



ĐỀ CHÍNH THỨC

(Đề thi gồm 06 trang)

Thời gian làm bài: 90 phút (không kể thời gian phát đề)

Mã đề thi 268

Họ, tên thí sinh:.....Số báo danh:.....

Câu 1. Đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ có tiệm cận ngang là

- A. $y = -\frac{1}{2}$. B. $x = 1$. C. $y = 2$. D. $y = 1$.

Câu 2. Trong các hàm số sau, hàm số nào nghịch biến trên $(1; +\infty)$?

- A. $y = x^4 + x^2 + 1$. B. $y = \log_2 x$. C. $y = \frac{x+2}{x+1}$. D. $y = 2020^x$.

Câu 3. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 + 2, y = x, x = 0, x = 2$.

- A. $\frac{8}{3}$ (đvdt). B. 8 (đvdt). C. $\frac{26}{3}$ (đvdt). D. $\frac{14}{3}$ (đvdt).

Câu 4. Tìm tập xác định của hàm số $y = (x^2 - 3x + 2)^{\frac{3}{2}}$.

- A. $(-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$. B. $(-\infty; 1] \cup [2; +\infty)$. C. $(1; 2)$. D. $[1; 2]$.

Câu 5. Viết công thức tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay quanh trục hoành hình phẳng H giới hạn bởi các đường $x = a, x = b, y = 0, y = f(x)$ ($f(x)$ liên tục trên $[a; b]$).

- A. $V = \pi^2 \int_a^b f^2(x) dx$. B. $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$.

- C. $V = \left(\pi \int_a^b f(x) dx \right)^2$. D. $V = \left(\int_a^b f(x) dx \right)^2$.

Câu 6. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, xác định tọa độ tâm I của mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 8z = 0$.

- A. $I(-2; 1; -4)$. B. $I(-4; 2; -8)$. C. $I(2; -1; 4)$. D. $I(4; -2; 8)$.

Câu 7. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x + 3y - z + 1 = 0$. Điểm nào dưới đây không thuộc mặt phẳng (P) ?

- A. $B(1; 2; -8)$. B. $C(-1; -2; -7)$. C. $A(0; 0; 1)$. D. $D(1; 5; 18)$.

Câu 8. Cho số phức $z = 2 + 11i$. Xác định phần thực của z .

- A. $2 - 11i$. B. 11. C. $11i$. D. 2.

Câu 9. Số nghiệm của phương trình $\log(x+1) = \log_{0,1}(x+4)$ là

- A. Vô số. B. 1. C. 0. D. 2.

Câu 10. Cho a, b là các số dương và $\log_2 x = 2\log_2 a + \frac{1}{3}\log_2 b$. Biểu thị x theo lũy thừa của a và b .

- A. $x = a.b^{\frac{1}{3}}$. B. $x = a^2b^{\frac{1}{3}}$. C. $x = a^2\sqrt{2}$. D. $x = a^{\frac{1}{2}}.\sqrt[3]{b}$.

Câu 11. Số các số tự nhiên có 4 chữ số đôi một khác nhau là

- A. A_{10}^4 . B. $A_{10}^4 - A_9^3$. C. A_9^4 . D. $C_{10}^4 - C_9^3$.

Câu 12. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển nhị thức $\left(3x^3 + \frac{2}{x}\right)^{20}$ ($x \neq 0$)?

- A. $C_{20}^{15} \cdot 3^5 \cdot 2^{15}$. B. $C_{20}^{15} \cdot 2^{15}$. C. $3^5 \cdot 2^{15}$. D. C_{20}^{15} .

Câu 13. Cho hàm số $f(x) = x^2 + \sin x + 1$. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ và $F(0) = 1$. Tìm $F(x)$.

- A. $F(x) = x^3 - \cos x + x + 2$. B. $F(x) = \frac{x^3}{3} + \cos x + x$.
C. $F(x) = \frac{x^3}{3} - \cos x + x + 2$. D. $F(x) = \frac{x^3}{3} - \cos x + 2$.

Câu 14. Cho hàm số $y = 2x^3 - x^2 - 3x + 2$. Số điểm cực trị của hàm số là

- A. 2. B. 3. C. 0. D. 1.

Câu 15. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = 2, AD = 4, SA$ vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA = 6$. Tính thể tích của khối chóp.

- A. 8. B. 16. C. 24. D. 48.

Câu 16. Tính đạo hàm của hàm số $y = 2^{x^2+1}$.

- A. $y' = (x^2 + 1) \cdot 2^{x^2}$. B. $y' = x \cdot 2^{x^2+2} \cdot \ln 2$. C. $y' = 2^{x^2+1} \cdot \ln 2$. D. $y' = 2^{x^2}$.

Câu 17. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

- A. $\int f'(x)dx = f(x) + C$. B. $\int \cos x dx = \sin x + C$.
C. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \forall \alpha \neq -1$. D. $\int a^x dx = a^x \ln a + C (0 < a \neq 1)$.

Câu 18. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $M(2;5;6)$. Xác định tọa độ M' là hình chiếu của M lên trục Oz .

- A. $M'(0;5;6)$. B. $M'(0;5;0)$. C. $M'(0;0;6)$. D. $M'(2;0;0)$.

Câu 19. Cho $\log_3 5 = a$. Tính $\log_{729} \frac{1}{125}$ theo a .

- A. $-\frac{1}{2}a$. B. $\frac{1}{2}a$. C. $\frac{1}{2a}$. D. $-\frac{1}{2a}$.

Câu 20. Cho $z = 3 + 5i$. Tính $|z|$.

- A. $\sqrt{8}$. B. 8. C. 34. D. $\sqrt{34}$.

Câu 21. Viết công thức tính diện tích xung quanh của hình trụ có đường cao h , bán kính đường tròn đáy là R .

- A. $S_{xq} = \pi R^2 h$. B. $S_{xq} = 2\pi h$. C. $S_{xq} = 2\pi Rh$. D. $S_{xq} = 2Rh$.

Câu 22. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 2x + 3$ tại $M(2; 7)$.

- A. $y = 10x - 27$. B. $y = 10x - 13$. C. $y = 7x - 7$. D. $y = x + 5$.

Câu 23. Hình lăng trụ tứ giác đều có bao nhiêu mặt là hình chữ nhật?

- A. 4. B. 8. C. 6. D. 2.

Câu 24. Cho hai số phức $z_1 = 1 - 2i, z_2 = 2 + 6i$. Tính $z_1 z_2$.

- A. $-10 + 2i$. B. $2 - 12i$. C. $14 - 10i$. D. $14 + 2i$.

Câu 25. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	
			-1		2		$-\infty$

Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. Hàm số nghịch biến trong $(-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$. B. Hàm số nghịch biến trong $(-\infty; 2] \cup [3; +\infty)$.
C. Hàm số đồng biến trong $[-1; 2]$. D. Hàm số đồng biến trong $\left(2; \frac{5}{2}\right)$.

Câu 26. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z + 5 = 0, M(0; 2; 4)$. Tính $d(M; (P))$.

- A. $\frac{1}{3}$. B. $\frac{1}{9}$. C. $\frac{4}{9}$. D. $\frac{4}{3}$.

Câu 27. Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác ABC vuông tại A , $AB = 2a, AC = 3a, SA$ vuông góc $(ABC), SA = 5a$. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

- A. $R = \frac{a\sqrt{38}}{4}$. B. $R = \sqrt{38}a$. C. $R = \sqrt{38}$. D. $R = \frac{\sqrt{38}a}{2}$.

Câu 28. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, xác định tọa độ giao điểm M của đường thẳng $\Delta: \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+5}{-4}$ với mặt phẳng $(P): 2x - y + z + 11 = 0$.

- A. $M(-1; 1; -5)$. B. $M(-4; 0; -3)$. C. $M(1; 4; -9)$. D. $M(0; 0; -11)$.

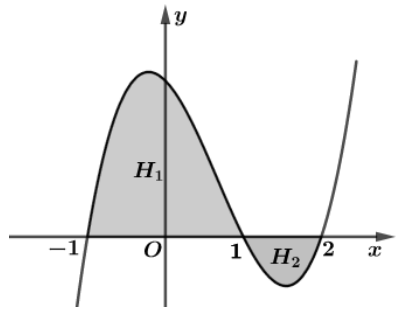
Câu 29. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Tam giác ABC đều cạnh bằng $a\sqrt{3}$, tam giác SAC cân. Tính khoảng cách h từ A đến (SBC) .

- A. $h = \frac{3a}{\sqrt{7}}$. B. $h = \frac{a\sqrt{3}}{4}$. C. $h = \frac{a}{\sqrt{7}}$. D. $h = \frac{a\sqrt{3}}{7}$.

Câu 30. Thiết diện qua trục của một hình nón là tam giác đều cạnh bằng 2. Tính thể tích khối nón.

- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$. B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $V = \frac{\sqrt{3}}{6}$. D. $V = \frac{\sqrt{3}}{6}\pi$.

Câu 31. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ. Biết H_1 có diện tích bằng 7 (đvdt), H_2 có diện tích bằng 3 (đvdt). Tính $I = \int_{-2}^{-1} (2x+6)f(x^2+6x+7)dx$.



- A. 11 (đvdt). B. 4 (đvdt).
C. 1 (đvdt). D. 10 (đvdt).

Câu 32. Cho $z = \frac{2+3i}{4+2i}$. Xác định số phức liên hợp $\bar{z}$ của z .

- A. $\bar{z} = \frac{2}{20} + \frac{8}{20}i$. B. $\bar{z} = \frac{7}{10} - \frac{2}{5}i$. C. $\bar{z} = \frac{1}{10} + \frac{2}{5}i$. D. $\bar{z} = \frac{14}{20} + \frac{2}{5}i$.

Câu 33. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 5 + 3t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$. Đường thẳng

d có một vector chỉ phương là

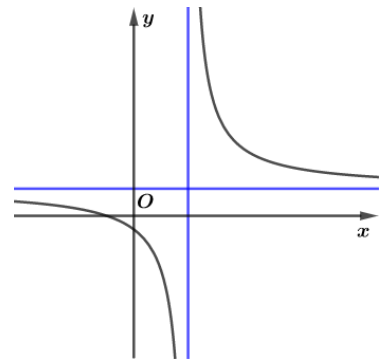
- A. $\vec{u} = (2; 1; 3)$. B. $\vec{u} = (2; -1; 3)$. C. $\vec{u} = (1; 1; 5)$. D. $\vec{u} = (-2; -1; 3)$.

Câu 34. Tập nghiệm của bất phương trình $15 \cdot 25^x - 34 \cdot 15^x + 15 \cdot 9^x \geq 0$ là

- A. $(-\infty; -1] \cup [1; \infty)$. B. $\left[\frac{3}{5}; \frac{5}{3}\right]$.
C. $[-1; 1]$. D. $\left(-\infty; \frac{3}{5}\right) \cup \left(\frac{5}{3}; +\infty\right)$.

Câu 35. Trong các hàm số sau, hàm số nào có đồ thị như hình vẽ bên?

- A. $y = x^3 + x^2 - x + 1$. B. $y = \sqrt{x}$.
C. $y = \frac{x+1}{x-2}$. D. $y = \log_3 x$.



Câu 36. Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^3 - (m+2)x^2 + (m+5)x - 4$ có hai điểm cực trị nằm khác phía với trục hoành.

- A. $\begin{cases} m \neq 4 \\ m > 3 \\ m < -5 \end{cases}$. B. $\begin{cases} m > 3 \\ m < -5 \end{cases}$. C. $m > 3$. D. $m \neq 4$.

Câu 37. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$. Tam giác SAB cân tại S và (SAB) vuông góc với $(ABCD)$. Giả sử thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là $\frac{4a^3}{3}$. Gọi α là góc tạo bởi SC và $(ABCD)$. Tính $\cos \alpha$.

- A. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$. B. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{30}}{6}$. C. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{14}}{4}$. D. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

Câu 38. Tính tổng số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x-3}(x+4)}{(2x^2-5x+2)\sqrt{x^2-16}}$.

- A. 3. B. 2. C. 5. D. 4.

Câu 39. Cho phương trình $\log_2^2(x^2+4) - (2m+1)\log_2(x^2+4) + 4 = 0$ (m là tham số). Tìm các giá trị của tham số m để phương trình có đúng ba nghiệm phân biệt.

- A. $m \in (1; 2)$. B. Vô số m .
C. $m \in (2; 3)$. D. Không tồn tại m .

Câu 40. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x) = f(10-x), \forall x \in \mathbb{R}$. Biết $\int_3^7 f(x) dx = 4$. Tính

$$I = \int_3^7 xf(x) dx.$$

- A. $I = 40$. B. $I = 80$. C. $I = 60$. D. $I = 20$.

Câu 41. Cho số phức z thỏa mãn $(1+2i)|z| = \frac{\sqrt{10}}{z} - 2 + i$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $|z| < \frac{1}{2}$. B. $\frac{3}{2} < |z| < 2$. C. $|z| > 2$. D. $|z| \in \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$.

Câu 42. Cho miếng bìa hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 6, AD = 9$. Trên cạnh AD lấy điểm E sao cho $AE = 3$. Gọi F là trung điểm của BC . Cuốn miếng bìa sao cho AB trùng CD để tạo thành một hình trụ. Tính thể tích của tứ diện $ABEF$.

- A. $\frac{81\sqrt{3}}{8\pi^2}$. B. $\frac{81\sqrt{3}}{4\pi^2}$. C. $\frac{81\sqrt{3}}{4\pi}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{4\pi^2}$.

Câu 43. Có bao nhiêu số nguyên $m \leq 100$ để hàm số $y = 6\sin x - 8\cos x + 5mx$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

- A. 100 số. B. 99 số. C. 98 số. D. Đáp án khác.

Câu 44. Gọi S là tập tất cả các số tự nhiên có 7 chữ số. Lấy ngẫu nhiên một số từ tập S . Xác suất để số lấy được có tận cùng là 3 và chia hết cho 7 (làm tròn đến chữ số hàng nghìn) có dạng $\overline{0,abc}$. Tính $a^2 + b^2 + c^2$.

- A. 15. B. 10. C. 17. D. 16.

Câu 45. Đường thẳng $y = x + 1$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x-2}$ tại hai điểm phân biệt A, B . Tính AB .

- A. $AB = 8$. B. $AB = 4$. C. $AB = 2\sqrt{2}$. D. $AB = \sqrt{6}$.

Câu 46. Cho hàm số $y = f(x) = m^2(\sqrt{4+x} + \sqrt{4-x}) + 2\sqrt{16-x^2} + 3m - 2$. Tổng các giá trị của m để hàm số đạt giá trị lớn nhất bằng 13 là

- A. $-\frac{7}{4}$. B. $-\frac{3}{4}$. C. $-\frac{4}{7}$. D. 1.

Câu 47. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 49$ và mặt phẳng $(\alpha): -2mx + (3-2m)y + (2m-1)z + 2m - 2 = 0$ (m là tham số). Mặt phẳng (α) cắt (S) theo một đường tròn có diện tích nhỏ nhất là

- A. $\frac{8974}{96}\pi$. B. $\frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{14}}\pi$. C. $\frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{14}}$. D. Đáp án khác.

Câu 48. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2; 2]$ và $2f(x) + 3f(-x) = \frac{1}{x^2 + 4}, \forall x \in [-2; 2]$. Tính $I = \int_{-2}^2 f(x) dx$.

A. $I = \frac{\pi}{10}$.

B. $I = -\frac{\pi}{10}$.

C. $I = -\frac{\pi}{20}$.

D. $I = \frac{\pi}{20}$.

Câu 49. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh bằng a . Hình chiếu vuông góc của S lên $(ABCD)$ là trung điểm của AO . Mặt phẳng (SBC) tạo với mặt đáy một góc 45° . Tính $d(SD; AC)$.

A. $\frac{a\sqrt{38}}{17}$.

B. $\frac{a\sqrt{51}}{13}$.

C. $\frac{a\sqrt{13}}{3}$.

D. $\frac{3a\sqrt{34}}{34}$.

Câu 50. Cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z = 0$. Điểm $A(2; 2; 0)$. Viết phương trình mặt phẳng (OAB) biết điểm B là một điểm thuộc mặt cầu (S) , có hoành độ dương và tam giác OAB đều.

A. $x - y + 2z = 0$.

B. $x - y - 2z = 0$.

C. $x - y - z = 0$.

D. $2 - y + z = 0$.

----- HẾT -----

ĐÁP ÁN

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
C	C	D	A	B	C	A	D	B	B	B	A	C	A	B	B	D	C	A	D	C	B	C	D	D
26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
A	D	C	A	A	B	B	B	A	C	A	B	B	D	D	D	B	B	C	B	B	D	D	D	C

ĐÁP ÁN

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
C	C	D	A	B	C	A	D	B	B	B	A	C	A	B	B	D	C	A	D	C	B	C	D	D
26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
A	D	C	A	A	B	B	B	A	C	A	B	B	D	D	D	B	B	C	B	B	D	D	D	C

GIẢI CHI TIẾT

Câu 1. Đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ có tiệm cận ngang là

- A. $y = -\frac{1}{2}$. B. $x = 1$. C. $y = 2$. D. $y = 1$.

Lời giải

Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x+1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x\left(2+\frac{1}{x}\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}} = 2.$$

Vậy phương trình đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là $y = 2$.

Câu 2. Trong các hàm số sau, hàm số nào nghịch biến trên $(1; +\infty)$?

- A. $y = x^4 + x^2 + 1$. B. $y = \log_2 x$. C. $y = \frac{x+2}{x+1}$. D. $y = 2020^x$.

Lời giải

+) Hàm số $y = x^4 + x^2 + 1$ có đạo hàm $y' = 4x^3 + 2x = 2x(2x^2 + 1)$.

$y' > 0, \forall x \in (0; +\infty) \Rightarrow$ hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$.

$y' < 0, \forall x \in (-\infty; 0) \Rightarrow$ hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 0)$.

Loại phương án A.

+) Hàm số $y = \log_2 x$ là hàm số logarit có cơ số $a > 1$ nên hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$. Loại phương án B.

+) Hàm số $y = 2020^x$ là hàm số mũ với cơ số $a > 1$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Loại đáp án D.

+) Hàm số $y = \frac{x+2}{x+1}$ có tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ và có $y' = \frac{-1}{(x+1)^2} < 0, \forall x \in D$ nên nghịch

biến trên từng khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$, suy ra hàm số cũng nghịch biến trên $(1; +\infty)$.

Vậy chọn phương án C.

Câu 3. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 + 2$, $y = x$, $x = 0$, $x = 2$.

- A. $\frac{8}{3}$ (đvdt). B. 8 (đvdt). C. $\frac{26}{3}$ (đvdt). D. $\frac{14}{3}$ (đvdt).

Lời giải

+) Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số $y = x^2 + 2$, $y = x$ là :

$$x^2 + 2 = x \Leftrightarrow x^2 - x + 2 = 0 \quad (\text{vô nghiệm}).$$

+) Khi đó diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 + 2$, $y = x$, $x = 0$, $x = 2$ là :

$$S = \int_0^2 |x^2 - x + 2| dx = \int_0^2 (x^2 - x + 2) dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x \right) \Big|_0^2 = \frac{14}{3}.$$

Vậy diện tích hình phẳng cần tìm là $\frac{14}{3}$ (đvdt).

Câu 4. Tìm tập xác định của hàm số $y = (x^2 - 3x + 2)^{\frac{3}{2}}$.

A. $(-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$. **B.** $(-\infty; 1] \cup [2; +\infty)$. **C.** $(1; 2)$. **D.** $[1; 2]$.

Lời giải

Do $\frac{3}{2} \notin \mathbb{Z}$ nên hàm số đã cho xác định khi và chỉ khi $x^2 - 3x + 2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x > 2 \end{cases}$.

Vậy tập xác định của hàm số đã cho là $D = (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$.

Câu 5. Viết công thức tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay quanh trục hoành hình phẳng H giới hạn bởi các đường $x = a$, $x = b$, $y = 0$, $y = f(x)$ trong đó $y = f(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a; b]$.

A. $\pi^2 \int_a^b f^2(x) dx$. **B.** $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$. **C.** $\left(\pi \int_a^b f(x) dx \right)^2$. **D.** $\left(\int_a^b f(x) dx \right)^2$.

Lời giải

Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a; b]$.

Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay quanh trục hoành hình phẳng H giới hạn bởi các đường $x = a$, $x = b$, $y = 0$, $y = f(x)$ là $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$.

Vậy chọn phương án **B**.

Câu 6. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, xác định tọa độ tâm I của mặt cầu

$$(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 8z = 0.$$

A. $I(-2; 1; -4)$. **B.** $I(-4; 2; -8)$. **C.** $I(2; -1; 4)$. **D.** $I(4; -2; 8)$.

Lời giải

Phương trình dạng $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ với điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$ là phương trình mặt cầu tâm $I(a; b; c)$ nên mặt cầu (S) có tâm $I(2; -1; 4)$.

Vậy chọn phương án **C**.

Câu 7. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x + 3y - z + 1 = 0$. Điểm nào dưới đây không thuộc mặt phẳng (P) ?

- A.** $B(1;2;-8)$. **B.** $C(-1;-2;-7)$. **C.** $A(0;0;1)$. **D.** $D(1;5;18)$.

Lời giải

Lần lượt thay tọa độ các điểm $B; C; A; D$ vào phương trình mặt phẳng (P) . Ta thấy tọa độ điểm B không thỏa mãn phương trình mặt phẳng (P) .

Vậy chọn phương án **A**.

Câu 8. Cho số phức $z = 2 + 11i$. Xác định phần thực của z .

- A.** $2 - 11i$. **B.** 11 . **C.** $11i$. **D.** 2 .

Lời giải

Số phức $z = a + bi$ có a là phần thực.

Vậy phần thực của số phức $z = 2 + 11i$ bằng 2 .

Câu 9. Số nghiệm của phương trình $\log(x+1) = \log_{0,1}(x+4)$ là

- A.** Vô số. **B.** 1 . **C.** 0 . **D.** 2 .

Lời giải

Điều kiện xác định của phương trình là $x > -1$.

Ta có: $\log(x+1) = \log_{0,1}(x+4) \Leftrightarrow \log(x+1) = \log(x+4)^{-1} \Leftrightarrow x+1 = (x+4)^{-1}$

$$\Leftrightarrow x+1 = \frac{1}{x+4} \Leftrightarrow x^2 + 5x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-5 + \sqrt{13}}{2} \text{ (nhận)} \\ x = \frac{-5 - \sqrt{13}}{2} \text{ (loại)} \end{cases}.$$

Vậy phương trình đã cho có 1 nghiệm.

Câu 10. Cho a, b là các số dương và $\log_2 x = 2\log_2 a + \frac{1}{3}\log_2 b$. Biểu thị x theo lũy thừa của a và b .

- A.** $x = ab^{\frac{1}{3}}$. **B.** $x = a^2b^{\frac{1}{3}}$. **C.** $x = a^2\sqrt{2}$. **D.** $x = a^{\frac{1}{2}}\sqrt[3]{b}$.

Lời giải

Ta có $2\log_2 a + \frac{1}{3}\log_2 b = \log_2 a^2 + \log_2 b^{\frac{1}{3}} = \log_2 \left(a^2 b^{\frac{1}{3}} \right)$.

Do đó $\log_2 x = 2\log_2 a + \frac{1}{3}\log_2 b \Leftrightarrow \log_2 x = \log_2 \left(a^2 b^{\frac{1}{3}} \right) \Leftrightarrow x = a^2 b^{\frac{1}{3}}$.

Vậy $x = a^2 b^{\frac{1}{3}}$.

Câu 11. Số các số tự nhiên có 4 chữ số đôi một khác nhau là

- A.** A_{10}^4 . **B.** $A_{10}^4 - A_9^3$. **C.** A_9^4 . **D.** $C_{10}^4 - C_9^3$.

Lời giải

Cách 1

Gọi số tự nhiên cần tìm có dạng $\overline{abcd}$ với $a \neq 0, 0 \leq a, b, c, d \leq 9, a, b, c, d \in \mathbb{N}$.

$a \neq 0$ nên a có 9 cách chọn.

Sau khi đã chọn a thì b có 9 cách chọn.

Tiếp theo c có 8 cách chọn và cuối cùng d có 7 cách chọn.

Theo quy tắc nhân, có $9.9.8.7 = 4536$ cách chọn bộ 4 chữ số a, b, c, d đôi một khác nhau.

Do đó có 4536 số tự nhiên có 4 chữ số đôi một khác nhau.

Kiểm tra đáp án thấy $A_{10}^4 - A_9^3 = 4536$ nên chọn phương án **B**.

Cách 2

Số cách chọn các bộ gồm 4 chữ số đôi một khác nhau trong các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 là: A_{10}^4 cách.

Số cách chọn các bộ gồm 4 chữ số đôi một khác nhau trong các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 mà có chữ số 0 đứng đầu tiên là: A_9^3 cách.

Do đó số các số tự nhiên có 4 chữ số đôi một khác nhau là $A_{10}^4 - A_9^3$.

Vậy phương án **B** là đúng.

Câu 12. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển nhị thức $\left(3x^3 + \frac{2}{x}\right)^{20}$, $x \neq 0$.

A. $C_{20}^{15} \cdot 3^5 \cdot 2^{15}$.

B. $C_{20}^{15} \cdot 2^{15}$.

C. $3^5 \cdot 2^{15}$.

D. C_{20}^{15} .

Lời giải

$$\text{Ta có } \left(3x^3 + \frac{2}{x}\right)^{20} = \sum_{k=0}^{20} C_{20}^k (3x^3)^{20-k} \left(\frac{2}{x}\right)^k = \sum_{k=0}^{20} (C_{20}^k x^{60-4k} \cdot 3^{20-k} \cdot 2^k).$$

Số hạng không chứa x trong khai triển ứng với k thỏa mãn: $60 - 4k = 0 \Leftrightarrow k = 15$.

Vậy số hạng không chứa x trong khai triển là $C_{20}^{15} \cdot 3^5 \cdot 2^{15}$.

Câu 13. Cho hàm số $f(x) = x^2 + \sin x + 1$. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ và $F(0) = 1$. Tìm $F(x)$.

A. $F(x) = x^3 - \cos x + x + 2$.

B. $F(x) = \frac{x^3}{3} + \cos x + x$.

C. $F(x) = \frac{x^3}{3} - \cos x + x + 2$.

D. $F(x) = \frac{x^3}{3} - \cos x + 2$.

Lời giải

+) Do $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$, ta có:

$$F(x) = \int f(x) dx = \int (x^2 + \sin x + 1) dx = \frac{x^3}{3} - \cos x + x + C.$$

$$\text{Mà } F(0) = 1 \Leftrightarrow C - 1 = 1 \Leftrightarrow C = 2.$$

$$\text{Vậy } F(x) = \frac{x^3}{3} - \cos x + x + 2.$$

Câu 14. Cho hàm số $y = 2x^3 - x^2 - 3x + 2$. Số điểm cực trị của hàm số là

A. 2.

B. 3.

C. 0.

D. 1.

Lời giải

Vì $y' = 6x^2 - 2x - 3$ có hai nghiệm phân biệt (nghiệm đơn) và y' đổi dấu khi đi qua hai nghiệm này nên hàm số đã cho có 2 điểm cực trị.

Câu 15. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = 2, AD = 4$; SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 6$. Tính thể tích của khối chóp.

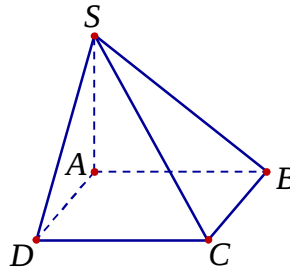
A. 8.

B. 16.

C. 24.

D. 48.

Lời giải



Diện tích đáy: $S_{ABCD} = AB \cdot AD = 8$.

Vậy thể tích cần tính là: $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SA \cdot S_{ABCD} = 16$.

Câu 16. Tính đạo hàm của hàm số $y = 2^{x^2+1}$.

A. $y' = (x^2 + 1) \cdot 2^{x^2}$.

B. $y' = x \cdot 2^{x^2+2} \cdot \ln 2$.

C. $y' = 2^{x^2+1} \cdot \ln 2$.

D. $y' = 2^{x^2}$.

Lời giải

Ta có $y = 2^{x^2+1} \Rightarrow y' = (x^2 + 1)' \cdot 2^{x^2+1} \cdot \ln 2 = 2x \cdot 2^{x^2+1} \cdot \ln 2 = x \cdot 2^{x^2+2} \cdot \ln 2$.

Câu 17. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

A. $\int f'(x) dx = f(x) + C$.

B. $\int \cos x dx = \sin x + C$.

C. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \forall \alpha \neq -1$.

D. $\int a^x dx = a^x \ln a + C \ (0 < a \neq 1)$.

Lời giải

Ta có $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \ (0 < a \neq 1)$ nên phương án **D** sai.

Câu 18. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $M(2;5;6)$. Xác định tọa độ M' là hình chiếu của M lên trục Oz .

A. $M'(0;5;6)$.

B. $M'(0;5;0)$.

C. $M'(0;0;6)$.

D. $M'(2;0;0)$.

Lời giải

Tọa độ hình chiếu của $M(2;5;6)$ lên trục Oz là $M'(0;0;6)$.

Câu 19. Cho $\log_3 5 = a$. Tính $\log_{729} \frac{1}{125}$ theo a .

A. $-\frac{1}{2}a$.

B. $\frac{1}{2}a$.

C. $\frac{1}{2a}$.

D. $-\frac{1}{2a}$.

Lời giải

Ta có : $\log_{729} \frac{1}{125} = \log_{3^6} 5^{-3} = -\frac{1}{2} \log_3 5 = -\frac{1}{2}a$.

Vậy $\log_{729} \frac{1}{125} = -\frac{1}{2}a$.

Câu 20. Cho $z = 3 + 5i$. Tính $|z|$.

A. $\sqrt{8}$.

B. 8.

C. 34.

D. $\sqrt{34}$.

Lời giải

Ta có: $z = 3 + 5i \Rightarrow |z| = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34}$.

Vậy $|z| = \sqrt{34}$.

Câu 21. Viết công thức tính diện tích xung quanh của hình trụ có đường cao h , bán kính đường tròn đáy R .

A. $S_{xq} = \pi R^2 h$.

B. $S_{xq} = 2\pi h$.

C. $S_{xq} = 2\pi Rh$.

D. $S_{xq} = 2Rh$.

Lời giải

Diện tích xung quanh của hình trụ có đường cao h , bán kính đường tròn đáy R là:

$S_{xq} = 2\pi Rh$.

Chọn đáp án C.

Câu 22. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 2x + 3$ tại $M(2; 7)$.

A. $y = 10x - 27$.

B. $y = 10x - 13$.

C. $y = 7x - 7$.

D. $y = x + 5$.

Lời giải

Ta có $y' = 3x^2 - 2 \Rightarrow y'(2) = 10$.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 2x + 3$ tại $M(2; 7)$, hệ số góc $k = y'(2)$ là:

$y = 10(x - 2) + 7 \Leftrightarrow y = 10x - 13$.

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y = 10x - 13$.

Chọn đáp án B.

Câu 23. Hình lăng trụ tứ giác đều có bao nhiêu mặt là hình chữ nhật?

A. 4.

B. 8.

C. 6.

D. 2.

Lời giải

Hình lăng trụ tứ giác đều là hình lăng trụ đứng và có hai đáy là hình vuông. Do đó hình lăng trụ tứ giác đều có 4 mặt bên là hình chữ nhật và hai đáy là hình vuông.

Vậy hình lăng trụ tứ giác đều có 6 mặt là hình chữ nhật.

Chọn đáp án C.

Câu 24. Cho hai số phức $z_1 = 1 - 2i$, $z_2 = 2 + 6i$. Tính $z_1 \cdot z_2$.

A. $-10 + 2i$.

B. $2 - 12i$.

C. $14 - 10i$.

D. $14 + 2i$.

Lời giải

Ta có $z_1 \cdot z_2 = (1 - 2i)(2 + 6i) = 14 + 2i$.

Chọn đáp án **D**.

Câu 25. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$			
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	$+\infty$		-1		2		$-\infty$

Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$.

B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 2] \cup [3; +\infty)$.

C. Hàm số đồng biến trên đoạn $[-1; 2]$.

D. Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(2; \frac{5}{2}\right)$.

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên ta có hàm số đồng biến trên khoảng $(2; 3)$.

Suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $\left(2; \frac{5}{2}\right)$.

Chọn đáp án **D**.

Câu 26. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z + 5 = 0$ và điểm $M(0; 2; 4)$. Tính $d(M, (P))$.

A. $\frac{1}{3}$.

B. $\frac{1}{9}$.

C. $\frac{4}{9}$.

D. $\frac{4}{3}$.

Lời giải

Ta có $d(M, (P)) = \frac{|0 + 2 \cdot 2 - 2 \cdot 4 + 5|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{1}{3}$.

Chọn đáp án **A**.

Câu 27. Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác ABC vuông tại A , $AB = 2a$, $AC = 3a$, SA vuông góc với (ABC) , $SA = 5a$. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

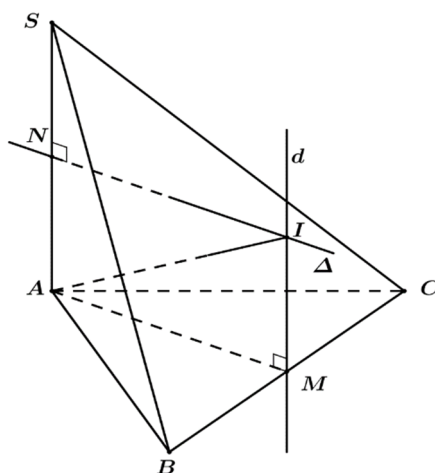
A. $R = \frac{a\sqrt{38}}{4}$.

B. $R = a\sqrt{38}$.

C. $R = \sqrt{38}$.

D. $R = \frac{a\sqrt{38}}{2}$.

Lời giải



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và SA .

Do tam giác ABC vuông tại A nên M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Dựng đường thẳng d qua M và d vuông góc với (ABC) .

$$\text{Ta có } \begin{cases} d \perp (ABC) \\ SA \perp (ABC) \end{cases} \Rightarrow d \parallel SA.$$

Trong mặt phẳng (SA, d) kẻ đường trung trực Δ của SA , Δ qua N và cắt d tại I .

$$\text{Do } I \in d \Rightarrow IA = IB = IC \quad (1).$$

$$\text{Mà } I \in \Delta \Rightarrow IS = IA \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra $IA = IB = IC = IS$.

Suy ra I là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ và $IA = IB = IC = IS = R$.

Trong tam giác ABC vuông tại A , ta có:

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{4a^2 + 9a^2} = a\sqrt{13} \Rightarrow AM = \frac{BC}{2} = \frac{a\sqrt{13}}{2}.$$

$$\text{Do tứ giác } ANIM \text{ là hình chữ nhật, suy ra } NI = AM = \frac{a\sqrt{13}}{2}.$$

$$\text{Xét tam giác } AIN \text{ vuông tại } N. \text{ Có } IA = \sqrt{NI^2 + NA^2} = \sqrt{\frac{13a^2}{4} + \frac{25a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{38}}{2}.$$

$$\text{Vậy } R = \frac{a\sqrt{38}}{2}.$$

Công thức tính nhanh:

Tổng quát: Cho hình chóp $SABC$ có $SA \perp (ABC)$. Bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình

chóp $S.ABC$ được tính bởi công thức: $R = \sqrt{r^2 + \frac{h^2}{4}}$.

Trong đó: r là bán kính đường tròn ngoại tiếp đáy, h là chiều cao của hình chóp.

Theo giả thiết ta có $r = \frac{BC}{2} = \frac{a\sqrt{13}}{2}$, $h = SA = 5a$.

$$\text{Vậy } R = \sqrt{\frac{13a^2}{4} + \frac{25a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{38}}{2}.$$

Câu 28. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, xác định tọa độ giao điểm M của đường thẳng

$$\Delta: \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+5}{-4} \text{ với mặt phẳng } (P): 2x - y + z + 11 = 0.$$

- A. $M(-1; 1; -5)$. B. $M(-4; 0; -3)$. C. $M(1; 4; -9)$. D. $M(0; 0; -11)$.

Lời giải

$$\text{Đường thẳng } \Delta \text{ có phương trình tham số là: } \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 + 3t \\ z = -5 - 4t \end{cases}, (t \in \mathbb{R}).$$

$$\text{Do } M \in \Delta \Rightarrow M(-1 + 2t; 1 + 3t; -5 - 4t).$$

$$\text{Mà } M \in (P) \Rightarrow 2(-1 + 2t) - (1 + 3t) + (-5 - 4t) + 11 = 0 \Leftrightarrow t = 1.$$

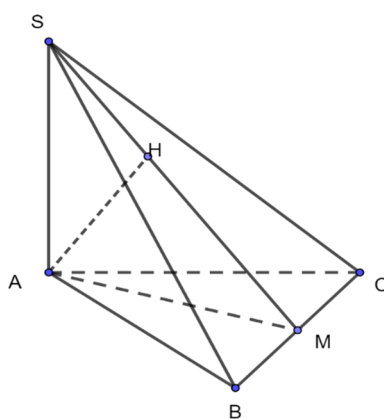
$$\text{Với } t = 1 \Rightarrow M(1; 4; -9).$$

$$\text{Vậy } M(1; 4; -9).$$

Câu 29. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Tam giác ABC đều cạnh bằng $a\sqrt{3}$, tam giác SAC cân. Tính khoảng cách h từ A đến (SBC) .

- A. $h = \frac{3a}{\sqrt{7}}$. B. $h = \frac{a\sqrt{3}}{4}$. C. $\frac{a}{\sqrt{7}}$. D. $h = \frac{a\sqrt{3}}{7}$.

Lời giải



Gọi M là trung điểm của BC . Kẻ $AH \perp SM$ ($H \in SM$) (1).

$$\text{Ta có } \begin{cases} BC \perp SA \text{ (do } SA \perp (ABC)) \\ BC \perp AM \text{ (do } \triangle ABC \text{ đều)} \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAM) \Rightarrow BC \perp AH \text{ (2).}$$

$$\text{Từ (1), (2)} \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow h = AH.$$

Vì $\triangle ABC$ đều cạnh $a\sqrt{3} \Rightarrow AM = a\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3a}{2}$.

Vì $\triangle SAC$ cân mà $SA \perp AC \Rightarrow SA = AC = a\sqrt{3}$.

Xét $\triangle SAM$ vuông tại A có: $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AM^2} = \frac{1}{3a^2} + \frac{4}{9a^2} = \frac{7}{9a^2} \Rightarrow AH = \frac{3a}{\sqrt{7}}$.

Vậy $h = \frac{3a}{\sqrt{7}}$.

Câu 30. Thiết diện qua trục của một hình nón là tam giác đều cạnh bằng 2. Tính thể tích khối nón.

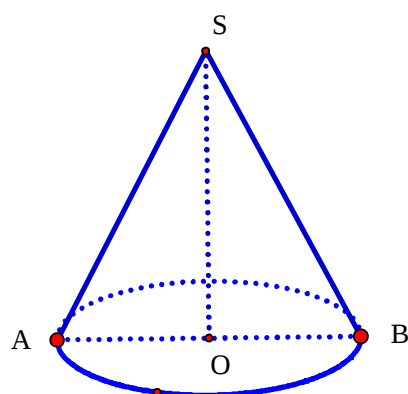
A. $V = \frac{\sqrt{3}}{3}\pi$.

B. $V = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

C. $V = \frac{\sqrt{3}}{6}$.

D. $V = \frac{\sqrt{3}}{6}\pi$.

Lời giải

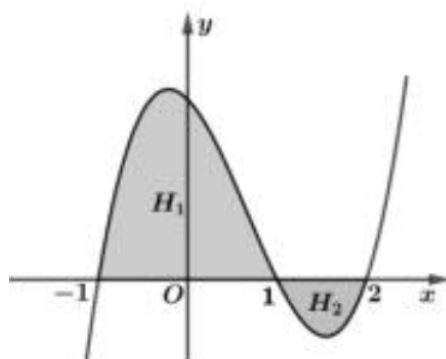


Gọi thiết diện qua trục của hình nón là tam giác đều SAB , O là trung điểm của AB .

Suy ra độ dài đường sinh bằng $l = SA = SB = 2$, chiều cao của hình nón bằng $h = SO = \sqrt{3}$, bán kính đáy $r = \frac{AB}{2} = 1$.

Vậy thể tích khối nón: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi 1^2 \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}\pi$.

Câu 31. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ. Biết H_1 có diện tích bằng 7 (đvdt), H_2 có diện tích bằng 3 (đvdt).



Tính $I = \int_{-2}^{-1} (2x+6)f(x^2+6x+7)dx$

A. 11 (đvdt).

B. 4 (đvdt).

C. 1 (đvdt).

D. 10 (đvdt).

Lời giải

Dựa vào đồ thị ta thấy
$$\begin{cases} S_{H_1} = \int_{-1}^1 f(x)dx \\ S_{H_2} = \int_1^2 [-f(x)]dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \int_{-1}^1 f(x)dx = 7 \\ \int_1^2 f(x)dx = -3 \end{cases}.$$

Xét $I = \int_{-2}^{-1} (2x+6)f(x^2+6x+7)dx.$

Đặt $t = x^2 + 6x + 7 \Rightarrow dt = (2x+6)dx.$

Đổi cận: $\begin{cases} x = -2 \Rightarrow t = -1 \\ x = -1 \Rightarrow t = 2 \end{cases}.$

Khi đó $I = \int_{-1}^2 f(t)dt = \int_{-1}^2 f(x)dx = \int_{-1}^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx = 7 + (-3) = 4$ (đvdt).

Vậy $I = 4.$

Câu 32. Cho $z = \frac{2+3i}{4+2i}$. Xác định số phức liên hợp $\bar{z}$ của z .

A. $\bar{z} = \frac{2}{10} + \frac{8}{20}i.$

B. $\bar{z} = \frac{7}{10} - \frac{2}{5}i.$

C. $\bar{z} = \frac{1}{10} + \frac{2}{5}i.$

D. $\bar{z} = \frac{14}{20} + \frac{2}{5}i.$

Lời giải

Ta có: $z = \frac{2+3i}{4+2i} = \frac{(2+3i)(4-2i)}{(4+2i)(4-2i)} = \frac{8-4i+12i+6}{4^2+2^2} = \frac{14+8i}{20} = \frac{7}{10} + \frac{2}{5}i \Rightarrow \bar{z} = \frac{7}{10} - \frac{2}{5}i.$

Vậy $\bar{z} = \frac{7}{10} - \frac{2}{5}i.$

Câu 33. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 1-t \\ z = 5+3t \end{cases}; t \in \mathbb{R}$. Đường thẳng

d có một vec tơ chỉ phương là

A. $\vec{u} = (2; 1; 3).$

B. $\vec{u} = (2; -1; 3).$

C. $\vec{u} = (1; 1; 5).$

D. $\vec{u} = (-2; -1; 3).$

Lời giải

Đường thẳng d có một vec tơ chỉ phương là $\vec{u}(2; -1; 3).$

Vậy chọn đáp án **B.**

Câu 34. Tập nghiệm của bất phương trình $15.25^x - 34.15^x + 15.9^x \geq 0$ là

A. $(-\infty; -1] \cup [1; \infty).$

B. $\left[\frac{3}{5}; \frac{5}{3}\right].$

C. $[-1; 1].$

D. $\left(-\infty; \frac{3}{5}\right) \cup \left(\frac{5}{3}; \infty\right).$

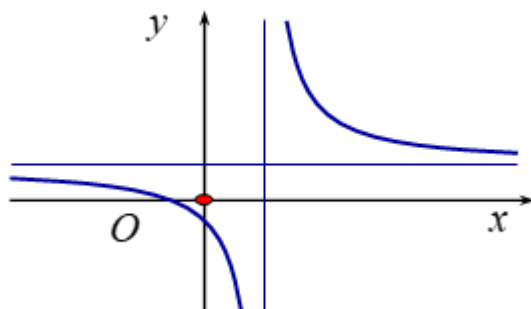
Lời giải

Ta có: $15.25^x - 34.15^x + 15.9^x \geq 0$

$$\Leftrightarrow 15.\left(\frac{25}{9}\right)^x - 34.\left(\frac{15}{9}\right)^x + 15 \geq 0 \Leftrightarrow 15.\left(\frac{5}{3}\right)^{2x} - 34.\left(\frac{5}{3}\right)^x + 15 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{5}{3}\right)^x \geq \frac{5}{3} \\ \left(\frac{5}{3}\right)^x \leq \frac{3}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq -1 \end{cases}.$$

Tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $(-\infty; -1] \cup [1; \infty)$.

Câu 35. Trong các hàm số sau, hàm số nào có đồ thị như hình vẽ bên ?



- A. $y = x^3 + x^2 - x + 1$. B. $y = \sqrt{x}$. C. $y = \frac{x+1}{x-2}$. D. $y = \log_3 x$.

Lời giải

Dễ nhận thấy dạng đồ thị cho trong bài là của hàm số dạng $y = \frac{ax+b}{cx+d}$.

Vậy đáp án là phương án C.

Câu 36. Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^3 - (m+2)x^2 + (m+5)x - 4$ có hai điểm cực trị nằm khác phía với trục hoành.

- A. $\begin{cases} m \neq 4 \\ m > 3 \\ m < -5 \end{cases}$. B. $\begin{cases} m > 3 \\ m < -5 \end{cases}$. C. $m > 3$. D. $m \neq 4$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số và trục Ox là:

$$x^3 - (m+2)x^2 + (m+5)x - 4 = 0 \quad (1) \Leftrightarrow (x-1)[x^2 - (m+1)x + 4] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - (m+1)x + 4 = 0 \quad (2) \end{cases}$$

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm khác phía với trục hoành $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt $x_1; x_2 \neq 1$

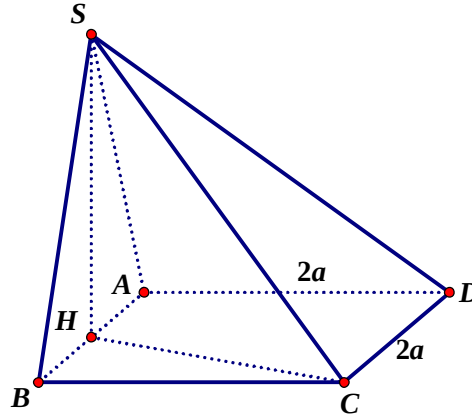
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{(2)} = m^2 + 2m - 15 > 0 \\ 1 - m - 1 + 4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 4 \\ m > 3 \\ m < -5 \end{cases}.$$

Vậy chọn phương án A.

Câu 37. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$. Tam giác SAB cân tại S và (SAB) vuông góc với $(ABCD)$. Giả sử thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là $\frac{4a^3}{3}$. Gọi α là góc tạo bởi SC và $(ABCD)$. Tính $\cos \alpha$.

- A. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$. B. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{30}}{6}$. C. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{14}}{4}$. D. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

Lời giải



+) Gọi H là trung điểm của AB . Vì $\triangle SAB$ cân tại S nên $SH \perp AB$.

+) Ta có $\begin{cases} (SAB) \perp (ABCD) \\ (SAB) \cap (ABCD) = AB \Rightarrow SH \perp (ABCD). \\ SH \perp AB, SH \subset (SAB) \end{cases}$

+) $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SH \cdot S_{ABCD} \Rightarrow SH = \frac{3V_{S.ABCD}}{S_{ABCD}} = \frac{3 \cdot \frac{4a^3}{3}}{4a^2} = a$.

+) HC là hình chiếu của SC lên mp $(ABCD)$ nên $\alpha = (\widehat{SC; HC}) = \widehat{SCH} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{HC}{SC}$.

+) $HC = \sqrt{HB^2 + BC^2} = a\sqrt{5}$; $SC = \sqrt{SH^2 + HC^2} = a\sqrt{6}$. Suy ra $\cos \alpha = \frac{a\sqrt{5}}{a\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{30}}{6}$.

Vậy $\cos \alpha = \frac{\sqrt{30}}{6}$.

Câu 38. Tính tổng số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x-3}(x+4)}{(2x^2-5x+2)\sqrt{x^2-16}}$.

- A. 3. B. 2. C. 5. D. 4.

Lời giải

+) Hàm số xác định khi và chỉ khi $\begin{cases} x-3 \geq 0 \\ 2x^2-5x+2 \neq 0 \\ x^2-16 > 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x \neq 2 \\ x \neq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x > 4. \text{ Suy ra tập xác định của hàm số là } D = (4; +\infty).$$

$$\begin{cases} x > 4 \\ x < -4 \end{cases}$$

$$+) \lim_{x \rightarrow 4^+} y = \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{\sqrt{x-3} \cdot \sqrt{x+4}}{(2x^2 - 5x + 2)\sqrt{x-4}} = +\infty \Rightarrow x = 4 \text{ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.}$$

$$+) \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x-3}(x+4)}{(2x^2 - 5x + 2)\sqrt{x^2 - 16}} = 0 \text{ (vì bậc của tử nhỏ hơn bậc của mẫu)} \Rightarrow y = 0 \text{ là tiệm}$$

cận ngang của đồ thị hàm số.

Vậy số đường tiệm cận của đồ thị hàm số đã cho bằng 2.

Câu 39. Cho phương trình $\log_2^2(x^2 + 4) - (2m+1)\log_2(x^2 + 4) + 4 = 0$ (m là tham số). Tìm các giá trị của tham số m để phương trình có đúng ba nghiệm phân biệt.

A. $m \in (1; 2)$.

B. Vô số m .

C. $m \in (2; 3)$.

D. Không tồn tại m .

Lời giải

$$\text{Xét phương trình } \log_2^2(x^2 + 4) - (2m+1)\log_2(x^2 + 4) + 4 = 0 \quad (1).$$

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$$\text{Đặt } t = \log_2(x^2 + 4), t \geq 2, \text{ phương trình (1) trở thành: } t^2 - (2m+1)t + 4 = 0 \quad (2).$$

$$\text{Với mỗi } t > 2 \text{ ta có } t = \log_2(x^2 + 4) \Leftrightarrow x^2 + 4 = 2^t \Leftrightarrow x^2 = 2^t - 4 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2^t - 4}.$$

Với $t = 2$ ta có $x = 0$.

Do đó, phương trình (1) có đúng ba nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt t_1, t_2 thỏa mãn $t_1 = 2, t_2 > 2$.

$$\text{Thay } t_1 = 2 \text{ vào phương trình (2) ta được: } 2^2 - (2m+1) \cdot 2 + 4 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{3}{2}.$$

$$\text{Thử lại: với } m = \frac{3}{2}, \text{ phương trình (2) trở thành: } t^2 - 4t + 4 = 0 \Leftrightarrow t = 2 \text{ (không thỏa mãn).}$$

Vậy không có giá trị của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 40. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x) = f(10-x), \forall x \in \mathbb{R}$. Biết $\int_3^7 f(x) dx = 4$.

$$\text{Tính } I = \int_3^7 xf(x) dx$$

A. $I = 40$.

B. $I = 80$.

C. $I = 60$.

D. $I = 20$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \int_3^7 (10-x) f(x) dx = \int_3^7 10 f(x) dx - \int_3^7 x f(x) dx = 40 - I \quad (1).$$

$$\text{Theo bài ra } f(x) = f(10-x), \forall x \in \mathbb{R} \text{ suy ra: } \int_3^7 (10-x) f(x) dx = \int_3^7 (10-x) f(10-x) dx.$$

$$(1) \Leftrightarrow 40 - I = \int_3^7 (10-x) f(10-x) dx \Leftrightarrow 40 - I = \int_3^7 t f(t) dt$$

$$\Leftrightarrow 40 - I = \int_3^7 x f(x) dx \Leftrightarrow 40 - I = I \Leftrightarrow I = 20.$$

Vậy $I = 20$.

Câu 41. Cho số phức z thỏa mãn $(1+2i)|z| = \frac{\sqrt{10}}{z} - 2 + i$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $|z| < \frac{1}{2}$. B. $\frac{3}{2} < |z| < 2$. C. $|z| > 2$. **D.** $|z| \in \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$.

Lời giải

$$\text{Ta có } (1+2i)|z| = \frac{\sqrt{10}}{z} - 2 + i \Leftrightarrow [|z| + 2 + (2|z| - 1)i] \cdot z = \sqrt{10}.$$

Lấy mô đun 2 về ta được

$$\sqrt{(|z|+2)^2 + (2|z|-1)^2} \cdot |z| = \sqrt{10} \Leftrightarrow 5|z|^4 + 5|z|^2 - 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |z|^2 = 1 \text{ (thỏa mãn)} \\ |z|^2 = -2 \text{ (không thỏa mãn)} \end{cases}.$$

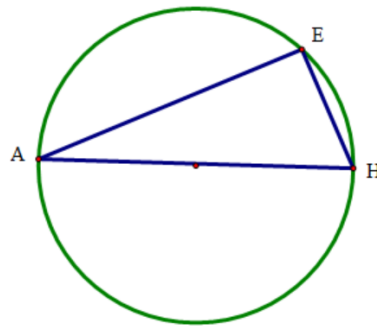
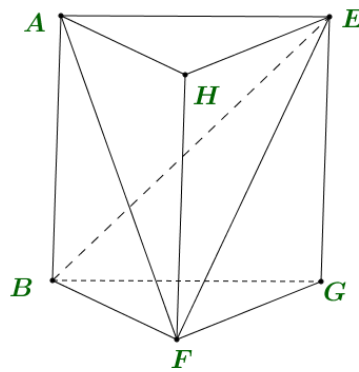
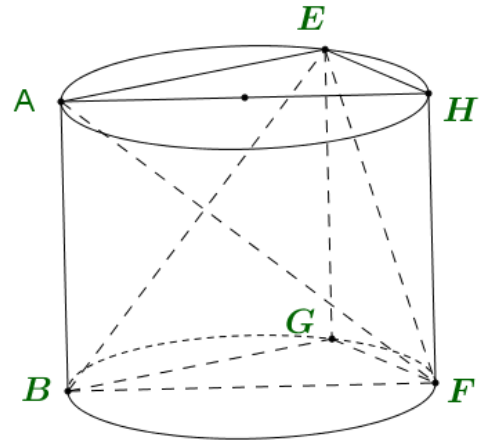
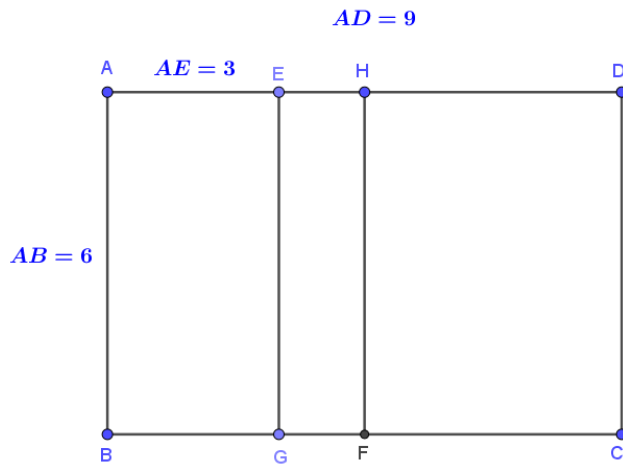
$$\Leftrightarrow |z| = 1.$$

$$\text{Vậy } |z| \in \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right].$$

Câu 42: Cho miếng bìa hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 6, AD = 9$. Trên cạnh AD lấy điểm E sao cho $AE = 3$. Gọi F là trung điểm của BC . Cuốn miếng bìa sao cho AB trùng CD để tạo thành một hình trụ. Tính thể tích của tứ diện $ABEF$.

- A. $\frac{81\sqrt{3}}{8\pi^2}$. **B.** $\frac{81\sqrt{3}}{4\pi^2}$. C. $\frac{81\sqrt{3}}{4\pi}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{4\pi^2}$.

Lời giải



Khi cuốn miếng bìa sao cho AB trùng CD để tạo thành một hình trụ thì chu vi đáy của hình trụ là 9, bán kính đáy là $R = \frac{9}{2\pi}$ và chiều cao của hình trụ là $AB = 6$.

Gọi G là hình chiếu của E lên đáy dưới của hình trụ, H là hình chiếu của F lên đáy trên của hình trụ. Ta có AH là đường kính của hình trụ và tam giác AHE vuông tại E có $\widehat{AHE} = 60^\circ$, $HE = \frac{1}{2}AH = R = \frac{9}{2\pi}$.

Diện tích tam giác AHE là $S = \frac{1}{2}AH.HE.\sin 60^\circ = \frac{81\sqrt{3}}{8\pi^2}$.

Thể tích khối lăng trụ đứng $AEH.BGF$ là $V = \frac{6.81.\sqrt{3}}{8\pi^2} = \frac{243\sqrt{3}}{4\pi^2}$.

Thể tích khối tứ diện $ABEF$ bằng thể tích khối tứ diện $GBEF$ và bằng $\frac{1}{3}V = \frac{81.\sqrt{3}}{4\pi^2}$.

Vậy thể tích của tứ diện $ABEF$ là $\frac{81.\sqrt{3}}{4\pi^2}$.

- Câu 43.** Có bao nhiêu số nguyên $m \leq 100$ để hàm số $y = 6\sin x - 8\cos x + 5mx$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?
A. 100 số. **B.** 99 số. **C.** 98 số. **D.** Đáp án khác.

Lời giải

Xét hàm số hàm số $y = 6\sin x - 8\cos x + 5mx$.

Tập xác định: $\mathbb{R}$.

Ta có $y' = 6\cos x + 8\sin x + 5m$.

Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 5m \geq -6\cos x - 8\sin x, \forall x \in \mathbb{R} \quad (1)$.

Cách 1:

Ta lại có: $(-6\cos x - 8\sin x)^2 \leq ((-6)^2 + (-8)^2)(\sin^2 x + \cos^2 x) = 100, \forall x \in \mathbb{R}$
 $\Leftrightarrow -10 \leq -6\cos x - 8\sin x \leq 10, \forall x \in \mathbb{R}$.

Do đó $(1) \Leftrightarrow 5m \geq 10 \Leftrightarrow m \geq 2$.

Kết hợp với điều kiện $m \leq 100$ ta được $2 \leq m \leq 100$.

Vì m là số nguyên nên có 99 giá trị nguyên của m thỏa mãn bài toán.

Chọn đáp án **B**.

Cách 2:

Ta có: $-6\cos x - 8\sin x = -10[\sin(x + \alpha)]$.

Mà $-1 \leq \sin(x + \alpha) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$

Suy ra: $-10 \leq -10[\sin(x + \alpha)] \leq 10, \forall x \in \mathbb{R}$.

Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 5m \geq \max_{\mathbb{R}}(-6\cos x - 8\sin x)$.

$\Leftrightarrow 5m \geq 10 \Leftrightarrow m \geq 2$.

Kết hợp với điều kiện $m \leq 100$ ta được $2 \leq m \leq 100$.

Vậy có 99 giá trị nguyên của m thỏa mãn bài toán.

Câu 44. Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên có 7 chữ số. Lấy ngẫu nhiên một số từ tập S . Xác suất để số lấy được có tận cùng là 3 và chia hết cho 7 (làm tròn đến chữ số hàng nghìn) có dạng $\overline{0,abc}$. Tính $a^2 + b^2 + c^2$.

A. 15.

B. 10.

C. 17.

D. 16.

Lời giải

Cách 1

Số phần tử của không gian mẫu là: $n(\Omega) = 9.10^6$.

Gọi A là biến cố: “Số lấy được có tận cùng là 3 và chia hết cho 7”.

Gọi số tự nhiên có 7 chữ số chia hết cho 7 và có chữ số tận cùng bằng 3 là: $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}3$ Ta có:

$$\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}3 = 10.\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6} + 3 = (3.\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6} + 7.\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6} + 3):7$$
$$\Rightarrow (3.\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6} + 3):7.$$

Đặt: $3.\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6} + 3 = 7k (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow \overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6} = 2k - 1 + \frac{k}{3}$ là số nguyên nên

$k = 3m (m \in \mathbb{Z})$. Khi đó: $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6} = 7m - 1$.

$$\text{Do đó: } 100000 \leq 7m - 1 \leq 999999 \Leftrightarrow \frac{100000}{7} \leq m \leq \frac{999999}{7}.$$

Do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{14286; 14287; \dots; 142857\}$ hay có 128572 giá trị của m , tức là có 128572 số tự nhiên có 7 chữ số chia hết cho 7 và có chữ số tận cùng bằng 3.

Suy ra $n(A) = 128572$.

$$\text{Xác suất của biến cố } A \text{ là: } P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{128572}{9 \cdot 10^6} \approx 0,014.$$

Suy ra: $a = 0; b = 1; c = 4$.

$$\text{Vậy } a^2 + b^2 + c^2 = 17.$$

Cách 2

Số phần tử của không gian mẫu là: $n(\Omega) = 9 \cdot 10^6$.

Gọi A là biến cố: “Số lấy được có tận cùng là 3 và chia hết cho 7”.

Gọi X là số tự nhiên có 7 chữ số chia hết cho 7 và có chữ số tận cùng bằng 3, suy ra: $X = 7.\overline{Y9}$ (với $\overline{Y9}$ là số có chữ số tận cùng bằng 9).

Ta có:

$$1000000 \leq X \leq 9999999 \Leftrightarrow 142858 \leq \overline{Y9} \leq 1428571 \Leftrightarrow 142858 \leq 10Y + 9 \leq 1428571 \\ \Leftrightarrow 14285 \leq Y \leq 142856.$$

Do đó có $142856 - 14285 + 1 = 128572$ số tự nhiên có 7 chữ số chia hết cho 7 và có chữ số tận cùng bằng 3. Suy ra $n(A) = 128572$.

$$\text{Xác suất của biến cố } A \text{ là: } P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{128572}{9 \cdot 10^6} \approx 0,014.$$

Suy ra: $a = 0; b = 1; c = 4$.

$$\text{Vậy } a^2 + b^2 + c^2 = 17.$$

Câu 45. Đường thẳng $y = x + 1$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x-2}$ tại hai điểm phân biệt A, B . Khi đó độ dài đoạn thẳng AB bằng

- A. $AB = 8$. **B.** $AB = 4$. C. $AB = 2\sqrt{2}$. D. $AB = \sqrt{6}$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng $y = x + 1$ và đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x-2}$:

$$x + 1 = \frac{x-1}{x-2}, (x \neq 2) \Leftrightarrow (x+1)(x-2) = x-1, (x \neq 2) \Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 = 0, (x \neq 2) (*).$$

Cách 1:

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - \sqrt{2} \\ x = 1 + \sqrt{2} \end{cases} \text{ (thỏa } x \neq 2).$$

Khi đó tọa độ giao điểm của hai đồ thị hàm số là: $A(1-\sqrt{2}; 2-\sqrt{2}), B(1+\sqrt{2}; 2+\sqrt{2})$.

$$\text{Độ dài } AB = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2} = 4.$$

Cách 2:

Ta có: $\Delta = 2^2 + 4 = 8 > 0$.

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (*).

Khi đó $A(x_1; x_1 + 1), B(x_2; x_2 + 1)$, $\overline{AB} = (x_2 - x_1; x_2 - x_1)$

$$AB = \sqrt{2(x_2 - x_1)^2} = \sqrt{2}|x_2 - x_1| = \sqrt{2} \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = 4.$$

Cách 3: Dùng Viet $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 \cdot x_2 = -1 \end{cases}$.

Độ dài đoạn AB là:

$$AB = \sqrt{2(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{2[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2]} = \sqrt{2[2^2 - 4(-1)]} = 4.$$

Vậy $AB = 4$.

Câu 46. Cho hàm số $y = f(x) = m^2(\sqrt{4+x} + \sqrt{4-x}) + 2\sqrt{16-x^2} + 3m - 2$. Tổng các giá trị của tham số m để hàm số đạt giá trị lớn nhất bằng 13 là

A. $-\frac{7}{4}$.

B. $-\frac{3}{4}$

C. $-\frac{4}{7}$.

D. 1.

Lời giải

Cách 1:

$$y = f(x) = m^2(\sqrt{4+x} + \sqrt{4-x}) + 2\sqrt{16-x^2} + 3m - 2.$$

Điều kiện xác định $x \in [-4; 4]$.

+) Nhận xét với $\forall x \in [-4; 4]$ ta có $0 < (\sqrt{4+x} + \sqrt{4-x})^2 \leq 2(4+x+4-x)$

$\Rightarrow 0 < \sqrt{4+x} + \sqrt{4-x} \leq 4, \forall x \in [-4; 4]$, dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = 0$.

+) Mặt khác $0 < \sqrt{16-x^2} \leq 4, \forall x \in [-4; 4]$ và dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = 0$.

+) Từ đó, $f(x) = m^2(\sqrt{4+x} + \sqrt{4-x}) + 2\sqrt{16-x^2} + 3m - 2 \leq 4m^2 + 8 + 3m - 2, \forall x \in [-4; 4]$

$$\Rightarrow \max_{x \in [-4; 4]} f(x) = f(0) = 4m^2 + 3m + 6.$$

Theo giả thiết ta có $4m^2 + 3m + 6 = 13 \Leftrightarrow 4m^2 + 3m - 7 = 0$. Dễ thấy phương trình này luôn có hai nghiệm phân biệt và tổng hai nghiệm là $-\frac{3}{4}$.

Vậy tổng các giá trị của tham số m cần tìm là $-\frac{3}{4}$.

Cách 2:

Xét hàm số $y = f(x) = m^2(\sqrt{4+x} + \sqrt{4-x}) + 2\sqrt{16-x^2} + 3m - 2$ có tập xác định $D = [-4; 4]$.

Đặt $t = \sqrt{4+x} + \sqrt{4-x}, \forall x \in (-4; 4)$ suy ra $2\sqrt{2} \leq t \leq 4$ và $2\sqrt{16-x^2} = t^2 - 8$.

Khi đó $y = f(x) = g(t) = t^2 + m^2t + 3m - 10, \forall t \in [2\sqrt{2}; 4]$.

Ta có $g'(t) = 2t + m^2 > 0, \forall t \in [2\sqrt{2}; 4] \Rightarrow g(t)$ đồng biến trên đoạn $[2\sqrt{2}; 4]$
 $\Rightarrow \max_{[-4; 4]} f(x) = \max_{[2\sqrt{2}; 4]} g(t) = g(4) = 4m^2 + 3m + 6$.

Theo giả thiết ta có $4m^2 + 3m + 6 = 13 \Leftrightarrow 4m^2 + 3m - 7 = 0$. Dễ thấy phương trình này luôn có hai nghiệm phân biệt và tổng hai nghiệm là $-\frac{3}{4}$.

Vậy tổng các giá trị của tham số m cần tìm là $-\frac{3}{4}$.

Câu 47. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt cầu

$(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 49$ và mặt phẳng

$(\alpha): -2mx + (3-2m)y + (2m-1)z + 2m - 2 = 0$ (m là tham số). Mặt phẳng (α) cắt (S) theo một đường tròn có diện tích nhỏ nhất là

A. $\frac{8974}{96}\pi$.

B. $\frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{14}}\pi$.

C. $\frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{14}}$.

D. Đáp án khác.

Lời giải

Cách 1:

+ Mặt cầu (S) có tâm $I(1; 2; -1)$ và bán kính $R = 7$.

+ Mặt phẳng (α) cắt (S) theo một đường tròn (C) có tâm H , bán kính r , diện tích S .

+ Gọi d là khoảng cách từ tâm I đến mặt phẳng (α) .

Ta có: $S = \pi r^2 = \pi(R^2 - d^2)$ suy ra đường tròn (C) có diện tích nhỏ nhất khi và chỉ khi d^2 lớn nhất.

$$+ \text{Ta có } d^2 = \frac{[-2m + (3-2m)2 + (2m-1)(-1) + 2m-2]^2}{(-2m)^2 + (3-2m)^2 + (2m-1)^2} = \frac{36m^2 - 60m + 25}{12m^2 - 16m + 10}.$$

$$+ \text{Xét hàm số } f(m) = \frac{36m^2 - 60m + 25}{12m^2 - 16m + 10}; m \in \mathbb{R}.$$

$$* f'(m) = \frac{144m^2 + 120m - 200}{(12m^2 - 16m + 10)^2}.$$

$$* f'(m) = 0 \Leftrightarrow 144m^2 + 120m - 200 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{5}{6} \\ m = -\frac{5}{3} \end{cases}.$$

* Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$-\frac{5}{3}$	$\frac{5}{6}$	$+\infty$			
$f'(m)$		+	0	-	0	+	
$f(m)$	3	$\nearrow$	$\frac{45}{14}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	3

$+d^2$ đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $f(m)$ đạt giá trị lớn nhất.

Từ bảng biến thiên của hàm số $y = f(m)$ suy ra $\max_{\mathbb{R}} f(m) = \frac{45}{14}$ khi $m = -\frac{5}{3}$ hay $\max d^2 = \frac{45}{14}$

khi đó $S = \pi(R^2 - d^2) = \frac{641}{14}\pi$.

Vậy diện tích nhỏ nhất của đường tròn là $\frac{641}{14}\pi$.

Cách 2:

+ Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;-1)$ và bán kính $R=7$.

+ $M(x;y;z)$ là điểm thuộc mặt phẳng (α) với mọi m khi và chỉ khi

$$-2mx + (3-2m)y + (2m-1)z + 2m - 2 = 0, \forall m$$

$$\Leftrightarrow (2x+2y-2z-2)m - 3y + z + 2 = 0, \forall m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+2y-2z-2=0 \\ -3y+z+2=0 \end{cases}.$$

Suy ra (α) luôn đi qua đường thẳng cố định $\Delta: \begin{cases} x+y-z-1=0 \\ 3y-z-2=0 \end{cases}$.

+ Xét $\vec{n}_1 = (1;1;-1), \vec{n}_2 = (0;3;-1) \Rightarrow \vec{u} = [\vec{n}_1, \vec{n}_2] = (2;1;3)$ là vec tơ chỉ phương của đường thẳng Δ .

Δ đi qua điểm $M(-1;0;-2)$

+ Ta có $\vec{MI} = (2;2;1) \Rightarrow [\vec{MI}, \vec{u}] = (5;-4;-2)$.

Gọi K là hình chiếu vuông góc của I trên Δ .

$$\Rightarrow IK = d(I, \Delta) = \frac{[\vec{MI}, \vec{u}]}{|\vec{u}|} = \frac{\sqrt{5^2 + (-4)^2 + (-2)^2}}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2}} = \sqrt{\frac{45}{14}} < R$$

$\Rightarrow K$ nằm trong mặt cầu (S) .

+ Giả sử (α) cắt (S) theo đường tròn (C) có tâm là H , bán kính r .

Diện tích hình tròn (C) là $S_{(C)} = \pi r^2 = \pi [R^2 - d^2(I;(\alpha))]$.

$S_{(C)}$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $d(I;(\alpha))$ lớn nhất.

Mặt khác $d(I,(\alpha)) \leq IK$, đẳng thức xảy ra khi $IK \perp (\alpha) \Rightarrow \max d(I;(\alpha)) = IK = \sqrt{\frac{45}{14}}$, khi đó

$$S_{(C)} = \pi \left(7^2 - \frac{45}{14} \right) = \frac{641}{14} \pi.$$

Vậy diện tích nhỏ nhất của đường tròn là $\frac{641}{14} \pi$.

Câu 48. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2; 2]$ và $2f(x) + 3f(-x) = \frac{1}{x^2 + 4}$, $\forall x \in [-2; 2]$.

Tính $I = \int_{-2}^2 f(x) dx$.

A. $I = \frac{\pi}{10}$.

B. $I = -\frac{\pi}{10}$.

C. $I = -\frac{\pi}{20}$.

D. $I = \frac{\pi}{20}$.

Lời giải

+ Ta có $2f(x) + 3f(-x) = \frac{1}{x^2 + 4}$, $\forall x \in [-2; 2]$, suy ra $2 \int_{-2}^2 f(x) dx + 3 \int_{-2}^2 f(-x) dx = \int_{-2}^2 \frac{1}{x^2 + 4} dx$

$$\Leftrightarrow 2 \int_{-2}^2 f(x) dx - 3 \int_{-2}^2 f(-x) d(-x) = \int_{-2}^2 \frac{1}{x^2 + 4} dx$$

$$\Leftrightarrow 2 \int_{-2}^2 f(x) dx - 3 \int_2^{-2} f(x) dx = \int_{-2}^2 \frac{1}{x^2 + 4} dx \Leftrightarrow 2 \int_{-2}^2 f(x) dx + 3 \int_{-2}^2 f(x) dx = \int_{-2}^2 \frac{1}{x^2 + 4} dx$$

$$\Leftrightarrow 5 \int_{-2}^2 f(x) dx = \int_{-2}^2 \frac{1}{x^2 + 4} dx$$

$$\Leftrightarrow I = \frac{1}{5} \int_{-2}^2 \frac{1}{x^2 + 4} dx.$$

+ Tính $A = \int_{-2}^2 \frac{1}{x^2 + 4} dx$.

$$\text{Đặt } x = 2 \tan t \Rightarrow dx = 2(1 + \tan^2 t) dt, t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).$$

$$\text{Đổi cận: } \begin{cases} x = -2 \Rightarrow t = -\frac{\pi}{4} \\ x = 2 \Rightarrow t = \frac{\pi}{4} \end{cases} \quad \text{Khi đó, ta có}$$

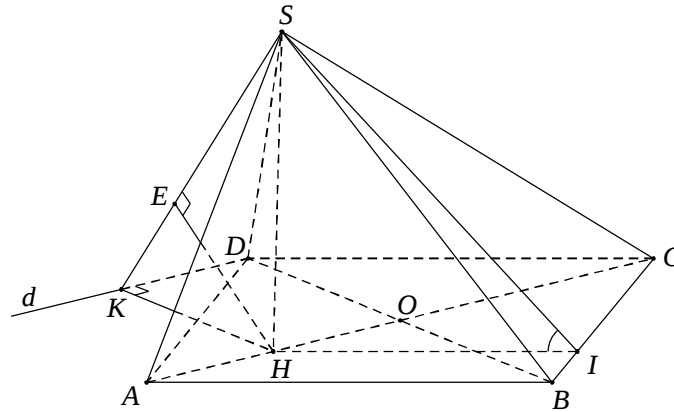
$$A = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{4 \tan^2 t + 4} 2(1 + \tan^2 t) dt = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} dt = \frac{\pi}{4}.$$

$$\text{Vậy } \int_{-2}^2 f(x) dx = \frac{\pi}{20}.$$

Câu 49. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông tâm O cạnh bằng a . Hình chiếu vuông góc của đỉnh S lên mặt đáy $(ABCD)$ là trung điểm của đoạn thẳng AO . Mặt phẳng (SBC) tạo với mặt đáy một góc 45° . Tính khoảng cách giữa SD và AC .

- A. $\frac{a\sqrt{38}}{17}$. B. $\frac{a\sqrt{51}}{13}$. C. $\frac{a\sqrt{13}}{3}$. **D. $\frac{3a\sqrt{34}}{34}$.**

Lời giải



Gọi H là trung điểm của $AO \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.

Dựng HI vuông góc với BC tại I . Ta có góc giữa (SBC) và $(ABCD)$ là góc $\widehat{SIH}$.

Từ giả thiết $\Rightarrow \widehat{SIH} = 45^\circ$.

Trong mặt phẳng $(ABCD)$, dựng đường thẳng d đi qua điểm D và song song với đường thẳng AC .

Gọi (α) là mặt phẳng chứa d và $SD \Rightarrow (\alpha) \parallel AC \Rightarrow d(AC, SD) = d(AC, (\alpha)) = d(H, (\alpha))$.

Dựng HK vuông góc với d tại K , dựng HE vuông góc với SK tại E .

Ta có $\begin{cases} d \perp HK \\ d \perp SH \end{cases} \Rightarrow d \perp (SHK) \Rightarrow d \perp HE$. Lại có $HE \perp SK \Rightarrow HE \perp (\alpha) \Rightarrow d(H, (\alpha)) = HE$.

Trong tam giác ABC ta có: $\frac{HI}{AB} = \frac{CH}{CA} = \frac{3}{4} \Rightarrow HI = \frac{3}{4}AB = \frac{3a}{4}$.

Trong tam giác SHI ta có: $SH = HI \tan 45^\circ = HI = \frac{3a}{4}$.

Tứ giác $ABCD$ là hình vuông nên $AC \perp BD \Rightarrow HK \parallel BD \Rightarrow HK = OD = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Trong tam giác SHK ta có: $HE = \frac{SH \cdot HK}{\sqrt{SH^2 + HK^2}} = \frac{\frac{3a}{4} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{\frac{9a^2}{16} + \frac{2a^2}{4}}} = \frac{3a\sqrt{34}}{34}$.

Vậy $d(AC, SD) = \frac{3a\sqrt{34}}{34}$.

Câu 50. Cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z = 0$. Điểm $A(2; 2; 0)$. Viết phương trình mặt phẳng (OAB) biết điểm B là một điểm thuộc mặt cầu (S) , có hoành độ dương và tam giác OAB đều.

- A. $x - y + 2z = 0$. B. $x - y - 2z = 0$. **C. $x - y - z = 0$.** D. $2 - y + z = 0$.

Lời giải

+ Gọi $B(x; y; z)$, với $x > 0$ và H trung điểm $OA \Rightarrow H(1; 1; 0)$.

+) Gọi (P) là mặt phẳng trung trực đoạn OA . Ta có (P) đi qua trung điểm $H(1; 1; 0)$ của đoạn OA và nhận $\overrightarrow{OA} = (2; 2; 0)$ là một vector pháp tuyến.

Suy ra phương trình (P) là: $2.(x-1) + 2.(y-1) = 0 \Leftrightarrow x + y - 2 = 0$.

$$+) \text{ Ta có } \begin{cases} OB = AB \\ OB = OA \\ B \in (S) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B \in (P) \\ OB^2 = OA^2 \\ B \in (S) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 8 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 8 \\ 2x + 2y + 2z = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 2 \\ x^2 + y^2 = 4 \\ z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 2 \\ (x + y)^2 - 2xy = 4 \\ z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 2 \\ xy = 0 \\ z = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \\ z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow B(2; 0; 2), \text{ (do } x > 0 \text{)}.$$

+) Ta có $\overrightarrow{OA} = (2; 2; 0); \overrightarrow{OB} = (2; 0; 2) \Rightarrow [\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}] = (4; -4; -4) = 4(1; -1; -1)$.

Mặt phẳng (OAB) đi qua O , nhận $\vec{n} = (1; -1; -1)$ là một vector pháp tuyến.

Vậy phương trình (OAB) là: $x - y - z = 0$.

-----HẾT-----