

Bài I (4 điểm).

1) Giải phương trình $\sin x + \sqrt{3} \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 1$.

2) Cho tam giác ABC cân tại A . Gọi AH là đường cao xuất phát từ đỉnh A . Biết độ dài các đoạn thẳng BC, AH, AB theo thứ tự tạo thành một cấp số nhân. Tìm công bội của cấp số nhân đó.

Bài II (4 điểm). Trong hộp có 25 tấm thẻ giống nhau được đánh số theo thứ tự từ 1 đến 25. Rút ngẫu nhiên ba tấm thẻ từ trong hộp.

1) Có bao nhiêu cách để rút được ít nhất hai tấm thẻ mang số lẻ?

2) Tính xác suất để trong ba số ghi trên ba tấm thẻ rút được không có hai số nào là hai số tự nhiên liên tiếp.

Bài III (3 điểm). Tìm số hạng không chứa x trong khai triển nhị thức Niuton của biểu thức

$P = \left(2x - \frac{1}{2x^2}\right)^n$ với $x \neq 0$ biết rằng n là số nguyên dương thỏa mãn: $3A_{n-1}^2 - 5C_n^2 = 0$.

Bài IV (3 điểm). Cho dãy số (u_n) : $\begin{cases} u_1 = \sqrt{2} \\ u_{n+1} = \sqrt{\frac{u_n^2 + 2}{3}} \end{cases}$. Xét dãy số (v_n) với $v_n = u_n^2 - 1 \forall n \in \mathbb{N}^*$.

1) Chứng minh rằng: Dãy số (v_n) là một cấp số nhân.

2) Tìm công thức số hạng tổng quát của dãy số (u_n) .

3) Chứng minh rằng: $u_1 + u_2 + \dots + u_n < n + 1$ với mọi số nguyên dương n .

Bài V (6 điểm). Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi G là trọng tâm của tam giác $A'B'C'$ và I là trung điểm của đoạn thẳng $C'D'$. Trên các đoạn thẳng AC và DC' lần lượt lấy các điểm E, F

sao cho $AE = \frac{2}{3}AC$, $DF = \frac{1}{3}DC'$.

1) Chứng minh rằng: $(AC'G) \parallel (A'DI)$ và $EF \parallel BD'$.

2) Gọi (α) là mặt phẳng thay đổi và luôn đi qua trung điểm Q của đoạn thẳng AG . Mặt phẳng (α) cắt các tia AA', AB', AC' lần lượt tại các điểm M, N, P (không trùng với điểm A).

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T = \frac{AA'}{AM} \cdot \frac{AB'}{AN} \cdot \frac{AC'}{AP}$.

----- Hết -----

Họ và tên thí sinh:..... Số báo danh:.....

**HƯỚNG DẪN CHẤM BÀI THI OLYMPIC LIÊN CỤM TRƯỜNG THPT
NĂM HỌC 2020 - 2021 - MÔN TOÁN LỚP 11**

Bài I. (4.0 điểm)

Câu	Nội dung	Điểm
1 (3.0 điểm)	$\sin x + \sqrt{3} \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right) = 1 \Leftrightarrow \sin x + \sqrt{3} \cos x = 1$	1.0
	$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x \cdot \cos \frac{\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{3} \cdot \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{2}$	1.0
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases}$	1.0
2 (1.0 điểm)	Giả sử: $AB = a$. Khi đó ta có: $\sin B = \frac{AH}{AB} \Rightarrow AH = AB \cdot \sin B = a \sin B$. $\cos B = \frac{BH}{AB} \Rightarrow BH = AB \cdot \cos B = a \cos B \Rightarrow BC = 2BH = 2a \cdot \cos B$ ($\triangle ABC$ cân)	0.25
	BC, AH, AB là cấp số nhân $\Leftrightarrow BC \cdot AB = AH^2 \Leftrightarrow 2a^2 \cdot \cos B = a^2 \cdot \sin^2 B$	0.25
	$\Leftrightarrow \cos^2 B + 2 \cos B - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos B = -1 - \sqrt{2} (L) \\ \cos B = -1 + \sqrt{2} \end{cases}$	0.25
	Khi đó, công bội $q = \frac{AB}{AH} = \frac{1}{\sin B} = \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 B}} = \frac{1}{\sqrt{-2 + 2\sqrt{2}}} = \frac{1}{2} \sqrt{2 + 2\sqrt{2}}$.	0.25

Bài II. (4.0 điểm)

Câu	Nội dung	Điểm
1 (3.0 điểm)	Từ 1 đến 25 có 13 số lẻ, 12 số chẵn.	0.75
	TH1: Bốc 2 tấm thẻ mang số lẻ, 1 tấm mang số chẵn $\Rightarrow$ Có $C_{13}^2 \cdot C_{12}^1 = 936$ cách	0.75
	TH2: Bốc 3 thẻ mang số lẻ từ 13 thẻ $\Rightarrow$ Có $C_{13}^3 = 286$ cách	0.75
	Vậy có $936 + 286 = 1222$ cách bốc được ít nhất 2 thẻ mang số lẻ.	0.75
2 (1.0 điểm)	Bốc 3 thẻ ngẫu nhiên từ 25 thẻ $\Rightarrow n(\Omega) = C_{25}^3 = 2300$.	0.25
	A : "Bốc được 3 thẻ ghi 3 số trong đó không có 2 số nào là hai số tự nhiên liên tiếp" Gọi 3 số tự nhiên bốc được là $a; b; c$ với $1 \leq a < b < c \leq 25$. Do không có 2 số nào là hai số tự nhiên liên tiếp nên $1 \leq a < b-1 < c-2 \leq 23$.	0.25
	Mỗi cách chọn bộ 3 số $a; b; c$ thỏa mãn đề bài tương ứng với một cách chọn bộ 3 số tự nhiên phân biệt $a; b-1; c-2$ từ tập $\{1; 2; \dots; 22; 23\} \Rightarrow n(A) = C_{23}^3 = 1771$.	0.25
	Xác suất để xảy ra biến cố A là: $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{1771}{2300}$.	0.25

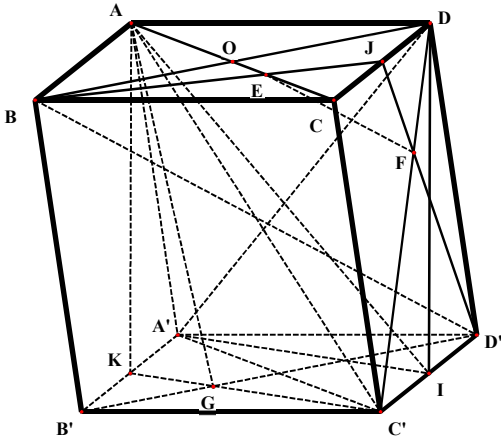
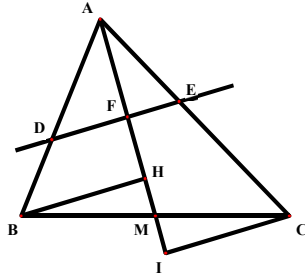
Bài III. (3.0 điểm)

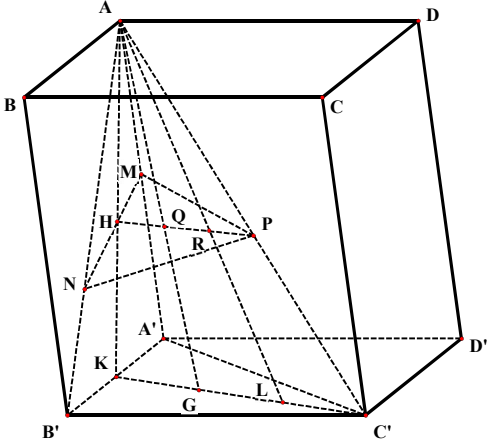
	Nội dung	Điểm
(3.0 điểm)	ĐK: $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 3$. $3A_{n-1}^2 - 5C_n^2 = 0 \Leftrightarrow 3 \cdot \frac{(n-1)!}{(n-1-2)!} - 5 \cdot \frac{n!}{2! \cdot (n-2)!} = 0$	0.5
	$\Leftrightarrow 3 \cdot (n-1)(n-2) - 5 \cdot \frac{n(n-1)}{2} = 0 \Leftrightarrow n^2 - 13n + 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 12 & (\text{T/m}) \\ n = 1 & (\text{L}) \end{cases}$	1.0
	$\left(2x - \frac{1}{2x^2}\right)^{12} = \sum_{k=0}^{12} (-1)^k C_{12}^k \cdot (2x)^{12-k} \cdot \left(\frac{1}{2x^2}\right)^k = \sum_{k=0}^{12} (-1)^k C_{12}^k \cdot 2^{12-2k} \cdot x^{12-3k}$	1.0
	Số hạng không chứa $x \Rightarrow 12 - 3k = 0 \Leftrightarrow k = 4$ $\Rightarrow$ Số hạng cần tìm: $(-1)^4 \cdot C_{12}^4 \cdot 2^4 = 7920$.	0.5

Bài IV. (3.0 điểm)

Câu	Nội dung	Điểm
1 (1.5 điểm)	Để thấy: $u_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}^*$. $u_{n+1} = \sqrt{\frac{u_n^2 + 2}{3}} \Leftrightarrow u_{n+1}^2 = \frac{u_n^2 + 2}{3} \Leftrightarrow u_{n+1}^2 - 1 = \frac{u_n^2 + 2}{3} - 1 \Leftrightarrow u_{n+1}^2 - 1 = \frac{1}{3}(u_n^2 - 1)$	0.75
	$\Rightarrow v_{n+1} = \frac{1}{3} v_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \text{dãy } (v_n) \text{ là cấp số nhân với công bội } q = \frac{1}{3}.$	0.75
2 (1.0 điểm)	Dãy (v_n) là cấp số nhân với $q = \frac{1}{3}$ và $v_1 = u_1^2 - 1 = 1$ nên $v_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$.	0.5
	$\Rightarrow u_n^2 - 1 = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \Rightarrow u_n = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + 1}.$	0.5
3 (0.5 điểm)	Áp dụng bất Bunhiacopxki ta có: $(u_1 + u_2 + \dots + u_n)^2 \leq (1 + 1 + \dots + 1)(u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2)$ $\Leftrightarrow (u_1 + u_2 + \dots + u_n)^2 \leq n(u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2)$. Mà $u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^0 + 1 + \left(\frac{1}{3}\right)^1 + 1 + \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + 1 = n + \frac{3}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{3^n}\right)$.	0.25
	Do đó $(u_1 + u_2 + \dots + u_n)^2 \leq n \left[n + \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{3^n}\right) \right] < n(n+2) < n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$ $\Rightarrow u_1 + u_2 + \dots + u_n < n+1$.	0.25

Bài V. (6.0 điểm)

Câu	Nội dung	Điểm
Hình vẽ		
1 (Ý 1) (2.5 điểm)	$C'G \cap A'B' = K \Rightarrow K$ là trung điểm của $A'B' \Rightarrow A'IC'K$ là hình bình hành $\Rightarrow A'I \parallel C'K$	1.0
	$ADIK$ là hình bình hành ($AD \parallel IK, AD = IK$) $\Rightarrow DI \parallel AK$	0.5
	$\left. \begin{array}{l} A'I \parallel C'K, DI \parallel AK \\ (AC'G): C'K \cap AK = K \\ (A'DI): A'I \cap DI = I \end{array} \right\} \Rightarrow (AC'G) \parallel (A'DI).$	1.0
1 (Ý 2) (2.5 điểm)	$AC \cap BD = O \Rightarrow O$ là trung điểm của $AC \Rightarrow \frac{CE}{CO} = \frac{2}{3} \Rightarrow E$ là trọng tâm $\triangle BCD$	0.5
	$\Rightarrow$ nếu $BE \cap CD = J$ thì J là trung điểm CD và $\frac{JE}{JB} = \frac{1}{3}$.	0.5
	Chứng minh tương tự: F là trọng tâm $\triangle CDD'$ $\Rightarrow D', F, J$ thẳng hàng và $\frac{JF}{JD'} = \frac{1}{3}$	0.5
	$\triangle BDD': \frac{JE}{JB} = \frac{JF}{JD'} = \frac{1}{3} \Rightarrow EF \parallel BD'$.	0.5
2 (1.0 điểm)	(Cách 1) Chứng minh: $\triangle ABC$, trung tuyến AM. Giả sử đường thẳng d cắt các tia AB, AC, AM lần lượt ở D, E, F. Khi đó: $\frac{AB}{AD} + \frac{AC}{AE} = 2 \frac{AM}{AF}$ (*). . Vẽ BH, CI song song với d với $H, I \in AM$. . Theo định lý Ta let ta có: $\frac{AB}{AD} = \frac{AH}{AF}, \frac{AC}{AE} = \frac{AI}{AF} \Rightarrow \frac{AB}{AD} + \frac{AC}{AE} = \frac{AH + AI}{AF}$. Mà $\triangle BHM = \triangle CIM$ (g.c.g) $\Rightarrow MH = MI$ $\Rightarrow AH + AI = 2AM \Rightarrow \frac{AB}{AD} + \frac{AC}{AE} = 2 \frac{AM}{AF}.$	
		
		0.25

	
$MN \cap AK = H \Rightarrow P; Q; H$ thẳng hàng. Gọi L là trung điểm của $C'G$ và $AL \cap PH = R$. Áp dụng (*): $\triangle AA'B'$, trung tuyến AK: $\frac{AA'}{AM} + \frac{AB'}{AN} = 2 \frac{AK}{AH} \Rightarrow \frac{AK}{AH} = \frac{1}{2} \left(\frac{AA'}{AM} + \frac{AB'}{AN} \right)$ (1) Áp dụng (*): $\triangle AGC'$, trung tuyến AL: $\frac{AG}{AQ} + \frac{AC'}{AP} = 2 \frac{AL}{AR} \Rightarrow \frac{AL}{AR} = \frac{1}{2} \left(\frac{AG}{AQ} + \frac{AC'}{AP} \right)$ (2) Áp dụng (*): $\triangle AKL$, trung tuyến AG: $\frac{AK}{AH} + \frac{AL}{AR} = 2 \frac{AG}{AQ}$ (3) Từ (1),(2),(3): $\frac{1}{2} \left(\frac{AA'}{AM} + \frac{AB'}{AN} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{AG}{AQ} + \frac{AC'}{AP} \right) = 2 \frac{AG}{AQ} \Leftrightarrow \frac{AA'}{AM} + \frac{AB'}{AN} + \frac{AC'}{AP} = 3 \frac{AG}{AQ} = 6$	0.5
Áp dụng bất Côsi: $\frac{AA'}{AM} + \frac{AB'}{AN} + \frac{AC'}{AP} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{AA'}{AM} \cdot \frac{AB'}{AN} \cdot \frac{AC'}{AP}} \Rightarrow \frac{AA'}{AM} \cdot \frac{AB'}{AN} \cdot \frac{AC'}{AP} \leq 8$. Vậy giá trị lớn nhất của $T = \frac{AA'}{AM} \cdot \frac{AB'}{AN} \cdot \frac{AC'}{AP}$ bằng 8 khi M, N, P lần lượt là trung điểm của $AA', AB', AC' \Rightarrow (\alpha) \parallel (A'B'C')$.	0.25
(Cách 2) . Chứng minh: Nếu A, B, C, G đồng phẳng thì với mọi điểm O bất kỳ, ta có $\overrightarrow{OG} = x \cdot \overrightarrow{OA} + y \cdot \overrightarrow{OB} + z \cdot \overrightarrow{OC} \text{ với } x + y + z = 1.$. Ta có: G là trọng tâm của $\triangle A'B'C'$ nên $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AC'} = 3 \overrightarrow{AG}$. $\Rightarrow \frac{AA'}{AM} \cdot \overrightarrow{AM} + \frac{AB'}{AN} \cdot \overrightarrow{AN} + \frac{AC'}{AP} \cdot \overrightarrow{AP} = 3 \cdot \frac{AG}{AQ} \cdot \overrightarrow{AQ}.$. Vì M, N, P, Q đồng phẳng nên $\overrightarrow{AQ} = x \cdot \overrightarrow{AM} + y \cdot \overrightarrow{AN} + z \cdot \overrightarrow{AP}$ với $x + y + z = 1$ $\Rightarrow \frac{AA'}{AM} + \frac{AB'}{AN} + \frac{AC'}{AP} = 3 \cdot \frac{AG}{AQ} = 6 \Rightarrow 6 \geq 3 \sqrt[3]{\frac{AA'}{AM} \cdot \frac{AB'}{AN} \cdot \frac{AC'}{AP}} \Rightarrow \frac{AA'}{AM} \cdot \frac{AB'}{AN} \cdot \frac{AC'}{AP} \leq 8.$. Vậy GTLN của T bằng 8 khi $(\alpha) \parallel (A'B'C')$.	0.25 0.25 0.25 0.25

Ghi chú: Thí sinh có lời giải theo phương pháp khác, nếu đúng vẫn cho điểm tối đa (GK tự chia điểm thành phần).