

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO HÀ NỘI
CỤM TRƯỜNG THPT
HOÀN KIẾM – HAI BÀ TRUNG
ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐỀ THI OLYMPIC NĂM HỌC 2023-2024

Môn Toán - Lớp 10
Thời gian làm bài: 150 phút
(Không kể thời gian giao đề)
Đề thi gồm có 01 trang

Bài I (4,0 điểm) Cho hàm số $y = x^2 - 4x + 5$ có đồ thị (P) .

- 1) Lập bảng biến thiên của hàm số.
- 2) Chứng minh đường thẳng $d: y = mx + 6$ luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B có hoành độ lần lượt là x_1, x_2 . Tìm giá trị nhỏ nhất của $T = |x_1 - x_2|$.

Bài II (6,0 điểm)

- 1) Giải phương trình
 - a) $\sqrt{x^2 - 3x - 4} = 2x - 10$.
 - b) $\sqrt{x+1} + \sqrt{4-x} + \sqrt{(x+1)(4-x)} = 5$.
- 2) Một công ty TNHH trong một đợt quảng cáo và bán khuyến mãi hàng hóa (1 sản phẩm mới của công ty) cần thuê xe để chở 140 người và 9 tấn hàng. Nơi thuê chỉ có hai loại xe A và B , trong đó xe loại A có 10 chiếc, xe loại B có 9 chiếc. Một chiếc xe loại A được cho thuê với giá 4 triệu, loại B giá 3 triệu. Hỏi công ty phải thuê bao nhiêu xe mỗi loại để chi phí vận chuyển là thấp nhất, biết rằng xe A chỉ chở được tối đa 20 người và 0,6 tấn hàng, xe B chở được tối đa 10 người và 1,5 tấn hàng.

Bài III (4,0 điểm) Cho tam giác ABC , có $BC = a, CA = b, AB = c$. Ký hiệu h_a là độ dài đường cao xuất phát từ đỉnh A và p là nửa chu vi của tam giác ABC .

- 1) Chứng minh $b^2 - c^2 = a(b \cos C - c \cos B)$.
- 2) Chứng minh tam giác ABC cân nếu thỏa mãn điều kiện $h_a = \sqrt{p(p-a)}$.

Bài IV (3,0 điểm) Cho tam giác ABC có I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác và $AB = c, AC = b, BC = a$.

- 1) Chứng minh $a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0}$.
- 2) Giả sử $a = 3, b = 5$. Tìm c để $IG \perp IC$, với G là trọng tâm $\triangle ABC$.

Bài V (3,0 điểm) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $\triangle ABC$ biết $B(2; -1)$, đường thẳng chứa đường cao và đường phân giác trong qua hai đỉnh A, C có phương trình lần lượt là $3x - 4y + 27 = 0$ và $x + 2y - 5 = 0$.

- 1) Viết phương trình tổng quát của đường thẳng BC và tìm tọa độ điểm C .
- 2) Viết phương trình tổng quát của đường thẳng AB .

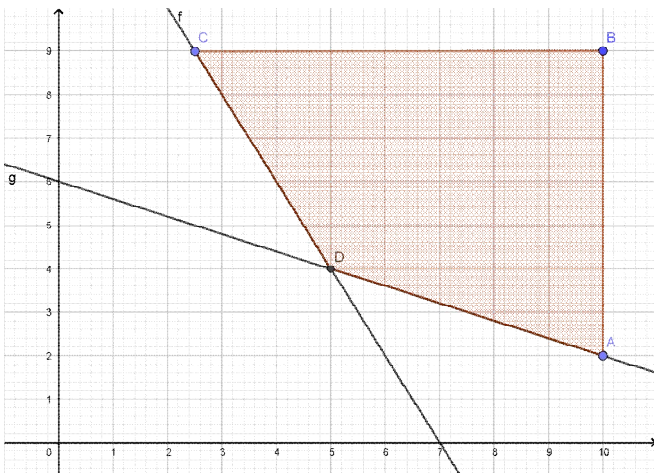
-----HẾT-----

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ tên thí sinh:.....Số báo danh:.....
Họ tên và chữ kí của cán bộ coi thi số 1:.....Họ tên và chữ kí của cán bộ coi thi số 2:.....

HƯỚNG DẪN CHẤM

Câu	Nội dung	Điểm																
Bài I.1 2,0đ	Cho hàm số $y = x^2 - 4x + 5$ có đồ thị (P) . 1) Lập bảng biến thiên hàm số																	
	$a = 1 > 0$. (P) có bề lõm quay lên trên.	0,5																
	Đỉnh $I(2;1)$	0,5																
	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>2</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td></td><td>0</td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td>-</td><td>+</td></tr><tr><td>y</td><td>$+\infty$</td><td>1</td><td>$+\infty$</td></tr></table>	x	$-\infty$	2	$+\infty$	y'		0				-	+	y	$+\infty$	1	$+\infty$	1,0
x	$-\infty$	2	$+\infty$															
y'		0																
		-	+															
y	$+\infty$	1	$+\infty$															
Bài I.2 2,0 đ	2) Đường thẳng $d : y = mx + 6$ cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B có hoành độ lần lượt là x_1, x_2 . Tìm giá trị nhỏ nhất của $T = x_1 - x_2 $																	
	Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và d : $x^2 - 4x + 5 = mx + 6 \Leftrightarrow x^2 - (m + 4)x - 1 = 0$.	0,5																
	Do $ac = -1 < 0$, phương trình luôn có 2 nghiệm trái dấu x_1, x_2 với mọi $m \in R$	0,5																
	Ta có $x_1 \cdot x_2 = -1 \Leftrightarrow x_2 = -\frac{1}{x_1}$. Suy ra $T = x_1 - x_2 = \left x_1 + \frac{1}{x_1}\right = x_1 + \left \frac{1}{x_1}\right \geq 2$ (do $x_1, \frac{1}{x_1}$ cùng dấu)	0,5																
	Dấu “=” xảy ra khi $m = -4$.	0,5																
Bài II.1 4,0 đ	Giải phương trình:																	
	a) $\sqrt{x^2 - 3x - 4} = 2x - 10 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 10 \geq 0 \\ (2x - 10)^2 = x^2 - 3x - 4 \end{cases}$	0,5																
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 5 \\ 4x^2 - 40x + 100 = x^2 - 3x - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 5 \\ 3x^2 - 37x + 104 = 0 \end{cases}$	0,5																
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 5 \\ \begin{cases} x = 8 \\ x = \frac{13}{3} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x = 8$.	0,5																

	Vậy pt đã cho có 1 nghiệm $x = 8$.	0,5
	b) $\sqrt{x+1} + \sqrt{4-x} + \sqrt{(x+1)(4-x)} = 5$. Điều kiện xác định: $-1 \leq x \leq 4$. $\text{Đặt } t = \sqrt{x+1} + \sqrt{4-x} \text{ (đk } t \geq 0) \Rightarrow \sqrt{(x+1)(4-x)} = \frac{t^2 - 5}{2} (*)$	0,5
	PT trở thành: $t + \frac{t^2 - 5}{2} = 5 \Leftrightarrow t^2 + 2t - 15 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = -5 \end{cases} (1)$	0,5
	Với $t = 3$ thay vào (*), ta được $\sqrt{(x+1)(4-x)} = 2$	0,5
	$(x+1)(4-x) = 4 \Leftrightarrow -x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases} \text{ (Thỏa mãn điều kiện)}$	0,5
	Vậy tập nghiệm của phương trình: $S = \{0; 3\}$.	
Bài II.2 2,0 đ	Một công ty TNHH trong một đợt quảng cáo và bán khuyến mãi hàng hóa ,...	
	Gọi x là số xe loại A ($0 \leq x \leq 10; x \in \mathbb{N}$), y là số xe loại B ($0 \leq y \leq 9; y \in \mathbb{N}$). Khi đó tổng chi phí thuê xe là $T = 4x + 3y$. Xe A chở tối đa 20 người, xe B chở tối đa 10 người nên tổng số người 2 xe chở tối đa được là $20x + 10y$. Xe A chở được 0,6 tấn hàng, xe B chở được 1,5 tấn hàng nên tổng lượng hàng 2 xe chở được là $0,6x + 1,5y$.	0,5
	Theo giả thiết, ta có $\begin{cases} 0 \leq x \leq 10 \\ 0 \leq y \leq 9 \\ 20x + 10y \geq 140 \\ 0,6x + 1,5y \geq 9 \end{cases} (*)$	0,5
	Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình (*) là tứ giác $ABCD$ kẻ cả miền trong của tứ giác. Biểu thức $T = 4x + 3y$ đạt giá trị nhỏ nhất tại một trong các đỉnh của tứ giác $ABCD$. 	0,5
	Tại các đỉnh $A(10; 2); B(10; 9); C\left(\frac{5}{2}; 9\right); D(5; 4)$, ta thấy T đạt giá trị nhỏ nhất tại $\begin{cases} x = 5 \\ y = 4 \end{cases}$. Khi đó $T_{\min} = 32$.	0,5
Bài III.1	Cho tam giác ABC ,...	

2,0 đ	1) Chứng minh $b^2 - c^2 = a(b \cos C - c \cos B)$	
	Áp dụng định lí Cosin, Ta có $a(b \cos C - c \cos B) = ab \cos C - ac \cos B$ $= ab \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} - ac \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$	1,0
	$= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2} - \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2} = b^2 - c^2.$	1,0
Bài III.2 2,0 đ	Chứng minh tam giác ABC cân nếu thỏa mãn điều kiện $h_a = \sqrt{p(p-a)}$.	
	Ta có $h_a = \frac{2S}{a} = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a}$. Từ giả thiết, ta có $\frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a} = \sqrt{p(p-a)} \Leftrightarrow 2\sqrt{(p-b)(p-c)} = a.$	1,0
	Áp dụng bất đẳng thức Co si, ta có $2\sqrt{(p-b)(p-c)} \leq (p-b) + (p-c) = a.$ Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(p-b) = (p-c) \Leftrightarrow b = c$. (Đpcm).	1,0
Bài IV.1 1,0 đ	Cho tam giác ABC có I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác và $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$. Chứng minh: $a\vec{IA} + b\vec{IB} + c\vec{IC} = \vec{0}$.	
	Kéo dài AI cắt BC tại D. Theo tính chất đường phân giác, ta có: $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b}.$ Khi đó: $b\vec{DB} + c\vec{DC} = \vec{0}$ $\Leftrightarrow b(\vec{IB} - \vec{ID}) + c(\vec{IC} - \vec{ID}) = \vec{0}$ $\Leftrightarrow (b+c)\vec{ID} = b\vec{IB} + c\vec{IC}$	0,5
	Vì BI, CI là phân giác $\widehat{ABD}$ và $\widehat{ACD}$ nên $\frac{IA}{ID} = \frac{BA}{BD} = \frac{CA}{CD} = \frac{BA+CA}{BD+CD}$ $= \frac{b+c}{a}.$ Do đó: $a\vec{IA} + (b+c)\vec{ID} = \vec{0} \Rightarrow a\vec{IA} + b\vec{IB} + c\vec{IC} = \vec{0}$	0,5
Bài IV.2 2,0 đ	Giả sử $a = 3, b = 5$. Tìm c để $IG \perp IC$ với G là trọng tâm $\triangle ABC$.	
	Ta có $a\vec{IA} + b\vec{IB} + c\vec{IC} = \vec{0} \Rightarrow \vec{CI} = \frac{1}{a+b+c}(a\vec{CA} + b\vec{CB})$ Mặt khác $\vec{GI} = \vec{CI} - \vec{CG} = \frac{1}{a+b+c}(a\vec{CA} + b\vec{CB}) - \frac{1}{3}(\vec{CA} + \vec{CB})$	0,5

	hay $\overrightarrow{GI} = \left(\frac{a}{a+b+c} - \frac{1}{3}\right)\overrightarrow{CA} + \left(\frac{b}{a+b+c} - \frac{1}{3}\right)\overrightarrow{CB}$	0,5
	Suy ra IG vuông góc với IC khi và chỉ khi $\overrightarrow{IG} \cdot \overrightarrow{IC} = 0$ $\Leftrightarrow (ab + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA})[b(2a-b-c) + a(2b-a-c)] = 0$	0,5
	Do $ab + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} = ab(1 + \cos C) > 0$ nên ta có: $b(2a-b-c) + a(2b-a-c) = 0 \Leftrightarrow c = \frac{4ab - a^2 - b^2}{a+b}$ Với $a=3, b=5$ thì $c = \frac{13}{4}$.	0,5
Câu V.1 2,0 đ	Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $\triangle ABC$ biết $B(2; -1)$, đường thẳng chứa đường cao và đường phân giác trong qua hai đỉnh A, C có phương trình lần lượt là $3x - 4y + 27 = 0$ và $x + 2y - 5 = 0$. 1) Viết phương trình tổng quát của đường thẳng BC và tìm tọa độ điểm C .	
	Đường thẳng BC là đường thẳng qua $B(2; -1)$ và vuông góc với đường cao AH . BC đi qua $B(2; -1)$ và có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_{BC}} = (4; 3)$ nên có phương trình: $4(x-2) + 3(y+1) = 0 \Leftrightarrow 4x + 3y - 5 = 0$.	1,0
	Điểm C là giao điểm của đường thẳng BC và đường thẳng CK nên tọa độ của C là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} 4x + 3y - 5 = 0 \\ x + 2y - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases}$. Vậy $C(-1; 3)$.	1,0
Câu V.2 1,0 đ	2) Viết phương trình tổng quát của đường thẳng AB .	
	Gọi $M(x_M; y_M)$ là điểm đối xứng với B qua CK . Vectơ $\overrightarrow{BM} = (x_M - 2; y_M + 1)$ vuông góc với vectơ chỉ phương của CK nên ta có phương trình $2(x_M - 2) - (y_M + 1) = 0 \Leftrightarrow 2x_M - y_M - 5 = 0$. (1) Trung điểm của BM là $I\left(\frac{x_M + 2}{2}; \frac{y_M - 1}{2}\right) \in CK$ nên ta có phương trình: $\frac{1}{2}x_M + y_M - 5 = 0$. (2) Giải hệ (1), (2) ta được $M(4; 3)$. Do CK là đường phân giác của góc $\widehat{ACB}$ nên $M \in AC$.	0,5
	Đường thẳng AC có phương trình: $y - 3 = 0$. Điểm A là giao điểm của hai đường thẳng AC và AH nên tìm được $A(-5; 3)$. Đường thẳng AB đi qua hai điểm $A(-5; 3)$ và $B(2; -1)$ có phương trình $4x + 7y - 1 = 0$.	0,5

Lưu ý: Học sinh làm theo cách khác đúng vẫn cho điểm tối đa.