

Thời gian làm bài: 180 phút (không kể thời gian giao đề)
(Đề thi có 01 trang, gồm 04 bài)

Ngày thi thứ nhất – Ngày 09 tháng 9 năm 2020

Bài 1 (5,0 điểm). Cho dãy số (a_n) xác định bởi $a_0 = 2020$ và $a_{n+1} = \frac{a_n^2}{1+a_n}$, $\forall n \geq 0$.

a) Chứng minh rằng dãy số (a_n) có giới hạn và tìm giới hạn đó.

b) Tính $[a_{1000}]$ ($[x]$ phần nguyên của số thực x).

Bài 2 (5,0 điểm). Cho $P(x)$ là một đa thức bậc ba, xét đa thức

$$Q(x) = (x^3 + 2x + 1 - P(x))(2x^3 - 6x^2 + 5 - P(x))$$

a) Giả sử $Q(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ và $P(0) = 4$, tính $Q(-1)$.

b) Hỏi có tồn tại hay không đa thức $P(x)$ để $Q(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Bài 3 (5,0 điểm). Cho tam giác ABC có đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại các điểm X, Y, Z . Các đường phân giác trong và ngoài tại góc A của tam giác ABC cắt BC tại E, F . Các tiếp tuyến kẻ từ E, F đến (I) cắt nhau tại điểm D (D khác E, F). Trên BI lấy điểm K sao cho $DK \perp AI$.

a) Giả sử BC cố định và A thay đổi, chứng minh K thuộc một đường tròn cố định.

b) Gọi M, N là các tiếp điểm của (I) với các tiếp tuyến DE, DF . Đường thẳng qua D song song với AB cắt AC, MN tại P, Q . Đường thẳng QZ cắt đường tròn (I) tại T . Chứng minh PT tiếp xúc với đường tròn (I) .

Bài 4 (5,0 điểm). Cho số nguyên tố $p \geq 5$. Đặt $n = 4^p - 1$.

a) Chứng minh rằng n có ít nhất 3 ước nguyên tố phân biệt và $2^n \equiv 8 \pmod{n}$.

b) Với a là một số tự nhiên, chứng minh rằng $2 + a + a^2 + \dots + a^{p-1}$ không là số chính phương.

===== HẾT =====

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Thời gian làm bài: 180 phút (không kể thời gian giao đề)
(Đề thi có 01 trang, gồm 03 bài)

Bài thi thứ hai – Ngày 10 tháng 9 năm 2020

Bài 1 (6.0 điểm). Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(x + 2020 \cdot f(xy)) = f(x) + 2020 \cdot xf(y) \quad \text{với mọi } x, y \in \mathbb{R}.$$

Bài 2 (7.0 điểm). Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (I) và có trục tâm H . Gọi D, E, F lần lượt là các tiếp điểm của BC, CA, AB với đường tròn (I) . Gọi S, T lần lượt là trung điểm của AH, BH và gọi M là điểm đối xứng với S qua FE , gọi N là điểm đối xứng với T qua FD . Chứng minh rằng đường thẳng MN đi qua trục tâm của tam giác DEF .

Bài 3 (7.0 điểm). Cho bảng ô vuông $ABCD$ kích thước 2021×2021 gồm 2021^2 ô vuông đơn vị, mỗi ô vuông đơn vị được tô bởi một trong ba màu đen, trắng hoặc xám. Một cách tô màu được gọi là đối xứng nếu mỗi ô vuông đơn vị có tâm trên đường chéo AC được tô màu xám và mỗi cặp ô vuông đơn vị đối xứng qua AC được tô cùng màu đen hoặc cùng màu trắng. Người ta điền vào mỗi ô xám số 0, mỗi ô trắng một số nguyên dương và mỗi ô đen một số nguyên âm. Một cách điền số như vậy được gọi là k -cân đối (với k là số nguyên dương) nếu thỏa mãn các điều kiện sau:

(i) Mỗi cặp ô vuông đơn vị đối xứng qua AC được điền cùng một số nguyên thuộc đoạn $[-k; k]$.

(ii) Nếu một hàng và một cột giao nhau tại ô đen thì tập các số nguyên dương được điền trên hàng đó và tập số nguyên dương được điền trên cột đó không giao nhau, nếu một hàng và một cột giao nhau tại ô trắng thì tập các số nguyên âm được điền trên hàng đó và tập các số nguyên âm được điền trên cột đó không giao nhau.

Tìm giá trị nhỏ nhất của k để với mọi cách tô màu đối xứng, luôn tồn tại cách điền k -cân đối.

===== HẾT =====