. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = 1$. C. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = 2$. D. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = 0$.

Câu 17: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục và không âm trên $[1; 4]$ đồng thời thỏa mãn điều kiện $x + 2xf(x) = [f'(x)]^2$ và $f(1) = \frac{3}{2}$. Tính $\int_1^4 f(x) dx$.

A. $\frac{1186}{45}$. B. $\frac{2507}{90}$. C. $\frac{848}{45}$. D. $\frac{1831}{90}$.

Câu 18: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x) + 2x \cdot f(x) = e^{-x^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 0$. Tính $f(1)$.

A. $f(1) = \frac{-1}{e}$. B. $f(1) = \frac{1}{e^2}$. C. $f(1) = \frac{1}{e}$. D. $f(1) = e^2$.

Câu 19: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x^3 + 3x + 1) = 3x + 2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Tính $\int_1^5 x \cdot f'(x) dx$.

A. $\frac{17}{4}$. B. $\frac{5}{4}$. C. $\frac{33}{4}$. D. $\frac{29}{4}$.

Câu 20: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(x) > 0$ và $f(x) - f'(x) = -\frac{2[f(x)]^2}{e^x \cdot x \cdot \sqrt{x - x^2}} \forall x \in (0; 1)$. Biết

$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$, khẳng định nào sau đây đúng?

A. $f\left(\frac{1}{5}\right) \geq \frac{1}{4}$. B. $\frac{1}{5} \leq f\left(\frac{1}{5}\right) < \frac{1}{4}$. C. $f\left(\frac{1}{5}\right) < \frac{1}{6}$. D. $\frac{1}{6} \leq f\left(\frac{1}{5}\right) < \frac{1}{5}$.

HẾT

Huế, ngày 07 tháng 02 năm 2021



CHUYÊN ĐỀ

TÍCH PHÂN - ỨNG DỤNG

Tích phân _ Hàm ẩn

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Cho hàm số $f(x)$ có $f(2) = 0$, $f'(x) = \ln(x-1) + \frac{x}{x-1} \forall x > 1$. Giá trị $\int_2^3 f(x)dx$ thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(-\infty; -1)$.B. $(2; 4)$.C. $(1; 2)$.D. $(-1; 1)$.

Lời giải:

$$\text{Ta có } f(x) = \int \left[\ln(x-1) + \frac{x}{x-1} \right] dx = x \ln(x-1) - \int \frac{x}{x-1} dx + C + \int \frac{x}{x-1} dx = x \ln(x-1) + C$$

$$\text{Lại có } f(2) = 0 \Rightarrow 2 \ln 1 + C = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) = x \ln(x-1)$$

$$\begin{aligned} \text{Lúc đó } \int_2^3 f(x) dx &= \int_2^3 x \ln(x-1) dx = \int_2^3 \ln(x-1) d\left(\frac{x^2-1}{2}\right) = \frac{x^2-1}{2} \cdot \ln(x-1) \Big|_2^3 - \int_2^3 \frac{x^2-1}{2} \cdot \frac{1}{x-1} dx \\ &= 4 \ln 2 - \int_2^3 \frac{x+1}{2} dx = 4 \ln 2 - \left(\frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} \right) \Big|_2^3 = 4 \ln 2 - \frac{7}{4} \in (1; 2) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Chọn đáp án C.

Câu 2: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}^+$ thỏa mãn $f'(x) \geq x + \frac{1}{x}, \forall x \in (0; +\infty)$ và $f(1) = 1$. Giá trị nhỏ nhất của $f(2)$ là

A. 2.

B. 4.

C. $\frac{5}{2} + \ln 2$.

D. 3.

Lời giải:

$$\text{Ta có } f'(x) \geq x + \frac{1}{x}, \forall x \in (0; +\infty) \Rightarrow \int_1^2 f'(x) dx \geq \int_1^2 \left(x + \frac{1}{x} \right) dx$$

$$\Leftrightarrow f(2) - f(1) \geq \left(\frac{x^2}{2} + \ln|x| \right) \Big|_1^2 = \frac{3}{2} + \ln 2 \Leftrightarrow f(2) \geq \frac{5}{2} + \ln 2$$

$$\text{Vậy giá trị nhỏ nhất của } f(2) \text{ là } \frac{5}{2} + \ln 2.$$

$\Rightarrow$ Chọn đáp án C.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có $f(0) = 1$ và $f'(x) = \tan^3 x + \tan x, \forall x \in \mathbb{R}$. Biết $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx = \frac{a+\pi}{b}$ với

$a, b \in \mathbb{Z}$. Khi đó hiệu $b - a$ bằng

A. 0.

B. 12.

C. -4.

D. 4.

Lời giải:

$$\text{Có } f(x) = \int f'(x) dx = \int \tan x (\tan^2 x + 1) dx = \int \tan x d(\tan x) = \frac{1}{2} \tan^2 x + C$$

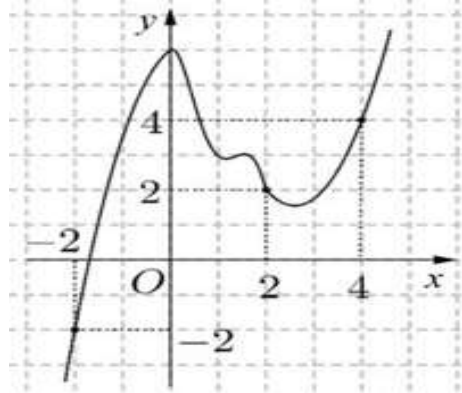
$$\text{Do } f(0)=1 \text{ nên } C=1 \Rightarrow f(x)=\frac{1}{2}\tan^2 x+1=\frac{1}{2}(\tan^2 x+1)+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\cos^2 x}+1\right)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{2}\tan^2 x+1\right)dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x}+1\right)dx = \frac{1}{2}(\tan x+x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{4+\pi}{8}$$

Vậy $a=4; b=8 \Rightarrow b-a=4$.

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án D.**

Câu 4: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Giá trị của $\int_0^2 f'(x+2)dx + \int_0^4 f'(x-2)dx$ bằng

A. 2

B. -4.

C. 6

D. 4

Lời giải:

$$\text{Ta có } \int_0^2 f'(x+2)dx + \int_0^4 f'(x-2)dx = \int_0^2 f'(x+2)d(x+2) + \int_0^4 f'(x-2)d(x-2).$$

$$+) I = \int_0^2 f'(x+2)d(x+2). \text{ Đặt: } t = x+2. \text{ Đổi cận: } x=0 \Rightarrow t=2; x=2 \Rightarrow t=4$$

$$I = \int_2^4 f'(t)dt = f(t)\Big|_2^4 = f(4) - f(2) = 4 - 2 = 2.$$

$$+) K = \int_0^4 f'(x-2)d(x-2). \text{ Đặt: } u = x-2. \text{ Đổi cận: } x=0 \Rightarrow u=-2; x=4 \Rightarrow u=2.$$

$$K = \int_0^4 f'(x-2)d(x-2) = \int_{-2}^2 f'(u)du = f(u)\Big|_{-2}^2 = f(2) - f(-2) = 2 - (-2) = 4.$$

$$\text{Vậy } \int_0^2 f'(x+2)dx + \int_0^4 f'(x-2)dx = 2 + 4 = 6.$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án C.**

Câu 5: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn

$$\sin x f(\cos x) + \cos x f(\sin x) = \sin 2x - \frac{1}{2}\sin^3 2x \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}. \text{ Tính tích phân } I = \int_0^1 f(x)dx.$$

A. 1.

B. $\frac{1}{6}$.

C. $\frac{2}{3}$.

D. $\frac{1}{3}$.

Lời giải:

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\sin x f(\cos x) + \cos x f(\sin x)] dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin 2x - \frac{1}{2} \sin^3 2x \right) dx \\ \Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x f(\cos x) dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x f(\sin x) dx &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x (1 + \cos^2 2x) dx \end{aligned}$$

$$* \text{ Tính } I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x f(\cos x) dx. \text{ Đặt } t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx \Rightarrow -dt = \sin x dx$$

$$\text{Đổi cận: } x=0 \Rightarrow t=1; x=\frac{\pi}{2} \Rightarrow t=0.$$

$$\text{Ta có: } I_1 = \int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 f(x) dx.$$

$$* \text{ Tương tự, ta tính được: } I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x f(\sin x) dx = \int_0^1 f(x) dx.$$

$$\begin{aligned} * \text{ Tính } I_3 &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x (1 + \cos^2 2x) dx = -\frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos^2 2x) d(\cos 2x) \\ &= -\frac{1}{4} \left(\cos 2x + \frac{1}{3} \cos^3 2x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{-4}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

$$\text{Do đó } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x f(\cos x) dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x f(\sin x) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x (1 + \cos^2 2x) dx \text{ trở thành:}$$

$$2 \int_0^1 f(x) dx = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{3}.$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án D.**

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x) - x \cdot f(x) = 0$, $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 1$. Giá trị của $f(\sqrt{2})$ bằng

- A. e. B. $\frac{1}{e}$. C. e^2 . D. $\sqrt{e}$.

Lời giải:

Từ $f'(x) - x \cdot f(x) = 0, f(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}$ ta có:

$$\begin{aligned} \frac{f'(x)}{f(x)} = x &\Rightarrow \int_0^{\sqrt{2}} \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int_0^{\sqrt{2}} x dx \Leftrightarrow [\ln |f(x)|]_0^{\sqrt{2}} = \frac{x^2}{2} \Big|_0^{\sqrt{2}} \Leftrightarrow [\ln(f(x))]_0^{\sqrt{2}} = 1 \\ \Leftrightarrow \ln(f(\sqrt{2})) &= \ln(f(0)) + 1 = 1 \Leftrightarrow f(\sqrt{2}) = e. \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án A.**

Câu 7: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa $\int_0^7 f(x) dx = 10$ và $\int_0^3 f(x) dx = 6$. Tính $I = \int_{-2}^3 f|3-2x| dx$.

- A. 16. B. 3. C. 15. D. 8.

Lời giải:

Ta có $|3-2x| = \begin{cases} 3-2x, & x \leq \frac{3}{2} \\ 2x-3, & x > \frac{3}{2} \end{cases}$. Nên $I = \int_{-2}^3 f|3-2x|dx = \int_{-2}^{\frac{3}{2}} f(3-2x)dx + \int_{\frac{3}{2}}^3 f(2x-3)dx = I_1 + I_2$.

+) Tính I_1

Đặt $t = 3-2x \Rightarrow dt = -2dx$. Với $x = -2 \Rightarrow t = 7$; $x = \frac{3}{2} \Rightarrow t = 0$.

$$I_1 = -\frac{1}{2} \int_7^0 f(t)dt = \frac{1}{2} \int_0^7 f(t)dt = \frac{1}{2} \int_0^7 f(x)dx = 5.$$

+) Tính I_2

Đặt $t = 2x-3 \Rightarrow dt = 2dx$. Với $x = \frac{3}{2} \Rightarrow t = 0$; $x = 3 \Rightarrow t = 3$.

$$I_2 = \frac{1}{2} \int_0^3 f(t)dt = \frac{1}{2} \int_0^3 f(x)dx = 3$$

Vậy $I = \int_{-2}^3 f|3-2x|dx = 5 + 3 = 8$.

$\Rightarrow$ Chọn đáp án D.

Câu 8: Cho $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(2) = 16$, $\int_0^1 f(2x)dx = 2$. Tính $\int_0^2 xf'(x)dx$.

A. 30.

B. 28.

C. 36.

D. 16.

Lời giải:

Ta có $2 = \int_0^1 f(2x)dx = \frac{1}{2} \int_0^1 f(2x)d(2x) = \frac{1}{2} \int_0^2 f(t)dt \Rightarrow \int_0^2 f(x)dx = 4$.

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = f'(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = f(x) \end{cases}$.

Khi đó $\int_0^2 xf'(x)dx = x.f(x)\Big|_0^2 - \int_0^2 f(x)dx = 2.16 - 4 = 28$.

$\Rightarrow$ Chọn đáp án B.

Câu 9: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ thỏa $f'(\sin x) = \frac{1}{\cos^3 x}$, $\forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ và

$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Khi đó, $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{5}} f(x)dx$ bằng

A. $\frac{5\sqrt{3}-8}{10}$.

B. $\frac{8-5\sqrt{3}}{10}$.

C. $\frac{3}{10}$.

D. $-\frac{3}{10}$.

Lời giải:

+) Ta có: $f'(\sin x) = \frac{1}{\cos^3 x} \Leftrightarrow \cos x f'(\sin x) = \frac{1}{\cos^2 x} \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Lấy nguyên hàm hai vế ta được:

$$\int \cos x f'(\sin x) dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx \Leftrightarrow \int f'(\sin x) d(\sin x) = \tan x + c$$

$$\Leftrightarrow f(\sin x) = \tan x + c \quad (1), \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$$

+) Thay $x = \frac{\pi}{6}$ vào (1) ta có: $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} + c \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} + c \Leftrightarrow c = 0 \Rightarrow f(\sin x) = \tan x$.

Đặt $u = \sin x \Rightarrow \cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{1 - u^2}$ vì $\cos x > 0 \quad \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Khi đó có: $f(u) = \frac{u}{\sqrt{1-u^2}} \Rightarrow \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{5}} f(x) dx = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{5}} f(u) du = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{5}} \frac{u}{\sqrt{1-u^2}} du$

Đặt $t = \sqrt{1-u^2} \Rightarrow t^2 = 1-u^2 \Rightarrow udu = -tdt$ và $u = \frac{1}{2} \Rightarrow t = \frac{\sqrt{3}}{2}; u = \frac{3}{5} \Rightarrow t = \frac{4}{5}$

$$\Rightarrow \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{5}} f(x) dx = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{5}} f(u) du = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{5}} \frac{u}{\sqrt{1-u^2}} du = \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{4}{5}} \frac{-tdt}{t} = \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{4}{5}} -dt = \frac{5\sqrt{3}-8}{10}.$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án A.**

Câu 10: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{2}{2x-1}$, $f(0) = 1$ và $f(1) = 2$. Giá trị

biểu thức $f(-1) + f(3)$ bằng

A. $4 + \ln 15$.

B. $2 + \ln 15$.

C. $3 + \ln 15$.

D. $\ln 15$.

Lời giải:

Cách 1. Ta có: $\int f'(x) dx = \int \frac{2}{2x-1} dx = 2 \cdot \frac{1}{2} \ln|2x-1| + C = \ln|2x-1| + C$.

Do đó $f(x) = \ln|2x-1| + C$.

Suy ra: $f(x) = \begin{cases} \ln(2x-1) + C_1, & x > \frac{1}{2} \\ \ln(1-2x) + C_2, & x < \frac{1}{2} \end{cases}$.

Với $x = 0 < \frac{1}{2}$, ta có: $f(0) = 1 \Leftrightarrow \ln(1-2 \cdot 0) + C_2 = 1 \Leftrightarrow C_2 = 1$.

Với $x = 1 > \frac{1}{2}$, ta có: $f(1) = 2 \Leftrightarrow \ln(2 \cdot 1 - 1) + C_1 = 2 \Leftrightarrow C_1 = 2$.

Khi đó: $f(x) = \begin{cases} \ln(2x-1) + 2, & x > \frac{1}{2} \\ \ln(1-2x) + 1, & x < \frac{1}{2} \end{cases}$.

Suy ra: $\begin{cases} f(-1) = \ln[1-2 \cdot (-1)] + 1 = 1 + \ln 3 \\ f(3) = \ln(2 \cdot 3 - 1) + 2 = 2 + \ln 5 \end{cases}$. Vậy: $f(-1) + f(3) = 1 + \ln 3 + 2 + \ln 5 = 3 + \ln 15$.

Cách 2. Ta có $\int_{-1}^0 f'(x) dx = f(0) - f(-1) \Leftrightarrow \ln|2x-1| \Big|_{-1}^0 = f(0) - f(-1) \Leftrightarrow f(-1) = 1 + \ln 3$.

$$\text{Mà } \int_1^3 f'(x) dx = f(3) - f(1) \Leftrightarrow \ln|2x-1| \Big|_1^3 = f(3) - f(1) \Leftrightarrow f(3) = 2 + \ln 5.$$

$$\text{Vậy } f(-1) + f(3) = 3 + \ln 3 + \ln 5 = 3 + \ln 15.$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án C.**

Câu 11: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn $f(x) = 6x^2 f(x^3) - \frac{6}{\sqrt{3x+1}}$. Giá trị

$$\int_0^1 f(x) dx \text{ bằng}$$

A. 2.

B. 4.

C. 6.

D. -1.

Lời giải:

$$\text{Từ giả thiết ta có } \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 6x^2 f(x^3) dx - \int_0^1 \frac{6}{\sqrt{3x+1}} dx (*).$$

$$\bullet \text{ Xét } I = \int_0^1 6x^2 f(x^3) dx$$

$$\text{Đặt } t = x^3 \Rightarrow dt = 3x^2 dx. \text{ Với } x = 0 \Rightarrow t = 0; x = 1 \Rightarrow t = 1$$

$$\text{Suy ra } I = \int_0^1 6x^2 f(x^3) dx = \int_0^1 2f(t) dt = \int_0^1 2f(x) dx.$$

$$\bullet \text{ Xét } \int_0^1 \frac{6}{\sqrt{3x+1}} dx = \int_0^1 4d(\sqrt{3x+1}) = 4\sqrt{3x+1} \Big|_0^1 = 4.$$

$$(*) \Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx = 2 \int_0^1 f(x) dx - 4 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx = 4$$

$$\text{Vậy } \int_0^1 f(x) dx = 4.$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án B.**

Câu 12: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $(f'(x))^2 + 4f(x) = 8x^2 + 4$,

$$\forall x \in [0;1] \text{ và } f(1) = 2. \text{ Tính } \int_0^1 f(x) dx.$$

$$\text{A. } \frac{4}{3}.$$

$$\text{B. } \frac{1}{3}.$$

$$\text{C. } \frac{21}{4}.$$

$$\text{D. } 2.$$

Lời giải:

$$\text{Ta có } \int_0^1 (f'(x))^2 dx = \int_0^1 (8x^2 + 4 - 4f(x)) dx = \frac{20}{3} - 4 \int_0^1 f(x) dx = \frac{20}{3} - 4I$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = f(x) \\ dx = dv \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = x \end{cases}$$

$$\text{Nên } I = xf(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 xf'(x) dx = 2 - \int_0^1 xf'(x) dx$$

$$\begin{aligned} \text{Suy ra } \int_0^1 (f'(x))^2 dx &= \frac{20}{3} - 4 \left(2 - \int_0^1 xf'(x) dx \right) = \frac{20}{3} - 8 + 4 \int_0^1 xf'(x) dx \\ \Rightarrow \int_0^1 (f'(x))^2 dx - 4 \int_0^1 xf'(x) dx + \frac{4}{3} &= 0 \Rightarrow \int_0^1 (f'(x) - 2x)^2 dx = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 2x \Leftrightarrow f(x) = x^2 + C \\ \text{Mà } f(1) &= 2 \Rightarrow C = 1. \text{ Vậy } \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (x^2 + 1) dx = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án A.**

Câu 13: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ thỏa mãn:

$$x^2 f^2(x) + (2x-1)f(x) = xf'(x) - 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ đồng thời } f(1) = -2. \text{ Tính } \int_1^2 f(x) dx.$$

A. $-\ln 2 - \frac{1}{2}.$

B. $-\ln 2 - \frac{3}{2}.$

C. $-\frac{\ln 2}{2} - \frac{3}{2}.$

D. $-\frac{\ln 2}{2} - 1.$

Lời giải:

Ta có:

$$\begin{aligned} x^2 f^2(x) + (2x-1)f(x) &= xf'(x) - 1 \Leftrightarrow x^2 f^2(x) + 2xf(x) - f(x) = xf'(x) - 1 \\ \Leftrightarrow x^2 f^2(x) + 2xf(x) + 1 &= xf'(x) + f(x) \Leftrightarrow [xf(x) + 1]^2 = xf'(x) + f(x) \quad (*). \end{aligned}$$

$$\text{Xét } xf(x) + 1 = 0 \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{x} \Rightarrow f(1) = -1 \text{ (không thỏa mãn).}$$

$$\text{Xét } xf(x) + 1 \neq 0, \text{ ta có } (*) \Leftrightarrow \frac{xf'(x) + f(x)}{[xf(x) + 1]^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{[xf(x) + 1]'}{[xf(x) + 1]^2} = 1.$$

$$\Rightarrow \int \frac{[xf(x) + 1]'}{[xf(x) + 1]^2} dx = \int dx \Rightarrow -\frac{1}{xf(x) + 1} = x + C.$$

$$\text{Cho } x = 1 \text{ ta được: } -\frac{1}{1f(1) + 1} = 1 + C \Rightarrow -\frac{1}{-2 + 1} = 1 + C \Rightarrow C = 0.$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{xf(x) + 1} = x \Rightarrow xf(x) + 1 = -\frac{1}{x} \text{ (vì } x \neq 0) \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}$$

$$\text{Vậy } \int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 \left(-\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} \right) dx = \left[\frac{1}{x} - \ln x \right]_1^2 = -\frac{1}{2} - \ln 2.$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án A.**

Câu 14: Cho hàm số $f(x)$ có $f(x) + f(-x) = \cos x \cos^2 2x, \forall x \in \mathbb{R}$. Khi đó $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$ bằng

A. $\frac{14}{15}.$

B. $\frac{28}{15}.$

C. $\frac{14}{30}.$

D. $\frac{30}{14}.$

Lời giải:

$$\text{Ta có } \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 f(x) dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx.$$

Với $J = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 f(x)dx$ ta đặt $x = -t \Rightarrow dx = -dt$.

Đổi cận :

x	$-\frac{\pi}{2}$	0
t	$\frac{\pi}{2}$	0

$$\text{Khi đó } J = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 f(-t)(-dt) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(-t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(-x)dx.$$

$$\Rightarrow \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(-x)dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(-x) + f(x)]dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cos^2 2x dx.$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x (1 - 2\sin^2 x)^2 dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - 4\sin^2 x + 4\sin^4 x) d(\sin x).$$

$$= \left(\sin x - \frac{4}{3} \sin^3 x + \frac{4}{5} \sin^5 x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} = \frac{7}{15} = \frac{14}{30}.$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án C.**

Câu 15: Cho hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$, có $f'(x)[f'(x) - \cos x \cdot \cos^2 2x] = 4 - 2\cos(\pi - x) \cdot \cos^2 2x$,

$\forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 0$. Khi đó $\int_0^{\pi} f(x)dx$ bằng

A. $\frac{242}{225} + \pi^2$.

B. $\frac{242}{225}$.

C. $\frac{149 + 225\pi^2}{225}$.

D. $\frac{242 + \pi^2}{225}$.

Lời giải:

Ta có: $f'(x)[f'(x) - \cos x \cdot \cos^2 2x] = 4 - 2\cos(\pi - x) \cdot \cos^2 2x$

$$\Leftrightarrow [f'(x)]^2 - f'(x) \cdot \cos x \cdot \cos^2 2x = 4 + 2\cos x \cdot \cos^2 2x$$

$$\Leftrightarrow [f'(x)]^2 - 4 - f'(x) \cdot \cos x \cdot \cos^2 2x - 2\cos x \cdot \cos^2 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow [f'(x) - 2] \cdot [f'(x) + 2] - \cos x \cdot \cos^2 2x \cdot [f'(x) + 2] = 0$$

$$\Leftrightarrow [f'(x) + 2] \cdot [f'(x) - 2 - \cos x \cdot \cos^2 2x] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = -2(L) \\ f'(x) = 2 + \cos x \cdot \cos^2 2x (tm) \end{cases} \text{ (vì hàm số đồng biến trên } \mathbb{R} \text{)}.$$

Với $f'(x) = 2 + \cos x \cdot \cos^2 2x = 2 + \cos x \cdot \frac{1 + \cos 4x}{2} = 2 + \frac{\cos x}{2} + \frac{\cos 5x}{4} + \frac{\cos 3x}{4}$

$$\Rightarrow f(x) = \int \left(2 + \frac{\cos x}{2} + \frac{\cos 5x}{4} + \frac{\cos 3x}{4} \right) dx = 2x + \frac{\sin x}{2} + \frac{\sin 5x}{20} + \frac{\sin 3x}{12} + C.$$

Vì $f(0) = 0 \Rightarrow C = 0$. Do đó $f(x) = 2x + \frac{\sin x}{2} + \frac{\sin 5x}{20} + \frac{\sin 3x}{12}$.

Khi đó $\int_0^{\pi} f(x) dx = \int_0^{\pi} \left(2x + \frac{\sin x}{2} + \frac{\sin 5x}{20} + \frac{\sin 3x}{12} \right) dx = \left(x^2 - \frac{\cos x}{2} - \frac{\cos 5x}{100} - \frac{\cos 3x}{36} \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{242}{225} + \pi^2.$

$\Rightarrow$ Chọn đáp án A.

Câu 16: Cho hàm $f: \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm liên tục thỏa mãn điều kiện:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[(f(x))^2 - 2f(x)(\sin x - \cos x) \right] dx = 1 - \frac{\pi}{2}. \text{ Tính } \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx.$$

A. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = -1.$

B. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = 1.$

C. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = 2.$

D. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = 0.$

Lời giải:

Có $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - \cos x)^2 dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin 2x) dx = \left(x + \frac{1}{2} \cos 2x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1.$

Khi đó: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[(f(x))^2 - 2f(x)(\sin x - \cos x) + (\sin x - \cos x)^2 \right] dx = 0 \Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x) - (\sin x - \cos x)]^2 dx = 0$

$\Rightarrow f(x) - (\sin x - \cos x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = \sin x - \cos x.$

Vậy $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - \cos x) dx = (\sin x - \cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 0.$

$\Rightarrow$ Chọn đáp án D.

Câu 17: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục và không âm trên $[1; 4]$ đồng thời thỏa mãn điều kiện

$x + 2xf'(x) = [f'(x)]^2$ và $f(1) = \frac{3}{2}$. Tính $\int_1^4 f(x) dx$.

A. $\frac{1186}{45}.$

B. $\frac{2507}{90}.$

C. $\frac{848}{45}.$

D. $\frac{1831}{90}.$

Lời giải:

Vì có đạo hàm liên tục và không âm trên $[1; 4]$ nên Ta có :

$x + 2xf'(x) = [f'(x)]^2$

Vì $f(x)$ có đạo hàm liên tục và không âm trên $[1; 4]$

$\Rightarrow \frac{f'(x)}{\sqrt{1+2f(x)}} = \sqrt{x} \Rightarrow \left[\sqrt{1+2f(x)} \right]' = \sqrt{x} \Rightarrow \sqrt{1+2f(x)} = \int \sqrt{x} dx$

$\Rightarrow \sqrt{1+2f(x)} = \frac{2}{3} \sqrt{x^3} + C.$ Do $f(1) = \frac{3}{2}$ nên suy ra $\sqrt{1+2f(1)} = \frac{2}{3} + C \Rightarrow C = \frac{4}{3}.$

$\Rightarrow \sqrt{1+2f(x)} = \frac{2}{3} \sqrt{x^3} + \frac{4}{3}.$

$\Rightarrow 1+2f(x) = \frac{4}{9} (\sqrt{x^3} + 2)^2 \Rightarrow f(x) = \frac{2}{9} (\sqrt{x^3} + 2)^2 - \frac{1}{2} \Rightarrow f(x) = \frac{2}{9} x^3 + \frac{8}{9} \sqrt{x^3} + \frac{7}{18}$

$\Rightarrow \int_1^4 f(x) dx = \int_1^4 \left(\frac{2}{9} x^3 + \frac{8}{9} \sqrt{x^3} + \frac{7}{18} \right) dx = \frac{1186}{45}.$

$\Rightarrow$ Chọn đáp án A.

Câu 18: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x) + 2x.f(x) = e^{-x^2}, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 0$. Tính $f(1)$.

A. $f(1) = \frac{-1}{e}$.

B. $f(1) = \frac{1}{e^2}$.

C. $f(1) = \frac{1}{e}$.

D. $f(1) = e^2$.

Lời giải:

$$\text{Ta có } \forall x \in \mathbb{R} : f'(x) + 2x.f(x) = e^{-x^2} \Rightarrow \frac{f'(x)}{e^{-x^2}} + \frac{2x.f(x)}{e^{-x^2}} = 1 \Rightarrow \left(f(x) \frac{1}{e^{-x^2}} \right)' = 1$$

$$\text{Suy ra } \int_0^1 f(x) \frac{1}{e^{-x^2}} dx = 1 \Rightarrow f(1) \frac{1}{e^{-1^2}} - f(0) \frac{1}{e^{-0^2}} = 1 \Rightarrow ef(1) = 1 \Rightarrow f(1) = \frac{1}{e}.$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án C.**

Câu 19: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x^3 + 3x + 1) = 3x + 2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Tính $\int_1^5 x.f'(x) dx$.

A. $\frac{17}{4}$.

B. $\frac{5}{4}$.

C. $\frac{33}{4}$.

D. $\frac{29}{4}$.

Lời giải:

$$\text{Ta có } f(x^3 + 3x + 1) = 3x + 2 \text{ với } \forall x \in \mathbb{R}$$

$$x = 0 \Rightarrow f(1) = 2; x = 1 \Rightarrow f(5) = 5$$

$$\text{Đặt } u = x \Rightarrow du = dx; dv = f'(x) dx, \text{ ta chọn } v = f(x)$$

$$\text{Suy ra } \int_1^5 x.f'(x) dx = \left[x.f(x) \right]_1^5 - \int_1^5 f(x) dx = 23 - \int_1^5 f(x) dx$$

$$\text{Đặt } t = x^3 + 3x + 1 \Rightarrow dt = 3(x^2 + 1) dx \Rightarrow f(t) = 3x + 2$$

$$\text{Đổi cận } x = 0 \Rightarrow t = 1; x = 1 \Rightarrow t = 5$$

$$\text{Do đó } \int_1^5 f(t) dt = \int_0^1 (3x + 2)(3x^2 + 3) dx = 3 \int_0^1 (3x^3 + 2x^2 + 3x + 2) dx = \frac{59}{4} \text{ hay } \int_1^5 f(x) dx = \frac{59}{4}.$$

$$\text{Vậy } \int_1^5 x.f'(x) dx = 23 - \frac{59}{4} = \frac{33}{4}.$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án C.**

Câu 20: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(x) > 0$ và $f(x) - f'(x) = -\frac{2[f(x)]^2}{e^x . x . \sqrt{x - x^2}} \forall x \in (0; 1)$. Biết

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}, \text{ khẳng định nào sau đây đúng?}$$

A. $f\left(\frac{1}{5}\right) \geq \frac{1}{4}$.

B. $\frac{1}{5} \leq f\left(\frac{1}{5}\right) < \frac{1}{4}$.

C. $f\left(\frac{1}{5}\right) < \frac{1}{6}$.

D. $\frac{1}{6} \leq f\left(\frac{1}{5}\right) < \frac{1}{5}$.

Lời giải:

$$\text{Ta có: } f(x) - f'(x) = -\frac{2[f(x)]^2}{e^x . x . \sqrt{x - x^2}} \forall x \in (0; 1) \Rightarrow \frac{e^x f(x) - e^x . f'(x)}{[f(x)]^2} = -\frac{2}{x \sqrt{x - x^2}}$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{e^x}{f(x)} \right]' = \frac{-2}{x\sqrt{x-x^2}} \Rightarrow \int \left[\frac{e^x}{f(x)} \right]' dx = \int \frac{-2}{x\sqrt{x-x^2}} dx \Leftrightarrow \frac{e^x}{f(x)} = \int \frac{-2}{x^2 \sqrt{\frac{1}{x}-1}} dx \quad (1)$$

$$\text{Xét } I = \int \frac{-2}{x^2 \sqrt{\frac{1}{x}-1}} dx. \text{ Đặt } t = \sqrt{\frac{1}{x}-1} \Rightarrow t^2 = \frac{1}{x}-1 \Rightarrow 2t dt = -\frac{1}{x^2} dx$$

$$\Rightarrow I = \int \frac{-4t}{t} dt = -4t + C = -4\sqrt{\frac{1}{x}-1} + C \text{ Từ (1)} \Rightarrow \frac{e^x}{f(x)} = -4\sqrt{\frac{1}{x}-1} + C \Rightarrow f(x) = \frac{e^x}{-4\sqrt{\frac{1}{x}-1} + C}$$

$$\text{Do } f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{e^{\frac{1}{2}}}{-4+C} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow C = 2e^{\frac{1}{2}} - 2 \Rightarrow f(x) = \frac{e^x}{-4\sqrt{\frac{1}{x}-1} + 2e^{\frac{1}{2}} - 2}.$$

$$\text{Vậy } f\left(\frac{1}{5}\right) \approx 0,33 \geq \frac{1}{4}.$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án A.**



PHIẾU ÔN TẬP SỐ 05

CHUYÊN ĐỀ

TÍCH PHÂN - ỨNG DỤNG

Tích phân _ Hàm ẩn

Lớp Toán thầy LÊ BÁ BẢO

Trưởng THPT Đặng Huy Trứ SĐT: 0935.785.115 Facebook: Lê Bá Bảo
116/04 Nguyễn Lộ Trạch, TP Huế Trung tâm KM 10 Hương Trà, Huế.

NỘI DUNG ĐỀ BÀI

- Câu 1:** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int_0^1 (x+1) f'(x) dx = 10$ và $2f(1) - f(0) = 2$. Tính $I = \int_0^1 f(x) dx$.
- A. $I = -8$. B. $I = 8$. C. $I = 1$. D. $I = -12$.
- Câu 2:** Cho hàm số $f(x) \neq 0$ thỏa mãn điều kiện $f'(x) = (2x+3)[f(x)]^2$ và $f(0) = -\frac{1}{2}$. Biết rằng tổng $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(2017) + f(2018) = \frac{a}{b}$ với $(a, b \in \mathbb{Z}, b > 0)$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Khẳng định nào sau đây đúng?
- A. $\frac{a}{b} < -1$. B. $\frac{a}{b} > 1$. C. $a + b = 1010$. D. $b - a = 3029$.
- Câu 3:** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(1) = 4$ và $(x^2 + 3)^2 f'(x) = 2x \cdot f^2(x)$; $f(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $f(3)$ bằng
- A. 9. B. 6. C. 2019. D. 12.
- Câu 4:** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x) + f(-x) = \sqrt{2 + 2\cos 2x}, \forall x \in \mathbb{R}$. Tính $I = \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x) dx$.
- A. $I = -6$. B. $I = 0$. C. $I = -2$. D. $I = 6$.
- Câu 5:** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{0; -1\}$, $f(1) = -2\ln 2$ và $x(x+1) \cdot f'(x) + f(x) = x^2 + x$. Giá trị $f(2) = a + b\ln 3$, với $a, b \in \mathbb{R}, a, b$ là phân số tối giản. Tính $a^2 + b^2$.
- A. $\frac{25}{4}$. B. $\frac{13}{4}$. C. $\frac{5}{2}$. D. $\frac{9}{2}$.
- Câu 6:** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0; 2]$ và thỏa mãn $f(x) + f(2-x) = 3(x^2 - 2x), \forall x \in [0; 2]$. Biết $f(2) = 10$, tính $I = \int_0^4 x f'\left(\frac{x}{2}\right) dx$.
- A. 72. B. 96. C. 32. D. 88.
- Câu 7:** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int_{-2}^2 f(\sqrt{x^2 + 5} - x) dx = 1, \int_1^5 \frac{f(x)}{x^2} dx = 3$. Tính $\int_1^5 f(x) dx$.
- A. -15. B. -2. C. -13. D. 0.

Câu 8: Cho hàm số $f(x)$ có $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ và $f'(x)=\sin x.\sin^2 2x, \forall x \in \mathbb{R}$. Khi đó $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$ bằng

A. $-\frac{104}{225}$. B. $\frac{121}{225}$. C. $\frac{104}{225}$. D. $\frac{167}{225}$.

Câu 9: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa $\int_0^1 f(x)dx=1$ và $\int_0^2 f(x)dx=16$. Tính

$$I=\int_0^{\frac{1}{2}} f(4x)dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\cos xdx.$$

A. $I=5$. B. $I=\frac{31}{2}$. C. $I=9$. D. $I=\frac{33}{2}$.

Câu 10: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện $f'(x)=2xf(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Biết $f(0)=2$ và $f(x)>0, \forall x \in \mathbb{R}$. Tính $I=\int_0^1 x^3 f(x)dx$.

A. $I=1$. B. $I=e$. C. $I=\frac{1+e}{2}$. D. $I=e-1$.

Câu 11: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $7f(x)+4f(4-x)=2020x\sqrt{x^2+9}, \forall x \in \mathbb{R}$. Tính

$$I=\int_0^4 f(x)dx.$$

A. $\frac{197960}{99}$. B. $\frac{7063}{3}$. C. $\frac{197960}{33}$. D. $\frac{2020}{11}$.

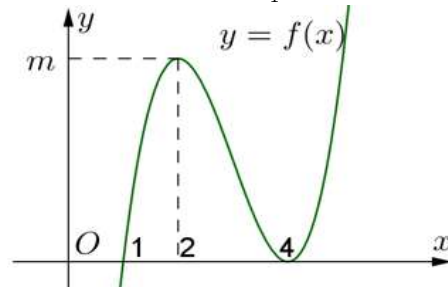
Câu 12: Cho hàm số $f(x)$ liên tục, có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $x-[f(x)]^3-f(x)+3=0, \forall x \in \mathbb{R}$. Tính $I=\int_{-1}^7 xf'(x)dx$.

A. $\frac{5}{4}$. B. $\frac{3}{4}$. C. $\frac{9}{4}$. D. $\frac{51}{4}$.

Câu 13: Cho hàm số $f(x)$ có $f'(x)=\frac{1}{(x+1)\sqrt{x-x\sqrt{x+1}}}, \forall x>0$ và $f(1)=2\sqrt{2}$. Khi đó $\int_1^2 f(x)dx$ bằng

A. $4\sqrt{3}-\frac{10}{3}$. B. $4\sqrt{3}+\frac{10}{3}$. C. $4\sqrt{3}+\frac{4\sqrt{2}}{3}-\frac{10}{3}$. D. $4\sqrt{3}-\frac{14}{3}$.

Câu 14: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ, biết $\int_1^4 |f'(x)|dx=12$. Tính $m=f(2)$.



A. 6. B. 5. C. 12. D. 3.

Câu 15: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(2+x) + f(x) - f(1-x) = \frac{x}{1+x^2}$. Biết tích phân $I = \int_0^5 f(x)dx = a \cdot \ln b$ (a là số hữu tỉ, b là số nguyên tố). Hãy chọn mệnh đề đúng.

- A. $ab = \frac{13}{2}$. B. $ab = 1$. C. $ab = 13$. D. $ab = \frac{26}{3}$.

Câu 16: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;2]$ và thỏa mãn điều kiện $3f(x) + 7f(2-x) = \sqrt{x}$, $\forall x \in [0;2]$. Tính $\int_0^1 f(x)dx$.

- A. $\frac{7\sqrt{2}-6}{30}$. B. $\frac{4\sqrt{2}-2}{15}$. C. $\frac{4\sqrt{2}}{15}$. D. $\frac{7\sqrt{2}-5}{30}$.

Câu 17: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn: $f^3(x) + 3xf^2(x) + (3x^2+1)f(x) + x^3 = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Tính $I = \int_0^2 f(x)dx$.

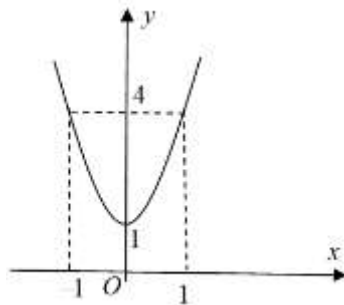
- A. $-\frac{3}{4}$. B. $\frac{5}{4}$. C. $\frac{3}{4}$. D. $-\frac{5}{4}$.

Câu 18: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên khoảng $K = \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$. Biết $f(1) = 3$ và

$2f(x) = (1-2x)f'(x) + \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}$, $\forall x \in K$. Giá trị $f(2)$ gần với số nào nhất trong các số sau?

- A. 1,2. B. 1,1. C. 1. D. 1,3.

Câu 19: Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, ($a, b, c, d \in \mathbb{R}, a \neq 0$) có đồ thị là (C). Biết đồ thị (C) đi qua gốc tọa độ và có đồ thị $y = f'(x)$ cho bởi hình vẽ. Tính giá trị $H = f(4) - f(2)$.



- A. $H = 45$. B. $H = 64$. C. $H = 51$. D. $H = 58$.

Câu 20: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ và thỏa mãn $f(1) = 1$; $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \frac{9}{5}$;

$\int_0^1 f(\sqrt{x})dx = \frac{2}{5}$. Tính $I = \int_0^1 f(x)dx$.

- A. $I = \frac{3}{4}$. B. $I = \frac{1}{5}$. C. $I = \frac{3}{5}$. D. $I = \frac{1}{4}$.

HẾT

Huế, ngày 07 tháng 02 năm 2021



CHUYÊN ĐỀ

TÍCH PHÂN - ỨNG DỤNG

Tích phân _ Hàm ẩn

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int_0^1 (x+1) f'(x) dx = 10$ và $2f(1) - f(0) = 2$. Tính $I = \int_0^1 f(x) dx$.

A. $I = -8$.B. $I = 8$.C. $I = 1$.D. $I = -12$.**Lời giải:**

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x+1 \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = f(x) \end{cases} \Rightarrow \int_0^1 (x+1) f'(x) dx = (x+1) \cdot f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 f(x) dx$$

$$= 2f(1) - f(0) - \int_0^1 f(x) dx = 2 - \int_0^1 f(x) dx = 10 \Rightarrow I = \int_0^1 f(x) dx = -8.$$

 $\Rightarrow$ Chọn đáp án A.

Câu 2: Cho hàm số $f(x) \neq 0$ thỏa mãn điều kiện $f'(x) = (2x+3)[f(x)]^2$ và $f(0) = -\frac{1}{2}$. Biết rằng tổng $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(2017) + f(2018) = \frac{a}{b}$ với $(a, b \in \mathbb{Z}, b > 0)$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\frac{a}{b} < -1$.B. $\frac{a}{b} > 1$.C. $a + b = 1010$.D. $b - a = 3029$.**Lời giải:**

$$\text{Ta có } f'(x) = (2x+3)f^2(x) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = 2x+3$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{f'(x)}{f^2(x)} dx = \int (2x+3) dx \Leftrightarrow -\frac{1}{f(x)} = x^2 + 3x + C. \text{ Vì } f(0) = -\frac{1}{2} \Rightarrow C = 2.$$

$$\text{Vậy } f(x) = -\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+1}.$$

$$\text{Do đó } f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(2017) + f(2018) = \frac{1}{2020} - \frac{1}{2} = -\frac{1009}{2020}.$$

Vậy $a = -1009$; $b = 2020$. Do đó $b - a = 3029$.

 $\Rightarrow$ Chọn đáp án D.

Câu 3: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(1) = 4$ và $(x^2 + 3)^2 f'(x) = 2x \cdot f^2(x)$; $f(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $f(3)$ bằng

A. 9.

B. 6.

C. 2019.

D. 12.

Lời giải:

Vì $(x^2 + 3)^2 f'(x) = 2x \cdot f^2(x)$; $f(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên

$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = \frac{2x}{(x^2 + 3)^2} \Rightarrow \int_1^3 \frac{f'(x)}{f^2(x)} dx = \int_1^3 \frac{2x}{(x^2 + 3)^2} dx \Leftrightarrow \int_1^3 \frac{df(x)}{f^2(x)} = \int_1^3 \frac{d(x^2 + 3)}{(x^2 + 3)^2}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{f(x)} \Big|_1^3 = -\frac{1}{x^2+3} \Big|_1^3 \Leftrightarrow \frac{1}{f(1)} - \frac{1}{f(3)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{12} \Leftrightarrow \frac{1}{4} - \frac{1}{f(3)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{12} \Leftrightarrow f(3) = 12.$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án D.**

Câu 4: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x) + f(-x) = \sqrt{2+2\cos 2x}, \forall x \in \mathbb{R}$. Tính

$$I = \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x) dx.$$

A. $I = -6$.

B. $I = 0$.

C. $I = -2$.

D. $I = 6$.

Lời giải:

Tính $\int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(-x) dx$. Đặt $t = -x \Rightarrow dt = -dx$

$$\Rightarrow \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(-x) dx = - \int_{\frac{3\pi}{2}}^{-\frac{3\pi}{2}} f(t) dt = \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(t) dt = \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x) dx$$

$$\Rightarrow 2I = \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} [f(x) + f(-x)] dx = \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \sqrt{2+2\cos 2x} dx = \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \sqrt{4\cos^2 x} dx = \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} 2|\cos x| dx = 12 \Rightarrow I = 6.$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án D.**

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{0; -1\}$, $f(1) = -2\ln 2$ và $x(x+1).f'(x) + f(x) = x^2 + x$. Giá trị $f(2) = a + b\ln 3$, với $a, b \in \mathbb{R}, a, b$ là phân số tối giản. Tính $a^2 + b^2$.

A. $\frac{25}{4}$.

B. $\frac{13}{4}$.

C. $\frac{5}{2}$.

D. $\frac{9}{2}$.

Lời giải:

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0; -1\}$ ta có

$$(x^2 + x).f'(x) + f(x) = x^2 + x \Rightarrow f'(x) + \frac{f(x)}{x(x+1)} = 1$$

$$\Rightarrow f'(x) \frac{x}{x+1} + \frac{f(x)}{(x+1)^2} = \frac{x}{x+1} \Leftrightarrow \left[f(x) \cdot \frac{x}{x+1} \right]' = \frac{x}{x+1}$$

Nên $\int_1^2 \left[f(x) \cdot \frac{x}{x+1} \right]' dx = \int_1^2 \frac{x}{x+1} dx$ do đó

$$f(2) \cdot \frac{2}{3} - f(1) \cdot \frac{1}{2} = 1 + \ln \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{2}{3}(a + b\ln 3) - \frac{1}{2}(-2\ln 2) = 1 + \ln \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}a + \frac{2}{3}b\ln 3 = 1 - \ln 3 \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ b = \frac{-3}{2} \end{cases} \Rightarrow a^2 + b^2 = \frac{9}{2}.$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án D.**

Câu 6: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0; 2]$ và thỏa mãn

$$f(x) + f(2-x) = 3(x^2 - 2x), \forall x \in [0; 2]. \text{ Biết } f(2) = 10, \text{ tính } I = \int_0^4 xf'\left(\frac{x}{2}\right)dx.$$

A. 72.

B. 96.

C. 32.

D. 88.

Lời giải:

Cách 1: Ta có:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_0^2 (f(x) + f(2-x))dx &= \int_0^2 3(x^2 - 2x)dx \Leftrightarrow \int_0^2 f(x)dx - \int_0^2 f(2-x)d(2-x) = -4 \\ \Leftrightarrow \int_0^2 f(x)dx - \int_2^0 f(t)dt &= -4 \Leftrightarrow \int_0^2 f(x)dx + \int_0^2 f(x)dx = -4 \\ \Leftrightarrow 2 \int_0^2 f(x)dx &= -4 \Leftrightarrow \int_0^2 f(x)dx = -2 \\ I = \int_0^4 xf'\left(\frac{x}{2}\right)dx &= 4 \int_0^2 xf'(x)dx = 4 \left(xf(x) \Big|_0^2 - \int_0^2 f(x)dx \right) = 4(2f(2) - (-2)) = 88 \end{aligned}$$

Cách 2:

$$\text{Xét } f(x) = ax^2 + bx + c (a \neq 0); f(2) = 4a + 2b + c(1)$$

$$\begin{aligned} f(2-x) &= a(2-x)^2 + b(2-x) + c = ax^2 - (4a+b)x + 4a + 2b + c \\ \Rightarrow f(x) + f(2-x) &= ax^2 + bx + c + ax^2 - (4a+b)x + 4a + 2b + c \\ \Leftrightarrow f(x) + f(2-x) &= 2ax^2 - 4ax + 4a + 2b + 2c(2) \end{aligned}$$

$$\text{Mà } f(x) + f(2-x) = 3(x^2 - 2x) \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 4a + 2b + c = 10 \\ a = \frac{3}{2} \\ 4a + 2b + 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ b = 7 \\ c = -10 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \frac{3}{2}x^2 + 7x - 10$$

$$I = \int_0^4 xf'\left(\frac{x}{2}\right)dx = 4 \int_0^2 xf'(x)dx = 4 \left(xf(x) \Big|_0^2 - \int_0^2 f(x)dx \right) = 4(2f(2) - (-2)) = 88$$

$\Rightarrow$ Chọn đáp án D.

Câu 7: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int_{-2}^2 f(\sqrt{x^2+5}-x)dx = 1, \int_1^5 \frac{f(x)}{x^2}dx = 3$. Tính

$$\int_1^5 f(x)dx.$$

A. -15.

B. -2.

C. -13.

D. 0.

Lời giải:

$$\text{Xét: } I = \int_{-2}^2 f(\sqrt{x^2+5}-x)dx.$$

$$\text{Đặt: } t = \sqrt{x^2+5}-x \Rightarrow dt = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+5}} - 1 \right) dx = -\frac{\sqrt{x^2+5}-x}{\sqrt{x^2+5}} dx.$$

$$\text{Với } t = \sqrt{x^2+5}-x(1) \Rightarrow t = \frac{5}{\sqrt{x^2+5}+x} \Rightarrow \sqrt{x^2+5}+x = \frac{5}{t}(2).$$

$$(1), (2) \Rightarrow 2\sqrt{x^2 + 5} = t + \frac{5}{t} = \frac{t^2 + 5}{t} \Rightarrow \sqrt{x^2 + 5} = \frac{t^2 + 5}{2t}.$$

$$\Rightarrow dt = -\frac{2t^2}{t^2 + 5} dx \Rightarrow dx = -\frac{t^2 + 5}{2t^2} dt = -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{5}{t^2} \right) dt.$$

Đổi cận:

x	-2	2
t	5	1

$$\Rightarrow I = \int_5^1 f(t) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{5}{t^2}\right) dt = \frac{1}{2} \int_1^5 f(t) \cdot \left(1 + \frac{5}{t^2}\right) dt = \frac{1}{2} \int_1^5 f(t) dt + \frac{5}{2} \int_1^5 \frac{f(t)}{t^2} dt.$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2} \int_1^5 f(x) dx + \frac{5}{2} \int_1^5 \frac{f(x)}{x^2} dx \Rightarrow 1 = \frac{1}{2} \int_1^5 f(x) dx + \frac{5}{2} \cdot 3 \Rightarrow \int_1^5 f(x) dx = -13.$$

$\Rightarrow$ Chọn đáp án C.

Câu 8: Cho hàm số $f(x)$ có $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ và $f'(x) = \sin x \cdot \sin^2 2x, \forall x \in \mathbb{R}$. Khi đó $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$ bằng

A. $-\frac{104}{225}$.

B. $\frac{121}{225}$.

C. $\frac{104}{225}$.

D. $\frac{167}{225}$.

Lời giải:

Ta có:

$$\begin{aligned} \int f'(x) dx &= \int 4 \sin^3 x \cos^2 x dx = \int -4(1 - \cos^2 x) \cos^2 x d(\cos x) = \int (4 \cos^4 x - 4 \cos^2 x) d(\cos x) \\ &= \frac{4 \cos^5 x}{5} - \frac{4 \cos^3 x}{3} + C. \end{aligned}$$

Do $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ nên $C = 0$. Suy ra $f(x) = \frac{4 \cos^5 x}{5} - \frac{4 \cos^3 x}{3}$.

$$\begin{aligned} \text{Vậy } \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{4 \cos^5 x}{5} - \frac{4 \cos^3 x}{3} \right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{4}{5} \cdot (1 - \sin^2 x)^2 - \frac{4}{3} \cdot (1 - \sin^2 x) \right) d(\sin x) \\ &= \left[\frac{4}{5} \left(\sin x - \frac{2 \sin^3 x}{3} + \frac{\sin^5 x}{5} \right) - \frac{4}{3} \left(\sin x - \frac{\sin^3 x}{3} \right) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{104}{225}. \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Chọn đáp án A.

Câu 9: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa $\int_0^1 f(x) dx = 1$ và $\int_0^2 f(x) dx = 16$. Tính

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} f(4x) dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) \cos x dx.$$

A. $I = 5$.

B. $I = \frac{31}{2}$.

C. $I = 9$.

D. $I = \frac{33}{2}$.

Lời giải:

Đặt $t = 4x \Rightarrow dt = 4dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{4}$; đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 0$; $x = \frac{1}{2} \Rightarrow t = 2$.

$$\text{Khi đó: } \int_0^{\frac{1}{2}} f(4x) dx = \frac{1}{4} \int_0^2 f(t) dt = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx = \frac{16}{4} = 4.$$

$$\text{Đặt } t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx; \text{ Đổi cận: } x = 0 \Rightarrow t = 0; x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1.$$

$$\text{Khi đó: } \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) \cos x dx = \int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 f(x) dx = 1. \text{ Vậy } I = 1 + 4 = 5.$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án A.**

Câu 10: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện $f'(x) = 2xf(x)$,

$$\forall x \in \mathbb{R}. \text{ Biết } f(0) = 2 \text{ và } f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Tính } I = \int_0^1 x^3 f(x) dx.$$

A. $I = 1$.

B. $I = e$.

C. $I = \frac{1+e}{2}$.

D. $I = e - 1$.

Lời giải:

$$\text{Ta có: } f'(x) = 2xf(x) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = 2x \Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int 2x dx \Leftrightarrow \int \frac{df(x)}{f(x)} = \int 2x dx$$

$$\Rightarrow \ln f(x) = x^2 + C \Rightarrow \ln f(0) = C \Rightarrow \ln 2 = C$$

$$\Rightarrow \ln f(x) = x^2 + \ln 2 \Leftrightarrow f(x) = e^{x^2 + \ln 2} \Leftrightarrow f(x) = 2e^{x^2}.$$

$$\text{Vì vậy, } I = \int_0^1 x^3 f(x) dx = \int_0^1 2x^3 e^{x^2} dx = \int_0^1 x^2 e^{x^2} d(x^2) = \int_0^1 t e^t dt.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = t \\ dv = e^x dx \end{cases}. \text{ Ta có } \begin{cases} du = dt \\ v = e^x \end{cases} \Rightarrow I = te^t \Big|_0^1 - \int_0^1 e^t dt = (te^t - e^t) \Big|_0^1 = 1.$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án A.**

Câu 11: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $7f(x) + 4f(4-x) = 2020x\sqrt{x^2+9}, \forall x \in \mathbb{R}$. Tính

$$I = \int_0^4 f(x) dx.$$

A. $\frac{197960}{99}$.

B. $\frac{7063}{3}$.

C. $\frac{197960}{33}$.

D. $\frac{2020}{11}$.

Lời giải:

$$\text{Do } f(x) \text{ liên tục trên } \mathbb{R} \text{ và } \forall x \in \mathbb{R}, 7f(x) + 4f(4-x) = 2020x\sqrt{x^2+9}$$

$$\Rightarrow \int_0^4 [7f(x) + 4f(4-x)] dx = \int_0^4 2020x\sqrt{x^2+9} dx \Leftrightarrow 7 \int_0^4 f(x) dx + 4 \int_0^4 f(4-x) dx = \int_0^4 2020x\sqrt{x^2+9} dx.$$

$$\text{Đặt } K = \int_0^4 2020x\sqrt{x^2+9} dx; H = \int_0^4 f(4-x) dx.$$

$$+ \text{ Tính } K = \int_0^4 2020x\sqrt{x^2+9} dx.$$

$$\text{Đặt } u = \sqrt{x^2+9} \Leftrightarrow u^2 = x^2+9 \Rightarrow udu = xdx. \text{ Với } x=0 \Rightarrow u=3; x=4 \Rightarrow u=5.$$

$$\text{Khi đó } K = \int_0^4 2020x\sqrt{x^2+9} dx = 2020 \int_3^5 u^2 du = \frac{2020}{3} (5^3 - 3^3) = \frac{197960}{3}.$$

+ Tính $H = \int_0^4 f(4-x)dx$. Đặt $u = 4-x \Rightarrow du = -dx$. Với $x=0 \Rightarrow u=4$; $x=4 \Rightarrow u=0$.

Khi đó $H = \int_0^4 f(4-x)dx = -\int_4^0 f(u)du = \int_0^4 f(u)du = I$.

$$\text{Vậy } 7 \int_0^4 f(x)dx + 4 \int_0^4 f(4-x)dx = \int_0^4 2020x\sqrt{x^2+9}dx \Leftrightarrow 7I + 4I = \frac{197960}{3}$$

$$\Leftrightarrow 11I = \frac{197960}{3} \Leftrightarrow I = \frac{197960}{33}.$$

$\Rightarrow$ Chọn đáp án C.

Câu 12: Cho hàm số $f(x)$ liên tục, có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $x - [f(x)]^3 - f(x) + 3 = 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Tính $I = \int_{-1}^7 xf'(x)dx$.

A. $\frac{5}{4}$.

B. $\frac{3}{4}$.

C. $\frac{9}{4}$.

D. $\frac{51}{4}$.

Lời giải:

Từ giả thiết ta có: $x - f^3(x) - f(x) + 3 = 0$

$$x = 7 \Rightarrow 7 - f^3(7) - f(7) + 3 = 0 \Leftrightarrow f(7) = 2$$

$$x = -1 \Rightarrow -1 - f^3(-1) - f(-1) + 3 = 0 \Leftrightarrow f(-1) = 1.$$

$$x - f^3(x) - f(x) + 3 = 0 \Rightarrow xf'(x) = [f^3(x) + f(x) - 3]f'(x)$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^7 xf'(x)dx = \int_{-1}^7 [f^3(x) + f(x) - 3]f'(x)dx = \left[\frac{1}{4}f^4(x) + \frac{1}{2}f^2(x) - 3f(x) \right]_{-1}^7$$

$$= \frac{1}{4}f^4(7) + \frac{1}{2}f^2(7) - 3f(7) - \left[\frac{1}{4}f^4(-1) + \frac{1}{2}f^2(-1) - 3f(-1) \right] = 0 - \left(-\frac{9}{4} \right) = \frac{9}{4}.$$

$\Rightarrow$ Chọn đáp án C.

Câu 13: Cho hàm số $f(x)$ có $f'(x) = \frac{1}{(x+1)\sqrt{x-x\sqrt{x+1}}}, \forall x > 0$ và $f(1) = 2\sqrt{2}$. Khi đó $\int_1^2 f(x)dx$ bằng

A. $4\sqrt{3} - \frac{10}{3}$.

B. $4\sqrt{3} + \frac{10}{3}$.

C. $4\sqrt{3} + \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{10}{3}$.

D. $4\sqrt{3} - \frac{14}{3}$.

Lời giải:

$$\text{Ta có } f(x) = \int f'(x)dx = \int \frac{1}{(x+1)\sqrt{x-x\sqrt{x+1}}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{x(x+1)}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})}dx$$

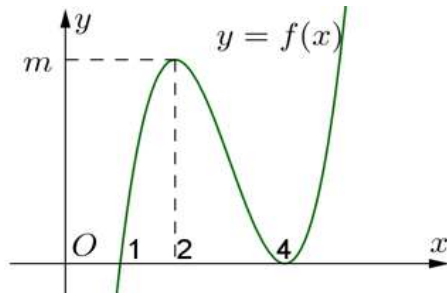
$$f(x) = \int \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x(x+1)}}dx = \int \left(\frac{1}{\sqrt{x+1}} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)dx = 2\sqrt{x+1} + 2\sqrt{x} + C$$

Vì $f(1) = 2\sqrt{2}$ nên $C = -2$ và $f(x) = 2\sqrt{x+1} + 2\sqrt{x} - 2$.

$$\text{Khi đó } \int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 (2\sqrt{x+1} + 2\sqrt{x} - 2)dx = \left[\frac{4}{3}(x+1)\sqrt{x+1} + \frac{4}{3}x\sqrt{x} - 2x \right]_1^2 = 4\sqrt{3} - \frac{10}{3}.$$

$\Rightarrow$ Chọn đáp án A.

Câu 14: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ, biết $\int_1^4 |f'(x)|dx = 12$. Tính $m = f(2)$.



A. 6.

B. 5.

C. 12.

D. 3.

Lời giải:

Từ đồ thị, ta có $f(1) = f(4) = 0$ và bảng xét dấu $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	2		4		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+

$$\begin{aligned} \text{Do đó ta có } 12 &= \int_1^4 |f'(x)| dx \Leftrightarrow 12 = \int_1^2 |f'(x)| dx + \int_2^4 |f'(x)| dx \Leftrightarrow 12 = \int_1^2 f'(x) dx - \int_2^4 f'(x) dx \\ &\Leftrightarrow 12 = f(x) \Big|_1^2 - f(x) \Big|_2^4 \Leftrightarrow 12 = f(2) - f(1) - [f(4) - f(2)] \Leftrightarrow 12 = 2f(2) - f(1) - f(4) \\ &\Leftrightarrow 12 = 2m - 0 - 0 \Leftrightarrow m = 6. \text{ Vậy } m = f(2) = 6. \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Chọn đáp án A.

Câu 15: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(2+x) + f(x) - f(1-x) = \frac{x}{1+x^2}$. Biết tích phân $I = \int_0^5 f(x) dx = a \ln b$ (a là số hữu tỉ, b là số nguyên tố). Hãy chọn mệnh đề đúng.

A. $ab = \frac{13}{2}$.

B. $ab = 1$.

C. $ab = 13$.

D. $ab = \frac{26}{3}$.

Lời giải:

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } f(2+x) + f(x) - f(1-x) &= \frac{x}{1+x^2} \\ \Rightarrow \int_{-2}^3 [f(2+x) + f(x) - f(1-x)] dx &= \int_{-2}^3 \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \ln 2 \\ \Rightarrow \int_{-2}^3 f(x+2) dx + \int_{-2}^3 f(x) dx - \int_{-2}^3 f(1-x) dx &= \frac{1}{2} \ln 2 \\ \Rightarrow \int_0^5 f(t) dt + \int_{-2}^3 f(x) dx - \int_{-2}^3 f(u) du &= \int_0^5 f(x) dx = \frac{1}{2} \ln 2 \quad (t = x+2; u = 1-x) \\ \Rightarrow \int_0^5 f(x) dx + \int_{-2}^3 f(x) dx - \int_{-2}^3 f(x) dx &\Rightarrow I = \int_0^5 f(x) dx = \frac{1}{2} \ln 2. \text{ Do đó, } a = \frac{1}{2}; b = 2 \Rightarrow ab = 1. \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Chọn đáp án B.

Câu 16: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 2]$ và thỏa mãn điều kiện $3f(x) + 7f(2-x) = \sqrt{x}$, $\forall x \in [0; 2]$. Tính $\int_0^1 f(x) dx$.

A. $\frac{7\sqrt{2}-6}{30}$.

B. $\frac{4\sqrt{2}-2}{15}$.

C. $\frac{4\sqrt{2}}{15}$.

D. $\frac{7\sqrt{2}-5}{30}$.

Lời giải:

Thay x bởi $2-x$ vào đẳng thức $3f(x)+7f(2-x)=\sqrt{x}$ (1) được:

$$3f(2-x)+7f(x)=\sqrt{2-x} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) tính được $f(x)=\frac{1}{40}(7\sqrt{2-x}-3\sqrt{x})$

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{1}{40}(7\sqrt{2-x}-3\sqrt{x})dx = -\frac{7}{60}(2-x)\sqrt{2-x}\Big|_0^1 - \frac{1}{20}x\sqrt{x}\Big|_0^1 = \frac{7\sqrt{2}-5}{30}.$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án D.**

Câu 17: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa

mãn: $f^3(x)+3xf^2(x)+(3x^2+1)f(x)+x^3=0, \forall x \in \mathbb{R}$. Tính $I=\int_0^2 f(x)dx$.

A. $-\frac{3}{4}$.

B. $\frac{5}{4}$.

C. $\frac{3}{4}$.

D. $-\frac{5}{4}$.

Lời giải:

Theo đề bài ta có

$$(f(x)+x)^3 = -f(x) \Leftrightarrow f(x)+x = -\sqrt[3]{f(x)} \Leftrightarrow x = -\sqrt[3]{f(x)} - f(x).$$

Đặt $u = \sqrt[3]{f(x)} \Rightarrow u^3 = f(x)$ ta có $x = -u^3 - u \Rightarrow dx = -(3u^2+1)du$.

Với $x=0 \Rightarrow u=0; x=2 \Rightarrow u=-1$.

$$\text{Nên } I = \int_0^2 f(x)dx = -\int_0^{-1} u^3(3u^2+1)du = \int_{-1}^0 (3u^5+u^3)du = \left(\frac{u^6}{2} + \frac{u^4}{4}\right)\Big|_{-1}^0 = -\frac{3}{4}.$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án A.**

Câu 18: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên khoảng $K=\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$. Biết $f(1)=3$ và

$2f(x) = (1-2x)f'(x) + \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}, \forall x \in K$. Giá trị $f(2)$ gần với số nào nhất trong các số sau?

A. 1,2.

B. 1,1.

C. 1.

D. 1,3.

Lời giải:

$$\text{Ta có: } \int_1^2 2f(x)dx = \int_1^2 \left[(1-2x)f'(x) + \frac{x}{\sqrt{x^2+3}} \right] dx$$

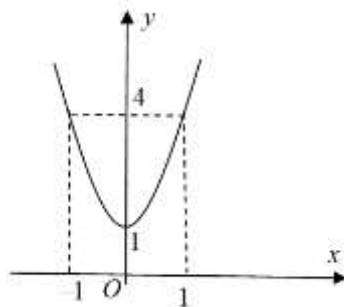
$$\Leftrightarrow \int_1^2 2f(x)dx = \int_1^2 (1-2x)f'(x)dx + \int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}dx$$

$$\Leftrightarrow \int_1^2 2f(x)dx = (1-2x)f(x)\Big|_1^2 + \int_1^2 2f(x)dx + \int_1^2 d(\sqrt{x^2+3})$$

$$\Leftrightarrow -3f(2) + f(1) + (\sqrt{x^2+3})\Big|_1^2 = 0 \Leftrightarrow -3f(2) + 3 + \sqrt{7} - 2 = 0 \Leftrightarrow f(2) = \frac{1+\sqrt{7}}{3} \approx 1,2$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án A.**

Câu 19: Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d, (a,b,c,d \in \mathbb{R}, a \neq 0)$ có đồ thị là (C). Biết đồ thị (C) đi qua gốc toạ độ và có đồ thị $y=f'(x)$ cho bởi hình vẽ. Tính giá trị $H=f(4)-f(2)$.



A. $H = 45$.

B. $H = 64$.

C. $H = 51$.

D. $H = 58$.

Lời giải:

Dựa vào đồ thị $f'(x) \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 1$

Do đồ thị $y = f'(x)$ qua điểm $(0;1)$ và $(1;4) \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 1$

$$\Rightarrow f(x) = \int f'(x) dx = x^3 + x + C$$

Do (C) qua gốc toạ độ nên $C = 0 \Rightarrow f(x) = x^3 + x \Rightarrow f(4) - f(2) = 58$.

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án D.**

Câu 20: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ và thỏa mãn $f(1)=1$; $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \frac{9}{5}$;

$$\int_0^1 f(\sqrt{x}) dx = \frac{2}{5}. \text{ Tính } I = \int_0^1 f(x) dx.$$

A. $I = \frac{3}{4}$.

B. $I = \frac{1}{5}$.

C. $I = \frac{3}{5}$.

D. $I = \frac{1}{4}$.

Lời giải:

$$\text{Xét } I_1 = \int_0^1 f(\sqrt{x}) dx = \frac{2}{5}. \text{ Đặt } \sqrt{x} = t \Rightarrow dt = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \Rightarrow dx = 2t dt$$

$$\text{Đổi cận } \begin{cases} x=0 \Rightarrow t=0 \\ x=1 \Rightarrow t=1 \end{cases}. \text{ Khi đó } I_1 = \int_0^1 f(t) 2t dt = \frac{2}{5} \Rightarrow \int_0^1 2xf(x) dx = \frac{2}{5}$$

$$\text{Khi đó đặt } \begin{cases} f(x) = u \\ 2x dx = dv \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = x^2 \end{cases} \Rightarrow I_1 = x^2 f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 x^2 f'(x) dx$$

$$\Leftrightarrow 1 - \int_0^1 x^2 f'(x) dx = \frac{2}{5} \Leftrightarrow \int_0^1 x^2 f'(x) dx = \frac{3}{5} \Rightarrow \int_0^1 6x^2 f'(x) dx = \frac{18}{5}$$

$$\text{Ta có } \int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \frac{9}{5}; \int_0^1 2x^2 f'(x) dx = \frac{6}{5}; \int_0^1 9x^4 dx = \frac{9}{5}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 [f'(x)]^2 dx - \int_0^1 6x^2 f'(x) dx + \int_0^1 9x^4 dx = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 [(f'(x))^2 - 6x^2 f'(x) + 9x^4] dx = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 [f'(x) - 3x^2]^2 dx = 0 \Leftrightarrow f'(x) - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow f(x) = x^3 + C$$

$$\text{Mà } f(1)=1 \Rightarrow C=0 \Rightarrow f(x) = x^3 \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}.$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án D.**

HẾT

Huế, ngày 07 tháng 02 năm 2021