

CHỦ ĐỀ 01: CƠ BẢN VỀ TÍNH ĐƠN ĐIỀU HÀM SỐ

LÝ THUYẾT

❖ Điều kiện để hàm số đơn điệu trên khoảng K .

• Định nghĩa 1.

Giả sử K là một khoảng, một đoạn hoặc một nửa khoảng và $y = f(x)$ là một hàm số xác định trên K , ta nói:

Hàm số $y = f(x)$ được gọi là **đồng biến** (tăng) trên K nếu

$$\forall x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Hàm số $y = f(x)$ được gọi là **nghịch biến** (giảm) trên K nếu

$$\forall x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Hàm số đồng biến hoặc nghịch biến trên K gọi chung là **đơn điệu** trên K .

❖ Nhận xét.

• Nhận xét 1.

- Nếu hàm số $f(x)$ và $g(x)$ cùng đồng biến (nghịch biến) trên D thì hàm số $f(x) + g(x)$ cũng đồng biến (nghịch biến) trên D . Tính chất này có thể không đúng đối với hiệu $f(x) - g(x)$.

• Nhận xét 2.

- Nếu hàm số $f(x)$ và $g(x)$ là các hàm số dương và cùng đồng biến (nghịch biến) trên D thì hàm số $f(x) \cdot g(x)$ cũng đồng biến (nghịch biến) trên D . Tính chất này có thể không đúng khi các hàm số $f(x), g(x)$ không là các hàm số dương trên D .

• Nhận xét 3.

- Cho hàm số $u = u(x)$, xác định với $x \in (a; b)$ và $u(x) \in (c; d)$. Hàm số $f[u(x)]$ cũng xác định với $x \in (a; b)$. Ta có nhận xét sau:
- Giả sử hàm số $u = u(x)$ đồng biến với $x \in (a; b)$. Khi đó, hàm số $f[u(x)]$ đồng biến với $x \in (a; b) \Leftrightarrow f(u)$ đồng biến với $u \in (c; d)$.
- Giả sử hàm số $u = u(x)$ nghịch biến với $x \in (a; b)$. Khi đó, hàm số $f[u(x)]$ nghịch biến với $x \in (a; b) \Leftrightarrow f(u)$ nghịch biến với $u \in (c; d)$.

❖ Định lý 1.

- Giả sử hàm số f có đạo hàm trên khoảng K . Khi đó:

Nếu hàm số đồng biến trên khoảng K thì $f'(x) \geq 0, \forall x \in K$.

Nếu hàm số nghịch biến trên khoảng K thì $f'(x) \leq 0, \forall x \in K$.

❖ Định lý 2.

- Giả sử hàm số f có đạo hàm trên khoảng K . Khi đó:

Nếu $f'(x) > 0, \forall x \in K$ thì hàm số f đồng biến trên K .

Nếu $f'(x) < 0, \forall x \in K$ thì hàm số f nghịch biến trên K .

Nếu $f'(x) = 0, \forall x \in K$ thì hàm số f không đổi trên K .

❖ **Định lý về điều kiện đủ để hàm số đơn điệu:**

- Giả sử hàm số f có đạo hàm trên khoảng K . Khi đó:

Nếu $f'(x) \geq 0, \forall x \in K$ và $f'(x) = 0$ chỉ tại hữu hạn điểm thuộc K thì hàm số f đồng biến trên K .

Nếu $f'(x) \leq 0, \forall x \in K$ và $f'(x) = 0$ chỉ tại hữu hạn điểm thuộc K thì hàm số f nghịch biến trên K .

Bài toán 1. Tìm tham số m để hàm số $y = f(x; m)$ đơn điệu trên khoảng $(\alpha; \beta)$.

- Bước 1:** Ghi điều kiện để $y = f(x; m)$ đơn điệu trên $(\alpha; \beta)$. Chẳng hạn:
 - Đề yêu cầu $y = f(x; m)$ đồng biến trên $(\alpha; \beta) \Rightarrow y' = f'(x; m) \geq 0$.
 - Đề yêu cầu $y = f(x; m)$ nghịch biến trên $(\alpha; \beta) \Rightarrow y' = f'(x; m) \leq 0$.
- Bước 2:** Độc lập m ra khỏi biến số và đặt về còn lại là $g(x)$, có hai trường hợp thường gặp:
 - $m \geq g(x), \forall x \in (\alpha; \beta) \Rightarrow m \geq \max_{(\alpha; \beta)} g(x)$.
 - $m \leq g(x), \forall x \in (\alpha; \beta) \Rightarrow m \leq \min_{(\alpha; \beta)} g(x)$.
- Bước 3:** Khảo sát tính đơn điệu của hàm số $g(x)$ trên D (hoặc sử dụng Cauchy) để tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất. Từ đó suy ra m .

Bài toán 2. Tìm tham số m để hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ đơn điệu trên khoảng $(\alpha; \beta)$.

- Tìm tập xác định, chẳng hạn $x \neq -\frac{d}{c}$. Tính đạo hàm y' .
- Hàm số đồng biến $\Rightarrow y' > 0$ (hàm số nghịch biến $\Rightarrow y' < 0$). Giải ra tìm được m (1).
- Vì $x \neq -\frac{d}{c}$ và có $x \in (\alpha; \beta)$ nên $-\frac{d}{c} \notin (\alpha; \beta)$. Giải ra tìm được m (2).
- Lấy giao của (1) và (2) được các giá trị m cần tìm.

➤ **Cần nhớ:** “Nếu hàm số $f(t)$ đơn điệu một chiều trên miền D (luôn đồng biến hoặc luôn nghịch biến) thì phương trình $f(t) = 0$ có tối đa một nghiệm và $\forall u, v \in D$ thì $f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v$.

VÍ DỤ MINH HỌA

VÍ DỤ 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x-9)(x-4)^2$. Khi đó hàm số $y = f(x^2)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(3; +\infty)$. B. $(-3; 0)$. C. $(-\infty; -3)$. D. $(-2; 2)$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } y' = [f(x^2)]' = (x^2)' x^4 (x^2 - 9)(x^2 - 4)^2 = 2x^5 (x-3)(x+3)(x-2)^2 (x+2)^2.$$

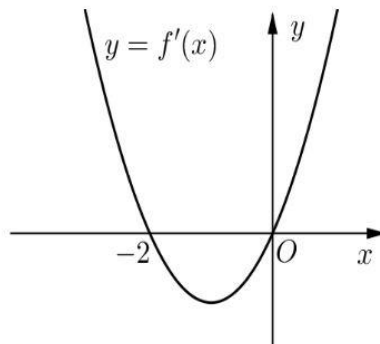
$$\text{Cho } y' = 0 \Leftrightarrow x = -3 \text{ hoặc } x = -2 \text{ hoặc } x = 0 \text{ hoặc } x = 2 \text{ hoặc } x = 3.$$

Ta có bảng xét dấu của y'

x	$-\infty$		-3		-2		0		2		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu, hàm số $y = f(x^2)$ nghịch biến trên $(-\infty; -3)$ và $(0; 3)$.

VÍ DỤ 2. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị hàm $f'(x)$ như hình vẽ bên. Hỏi hàm số $y = f(x^2 - 1)$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?



- A. $(-1; 0)$. B. $(0; 1)$. C. $(-\infty; 0)$. D. $(0; +\infty)$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } y' = 2x \cdot f'(x^2 - 1).$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 2x \cdot f'(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 1 = -2 \\ x^2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = -1 \\ x^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'			$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y									

Nhìn bảng biến thiên hàm số $y = f(x^2 - 1)$ nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$.

VÍ DỤ 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x+2)(x^2+mx+5)$ với $\forall x \in \mathbb{R}$. Số giá trị nguyên âm của m để hàm số $g(x) = f(x^2+x-2)$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$ là

A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. 7.

Lời giải

Chọn B

Ta có $g'(x) = (2x+1) \cdot f'(x^2+x-2)$. Để hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$

$$\Leftrightarrow g'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (1; +\infty) \Leftrightarrow f'(x^2+x-2) \geq 0 \quad \forall x \in (1; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow (x^2+x-2)^2(x^2+x) \left((x^2+x-2)^2 + m(x^2+x-2) + 5 \right) \geq 0 \quad \forall x \in (1; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow (x^2+x-2)^2 + m(x^2+x-2) + 5 \geq 0 \quad (1) \quad \forall x \in (1; +\infty).$$

Đặt $t = x^2 + x - 2$, $x \in (1; +\infty) \Rightarrow t > 0$.

$$\text{Khi đó (1) trở thành } t^2 + mt + 5 \geq 0 \quad \forall t \in (0; +\infty) \Leftrightarrow t + \frac{5}{t} \geq -m \quad (2) \quad \forall t \in (0; +\infty)$$

Đề (1) nghiệm đúng với mọi $x \in (1; +\infty) \Leftrightarrow (2)$ nghiệm đúng với mọi $t \in (0; +\infty)$.

Ta có $h(t) = t + \frac{5}{t} \geq 2\sqrt{5}$ với $\forall t \in (0; +\infty)$. Dấu bằng xảy ra khi $t = \frac{5}{t} \Leftrightarrow t = \sqrt{5}$.

Suy ra $\min_{t \in (0; +\infty)} (h(t)) = 2\sqrt{5} \Rightarrow (2) \text{ nghiệm đúng } \forall t \in (0; +\infty) \Leftrightarrow -m \leq 2\sqrt{5} \Leftrightarrow m \geq -2\sqrt{5}$.

Vậy số giá trị nguyên âm của m là 4.

VÍ DỤ 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$	-1	0	3	$+\infty$			
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Bất phương trình $f(x) < e^{x^2} + m$ đúng với mọi $x \in (-1; 1)$ khi và chỉ khi

A. $m \geq f(0) - 1$.

B. $m > f(-1) - e$.

C. $m > f(0) - 1$.

D. $m \geq f(-1) - e$.

Lời giải**Chọn C**

Có $f(x) < e^{x^2} + m, \forall x \in (-1; 1) \Leftrightarrow m > g(x) = f(x) - e^{x^2}, \forall x \in (-1; 1)$ (1)

Ta có $g'(x) = f'(x) - 2x \cdot e^{x^2}$ có nghiệm $x = 0 \in (-1; 1)$ và $\begin{cases} g'(x) > 0, \forall x \in (-1; 0) \\ g'(x) < 0, \forall x \in (0; 1) \end{cases}$.

Bảng biến thiên:

x	-1	0	1
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$		$f(0) - 1$	

Do đó $\max_{(-1;1)} g(x) = g(0) = f(0) - 1$. Ta được (1) $\Leftrightarrow m > f(0) - 1$.

VÍ DỤ 5. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-3	0	3	$+\infty$
y	4	1	3	1	3

Bất phương trình $f(x) < 3e^{x+2} + m$ có nghiệm $x \in (-2; 2)$ khi và chỉ khi:

A. $m \geq f(-2) - 3$. **B.** $m > f(2) - 3e^4$. **C.** $m \geq f(2) - 3e^4$. **D.** $m > f(-2) - 3$.

Lời giải**Chọn B**

Ta có: $f(x) < 3e^{x+2} + m \Leftrightarrow f(x) - 3e^{x+2} < m$.

Đặt $h(x) = f(x) - 3e^{x+2} \Rightarrow h'(x) = f'(x) - 3e^{x+2}$.

Vì $\forall x \in (-2; 2), f'(x) \leq 3$ và $x \in (-2; 2) \Rightarrow x + 2 \in (0; 4) \Rightarrow 3e^{x+2} \in (3; 3e^4)$

Nên $h'(x) = f'(x) - 3e^{x+2} < 0, \forall x \in (-2; 2) \Rightarrow f(2) - 3e^4 < h(x) < f(-2) - 3$.

Vậy bất phương trình $f(x) < 3e^{x+2} + m$ có nghiệm $x \in (-2; 2)$ khi và chỉ khi $m > f(2) - 3e^4$.

VÍ DỤ 6. Tổng các giá trị nguyên của tham số m trên khoảng $(-2020; 2020)$ để hàm số $y = \frac{\sin x - 3}{\sin x - m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$.

A. -2039187. **B.** 2022. **C.** 2093193. **D.** 2021.

Lời giải**Chọn A**

Điều kiện xác định: $\sin x \neq m$

Chủ đề 01: Cơ bản về tính đơn điệu của hàm số

Ta có $y = \frac{\sin x - 3}{\sin x - m} \Rightarrow y' = \frac{\cos x (\sin x - m) - (\sin x - 3) \cos x}{(\sin x - m)^2} = \frac{\cos x (3 - m)}{(\sin x - m)^2}$.

Vì $x \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right)$ nên $\cos x > 0$; $\sin x \in \left(0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

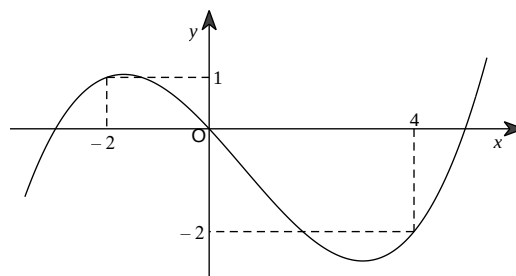
Suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - m > 0 \\ m \leq 0 \\ m \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \leq m < 3 \end{cases}$.

Vì $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-2019; -2018; \dots; -1; 0\} \cup \{1; 2\}$

Vậy tổng các giá trị của tham số m là: $S = \frac{-2019 + 0}{2} \cdot 2020 + 1 + 2 = -2039187$.

VÍ DỤ 7. Cho hàm số $f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên.

Hàm số $g(x) = f(1 - 2x) + x^2 - x$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây ?



A. $\left(1; \frac{3}{2}\right)$.

B. $\left(0; \frac{1}{2}\right)$.

C. $(-2; -1)$.

D. $(2; 3)$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1:

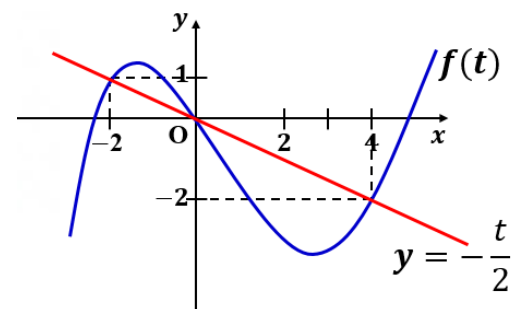
Ta có: $g(x) = f(1 - 2x) + x^2 - x \Rightarrow g'(x) = -2f'(1 - 2x) + 2x - 1$.

Hàm số nghịch biến $\Leftrightarrow g'(x) < 0 \Leftrightarrow f'(1 - 2x) > -\frac{1 - 2x}{2}$.

Xét sự tương giao của đồ thị hàm số $y = f'(t)$ và $y = -\frac{t}{2}$.

Dựa vào đồ thị ta có: $f'(t) > -\frac{t}{2} \Rightarrow \begin{cases} -2 < t < 0 \\ t > 4 \end{cases}$.

Khi đó: $g'(x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < 1 - 2x < 0 \\ 1 - 2x > 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2} \\ x < -\frac{3}{2} \end{cases}$.

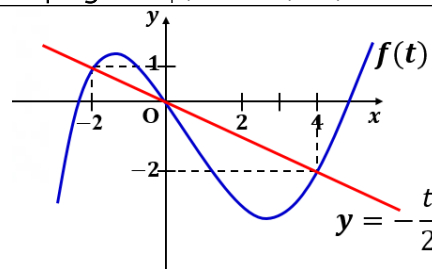


Cách 2:

Ta có: $g(x) = f(1 - 2x) + x^2 - x \Rightarrow g'(x) = -2f'(1 - 2x) + 2x - 1$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(1-2x) = -\frac{1-2x}{2}.$$

Xét sự tương giao của đồ thị hàm số $y = f'(t)$ và $y = -\frac{t}{2}$.



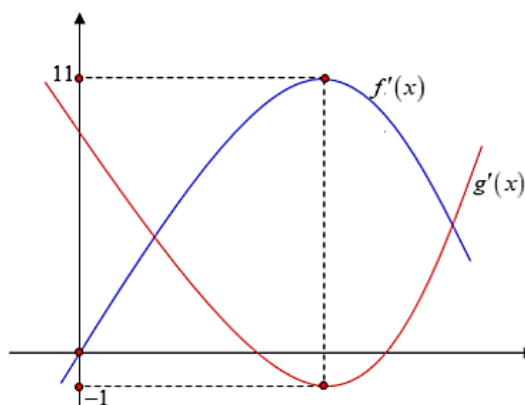
Từ đồ thị ta có: $f'(t) = -\frac{t}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \\ t = 0 \\ t = 4 \end{cases}$. Khi đó:

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1-2x = -2 \\ 1-2x = 0 \\ 1-2x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ x = \frac{1}{2} \\ x = -\frac{3}{2} \end{cases}. \text{ Ta có bảng xét dấu:}$$

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$				
$g'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy: hàm số nghịch biến trên các khoảng $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right)$ và $\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$.

VÍ DỤ 7. Cho hàm số $f(x)$ và $g(x)$ có một phần đồ thị biểu diễn đạo hàm $f'(x)$ và $g'(x)$ như hình vẽ dưới đây. Biết rằng hàm số $y = h(x) = f(x) - g(x) - a^2x + 2021$ luôn tồn tại một khoảng đồng biến là $(m; n)$. Tổng các giá trị nguyên dương a thỏa mãn là?



A. 5.

B. 6.

C. 7.

D. 8.

Lời giải

Chọn B

Ta có đạo hàm: $h'(x) = f'(x) - g'(x) - a^2$. Để hàm số đồng biến thì $h'(x) \geq 0$.

$$\Rightarrow a^2 \leq f'(x) - g'(x). \text{ Từ đồ thị, ta có } f'(x) - g'(x) \geq 12 \Rightarrow a^2 \leq 12.$$

Suy ra số giá trị nguyên dương của a thỏa mãn là $a \in \{1; 2; 3\}$.

Vậy tổng các giá trị của a thỏa mãn là 6.

DẠNG 1**Cơ bản về tính đơn điệu của hàm số**

Câu 1: Hàm số nào dưới đây luôn đồng biến trên tập $\mathbb{R}$?

- A. $y = x^2 + 2x + 1$ B. $y = x - \sin x$. C. $y = \frac{3x+2}{5x+7}$. D. $y = \ln(x+3)$.

Câu 2: Hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x$ nghịch biến trên khoảng nào?

- A. $(2;3)$. B. $(1;6)$. C. $(-6;-1)$. D. $(-3;-2)$.

Câu 3: Kết luận nào sau đây về tính đơn điệu của hàm số $y = \frac{3x-1}{x-2}$ là đúng?

- A. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$.
 B. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.
 C. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$.
 D. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Câu 4: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;2)$. B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$.
 C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$. D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

Câu 5: Hàm số nào sau đây đồng biến trên $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$?

- A. $y = \frac{x-1}{x+2}$. B. $y = \frac{1}{x-2}$ C. $y = \frac{2x-5}{x-2}$. D. $y = \frac{x-1}{x-2}$.

Câu 6: Cho hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

- A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;3)$. B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(3;+\infty)$.
 C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$. D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;3)$.

Câu 7: Cho hàm số $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 6x + \frac{3}{4}$

- A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2;3)$. B. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;-2)$.
 C. Hàm số đồng biến trên $(-2;+\infty)$. D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2;3)$.

Câu 8: Cho hàm số $y = \sqrt{x^2 - 1}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$. B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$.
 C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$. D. Hàm số đồng biến trên $(-\infty;+\infty)$.

Câu 9: Hàm số $z^2 - 4z + 5 = 0$ đồng biến trên khoảng

- A. $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$ B. $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$ C. $(0; +\infty)$ D. $(-\infty; 0)$

Câu 10: Trong các hàm sau đây, hàm số nào không nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

A. $y = -\frac{1}{x^2 + 1}$. B. $y = \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} \right)^x$. C. $y = -x^3 + 2x^2 - 7x$. D. $y = -4x + \cos x$.

Câu 11: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2 + 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$. B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.
C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$. D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

Câu 12: Trong các hàm số sau, hàm số nào vừa có khoảng đồng biến vừa có khoảng nghịch biến trên tập xác định của nó. (I). $y = \frac{2x+1}{x+1}$, (II). $y = -x^4 + x^2 - 2$, (III). $y = x^3 + 3x - 4$.

- A. (I); (III). B. (I) & (II). C. (II); (III). D. (II).

Câu 13: Cho hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 - x + 1$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

- A. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
B. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.
C. Hàm số đồng biến trên $(1; +\infty)$ và nghịch biến trên $(-\infty; 1)$.
D. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 1)$ và nghịch biến trên $(1; +\infty)$.

Câu 14: Cho hàm số $y = \frac{x+1}{1-x}$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- A. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.
B. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.
C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.
D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.

Câu 15: Cho các hàm số $y = \frac{x+1}{x+2}, y = \tan x, y = x^3 + x^2 + 4x - 2017$. Số hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ là

- A. 0. B. 3. C. 1. D. 2.

Câu 16: Tìm tất cả giá trị của tham số m để hàm số $y = mx^2 - (m+6)x$ nghịch biến trên khoảng $(-1; +\infty)$

- A. $-2 \leq m \leq 0$. B. $-2 \leq m < 0$. C. $m \leq -2$. D. $m \geq -2$.

Câu 17: Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{-x+1}$. Mệnh đề nào dưới đây là **đúng**?

- A. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$
B. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$
C. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$
D. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$

Câu 18: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2 - 2x, \forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số $y = -2f(x)$ đồng biến trên khoảng

- A. $(-2; 0)$. B. $(0; 2)$. C. $(2; +\infty)$. D. $(-\infty; -2)$.

Câu 19: Cho hàm số $y = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 - 1$. Chọn khẳng định đúng.

- A. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-2;0)$ và $(2;+\infty)$.
 B. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $(0;2)$.
 C. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-2;0)$ và $(2;+\infty)$.
 D. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $(2;+\infty)$.

Câu 20: Hàm số nào sau đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

- A. $y = x^4 - 2x^2 - 1$. B. $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x + 1$. C. $y = \frac{x-1}{x+2}$. D.
 $y = x^3 + 4x^2 + 3x - 1$.

Câu 21: Trong các hàm số sau, hàm số nào đồng biến trên $(1;+\infty)$?

- A. $y = \log_3 x$. B. $y = \frac{x-1}{x^2+2}$. C. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. D. $y = \frac{x-3}{x-2}$.

Câu 22: Hàm số $y = -x^4 + 4x^2 + 1$ nghịch biến trên mỗi khoảng nào sau đây?

- A. $(\sqrt{2};+\infty)$. B. $(-\sqrt{3};0);(\sqrt{2};+\infty)$. C. $(-\sqrt{2};0);(\sqrt{2};+\infty)$. D. $(-\sqrt{2};\sqrt{2})$.

Câu 23: Hàm số $y = x^3 - 3x^2$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-1;1)$. B. $(-\infty;1)$. C. $(0;2)$. D. $(2;+\infty)$.

Câu 24: Hàm số nào sau đây đồng biến trên khoảng $(0;2)$?

- A. $y = -x^3 + 3x^2$. B. $y = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}$. C. $y = \frac{2x-1}{x-1}$. D. $y = \frac{x}{\ln x}$.

Câu 25: Hàm số nào sau đây nghịch biến trên $(1;3)$?

- A. $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$. B. $y = \frac{x+1}{x+2}$. C. $y = \frac{x^2-2x+1}{x-2}$. D. $y = \sqrt{x^2+1}$.

Câu 26: Cho hàm số $y = \frac{2x+5}{x+1}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. Hàm số luôn luôn nghịch biến trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
 B. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.
 C. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.
 D. Hàm số luôn luôn đồng biến trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Câu 27: Hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 1$ đồng biến trên khoảng nào?

- A. $\forall x \in \mathbb{R}$. B. $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$. C. $(-1;0)$. D. $(1;+\infty)$.

Câu 28: Hàm số nào sau đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

- A. $y = \frac{x}{x+1}$. B. $y = x+1$. C. $y = x^4 + 1$. D. $y = x^2 + 1$.

Câu 29: Hàm số $y = x^4 - 2$ nghịch biến trên khoảng nào?

- A. $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$. B. $(-\infty; 0)$. C. $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$. D. $(0; +\infty)$.

Câu 30: Cho hàm số $f(x) = \frac{3x+1}{-x+1}$. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng?

- A. $f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$. B. $f(x)$ đồng biến trên $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.
C. $f(x)$ nghịch biến trên $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$. D. $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 31: Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 + x + 1$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup (1; +\infty)$.
B. Hàm số đồng biến trên $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup (1; +\infty)$.
C. Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$.
D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{1}{3}; 1\right)$.

Câu 32: Cho hàm $y = \sqrt{x^2 - 6x + 5}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(5; +\infty)$. B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$.
C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$. D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 3)$.

Câu 33: Hàm số $y = -x^4 + 2x^2 + 2$ nghịch biến trên.

- A. $(-1; 0); (1; +\infty)$. B. $(-1; 1)$. C. $\mathbb{R}$. D. $(-\infty; -1); (0; 1)$.

Câu 34: Hàm số nào sau đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

- A. $y = x^3 + 3x + 1$. B. $y = x^3 - 3x + 1$. C. $y = x^2 + 1$. D. $y = -x\sqrt{2} + 1$.

Câu 35: Hàm số $y = \frac{x+2}{x-1}$ nghịch biến trên các khoảng:

- A. $(-1; +\infty)$. B. $(1; +\infty)$. C. $(-\infty; 1); (1; +\infty)$. D. $(3; +\infty)$.

Câu 36: Cho hàm số $y = \frac{x+3}{x-3}$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- A. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R} \setminus \{3\}$.
B. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \setminus \{3\}$.
C. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 3)$ và $(3; +\infty)$.
D. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 3)$ và $(3; +\infty)$.

Câu 37: Tìm tất cả các khoảng đồng biến của hàm số $y = \sqrt{9 - x^2}$.

- A. $(0; +\infty)$. B. $(-\infty; 0)$. C. $(-3; 0)$. D. $(0; 3)$.

Câu 38: Trong các hàm số sau, hàm số nào nghịch biến trên tập xác định của nó?

A. $y = x^4 + 2x^2 + 5$. B. $y = -2x^3 - 3x + 5$. C. $y = -x^4 - x^2$. D. $y = \frac{x+1}{-x+3}$.

Câu 39: Hàm số nào sau đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y = x^4 + 2x^2 + 3$ B. $y = \frac{x-1}{x+3}$ C. $y = -x^3 - x - 2$ D. $y = x^3 + x^2 + 2x + 1$

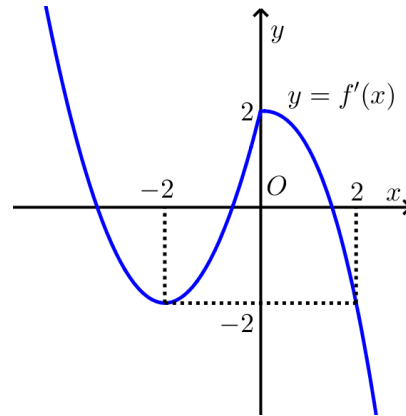
Câu 40: Trong các hàm số sau, hàm số nào đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y = x^3 - 3x^2 + 3x - 2$. B. $y = \frac{x-1}{x+1}$. C. $y = x^4 + 2x^2 + 1$. D. $y = -\frac{x^3}{3} + 3x + 2$.

Câu 41: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x-9)(x-4)^2$. Khi đó hàm số $y = f(x^2)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(3; +\infty)$. B. $(-3; 0)$. C. $(-\infty; -3)$. D. $(-2; 2)$.

Câu 42: Cho $f(x)$ mà đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Hàm số $y = f(x-1) + x^2 - 2x$ đồng biến trên khoảng



A. $(1; 2)$. B. $(-1; 0)$. C. $(0; 1)$. D. $(-2; -1)$.

Câu 43: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2 - 2x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số $g(x) = f\left(2 - \sqrt{x^2 + 1}\right) - \sqrt{x^2 + 1} - 3$ đồng biến trên các khoảng nào dưới đây?

A. $(-2; -1)$. B. $(-1; 1)$. C. $(1; 2)$. D. $(2; 3)$.

Câu 44: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = x^2(x-2)(x^2 - 6x + m)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên m thuộc đoạn $[-2019; 2019]$ để hàm số $g(x) = f(1-x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$?

A. 2012. B. 2011. C. 2009. D. 2010.

Câu 45: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-1)^2(x-2)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số $g(x) = f\left(\frac{5x}{x^2 + 4}\right)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $(-\infty; -2)$. B. $(-2; 1)$. C. $(0; 2)$. D. $(2; 4)$.

Câu 46: Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

Chủ đề 01: Cơ bản về tính đơn điệu của hàm số

x	$-\infty$	$-\frac{5}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$	3	$+\infty$		
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

Xét hàm số $g(x) = f\left(\frac{x-1}{2}\right) - \frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 - 2x + 3$. Khẳng định nào sau đây sai?

- A. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trong khoảng $(-1;0)$.
- B. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$.
- C. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trong khoảng $(-4;-1)$.
- D. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(2;3)$.

Câu 47: Tìm tập hợp S tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - (m+1)x^2 + (m^2+2m)x - 3$ nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

- A. $S = [-1;0]$.
- B. $S = \emptyset$.
- C. $S = \{-1\}$.
- D. $S = \{1\}$.

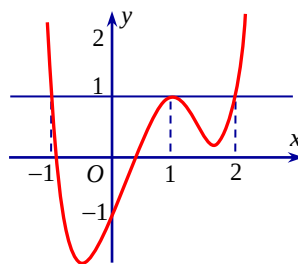
Câu 48: Tổng tất cả các giá trị thực của m để hàm số $y = \frac{1}{5}m^2x^5 - \frac{1}{3}mx^3 + 10x^2 - (m^2 - m - 20)x + 1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ bằng

- A. $\frac{5}{2}$.
- B. -2 .
- C. $\frac{1}{2}$.
- D. $\frac{3}{2}$.

Câu 49: Cho hàm số $y = f(x)$ có $f'(x) = (x-2)(x+5)(x+1)$. Hàm số $y = f(x^2)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(0;1)$.
- B. $(-1;0)$.
- C. $(-2;-1)$.
- D. $(-2;0)$.

Câu 50: Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Đặt $g(x) = f(x) - x$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



- A. $g(1) < g(-1) < g(2)$.
- B. $g(-1) < g(1) < g(2)$.
- C. $g(2) < g(1) < g(-1)$.
- D. $g(2) < g(-1) < g(1)$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.B	2.A	3.A	4.C	5.C	6.A	7.A	8.A	9.C	10.A
11.C	12.D	13.A	14.A	15.C	16.A	17.C	18.B	19.C	20.B
21.A	22.C	23.C	24.A	25.A	26.C	27.B	28.B	29.B	30.B
31.D	32.A	33.A	34.A	35.C	36.D	37.D	38.B	39.D	40.A
41.C	42.A	43.A	44.B	45.D	46.B	47.C	48.C	49.B	50.C

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT**Câu 1: Chọn B**

Ta có hàm số $y = x - \sin x$ có tập xác định $D = \mathbb{R}$ và $y' = 1 - \cos x \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ nên luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 2: Chọn A

Ta có: $y' = x^2 - 5x + 6$; $y' < 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 < 0 \Leftrightarrow 2 < x < 3$

Suy ra hàm số nghịch biến trên khoảng $(2; 3)$.

Câu 3: Chọn A

Ta có $y' = \frac{-5}{(x-2)^2} < 0, \forall x \neq 2$.

Do đó hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$.

Câu 4: Chọn C

Ta có: $y' = 3x^2 - 6x$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$

Do đó hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$ và đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 0)$; $(2; +\infty)$.

Câu 5: Chọn C**Câu 6: Chọn A****Câu 7: Chọn A**

Ta có $f'(x) = x^2 - x - 6$ có hai nghiệm phân biệt là -2 và 3 .

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-2; 3)$. Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2; 3)$.

Câu 8: Chọn A

Hàm số có tập xác định $D = (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$ nên loại **A, B, D**.

Câu 9: Chọn C

$y' = 8x^3 \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow y' > 0 \Leftrightarrow x > 0$; $y' < 0 \Leftrightarrow x < 0$.

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$

Câu 10: Chọn A

Với $y = -\frac{1}{x^2 + 1}$ ta có $y' = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$

$y' > 0$ khi $x > 0$ và $y' < 0$ khi $x < 0$ nên hàm số không nghịch biến trên $\mathbb{R}$

Câu 11: Chọn C

Ta có $f'(x) = x^2 + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

Câu 12: Chọn D

(I): TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. $y' = \frac{1}{(x+1)^2} > 0 \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \Rightarrow$ (I) không thỏa.

(Nhận xét: đây là hàm nhất biến nên không thỏa).

(II): TXĐ: $D = \mathbb{R}, y' = -4x^3 + 2x, y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$.

Bảng xét dấu.

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$	
y'		$+$	0	$-$	0	$-$

Vậy (II) thỏa.

(Nhận xét, $y' = 0$ là phương trình bậc ba có đủ 3 nghiệm nên luôn đổi dấu trên $\mathbb{R}$ nên (II) thỏa).

(III): TXĐ: $D = \mathbb{R}, y' = 3x^2 + 3 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$. Vậy (III) không thỏa.

Câu 13: Chọn A

$y' = -x^2 + 2x - 1 = -(x-1)^2 \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 14: Chọn A

Hàm số $y = \frac{x+1}{1-x}$ có tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ và có đạo hàm $y' = \frac{2}{(x-1)^2} > 0 \forall x \in D$ nên

khẳng định A đúng.

Câu 15: Chọn C

Loại hai hàm số $y = \frac{x+1}{x+2}, y = \tan x$ vì không xác định trên $\mathbb{R}$.

Với hàm số $y = x^3 + x^2 + 4x - 2017$ ta có $y' = 3x^2 + 2x + 4 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 16: Chọn A

$y' = 2mx - (m+6)$. Theo yêu cầu bài toán ta có $y' \leq 0, \forall x \in (-1; +\infty)$.

Ta có $2mx - (m+6) \leq 0 \Leftrightarrow m \leq \frac{6}{2x-1}$.

Xét hàm số $g(x) = \frac{6}{2x-1}$ với $x \in (-1; +\infty)$.

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
y'			$-$		$-$		
y	0				$+\infty$		0

Vậy $-2 \leq m \leq 0$.

Câu 17: Chọn C

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Ta có $y' = \frac{3}{(-x+1)^2} > 0$ với mọi $x \neq 1$.

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

Câu 18: Chọn B

Ta có: $y' = -2f'(x) = -2x^2 + 4x > 0 \Leftrightarrow x \in (0; 2)$.

Suy ra: Hàm số $y = -2f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0; 2)$

Câu 19: Chọn C

Phân tích: Xét phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 2 \end{cases}$.

Theo dạng đồ thị hàm bậc bốn trùng phương có hệ số $a = \frac{1}{4} > 0$ nên ở đây ta có thể xác định nhanh hàm số đồng biến trên $(-2; 0)$ và $(2; +\infty)$, hàm số nghịch biến trên $(-\infty; -2)$ và $(0; 2)$.

Câu 20: Chọn B

Hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x + 1$ có $y' = x^2 - x + 3 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Câu 21: Chọn A

Ta có hàm số $y = a^x, y = \log_a x$ đồng biến trên tập xác định nếu $a > 1$.

Do đó hàm số $y = \log_3 x$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Câu 22: Chọn C

$y' = -4x^3 + 8x = 4x(-x^2 + 2) = 0 \Rightarrow x = 0, x = \pm\sqrt{2}$.

Câu 23: Chọn C

Ta có $y' = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$.

Do đó, $y' < 0 \Leftrightarrow x < 0 < 2$.

Theo dấu hiệu nhận biết tính đơn điệu của hàm số, hàm số nghịch biến trên $(0; 2)$.

Câu 24: Chọn A

Xét hàm số $y = -x^3 + 3x^2$ có $y' = -3x^2 + 6x$.

Chủ đề 01: Cơ bản về tính đơn điệu của hàm số

$$y' = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ hoặc } x = 2.$$

Xét dấu y' ta có hàm số đồng biến trên $(0; 2)$.

Câu 25: Chọn A

Xét hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$. Ta có $y' = x^2 - 4x + 3$. $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$.

Bảng biến thiên.

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$			
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$		$\frac{7}{3}$		1		$+\infty$

Do đó hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; 3)$.

Câu 26: Chọn C

$$y' = \frac{-3}{(x+1)^2} < 0 \Rightarrow \text{Hàm số nghịch biến trên các khoảng } (-\infty; -1) \text{ và } (-1; +\infty).$$

Câu 27: Chọn B

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
y'		-	0	+	0	-	0	+
y								

Hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 1$ đồng biến trên mỗi khoảng $(-1; 0)$; $(1; +\infty)$.

Câu 28: Chọn B

Hàm số $y = x + 1$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $y' = 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 29: Chọn B

Ta có: $y' = x^3$. Hàm số nghịch biến $\Rightarrow y' = x^3 < 0 \Leftrightarrow x < 0$.

Câu 30: Chọn B

$$\text{Tập xác định } D = \mathbb{R} \setminus \{1\}. f'(x) = \frac{4}{(-x+1)^2} > 0, \forall x \neq 1.$$

Vậy hàm đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

Câu 31: Chọn D

$$\text{Ta có } y' = 3x^2 - 4x + 1. y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{1}{3} \end{cases}.$$

Bảng xét dấu y' :

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	1	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$

Dựa vào bảng xét dấu ta có $y' < 0 \forall x \in \left(\frac{1}{3}; 1\right)$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{1}{3}; 1\right)$.

Câu 32: Chọn A

Tập xác định: $D = (-\infty; 1] \cup [5; +\infty)$. Ta có $y' = \frac{x-3}{\sqrt{x^2-6x+5}} > 0, \forall x \in (5; +\infty)$.

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(5; +\infty)$.

Câu 33: Chọn A

Ta có $y' = -4x^3 + 4x$. $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$				
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y			3		2		3		
	$-\infty$								$-\infty$

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 0); (1; +\infty)$.

Câu 34: Chọn A

Hàm số $y = -x\sqrt{2} + 1$ luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ có $y' = x^2 - 3$ nên hàm số không thể đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Hàm số $y = x^2 + 1$ có $y' = 2x$ nên hàm số không thể đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Hàm số $y = x^3 + 3x + 1$ có: $y' = 3x^2 + 3 \geq 0 \forall x$.

Câu 35: Chọn C

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. $y' = \frac{-3}{(x-1)^2} < 0, \forall x \in D$.

Suy ra: Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 1); (1; +\infty)$.

Câu 36: Chọn D

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

Ta có $y' = \frac{-6}{(x-3)^2} < 0, \forall x \in D$ do đó hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 3)$ và $(3; +\infty)$.

Câu 37: Chọn C

Tập xác định $D = [-3; 3]$.

Ta có $y' = \frac{-x}{\sqrt{9-x^2}}; y' < 0 \forall x \in (0; 3)$, suy ra hàm số đã cho đồng biến trên $(-3; 0)$.

Câu 38: Chọn B

Chủ đề 01: Cơ bản về tính đơn điệu của hàm số

Hàm trùng phương không nghịch biến trên tập xác định của nó.

Với $y = \frac{x+1}{-x+3}$ ta có: $y' = \frac{4}{(-x+3)^2} > 0, \forall x \neq 3$. Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định.

Với $y = -2x^3 - 3x + 5$ ta có: $y' = -6x^2 - 3 < 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 39: Chọn D

Xét hàm: $y = x^3 + x^2 + 2x + 1$.

Ta có: $y' = 3x^2 + 2x + 2 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, nên hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 40: Chọn A

Ta có $y = x^3 - 3x^2 + 3x - 2 \Rightarrow y' = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x-1)^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ và $y' = 0$ chỉ tại $x = 1$.

Vậy $y = x^3 - 3x^2 + 3x - 2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 41: Chọn C

Ta có $y' = [f(x^2)]' = (x^2)' x^4 (x^2 - 9)(x^2 - 4)^2 = 2x^5 (x-3)(x+3)(x-2)^2 (x+2)^2$.

Cho $y' = 0 \Leftrightarrow x = -3$ hoặc $x = -2$ hoặc $x = 0$ hoặc $x = 2$ hoặc $x = 3$.

Ta có bảng xét dấu của y'

x	$-\infty$	-3	-2	0	2	3	$+\infty$	
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Dựa vào bảng xét dấu, hàm số $y = f(x^2)$ nghịch biến trên $(-\infty; -3)$ và $(0; 3)$.

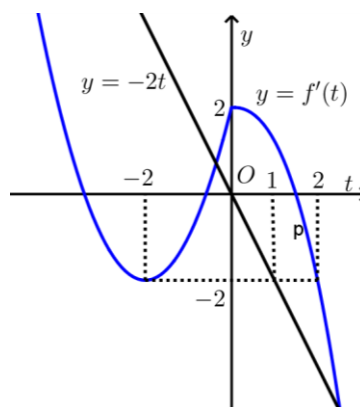
Câu 42: Chọn A

Ta có $y = f(x-1) + x^2 - 2x$

Khi đó $y' = f'(x-1) + 2x - 2$. Hàm số đồng biến khi $y' \geq 0 \Leftrightarrow f'(x-1) + 2(x-1) \geq 0$ (1)

Đặt $t = x - 1$ thì (1) trở thành: $f'(t) + 2t \geq 0 \Leftrightarrow f'(t) \geq -2t$.

Quan sát đồ thị hàm số $y = f'(t)$ và $y = -2t$ trên cùng một hệ trục tọa độ như hình vẽ.



Khi đó ta thấy với $t \in (0; 1)$ thì đồ thị hàm số $y = f'(t)$ luôn nằm trên đường thẳng $y = -2t$.

Suy ra $f'(t) + 2t > 0, \forall t \in (0; 1)$. Do đó $\forall x \in (1; 2)$ thì hàm số $y = f(x-1) + x^2 - 2x$ đồng biến.

Câu 43: Chọn A

Ta có $g'(x) = f'(2 - \sqrt{x^2 + 1}) \cdot \frac{-x}{\sqrt{x^2 + 1}} - \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{-x}{\sqrt{x^2 + 1}} [f'(2 - \sqrt{x^2 + 1}) + 1]$.

Vì $f'(x) = x^2 - 2x = (x - 1)^2 - 1$ nên $f'(x) \geq -1, \forall x \in \mathbb{R}$ hay $f'(x) + 1 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

$f'(x) = -1 \Leftrightarrow x^2 - 2x = -1 \Leftrightarrow x = 1$. Do đó $f'(2 - \sqrt{x^2 + 1}) + 1 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Và $f'(2 - \sqrt{x^2 + 1}) + 1 = 0 \Leftrightarrow f'(2 - \sqrt{x^2 + 1}) = -1 \Leftrightarrow 2 - \sqrt{x^2 + 1} = 1 \Leftrightarrow x = 0$.

BBT:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	$-\infty$	0	$-\infty$

Dựa vào BBT, suy ra hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.

Vậy hàm số đã cho đồng biến trên $(-2; -1)$.

Câu 44: Chọn B

Ta có:

$$g'(x) = f'(1-x) \cdot (1-x)' = -(1-x)^2(-x-1)(x^2+4x-5+m) = (1-x)^2(x+1)(x^2+4x-5+m).$$

Để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ thì $g'(x) \leq 0$, bằng không tại một số điểm hữu hạn với mọi $x \in (-\infty; -1)$.

Do $(1-x)^2(x+1) < 0$ với mọi $x \in (-\infty; -1)$, nên

$$g'(x) \leq 0 \text{ với mọi } x \in (-\infty; -1) \Leftrightarrow x^2 + 4x - 5 + m \geq 0 \text{ với mọi } x \in (-\infty; -1) \Leftrightarrow m \geq -x^2 - 4x + 5$$

với mọi $x \in (-\infty; -1)$.

Xét hàm số $h(x) = -x^2 - 4x + 5$ trên $(-\infty; -1)$. Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-2	-1
$h'(x)$	$+$	0	$-$
$h(x)$	$-\infty$	9	8

Từ bảng biến thiên suy ra $m \geq 9$, kết hợp với điều kiện m nguyên và thuộc đoạn $[-2019; 2019]$ suy ra có 2011 số nguyên m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 45: Chọn D

$$\text{Cho } f'(x) = 0 \Leftrightarrow x(x-1)^2(x-2) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1(\text{ngheiem_kep}) \\ x = 2 \end{cases}$$

$$\text{Ta có } g'(x) = \frac{-5x^2 + 20}{(x^2 + 4)^2} f'\left(\frac{5x}{x^2 + 4}\right). \text{ Cho } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-5x^2 + 20}{(x^2 + 4)^2} f'\left(\frac{5x}{x^2 + 4}\right) = 0$$

$$\text{Dựa và } f'(x) \text{ ta có: } \begin{cases} -5x^2 + 20 = 0 \\ \frac{5x}{x^2 + 4} = 0 \\ \frac{5x}{x^2 + 4} = 1 \\ \frac{5x}{x^2 + 4} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 2 \\ x = 0 \\ x = 1(\text{ngheiem_kep}) \\ x = 4(\text{ngheiem_kep}) \end{cases}$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-2		0		1		2		4		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	

Suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(2; 4)$.

Câu 46: Chọn B

$$\text{Cách 1: Ta có } g'(x) = \frac{1}{2} f'\left(\frac{x-1}{2}\right) - (x^2 - 3x + 2)$$

$$f'\left(\frac{x-1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-1}{2} = -\frac{5}{2} \\ \frac{x-1}{2} = -1 \\ \frac{x-1}{2} = \frac{1}{2} \\ \frac{x-1}{2} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ x = -1 \\ x = 2 \\ x = 7 \end{cases}; f'\left(\frac{x-1}{2}\right) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-1}{2} < -\frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} < \frac{x-1}{2} < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -4 \\ 2 < x < 7 \end{cases}$$

Bảng xét dấu cho các biểu thức

x	$-\infty$	-4	-1	0	1	2	7	$+\infty$
$f'\left(\frac{x-1}{2}\right)$	$+$	0	$-$	0	$-$	$-$	0	$-$
$-(x^2 - 3x + 2)$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g'(x)$		$-$	$-$	$-$				$-$

Từ bảng xét dấu đáp án B sai, vì $x \in (0; 1) \subset (0; 2)$ thì $g'(x) < 0$. Hàm số nghịch biến.

Cách 2: Thử trực tiếp

$$\text{Ta có } g'(x) = \frac{1}{2} f'\left(\frac{x-1}{2}\right) - (x^2 - 3x + 2)$$

$$\text{Đáp án A: chọn } x = -\frac{1}{2} \in (-1; 0) \text{ thì } g'\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} f'\left(-\frac{3}{4}\right) - \frac{15}{4} < 0$$

$$\text{Đáp án B: chọn } x = \frac{1}{2} \in (0; 2) \text{ thì } g'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} f'\left(-\frac{1}{4}\right) - \frac{3}{4} < 0, \text{ sai}$$

Tương tự cho các đáp án còn lại.

Câu 47: Chọn C

Ta có $y' = x^2 - 2(m+1)x + (m^2 + 2m)$.

Để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$ thì

$$y' \leq 0 \quad \forall x \in (-1;1) \Leftrightarrow x^2 - 2(m+1)x + (m^2 + 2m) \leq 0 \quad \forall x \in (-1;1).$$

$$\text{Ta có } y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2(m+1)x + (m^2 + 2m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ x = m+2 \end{cases}.$$

Bảng xét dấu y' :

x	$-\infty$	m	$m+2$	$+\infty$	
y'	+	0	-	0	+

Từ bảng xét dấu ta thấy để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$ thì

$$\begin{cases} m \leq -1 \\ m+2 \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -1 \\ m \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1.$$

Câu 48: Chọn C

$$y = \frac{1}{5}m^2x^5 - \frac{1}{3}mx^3 + 10x^2 - (m^2 - m - 20)x + 1 \Rightarrow y' = m^2x^4 - mx^2 + 20x - m^2 + m + 20 \geq 0.$$

Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' = m^2x^4 - mx^2 + 20x - m^2 + m + 20 \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$ và dấu "=" xảy ra chỉ tại một số hữu hạn điểm.

Điều kiện cần:

Ta thấy phương trình $y' = 0$ có một nghiệm $x = -1$ nên để $y' \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$ thì y' không đổi dấu khi qua $x = -1$, khi đó phương trình $y' = 0$ có nghiệm kép là $x = -1$ ($x = -1$ không thể là nghiệm bội 4 của phương trình $y' = 0$ vì y' không chứa số hạng x^3).

$$\text{Ta suy ra được } y''(-1) = 0 \Leftrightarrow -4m^2 + 2m + 20 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2 \\ m = \frac{5}{2} \end{cases}.$$

Điều kiện đủ:

Với $m = -2$, ta có

$$y' = 4x^4 + 2x^2 + 20x + 14 = 4(x+1)^2 \left[(x-1)^2 + \frac{5}{2} \right] \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ nên hàm số đồng biến trên } \mathbb{R}.$$

Suy ra $m = -2$ thỏa mãn điều kiện của đề bài.

Với $m = \frac{5}{2}$, ta có

$$y' = \frac{25}{4}x^4 - \frac{5}{2}x^2 + 20x + \frac{65}{4} = \frac{25}{4}(x+1)^2 \left[(x-1)^2 + \frac{8}{5} \right] \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ nên hàm số đồng biến trên}$$

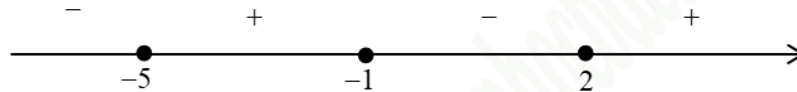
$\mathbb{R}$. Suy ra $m = \frac{5}{2}$ thỏa mãn điều kiện của đề bài.

Chủ đề 01: Cơ bản về tính đơn điệu của hàm số

Vậy $m = -2$, $m = \frac{5}{2}$ là các giá trị cần tìm. Khi đó tổng các giá trị thực của m thỏa mãn yêu cầu bài toán là $-2 + \frac{5}{2} = \frac{1}{2}$.

Câu 49: Chọn B

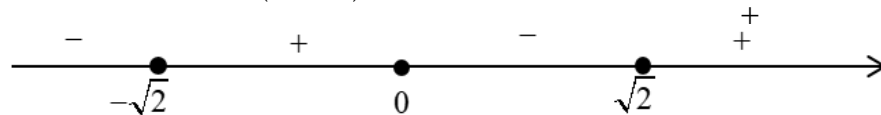
Xét dấu $f'(x)$:



$$\text{Ta có: } y' = (f(x^2))' = 2x \cdot f'(x^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(x^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = 2 \\ x^2 = -5 \\ x^2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \sqrt{2} \\ x = -\sqrt{2} \end{cases}.$$

Chọn $x = 1 \in (0; \sqrt{2})$ ta có $y'(1) = 2 \cdot 1 \cdot f'(1^2) = 2 \cdot f'(1) < 0$. Do đó, cả khoảng $(0; \sqrt{2})$ âm.

Từ đó ta có trục xét dấu của $y' = (f(x^2))'$ như sau:



Từ trục xét dấu trên ta thấy: Hàm số $y = f(x^2)$ đồng biến trên $(-1; 0)$.

Câu 50: Chọn C

$$\text{Xét hàm số } g(x) = f(x) - x, \Rightarrow g'(x) = f'(x) - 1, g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên

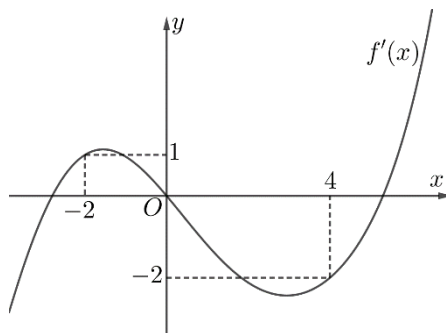
x	$-\infty$	-1		1		2	$+\infty$	
g'		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$
g			$g(-1)$		$g(1)$		$g(2)$	

$-\infty \nearrow \searrow \nearrow \searrow \nearrow$

Vậy $g(2) < g(1) < g(-1)$.

DẠNG 3**Tính đơn điệu của hàm hợp số 02**

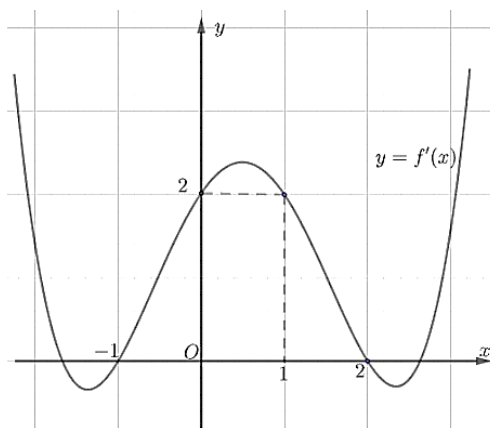
Câu 1: Cho hàm số đa thức $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết $f(0) = 0$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình sau.



Hàm số $g(x) = |4f(x) + x^2|$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(4; +\infty)$. B. $(0; 4)$. C. $(-\infty; -2)$. D. $(-2; 0)$.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Số tham số m nguyên thuộc đoạn $[-20; 20]$ để hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 2)$ biết $g(x) = 3f(-x^3 - 3x + m) + (x^3 + 3x - m)^2(-2x^3 - 6x + 2m - 6)$.



- A. 23. B. 21. C. 5. D. 17.

Câu 3: Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-2021; 2021]$ để hàm số $g(x) = |x^3 - 3mx^2 - 3(m+2)x - m + 1|$ đồng biến trên khoảng $(0; 3)$?

- A. 4041. B. 4042. C. 2021. D. 4039.

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	1	2	3	4	$+\infty$			
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Hàm số $y = 3f(2x-1) - 4x^3 + 15x^2 - 18x + 1$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây

- A. $(3; +\infty)$. B. $\left(1; \frac{3}{2}\right)$. C. $\left(\frac{5}{2}; 3\right)$. D. $\left(2; \frac{5}{2}\right)$.

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x+4)(x^2+2mx+9)$ với $\forall x \in \mathbb{R}$. Số giá trị nguyên âm của m để hàm số $g(x) = f(x^2+3x-4)$ đồng biến trên $(1; +\infty)$?

- A. 1. B. 3. C. 2. D. 4.

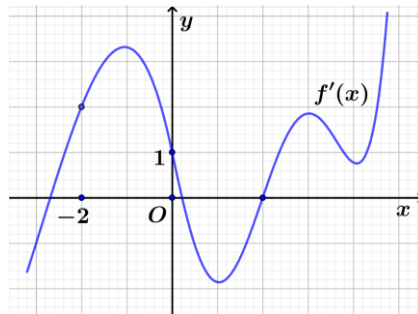
Câu 6: Cho hàm số $f(x) = -x^4 - (4-m^2)x + 2020$ và $g(x) = -x^3 + 5x^2 - 2020x + 2021$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để $h(x) = g[f(x)]$ đồng biến trên $(2; +\infty)$.

- A. 13. B. 12. C. 7. D. 6.

Câu 7: Cho hàm số $g(x) = f(1-x)$ có đạo hàm $g'(x) = (3-x)^{2021}(2+x)^{2020}[x^2 + (m-2)x - 3m + 6]$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên dương m để hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 8: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ được cho như hình bên dưới. Hỏi hàm số $g(x) = 4f(x) + x^2 - 4x + 2021$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

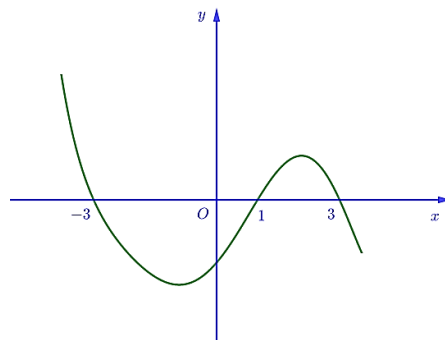


- A. $(-\infty; -1)$. B. $(-2; 0)$. C. $(0; 2)$. D. $(2; +\infty)$

Câu 9: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$, biết rằng $f'(x+2) = x^2 - 3x + 2$. Hàm số $y = f(x^2 + 4x + 7)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-2; -1)$. B. $(-3; -1)$. C. $(1; +\infty)$. D. $(-2; 0)$.

Câu 10: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và thỏa $f(-3) = f(3) = \frac{1}{2}$. Biết rằng hàm số $y = f'(x)$ là một hàm số bậc ba có đồ thị như hình vẽ sau:



Hỏi hàm số $g(x) = [f(3-x)]^2 - f(3-x)$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây:

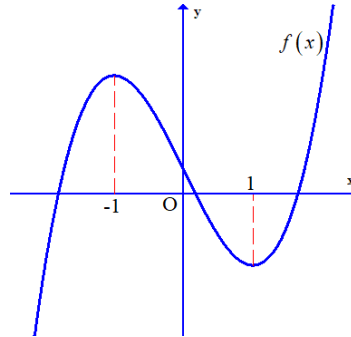
A. $(-3;1)$.

B. $(-\infty;-3)$.

C. $(0;2)$.

D. $(2;6)$.

Câu 11: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ. Biết rằng hàm số $f(x^3 - 3x - 1)$ nghịch biến trên các khoảng lớn nhất $(a;b);(m;n);(p;q)$. Giá trị của biểu thức $(a^2 + b^2 + m^2 + n^2 + p^2 + q^2)$ bằng:



A. 9.

B. 12.

C. 14.

D. 10.

Câu 12: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm $f'(x)$ như hình vẽ bên dưới. Hàm số $g(x) = f(4 - \sqrt{4 - x^2})$ đồng biến trên:

x	$-\infty$	-3	1	4	$+\infty$		
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

A. $(0;1)$.

B. $(1;2)$.

C. $(-1;0)$.

D. $(-3;-1)$.

Câu 13: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm $f'(x)$ như hình vẽ bên dưới. Hàm số $g(x) = f(-1 + \sqrt{7 + 6x - x^2})$ nghịch biến trên:

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+

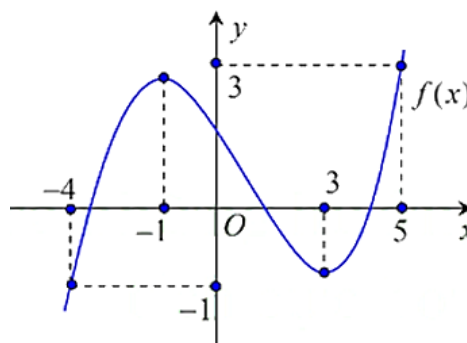
A. $(5;6)$.

B. $(-1;2)$.

C. $(2;3)$.

D. $(3;5)$.

Câu 14: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ dưới đây. Hỏi hàm số $f(f(x))$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $(0;2)$.

B. $(-3;-1)$.

C. $(3;5)$.

D. $(-5;-3)$.

Câu 15: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$ có biểu thức đạo hàm được cho bởi $f'(x) = x(x-2)(x+1)$. Hỏi tham số thực m thuộc khoảng nào dưới đây thì hàm số $g(x) = f(x^3 + m)$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$?

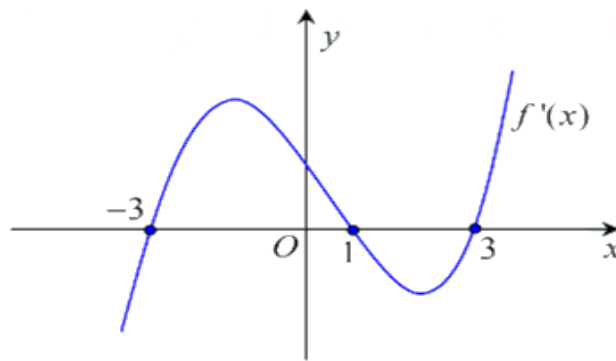
A. $\left(0; \frac{1}{2}\right)$.

B. $(1;4)$.

C. $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$.

D. $(0;1)$.

Câu 16: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m thuộc đoạn $[-20; 20]$ để hàm số $g(x) = f(x^2 - 2x - m)$ đồng biến trên khoảng $(1; 3)$?



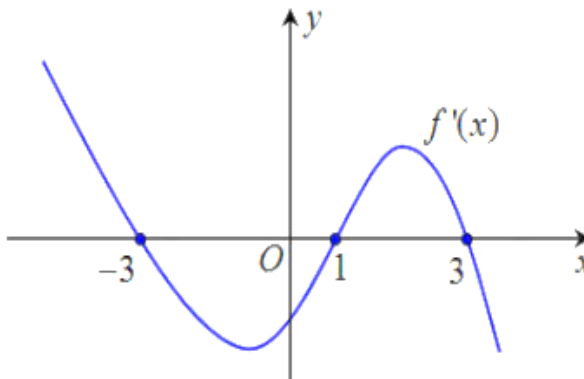
A. 19.

B. 23.

C. 18.

D. 17.

Câu 17: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-30; 30]$ để hàm số $g(x) = f(x^3 - 3x - m)$ đồng biến trên $[-2; -1]$.



A. 24.

B. 25.

C. 26.

D. 31.

Câu 18: Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-20; 20]$ để hàm số

$$y = \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 2} + 1}{2m - 3 - \sqrt{x^2 - 2x + 2}}$$
 đồng biến trên $(-\infty; 1)$?

A. 21.

B. 19.

C. 22.

D. 20.

Câu 19: Cho hai hàm số $f(x) = \frac{x+4a}{x+b}$ và $g(x) = \frac{x+b}{x+a^2}$ cùng đồng biến trên từng khoảng xác

định của nó. Gọi a_o và b_o lần lượt là những số nguyên dương nhỏ nhất của a và b thỏa mãn. Giá trị của biểu thức $T = a_o + b_o$ tương ứng bằng:

- A. 25. B. 26. C. 27. D. 28.

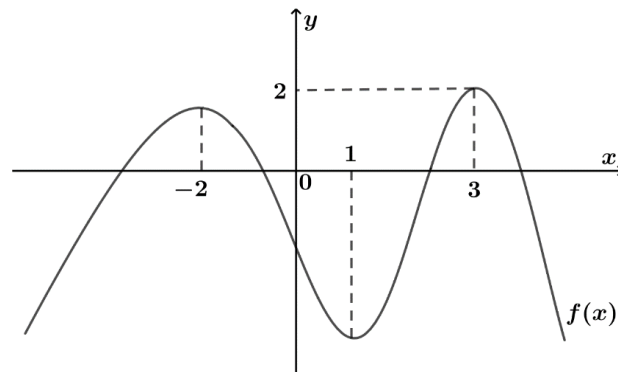
Câu 20: Cho hàm số $y = f(x) = (m-1)x^3 - 3(m^2 + m - 1)x^2 + 3(m-1)x - m - 1$ với m là tham số. Biết rằng với mọi tham số m thì hàm số luôn nghịch biến trên $(a; b)$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $(b-a)$ bằng:

- A. $4\sqrt{7}$. B. $2\sqrt{3}$. C. 4. D. $4\sqrt{6}$.

Câu 21: Cho hàm số $f(x) = 3m^2x^4 - 8mx^3 + 6x^2 + 12(2m-1)x + 1$ với m là tham số. Biết rằng với mọi tham số m thì hàm số luôn đồng biến trên $[a; b]$; với a, b là những số thực. Giá trị lớn nhất của biểu thức $(2b-a)$ sẽ bằng:

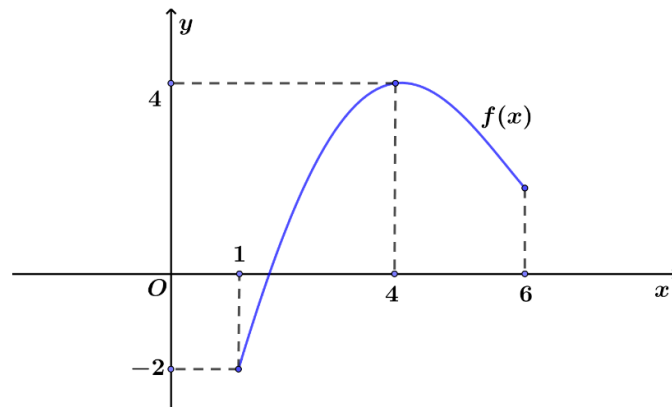
- A. 2. B. $2\sqrt{2}$. C. $\sqrt{5}$. D. $\sqrt{6}$.

Câu 22: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị được cho như hình vẽ. Hỏi hàm số $y = \frac{1}{f(x)-3}$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



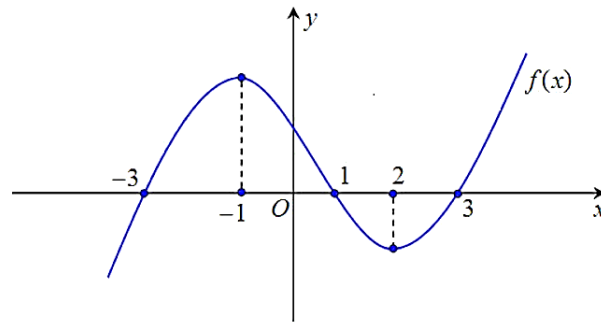
- A. $(-3; -2)$. B. $(-2; 1)$. C. $(-1; 2)$. D. $(3; +\infty)$.

Câu 23: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-20; 2021)$ để hàm số $y = \frac{f(x)+5}{f(x)+m}$ nghịch biến trên $(1; 4)$?



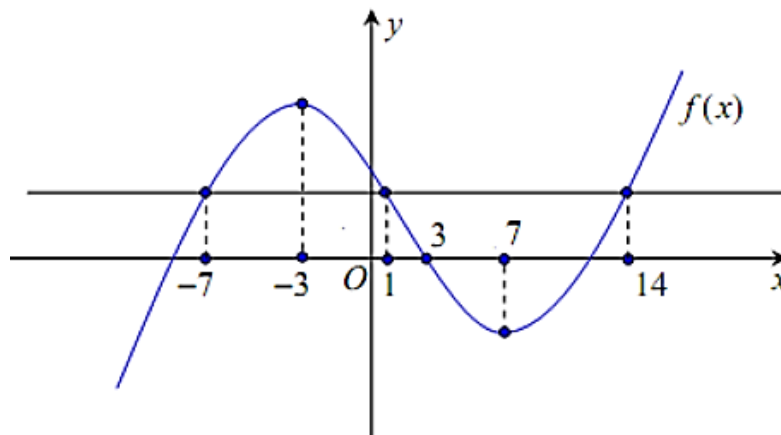
- A. 19. B. 21. C. 20. D. 22.

Câu 24: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị được cho như hình vẽ. Hỏi hàm số $y = (f(x))^2$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



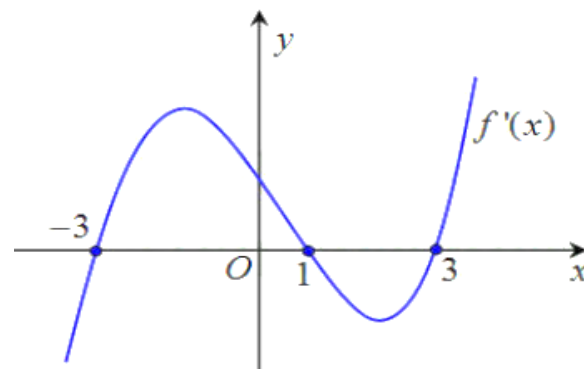
- A. $(1;3)$. B. $(2;3)$. C. $(2;+\infty)$. D. $(-3;-1)$.

Câu 25: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị được cho như hình vẽ. Hỏi hàm số $g(x) = [f(x)]^2 - 6f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



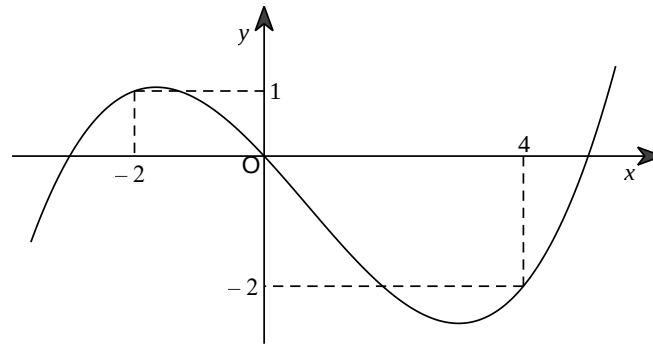
- A. $(-3;1)$. B. $(7;14)$. C. $(14;+\infty)$. D. $(1;7)$.

Câu 26: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-30;30]$ để hàm số $g(x) = f(x^2 - 2x - m)$ nghịch biến trên $(-1;2)$.



- A. 0. B. 1. C. 28. D. 23.

Câu 27: Cho hàm số $f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $g(x) = f(1-2x) + x^2 - x$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây ?

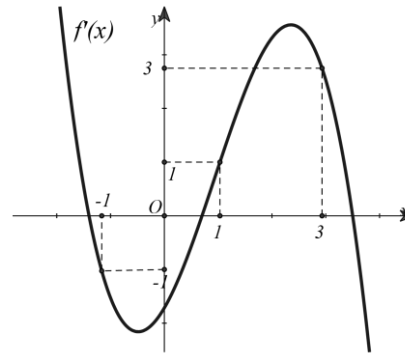


- A. $\left(1; \frac{3}{2}\right)$. B. $\left(0; \frac{1}{2}\right)$. C. $(-2; -1)$. D. $(2; 3)$.

Câu 28: Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-40; 40]$ để hàm số $g(x) = |x^2 - 4mx + m - 3|$ nghịch biến trên khoảng $(-2; -1)$.

- A. 79. B. 39. C. 80. D. 40.

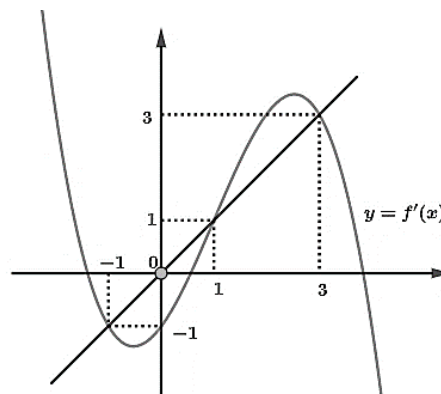
Câu 29: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ cho như hình vẽ



Hàm số $g(x) = 2f(|x-1|) - x^2 + 2x + 2020$ đồng biến trên khoảng nào?

- A. $(0; 1)$. B. $(-3; 1)$. C. $(1; 3)$. D. $(-2; 0)$.

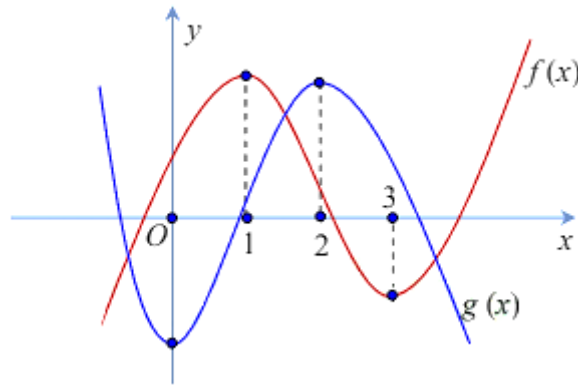
Câu 30: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ cho như hình vẽ.



Hàm số $g(x) = 2f(|x-1|) - x^2 + 2x + 2020$ đồng biến trên khoảng nào?

- A. $(0; 1)$. B. $(-3; 1)$. C. $(1; 3)$. D. $(-2; 0)$.

Câu 31: Cho hàm số $f(x)$, $g(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Biết hai hàm số $y = f(2x-1)$, $y = g(ax+b)$ có cùng khoảng nghịch biến lớn nhất. Khi đó giá trị của biểu thức $(4a+b)$ bằng:



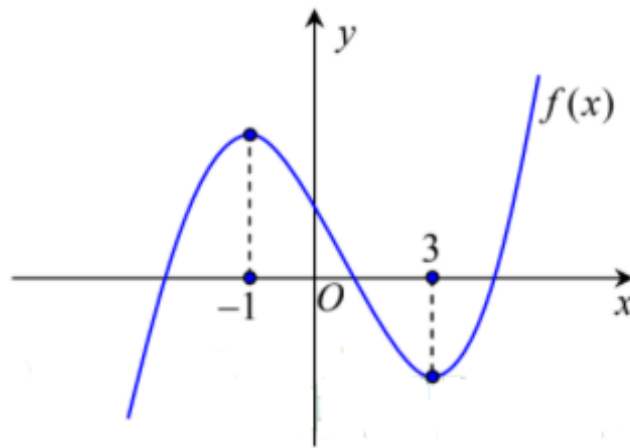
A. 0.

B. -2.

C. -4.

D. 3.

Câu 32: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số như hình vẽ. Khi đó hàm số $f(x^3 + 3x - 1)$ nghịch biến trên:



A. $(1; 2)$.

B. $(0; 1)$.

C. $\left(-2; -\frac{1}{2}\right)$.

D. $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$.

Câu 33: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị nằm trên trục hoành và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, bảng xét dấu của biểu thức $f'(x)$ như bảng dưới đây.

x	$-\infty$		-2		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	

Hàm số $y = g(x) = \frac{f(x^2 - 2x)}{f(x^2 - 2x) + 1}$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

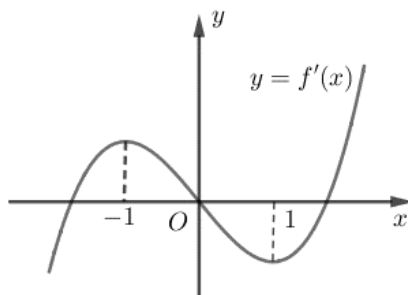
A. $(-\infty; 1)$.

B. $\left(-2; \frac{5}{2}\right)$.

C. $(1; 3)$.

D. $(2; +\infty)$.

Câu 34: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $f(1) = 1$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Có bao nhiêu số nguyên dương a để hàm số $y = |4f(\sin x) + \cos 2x - a|$ nghịch biến trên $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$?



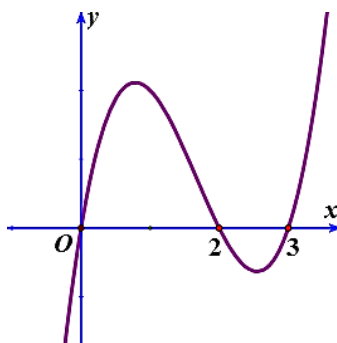
A. 2.

B. 3.

C. Vô số.

D. 5.

Câu 35: Giả sử $f(x)$ là đa thức bậc 4. Đồ thị của hàm số $y = f'(1-x)$ được cho như hình bên. Hỏi hàm số $g(x) = f(x^2 - 3)$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $(-2;1)$.B. $(-1;0)$.C. $(1;2)$.D. $(0;1)$.

Câu 36: Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	-2	0	3	$+\infty$		
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn $-10 < m < 10$ và hàm số $y = f(x^2 + 2x + m)$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$?

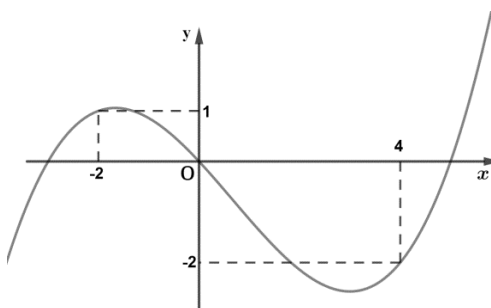
A. 5.

B. 4.

C. 6

D. 1.

Câu 37: Cho hàm số $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, $a \neq 0$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên thuộc khoảng $(-6;6)$ của tham số m để hàm số $g(x) = f(3-2x+m) + x^2 - (m+3)x + 2m^2$ nghịch biến trên $(0;1)$. Khi đó, tổng giá trị các phần tử của S là

A. 12.

B. 9.

C. 6.

D. 15.

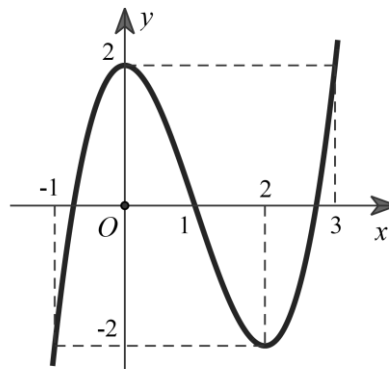
Câu 38: Có bao nhiêu giá trị thực của m để hàm số $y = mx^9 + (m^2 - 3m + 2)x^6 + (2m^3 - m^2 - m)x^4 + m$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

- A. Vô số. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 39: Cho hàm số $f(x) = \frac{2}{5}m^2x^5 - \frac{8}{3}mx^3 - (m^2 - m - 20)x + 1$ (m là tham số). Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$?

- A. 7. B. 9. C. 8. D. 10.

Câu 40: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Đặt $g(x) = f(x - m) - \frac{1}{2}(x - m - 1)^2 + 2019$, với m là tham số thực. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của m để hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên khoảng $(5; 6)$. Tổng tất cả các phần tử trong S bằng:

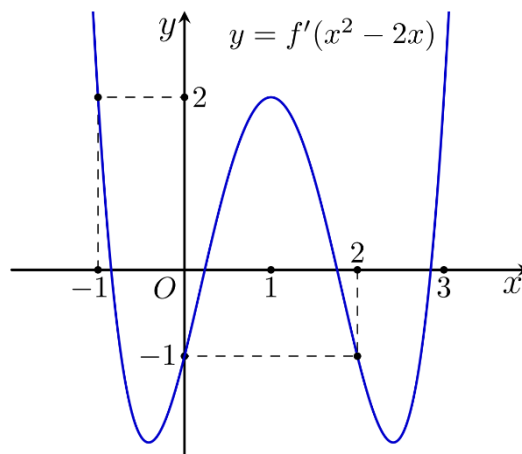


- A. 4. B. 11. C. 14. D. 20.

Câu 41: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $f(x) = 2(m + 1)x^3 + 3(m^2 - 5m - 4)x^2 - 6(3m^2 - 6m - 19)x - 32\sqrt{(x + 1)^3} + 1$ đồng biến trên khoảng $(-1; +\infty)$. Số phần tử của tập hợp S là

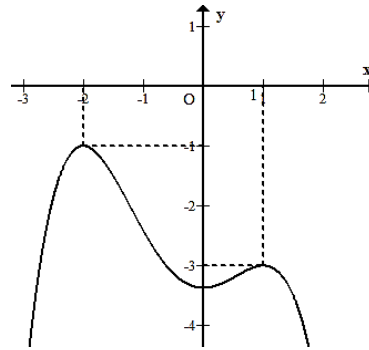
- A. 3. B. 0. C. 1. D. 2.

Câu 42: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x^2 - 2x)$ như hình vẽ bên. Hỏi hàm số $y = f(x^2 - 1) + \frac{2}{3}x^3 + 1$ đồng biến trên khoảng nào?



- A. $(-3; -2)$. B. $(1; 2)$. C. $(-2; -1)$. D. $(-1; 0)$.

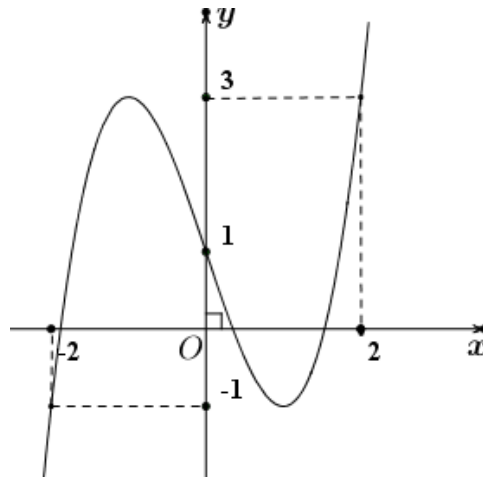
Câu 43: Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm đa thức có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ.



Hàm số $g(x) = f(3x+1) - 3(2x^3 + 2x^2 - 3x + 5)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

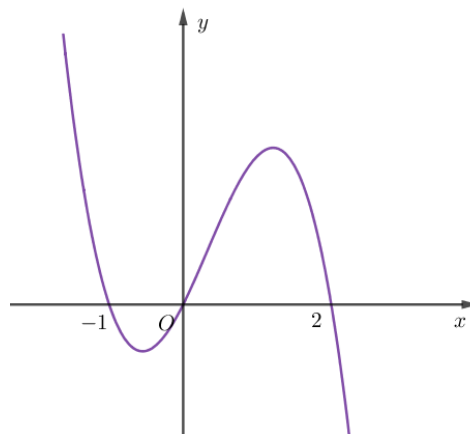
- A. $(-\infty; -2)$, $(1; +\infty)$. B. $(-3; 0)$. C. $(-\infty; -1)$. D. $(-1; 2)$.

Câu 44: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(2x+1)$ như hình vẽ. Hàm số $g(x) = f(x) - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?



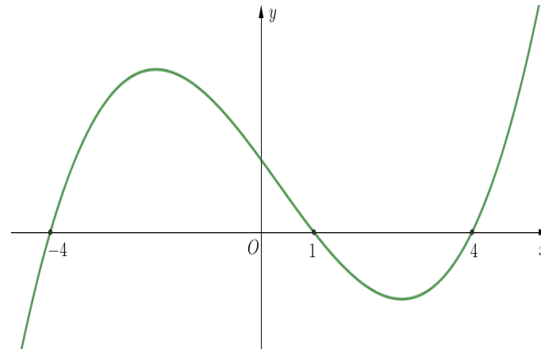
- A. $(-\infty; -3)$. B. $(-3; 0)$. C. $(1; 4)$. D. $(4; +\infty)$.

Câu 45: Cho hàm số bậc bốn $f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(3-2x)$ được cho như hình bên. Hàm số $y = f(x^2 + 1)$ nghịch biến trên khoảng nào?



- A. $(-\infty; 0)$. B. $(0; 1)$. C. $(2; +\infty)$. D. $(-1; 0)$.

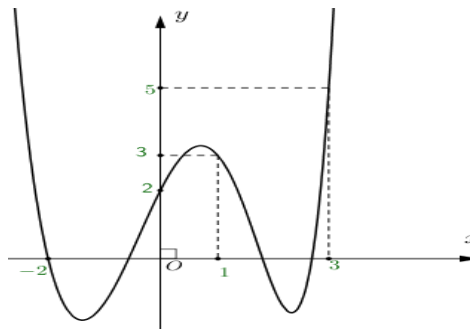
Câu 46: Cho hàm số $y = f(x), y = g(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, trong đó hàm số $g(x) = (f(2-x))'$ là hàm số bậc ba có đồ thị như hình vẽ như dưới



Hàm số $y = f(x^2 + 2) - x^3 + 2x^2 - x + 2021$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

- A. $(-\infty; -1)$. B. $(0; 1)$. C. $(1; 2)$. D. $(2; +\infty)$.

Câu 47: Cho hai hàm số $f(x); g(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị $y = f'(x^2 + 4x)$ như hình vẽ.



Hàm số $g(x) = f(x^2 - 4) - \frac{2}{3}x^3 + 2021$ nghịch biến trong khoảng nào?

- A. $(0; 3)$. B. $(3; 5)$. C. $(2; 3)$. D. $(4; 6)$.

Câu 48: Cho hàm số $f(x)$ và $g(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, trong đó $g(x) = [f(x^2 - 4)]'$ là hàm bậc ba có đồ thị như hình vẽ:



Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để hàm số $h(x) = f(x^2 + x + m)$ đồng biến trên $(0; 1)$.

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 49: Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm đa thức và hàm số $y = f(x^2 - 1)$ có bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	$-$	$+$
y	$+\infty$	-1	3	-1	$+\infty$

Hàm số $g(x) = f(2x^3 - x)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

- A. $\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}; \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$. B. $\left(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$. C. $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}; 1\right)$. D. $\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}; +\infty\right)$.

Câu 50: Cho hàm số $y = f(x^2 - 2)$ là hàm số bậc 4 có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	0	$-$
y	$-\infty$	$f(-1)$	$f(-2)$	$f(-1)$	$-\infty$

Hàm số $g(x) = f(x^3 - 3x + 3)$ đồng biến trong khoảng nào sau đây?

- A. $(-\infty; -2)$. B. $(-2; 1)$. C. $(1; 2)$. D. $(-1; +\infty)$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.B	2.A	3.A	4.B	5.B	6.D	7.C	8.C	9.C	10.D
11.B	12.C	13.D	14.A	15.B	16.C	17.C	18.A	19.B	20.D
21.C	22.A	23.C	24.D	25.B	26.A	27.A	28.C	29.A	30.A
31.B	32.B	33.C	34.B	35.D	36.C	37.B	38.B	39.B	40.C
41.D	42.C	43.C	44.D	45.D	46.C	47.B	48.D	49.A	50.C

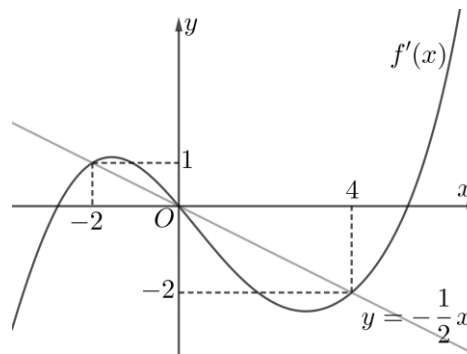
HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Chọn B

Xét hàm số $h(x) = 4f(x) + x^2$ trên $\mathbb{R}$.

Vì $f(x)$ là hàm số đa thức nên $h(x)$ cũng là hàm số đa thức và $h(0) = 4f(0) = 0$.

Ta có $h'(x) = 4f'(x) + 2x$. Do đó $h'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -\frac{1}{2}x$.



Dựa vào sự tương giao của đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và đường thẳng $y = -\frac{1}{2}x$, ta có

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-2; 0; 4\}$$

Suy ra bảng biến thiên của hàm số $h(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-2	0	4	$+\infty$			
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	$+\infty$							$+\infty$

The graph shows a function $h(x)$ plotted against x . The function has a local minimum at $x=0$ and a local maximum at $x=4$. The function approaches positive infinity as x goes to positive or negative infinity. The graph is a continuous curve that is concave up for $x < 0$ and $x > 4$, and concave down for $0 < x < 4$.

Từ đó ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x) = |h(x)|$ như sau:

x	$-\infty$	-2	0	4	$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$				$+\infty$

The graph illustrates a piecewise linear function $g(x)$ defined on the real line. The horizontal axis is labeled x and has tick marks at $-\infty$, -2 , 0 , 4 , and $+\infty$. The vertical axis is labeled $g(x)$ and has tick marks at $+\infty$ and 0 . The function $g(x)$ is represented by a series of line segments. Solid lines connect the points $(-\infty, +\infty)$ to a point, then to $(0, 0)$, then to $(4, +\infty)$, and finally to $(+\infty, +\infty)$. Dotted lines connect the first point to a minimum point below the x -axis, and the third point to another minimum point below the x -axis. A horizontal dashed line is drawn at $g(x) = 0$.

Dựa vào bảng biến thiên trên, ta thấy hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(0; 4)$.

Câu 2: Chọn A

$$g(x) = 3f(-x^3 - 3x + m) + 2(-x^3 - 3x + m)^2(-x^3 - 3x + m - 3)$$

$$= 3f(-x^3 - 3x + m) + 2(-x^3 - 3x + m)^3 - 6(-x^3 - 3x + m)^2$$

Ta có

$$g'(x) = -9(x^2 + 1)f'(-x^3 - 3x + m) - 18(x^2 + 1)(-x^3 - 3x + m)^2 + 36(x^2 + 1)(-x^3 - 3x + m)$$

Để hàm số nghịch biến trên $(-1; 2)$

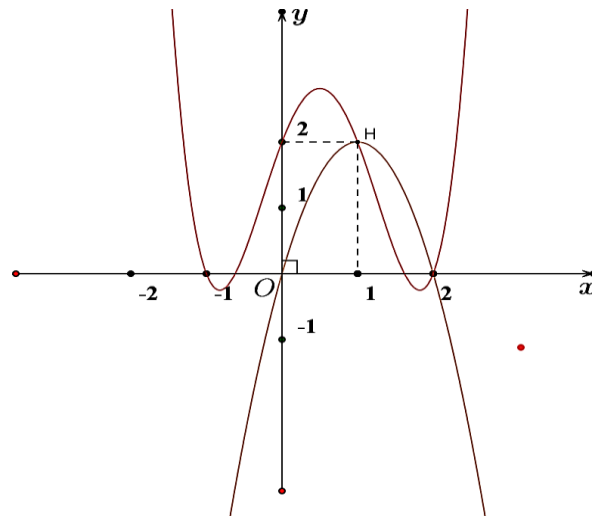
$$g'(x) \leq 0 \quad \forall x \in (-1; 2) \Leftrightarrow f'(-x^3 - 3x + m) + 2(-x^3 - 3x + m)^2 - 4(-x^3 - 3x + m) \geq 0 \quad \forall x \in (-1; 2)$$

$$\Leftrightarrow f'(-x^3 - 3x + m) \geq -2(-x^3 - 3x + m)^2 + 4(-x^3 - 3x + m) \quad \forall x \in (-1; 2)$$

Đặt $t = -x^3 - 3x + m$. Với $x \in (-1; 2)$ có $t' = -3x^2 - 3 < 0 \quad \forall x \in (-1; 2) \Rightarrow t \in (m - 14; m + 4)$

Xét bất phương trình (1) $f'(t) \geq -2t^2 + 4t$ (1)

Đồ thị hàm số $y = f'(t)$ và $y = -2t^2 + 4t$ trên cùng hệ trục tọa độ:



$$\text{Để (1) luôn đúng} \Leftrightarrow \begin{cases} t \in (m - 14, m + 4) \\ t \leq 1 \\ t \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \in (m - 14, m + 4) \\ t \leq 1 \\ t \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m + 4 \leq 1 \\ m - 14 \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -3 \\ m \geq 16 \end{cases}.$$

Do $m \in [-20; 20]$ nên số giá trị của m là $(-3 + 20) + 1 + (20 - 16) + 1 = 23$.

Câu 3: Chọn A

Xét hàm số $g(x) = |f(x)| = |x^3 - 3mx^2 - 3(m+2)x - m + 1|$ có $f'(x) = 3x^2 - 6mx - 3(m+2)$

Để hàm số đồng biến trên $(0; 3)$ thì:

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f'(x) \geq 0 \end{cases}, \forall x \in (0; 3) \Leftrightarrow \begin{cases} f(0) \geq 0 \\ 3x^2 - 6mx + 3(m+2) \geq 0 \end{cases}, \forall x \in (0; 3)$$

$$\begin{cases} f(x) \leq 0 \\ f'(x) \leq 0 \end{cases}, \forall x \in (0; 3) \Leftrightarrow \begin{cases} f(0) \leq 0 \\ 3x^2 - 6mx + 3(m+2) \leq 0 \end{cases}, \forall x \in (0; 3)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -m-2 \geq 0 \\ m \leq \frac{x^2-2}{2x+1}, \forall x \in (0;3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -2 \\ m \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -2 \\ m \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -2 \\ m \geq 1 \end{cases} \cdot \forall m \in [-2021; 2021] \Rightarrow \begin{cases} -2021 \leq m \leq -2 \\ 1 \leq m \leq 2021 \end{cases}$$

Vậy có tất cả 4041 giá trị m thỏa mãn đề bài.

Câu 4: Chọn B

Ta đặt: $y = g(x) = f(2x-1) - 4x^3 + 15x^2 - 18x + 1$.

$$\Rightarrow g'(x) = 6f'(2x-1) - 12x^2 + 30x - 18 = 6[f'(2x-1) - 2x^2 + 5x - 3].$$

$$\text{Có } f'(2x-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1=1 \\ 2x-1=2 \\ 2x-1=3 \\ 2x-1=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=\frac{3}{2} \\ x=2 \\ x=\frac{5}{2} \end{cases}.$$

x	$-\infty$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	4	$+\infty$	
$f'(x)$	−	0	+	0	+	0	−	0	+
$f'(2x-1)$	−	0	+	0	+	0	−	0	+
$-2x^2+5x-3$	−	0	+	0	−	−	−	−	−
$g'(x)$	−	0	+	0	?	−	?	?	?

Từ đó, ta có bảng xét dấu như sau:

Dựa vào bảng xét dấu trên, ta kết luận hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $\left(1; \frac{3}{2}\right)$.

Câu 5: Chọn B

Ta có $g'(x) = (2x+3)f'(x^2+3x-4)$.

Hàm số đồng biến trên $(1; +\infty)$ khi

$$\begin{aligned} (2x+3)f'(x^2+3x-4) &\geq 0, \forall x \in (1; +\infty) \Leftrightarrow f'(x^2+3x-4) \geq 0, \forall x \in (1; +\infty) \\ &\Leftrightarrow (x^2+3x-4)^2 (x^2+3x) \left[(x^2+3x-4)^2 + 2m(x^2+3x-4) + 9 \right] \geq 0, \forall x \in (1; +\infty) \end{aligned}$$

Đặt $t = x^2 + 3x - 4$ ($t > 0$) do $x \in (1; +\infty)$

$$(1) \Rightarrow t^2(t+4)(t^2+2mt+9) \geq 0, \forall t > 0 \Leftrightarrow t^2+2mt+9 \geq 0, \forall t > 0$$

$$\Leftrightarrow m \geq -\frac{1}{2} \left(t + \frac{9}{t} \right), \forall t > 0 \Leftrightarrow m \geq -3$$

Do m nguyên âm nên $m \in \{-3; -2; -1\}$.

Câu 6: Chọn D

Ta có $h(x) = g[f(x)] \Rightarrow h'(x) = g'[f(x)] \cdot f'(x) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} g'[f(x)] = 0 \\ f'(x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3f^2(x) + 10f(x) - 2020 = 0 \text{ (vn)} \\ -4x^3 - (4 - m^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x^3 = \frac{m^2 - 4}{4} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{m^2 - 4}{4}}$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$\sqrt[3]{\frac{m^2 - 4}{4}}$	$+\infty$
$h'(x)$		- 0 +	
$h(x)$			

Hàm số đồng biến trên $(2; +\infty)$ khi và chỉ khi $\sqrt[3]{\frac{m^2 - 4}{4}} \leq 2 \Leftrightarrow -6 \leq m \leq 6$.

Vậy có 6 giá trị nguyên dương m thỏa mãn.

Câu 7: Chọn C

Ta có $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = -f'(1-x) \Rightarrow f'(1-x) = -g'(x)$.

$$\text{Suy ra } f'(1-x) = -(3-x)^{2021} (2+x)^{2020} [x^2 + (m-2)x - 3m + 6]$$

$$\Leftrightarrow f'(1-x) = -[2 + (1-x)]^{2021} [3 - (1-x)]^{2020} [(1-x)^2 - m(1-x) - 2m + 5]$$

$$\text{Vậy } f'(x) = -(2+x)^{2021} (3-x)^{2020} (x^2 - mx - 2m + 5)$$

Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$

$$\Leftrightarrow f'(x) = -(2+x)^{2021} (3-x)^{2020} (x^2 - mx - 2m + 5) \leq 0 \quad \forall x \in (0; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - mx - 2m + 5 \geq 0, \quad \forall x \in (0; +\infty) \Leftrightarrow m \leq \frac{x^2 + 5}{x + 2} \quad \forall x \in (0; +\infty). (*)$$

$$\text{Xét } h(x) = \frac{x^2 + 5}{x + 2} = x - 2 + \frac{9}{x + 2}, \quad x \in (0; +\infty)$$

$$\Rightarrow h'(x) = 1 - \frac{9}{(x+2)^2} \Rightarrow h'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{9}{(x+2)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+2=3 \\ x+2=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-5 \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	0	1	$+\infty$
$h'(x)$	-	0	+
$h(x)$			

(*) $\Leftrightarrow m \leq 2$, mà m nguyên dương suy ra $m \in \{1; 2\}$. Vậy có 2 giá trị của m thỏa mãn.

Câu 8: Chọn C

$$\text{Xét hàm số: } g(x) = 4f(x) + x^2 - 4x + 2021 \Rightarrow g'(x) = 4f'(x) + 2x - 4 = 4 \cdot \left[f'(x) - \left(-\frac{x}{2} + 1 \right) \right]$$

Chủ đề 01: Cơ bản về tính đơn điệu của hàm số

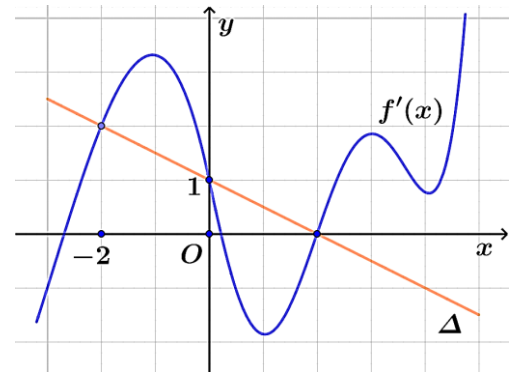
Để hàm số nghịch biến thì: $g'(x) = 4 \cdot \left[f'(x) - \left(-\frac{x}{2} + 1 \right) \right] \leq 0 \Leftrightarrow f'(x) \leq \left(-\frac{x}{2} + 1 \right)$

Trên hệ trục ta nhận thấy đường thẳng $\Delta: y = -\frac{x}{2} + 1$

đi qua ba điểm $(-2; 2), (0; 1), (2; 0)$.

Để $f'(x) \leq \left(-\frac{x}{2} + 1 \right)$ thì đồ thị hàm số ($y = f'(x)$) phải nằm dưới đường thẳng Δ .

Tương ứng với miền $\begin{cases} x \leq -2 \\ 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$.



Câu 9: Chọn C

Ta có: $f'(x+2) = x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2) \Rightarrow f'(x) = (x-2-1)(x-2-2) = (x-3)(x-4)$.

Khi đó: $f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 4 \end{cases}$. Đặt $y = g(x) = f(x^2 + 4x + 7)$.

Ta có: $g'(x) = (2x+4) \cdot f'(x^2 + 4x + 7) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+4 = 0 \\ f'(x^2 + 4x + 7) = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x^2 + 4x + 7 = 3 \\ x^2 + 4x + 7 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ (x+2)^2 = 0 \\ x = -1 \\ x = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = -1 \\ x = -3 \end{cases}$$

Bảng xét dấu $g'(x)$:

x	$-\infty$	-3	-2	-1	$+\infty$			
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Dựa vào bảng biến thiên, ta có: hàm số $y = g(x) = f(x^2 + 4x + 7)$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$

Câu 10: Chọn D

Từ đồ thị ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-3		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$			$\frac{1}{2}$			$\frac{1}{2}$		
			$f(1)$					

Suy ra $f(x) \leq \frac{1}{2} \forall x \in \mathbb{R}$

Mặt khác: $g'(x) = -2f'(3-x)f(3-x) + f'(3-x) = -f'(3-x)(2f(3-x)-1)$

Ta có $g'(x) \leq 0 \Leftrightarrow -f'(3-x)(2f(3-x)-1) \leq 0$

$$\Leftrightarrow f'(3-x) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3-x > 3 \\ -3 < 3-x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ 2 < x < 6 \end{cases}$$

Do đó hàm số g đồng biến trên khoảng $(2;6)$.

Câu 11: Chọn B

Đặt $u = x^3 - 3x - 1 \Rightarrow g(x) = f(u) = f(x^3 - 3x - 1) \Rightarrow g'(x) = (3x^2 - 3)f'(x^3 - 3x - 1)$

$$\Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ x^3 - 3x - 1 = -1 \\ x^3 - 3x - 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3} \\ x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	0	1	$\sqrt{3}$	2	$+\infty$						
u'		+		+	0	-		-	0	+		+		
$f'(u)$		+	0	-	0	-	0	+	0	+	0	-	0	+
$g'(x)$		+	0	-	0	+	0	-	0	+	0	-	0	+

Vậy hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\sqrt{3}; -1)$, $(0; 1)$, $(\sqrt{3}; 2)$.

Vậy giá trị của biểu thức $(a^2 + b^2 + m^2 + n^2 + p^2 + q^2) = 12$

Câu 12: Chọn C

Cách 1: Tập xác định của hàm số $f(4 - \sqrt{4 - x^2})$ là $[-2; 2]$

Đạo hàm: $g'(x) = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} f'(4 - \sqrt{4-x^2})$

Hàm số đồng biến thì $g'(x) \geq 0$. Từ tập xác định ta có:

$$\begin{cases} \begin{cases} x \in (0; 2) \\ f'(4 - \sqrt{4-x^2}) \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x \in (-2; 0) \\ f'(4 - \sqrt{4-x^2}) \leq 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x \in (0; 2) \\ \begin{cases} -3 \leq 4 - \sqrt{4-x^2} \leq 1 \\ 4 - \sqrt{4-x^2} \geq 4 \end{cases} \end{cases} \\ \begin{cases} x \in (-2; 0) \\ \begin{cases} 1 \leq 4 - \sqrt{4-x^2} \leq 4 \\ 4 - \sqrt{4-x^2} \leq -3 \end{cases} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x \in (0; 2) \\ \begin{cases} 4 - \sqrt{4-x^2} \leq 1 \\ \text{VN} \end{cases} \end{cases} \\ \begin{cases} x \in (-2; 0) \\ \begin{cases} 1 \leq 4 - \sqrt{4-x^2} \\ \text{VN} \end{cases} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x \in (0; 2) \\ \sqrt{4-x^2} \geq 3 \end{cases} \\ \begin{cases} x \in (-2; 0) \\ \sqrt{4-x^2} \leq 3 \end{cases} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in (0;2) \\ \forall x \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-2;0).$$

Cách 2: Sử dụng pp ghép trục: $g(x) = f\left(4 - \sqrt{4 - x^2}\right) = f(u)$, $u = 4 - \sqrt{4 - x^2}$, với $x \in [-2;2]$

Bảng biến thiên kép

x	-2	0	2
u	4	2	4
$f(u)$			

Suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(-2;0)$.

Câu 13: Chọn D

Cách 1:

Tập xác định của hàm số $g(x) = f\left(-1 + \sqrt{7 + 6x - x^2}\right)$ là $D = [-1;7]$

Đạo hàm: $g'(x) = \frac{3-x}{\sqrt{7+6x-x^2}} f'\left(-1 + \sqrt{7+6x-x^2}\right)$

Hàm số nghịch biến: $g'(x) \leq 0$

Từ tập xác định, ta có các trường hợp sau:

$$\begin{cases} x \in (-1;3) \\ f'\left(-1 + \sqrt{7+6x-x^2}\right) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-1;3) \\ -1 \leq -1 + \sqrt{7+6x-x^2} \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-1;3) \\ \sqrt{7+6x-x^2} \leq 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in (3;7) \\ f'\left(-1 + \sqrt{7+6x-x^2}\right) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (3;7) \\ \begin{cases} -1 + \sqrt{7+6x-x^2} \leq -1 \\ -1 + \sqrt{7+6x-x^2} \geq 2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (3;7) \\ \sqrt{7+6x-x^2} \geq 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in (-1;3) \\ \begin{cases} x \leq 3 - \sqrt{7} \\ x \geq 3 + \sqrt{7} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x \leq 3 - \sqrt{7} \\ 3 < x \leq 3 + \sqrt{7} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in (3;7) \\ 3 - \sqrt{7} \leq x \leq 3 + \sqrt{7} \end{cases}$$

Cách 2: Sử dụng phương pháp ghép trục

$g(x) = f\left(-1 + \sqrt{7 + 6x - x^2}\right) = f(u)$ với $u = -1 + \sqrt{7 + 6x - x^2}$ và $x \in [-2;2]$

Bảng biến thiên kép

x	-1	$3-\sqrt{7}$	3	$3+\sqrt{7}$	7
u	-1	2		2	4
$f(u)$					

Vậy hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-1; 3-\sqrt{7})$ và $(3; 3+\sqrt{7})$

Câu 14: Chọn A

Xét hàm số: $g(x) = f(f(x)) \Rightarrow g'(x) = f'(x) \cdot f'[f(x)]$

Hàm số đồng biến khi $g'(x) = f'(x) \cdot f'[f(x)] \geq 0$

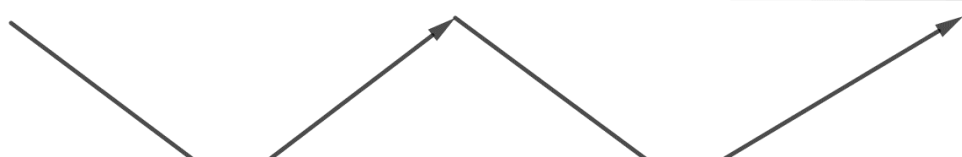
$$\Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) \geq 0 \\ f'[f(x)] \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \\ x \geq 3 \\ f(x) \leq -1 \\ f(x) \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \\ x \geq 3 \\ x \leq -4 \\ x \geq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -4 \\ -1 \leq x \leq 3 \\ x \geq 5 \end{cases}$$

Câu 15: Chọn B

Xét hàm số $g(x) = f(x^3 + m)$ có biểu thức đạo hàm:

$$g'(x) = 3x^2 \cdot f'(x^3 + m) = 3x^2 \cdot (x^3 + m)(x^3 + m - 2)(x^3 + m + 1)$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$-\sqrt[3]{m+1}$	$-\sqrt[3]{m}$	$-\sqrt[3]{m-2}$	$+\infty$		
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$							

Hàm số đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$ thì ta phải có: $\sqrt[3]{m-2} \leq 1 \Leftrightarrow m \geq 1 \Leftrightarrow m \in [1; +\infty)$

Câu 16: Chọn C

Xét hàm số $g(x) = f(x^2 - 2x - m) \Rightarrow g'(x) = 2(x-1) \cdot f'(x^2 - 2x - m)$

Với $\forall x \in (1; 3) \Rightarrow x-1 \geq 0$

Để hàm số đồng biến trên khoảng $(1; 3)$ thì:

$$g'(x) = 2(x-1) \cdot f'(x^2 - 2x - m) \geq 0 \Leftrightarrow f'(x^2 - 2x - m) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - m \geq 3 \\ -3 \leq x^2 - 2x - m \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq x^2 - 2x - 3 \\ x^2 - 2x - 1 \leq m \leq x^2 - 2x + 3 \end{cases}, \forall x \in (1; 3)$$

Suy ra với $\forall x \in (1;3)$ ta có:

$$\begin{cases} m \leq \min(x^2 - 2x - 3) \\ \max(x^2 - 2x - 1) \leq m \leq \min(x^2 - 2x + 3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 4 \\ 2 \leq m \leq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -20 \leq m \leq -4 \\ m = 2 \end{cases}$$

Do đó có 18 giá trị m nguyên thỏa mãn.

Câu 17: Chọn C

Ta có: $g'(x) = 3(x^2 - 1)f'(x^3 - 3x - m)$. Với $\forall x \in [-2; -1] \Rightarrow x^2 - 1 \geq 0$

Để hàm số $g(x) = f(x^3 - 3x - m)$ đồng biến trên $[-2; -1]$ thì:

$$\begin{aligned} & 3(x^2 - 1)f'(x^3 - 3x - m) \geq 0, \forall x \in [-2; -1] \\ & \Leftrightarrow f'(x^3 - 3x - m) \geq 0, \forall x \in [-2; -1] \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3x - m \leq -3, \forall x \in [-2; -1] \\ 1 \leq x^3 - 3x - m \leq 3, \forall x \in [-2; -1] \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3x \leq m - 3, \forall x \in [-2; -1] \\ \begin{cases} m + 1 \leq x^3 - 3x \\ m - 3 \geq x^3 - 3x \end{cases}, \forall x \in [-2; -1] \end{cases} \quad (1) \end{aligned}$$

$$\text{Xét hàm số } h(x) = x^3 - 3x \Rightarrow h'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \notin [-2; -1] \\ x = -1 \in [-2; -1] \end{cases}$$

Ta có: $h(-2) = -2$ và $h(-1) = 2 \Rightarrow \max_{[-2; -1]} h(x) = 2$ và $\min_{[-2; -1]} h(x) = -2$

$$\text{Từ (1)} \Leftrightarrow \begin{cases} \max_{[-2; -1]} h(x) \leq m - 3 \\ \begin{cases} m + 1 \leq \min_{[-2; -1]} h(x) \\ m + 3 \geq \max_{[-2; -1]} h(x) \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \leq m - 3 \\ \begin{cases} m + 1 \leq -2 \\ m + 3 \geq 2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 5 \\ \begin{cases} m \leq -3 \\ m \geq -1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 5.$$

Mà $m \in [-30; 30] \Rightarrow 5 \leq m \leq 30$, do đó có 26 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 18: Chọn A

Đặt $u = \sqrt{x^2 - 2x + 2}$. Xét trên $(-\infty; 1)$ thì $u \in (1; +\infty)$

Để $(-\infty; 1)$ nằm trong TXĐ của hàm số đã cho thì: $2m - 3 \neq \sqrt{x^2 - 2x + 2}, \forall x \in (-\infty; 1)$

$$\Leftrightarrow 2m - 3 \leq 1 \Leftrightarrow m \leq 2$$

$$\text{Ta có hàm số } y = \frac{u+1}{2m-3-u} \longrightarrow y' = \frac{2m-2}{(2m-3-u)^2} \cdot u' = \frac{2m-2}{(2m-3-u)^2} \cdot \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}}$$

$$\text{Để hàm số đồng biến trên } (-\infty; 1) \text{ thì } y' = \frac{2m-2}{(2m-3-u)^2} \cdot \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}} > 0, \forall x \in (-\infty; 1)$$

$$\text{Suy ra } 2m - 2 < 0 \Leftrightarrow m < 1$$

$$\text{Từ, suy ra } m < 1, \text{ mà } m \in [-20; 20], m \in \mathbb{Z} \longrightarrow m = \{-20, -19, \dots, 0\}.$$

Vậy có 21 giá trị m nguyên thỏa mãn yêu cầu.

Câu 19: Chọn B

$$\text{Ta có: } \begin{cases} f'(x) = \frac{b-4a}{(x+b)^2} > 0 \Rightarrow b > 4a(*) \\ g'(x) = \frac{a^2-b}{(x+a^2)} > 0 \Rightarrow a^2 > b(**) \end{cases} \Rightarrow a^2 > 4a \Rightarrow a > 4 \Rightarrow a_0 = 5$$

$$\text{Từ } (*) \Rightarrow b > 4a_0 = 20 \Rightarrow b_0 = 21 \Rightarrow T = 26.$$

Câu 20: Chọn D

$$\text{Ta có } f'(x) = 3(m-1)x^2 - 6(m^2+m-1)x + 3(m-1)$$

Hàm số luôn nghịch biến trên $(a; b)$ nên

$$f'(x) = 3(m-1)x^2 - 6(m^2+m-1)x + 3(m-1) \leq 0 \quad \forall x \in (a; b)$$

$$\Rightarrow (m-1)x^2 - 2(m^2+m-1)x + (m-1) \leq 0 \quad \forall x \in (a; b)$$

$$\Rightarrow -2xm^2 + (x^2 - 2x + 1)m - x^2 + 2x - 1 \leq 0 \quad \forall x \in (a; b)$$

$$\Rightarrow 2xm^2 - (x^2 - 2x + 1)m + x^2 - 2x + 1 \geq 0 \quad \forall x \in (a; b)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \Delta = (x-1)^4 - 8x(x-1)^2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ (x-1)^2(x^2 - 10x + 1) \leq 0 \end{cases} \Rightarrow x \in [5 - 2\sqrt{6}; 5 + 2\sqrt{6}]$$

$$\Rightarrow (b-a)_{\max} = 5 + 2\sqrt{6} - (5 - 2\sqrt{6}) = 4\sqrt{6}$$

Câu 21: Chọn C

Hàm số luôn đồng biến trên $[a; b]$ suy ra:

$$f'(x) = 12m^2x^3 - 24mx^2 + 12x + 12(2m-1) \geq 0 \quad \forall x \in [a; b]$$

$$\Leftrightarrow m^2x^3 - 2mx^2 + x + (2m-1) \geq 0 \quad \forall x \in [a; b]$$

$$\Leftrightarrow m^2x^3 + (2-2x^2)m + x - 1 \geq 0 \quad \forall x \in [a; b]$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta = (1-x^2)^2 - x^3(x-1) = (x-1)(x^2-x-1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \begin{cases} x \leq \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 \leq x \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq x \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\text{Suy ra } 1 \leq a \leq b \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow (2b-a)_{\max} = \sqrt{5}.$$

Câu 22: Chọn A

Ta luôn có: $f(x) \leq 2 < 3 \rightarrow$ phương trình mẫu số $f(x) - 3 = 0$ vô nghiệm.

Suy ra hàm số $y = \frac{1}{f(x)-3}$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

$$\text{Đạo hàm: } y' = -\frac{f'(x)}{[f(x)-3]^2}$$

$$\text{Hàm số nghịch biến thì: } y' = -\frac{f'(x)}{[f(x)-3]^2} < 0 \Leftrightarrow f'(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; -2) \\ x \in (1; 3) \end{cases}$$

Câu 23: Chọn C

Tập xác định của hàm số $y = g(x) = \frac{f(x)+5}{f(x)+m}$ là $D = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq -m\}$

Để khoảng $(1;4) \subset D \rightarrow$ phương trình $f(x) = -m$ phải không có nghiệm $x \in (1;4)$.

$$\text{Suy ra: } \begin{cases} -m \geq 4 \\ -m \leq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -4 \\ m \geq 2 \end{cases} \quad (1)$$

Đạo hàm: $y' = g'(x) = f'(x) \cdot \frac{m-5}{(f(x)+m)^2}$; Để ý rằng trên luôn có $f'(x) > 0$

Để hàm số $y = g(x) = \frac{f(x)+5}{f(x)+m}$ nghịch biến trên thì:

$$g'(x) = f'(x) \cdot \frac{m-5}{(f(x)+m)^2} < 0 \text{ với } \forall x \in (1;4)$$

$$\text{Suy ra: } \frac{m-5}{(f(x)+m)^2} < 0 \Leftrightarrow m-5 < 0 \Leftrightarrow m < 5 \quad (2)$$

Kết hợp (1) và (2) và điều kiện m nguyên $m \in [-20; 2021]$.

Ta suy ra: $\begin{cases} -20 \leq m \leq -4 \\ 2 \leq m < 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -20 \leq m \leq -4 \\ 2 \leq m \leq 4 \end{cases}$. Có 20 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 24: Chọn D

Đạo hàm: $y' = 2f'(x) \cdot f(x)$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-3	-1	1	2	3	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$	0
$f'(x).f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Từ bảng xét dấu suy ra hàm số $y = (f(x))^2$ đồng biến trên các khoảng $(-3; -1), (1; 2), (3; +\infty)$.

Câu 25: Chọn B

Xét hàm số $g(x) = [f(x)]^2 - 6f(x)$.

$$g'(x) = 2f(x) \cdot f'(x) - 6f'(x) = 2f'(x)(f(x) - 3)$$

$$\text{Hàm số nghịch biến khi } g'(x) = 2f'(x)(f(x) - 3) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) \geq 0 \\ f(x) - 3 \leq 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} f'(x) \leq 0 \\ f(x) - 3 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x \leq -3 \\ x \geq 7 \end{cases} \\ \begin{cases} x \leq -7 \\ 1 \leq x \leq 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -7 \\ 7 \leq x \leq 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -7 \\ 7 \leq x \leq 14 \end{cases} \\ \begin{cases} -3 \leq x \leq 7 \\ -7 \leq x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x \leq 1 \\ -3 \leq x \leq 1 \end{cases} \\ \begin{cases} -7 \leq x \leq 1 \\ x \geq 14 \end{cases} \end{cases}$$

Câu 26: Chọn A

Ta có: $g'(x) = 2(x-1)f'(x^2 - 2x - m)$

Để hàm số $g(x) = f(x^3 - 3x - m)$ nghịch biến trên $(-1; 2)$ thì:

$$g'(x) = 2(x-1)f'(x^2 - 2x - m) \leq 0, \forall x \in (-1; 2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(x-1)f'(x^2 - 2x - m) \leq 0, \forall x \in (-1; 1) \\ 2(x-1)f'(x^2 - 2x - m) \leq 0, \forall x \in (1; 2) \end{cases} \quad (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x^2 - 2x - m) \geq 0, \forall x \in (-1; 1) \\ f'(x^2 - 2x - m) \leq 0, \forall x \in (1; 2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x^2 - 2x - m \geq 3 \\ -3 \leq x^2 - 2x - m \leq 1 \end{cases}, \forall x \in (-1; 1) \\ \begin{cases} 1 \leq x^2 - 2x - m \leq 3 \\ x^2 - 2x - m \leq -3 \end{cases}, \forall x \in (1; 2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x^2 - 2x \geq m + 3 \\ m - 3 \leq x^2 - 2x \leq m + 1 \end{cases}, \forall x \in (-1; 1) \\ \begin{cases} m + 1 \leq x^2 - 2x \leq m + 3 \\ x^2 - 2x \leq m - 3 \end{cases}, \forall x \in (1; 2) \end{cases} \quad (2)$$

Xét hàm số $h(x) = x^2 - 2x \Rightarrow h'(x) = 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Với $\forall x \in (-1; 1) \Rightarrow h'(x) = 2x - 2 < 0 \Rightarrow h(1) < h(x) < h(-1) \Leftrightarrow -1 < h(x) < 3, \forall x \in (-1; 1)$

Với $\forall x \in (1; 2) \Rightarrow h'(x) = 2x - 2 > 0 \Rightarrow h(1) < h(x) < h(2) \Leftrightarrow -1 < h(x) < 0, \forall x \in (1; 2)$

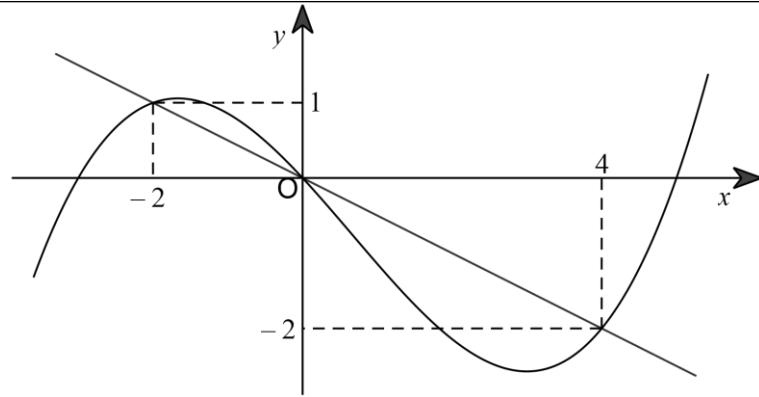
Câu 27: Chọn A

Ta có: $g(x) = f(1-2x) + x^2 - x \Rightarrow g'(x) = -2f'(1-2x) + 2x - 1$

Đặt $t = 1 - 2x \Rightarrow g'(x) = -2f'(t) - t$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow f'(t) = -\frac{t}{2}$$

Vẽ đường thẳng $y = -\frac{x}{2}$ và đồ thị hàm số $f'(x)$ trên cùng một hệ trục



$$\text{Hàm số } g(x) \text{ nghịch biến} \Rightarrow g'(x) \leq 0 \Rightarrow f'(t) \geq -\frac{t}{2} \Rightarrow \begin{cases} -2 \leq t \leq 0 \\ t \geq 4 \end{cases}$$

$$\text{Như vậy } f'(1-2x) \geq \frac{1-2x}{-2} \Rightarrow \begin{cases} -2 \leq 1-2x \leq 0 \\ 4 \leq 1-2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2} \\ x \leq -\frac{3}{2} \end{cases}.$$

Vậy hàm số $g(x) = f(1-2x) + x^2 - x$ nghịch biến trên các khoảng $\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$ và $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right)$.

Mà $\left(1; \frac{3}{2}\right) \subset \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$ nên hàm số $g(x) = f(1-2x) + x^2 - x$ nghịch biến trên khoảng $\left(1; \frac{3}{2}\right)$

$$\text{Từ (2)} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} -1 \geq m+3 \\ m-3 \leq -1 \\ 3 \leq m+1 \end{cases} \\ \begin{cases} m+1 \leq -1 \\ 0 \leq m+3 \\ 0 \leq m-3 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} -4 \geq m \\ m \leq 2 \\ 2 \leq m \end{cases} \\ \begin{cases} m \leq -2 \\ -3 \leq m \\ 3 \leq m \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} m \leq -4 \\ m = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} -3 \leq m \leq -2 \\ m \geq 3 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow m \in \emptyset.$$

Vậy không có giá trị nguyên của $m \in [-30; 30]$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 28: Chọn C

Xét hàm số $g(x) = |f(x)| = |x^2 - 4mx + m - 3|$ có $f'(x) = 2x - 4m$

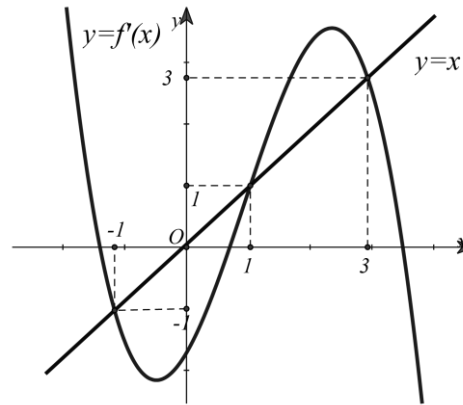
$$\text{Để hàm số nghịch biến trên } (1; 3) \text{ thì } \begin{cases} \begin{cases} f(-1) \geq 0 \\ f'(x) = 2x - 4m \leq 0 \end{cases}, \forall x \in (-2; -1) \\ \begin{cases} f(-1) \leq 0 \\ f'(x) = 2x - 4m \geq 0 \end{cases}, \forall x \in (-2; -1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} 5m - 2 \geq 0 \\ m \geq \frac{x}{2} \end{cases}, \forall x \in (-2; -1) \\ \begin{cases} 5m - 2 \leq 0 \\ m \leq \frac{x}{2} \end{cases}, \forall x \in (-2; -1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} m \geq \frac{2}{5} \\ m \geq -\frac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} m \leq \frac{2}{5} \\ m \leq -1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \frac{2}{5} \\ m \leq -1 \end{cases} \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}, m \in [-40; 40]} \begin{cases} 1 \leq m \leq 40 \\ -40 \leq m \leq -1 \end{cases}.$$

Vậy có 80 giá trị nguyên m thỏa mãn.

Câu 29: Chọn A

Ta có đường thẳng $y = x$ cắt đồ thị hàm số $y = f'(x)$ tại các điểm $x = -1; x = 1; x = 3$ như hình vẽ sau:



Dựa vào đồ thị của hai hàm số trên ta có $f'(x) > x \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ 1 < x < 3 \end{cases}$ và $f'(x) < x \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 1 \\ x > 3 \end{cases}$.

Trường hợp 1: $x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < 1$, khi đó ta có $g(x) = 2f(1-x) - x^2 + 2x + 2020$.

Ta có $g'(x) = -2f'(1-x) + 2(1-x)$.

$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow -2f'(1-x) + 2(1-x) > 0 \Leftrightarrow f'(1-x) < 1-x \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < 1-x < 1 \\ 1-x > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 2 \\ x < -2 \end{cases}.$$

Kết hợp điều kiện ta có $g'(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1 \\ x < -2 \end{cases}$.

Trường hợp 2: $x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$, khi đó ta có $g(x) = 2f(x-1) - x^2 + 2x + 2020$.

$$g'(x) = 2f'(x-1) - 2(x-1)$$

$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow 2f'(x-1) - 2(x-1) > 0 \Leftrightarrow f'(x-1) > x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 < -1 \\ 1 < x-1 < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ 2 < x < 4 \end{cases}.$$

Kết hợp điều kiện ta có $g'(x) > 0 \Leftrightarrow 2 < x < 4$.

Vậy hàm số $g(x) = 2f(|x-1|) - x^2 + 2x + 2020$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$.

Câu 30: Chọn A

Với $x > 1$, ta có $g(x) = 2f(x-1) - (x-1)^2 + 2021 \Rightarrow g'(x) = 2f'(x-1) - 2(x-1)$.

Hàm số đồng biến $\Leftrightarrow 2f'(x-1) - 2(x-1) > 0 \Leftrightarrow f'(x-1) > x-1$ (*).

$$\text{Đặt } t = x-1, \text{ khi đó } (*) \Leftrightarrow f'(t) > t \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < t < 3 \\ t < -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 < x < 4 \\ x < 0 \end{cases} \text{ (loại)}.$$

Với $x < 1$, ta có $g(x) = 2f(1-x) - (1-x)^2 + 2021 \Rightarrow g'(x) = -2f'(1-x) + 2(1-x)$

Hàm số đồng biến $\Leftrightarrow -2f'(1-x) + 2(1-x) > 0 \Leftrightarrow f'(1-x) < 1-x$ (**).

$$\text{Đặt } t = 1-x, \text{ khi đó } (**) \Leftrightarrow f'(t) < t \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < t < 1 \\ t > 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < x < 2 \\ x < -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < x < 1 \\ x < -2 \end{cases}.$$

Vậy hàm số $g(x)$ đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -2), (0;1), (2;4)$.

Câu 31: Chọn B

Xét hàm số $y = f(2x-1) \Rightarrow (f(2x-1))' = 2f'(2x-1)$ nghịch biến khi $f'(x) < 0$

Chủ đề 01: Cơ bản về tính đơn điệu của hàm số

$$\Leftrightarrow (f(2x-1))' = 2 \cdot f'(2x-1) < 0 \Leftrightarrow f'(2x-1) < 0 \Leftrightarrow 1 < 2x-1 < 3 \Leftrightarrow 1 < x < 2.$$

Xét hàm số $y = g(ax+b) \Rightarrow (g(ax+b))' = a \cdot g'(ax+b)$ nghịch biến khi xảy ra hai trường hợp

$$\begin{cases} a > 0 \\ g'(ax+b) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ ax+b < 0 \\ ax+b > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ x < \frac{-b}{a} \\ x > \frac{2-b}{a} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a < 0 \\ g'(ax+b) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ 0 < ax+b < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ -\frac{b-2}{a} < x < -\frac{b}{a} \end{cases}$$

Nếu $a > 0$ thì hàm số $y = g(ax+b)$ nghịch biến trên $\left(-\infty; \frac{-b}{a}\right); \left(\frac{2-b}{a}; +\infty\right)$ không thỏa mãn điều kiện có khoảng nghịch biến là $(1; 2)$.

Nếu $a < 0$ thì hàm số $y = g(ax+b)$ nghịch biến trên $\left(-\frac{b-2}{a}; \frac{-b}{a}\right)$

Yêu cầu bài toán là hai hàm số $y = f(2x-1)$, $y = g(ax+b)$ có cùng khoảng nghịch biến lớn

nhất nên $\begin{cases} -\frac{b-2}{a} = 1 \\ \frac{-b}{a} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 4 \end{cases} \Rightarrow 4a + b = -4.$

Câu 32: Chọn B

Xét hàm số $g(x) = f(x^3 + 3x - 1)$

Đạo hàm hàm hợp $g'(x) = (3x^2 + 3) \cdot f'(x^3 + 3x - 1) = 3(x^2 + 1) \cdot f'(x^3 + 3x - 1).$

Để hàm số nghịch biến thì $g'(x) = 3(x^2 + 1) \cdot f'(x^3 + 3x - 1) \leq 0$

$$f'(x^3 + 3x - 1) \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x^3 + 3x - 1 \leq 3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + 3x \geq 0 \\ x^3 + 3x - 4 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x^2 + 3) \geq 0 \\ (x-1)(x^2 + x + 4) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1.$$

Câu 33: Chọn C

$$g'(x) = \frac{(x^2 - 2x)' \cdot f'(x^2 - 2x)}{(f(x^2 - 2x) + 1)^2} = \frac{(2x - 2) \cdot f'(x^2 - 2x)}{(f(x^2 - 2x) + 1)^2}.$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2 = 0 \\ f'(x^2 - 2x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - 2x = -2 \\ x^2 - 2x = -1 \\ x^2 - 2x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$$

Ta có bảng xét dấu của $g'(x)$:

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu ta có hàm số $y = g(x)$ nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(1; 3)$.

Câu 34: Chọn B

$$\text{Đặt } g(x) = |4f(\sin x) + \cos 2x - a| \Rightarrow g(x) = \sqrt{[4f(\sin x) + \cos 2x - a]^2}.$$

$$\Rightarrow g'(x) = \frac{[4\cos x \cdot f'(\sin x) - 2\sin 2x][4f(\sin x) + \cos 2x - a]}{\sqrt{[4f(\sin x) + \cos 2x - a]^2}}.$$

$$\text{Ta có } 4\cos x \cdot f'(\sin x) - 2\sin 2x = 4\cos x[f'(\sin x) - \sin x].$$

$$\text{Với } x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \text{ thì } \cos x > 0, \sin x \in (0; 1) \Rightarrow f'(\sin x) - \sin x < 0.$$

$$\text{Hàm số } g(x) \text{ nghịch biến trên } \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \text{ khi } 4f(\sin x) + \cos 2x - a \geq 0, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow 4f(\sin x) + 1 - 2\sin^2 x \geq a, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right).$$

$$\text{Đặt } t = \sin x \text{ được } 4f(t) + 1 - 2t^2 \geq a, \forall t \in (0; 1).$$

$$\text{Xét } h(t) = 4f(t) + 1 - 2t^2 \Rightarrow h'(t) = 4f'(t) - 4t = 4[f'(t) - 1].$$

$$\text{Với } t \in (0; 1) \text{ thì } h'(t) < 0 \Rightarrow h(t) \text{ nghịch biến trên } (0; 1).$$

$$\text{Do đó } \Leftrightarrow a \leq h(1) = 4f(1) + 1 - 2 \cdot 1^2 = 3. \text{ Vậy có 3 giá trị nguyên dương của } a \text{ thỏa mãn.}$$

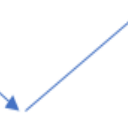
Câu 35: Chọn D

$$\text{Đặt } t = 1 - x \Rightarrow f(t) = f(1 - x) \Rightarrow f'(t) = -f'(1 - x)$$

$$\text{Ta có } f'(t) = 0 \Rightarrow f'(1 - x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \\ x = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -1 \\ t = -2 \end{cases}$$

$$f'(t) > 0 \Leftrightarrow f'(1 - x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ 2 < x < 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t > 1 \\ -2 < t < -1 \end{cases}$$

BBT của $f(t)$

t	$-\infty$		-2		-1		1		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(t)$									

$$\text{Mặt khác } g'(x) = 2x \cdot f'(x^2 - 3)$$

$$\text{Nên } g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x \cdot f'(x^2 - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(x^2 - 3) = 0 \end{cases}$$

$$\text{Ta có } f'(x^2 - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3 = 1 \\ x^2 - 3 = -1 \\ x^2 - 3 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 2 \\ x = \pm \sqrt{2} \\ x = \pm 1 \end{cases}$$

$$f'(x^2 - 3) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3 > 1 \\ -2 < x^2 - 3 < -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x < -2 \\ -\sqrt{2} < x < -1 \\ 1 < x < \sqrt{2} \end{cases}$$

Bảng xét dấu của $g'(x)$

x	$-\infty$	-2	$-\sqrt{2}$	-1	0	1	$\sqrt{2}$	2	$+\infty$
$2x$		-	-	-	-	0	+	+	+
$f'(x^2 - 3)$		+	0	-	0	+	0	-	0
$g'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	0

Dựa vào bảng xét dấu $g'(x)$ suy ra hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(0; 1)$

Câu 36: Chọn C

x	$-\infty$	-2	0	3	$+\infty$			
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

Xét $y = g(x) = f(x^2 + 2x + m)$

Ta có: $y' = g'(x) = 2(x+1)f'(x^2 + 2x + m)$

Vì $x+1 > 0 \forall x \in (0; 1)$ nên để hàm số $y = f(x^2 + 2x + m)$ đồng biến trên khoảng $(0; 1)$ khi và chỉ khi $f'(x^2 + 2x + m) > 0 \forall x \in (0; 1)$, do hàm số $x^2 + 2x + m$ luôn đồng biến trên $(0; 1)$ nên

Đặt $t = x^2 + 2x + m$. Vì $x \in (0; 1)$ nên $t \in (m; m+3)$

Dựa vào bảng xét dấu của $f'(x)$ ta có: $\begin{cases} m+3 \leq -2 \\ m \geq 0 \\ m+3 \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -5 \\ m = 0 \end{cases}$

Mà $-10 < m < 10$ nên $m = \{-9; -8; -7; -6; -5; 0\}$

Vậy có tất cả 6 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn đề bài.

Câu 37: Chọn B

Xét $g'(x) = -2f'(3-2x+m) + 2x - (m+3)$. Xét phương trình $g'(x) = 0$

Đặt $t = 3 - 2x + m$ thì phương trình trở thành $-2 \left[f'(t) - \frac{-t}{2} \right] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \\ t = 4 \\ t = 0 \end{cases}$

Từ đó, $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{5+m}{2}, x_2 = \frac{m+3}{2}, x_3 = \frac{-1+m}{2}$. Lập bảng xét dấu, đồng thời lưu ý nếu $x > x_1$ thì $t < t_1$ nên $f(x) > 0$. Và các dấu đan xen nhau do các nghiệm đều làm đổi dấu đạo hàm nên suy ra $g'(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in [x_2; x_1] \cup (-\infty; x_3]$.

$$\text{Vì hàm số nghịch biến trên } (0;1) \text{ nên } g'(x) \leq 0, \forall x \in (0;1) \text{ từ đó suy ra } \begin{cases} \frac{3+m}{2} \leq 0 < 1 \leq \frac{5+m}{2} \\ 1 \leq \frac{-1+m}{2} \end{cases}$$

và giải ra các giá trị nguyên thuộc $(-6;6)$ của m là $-3; 3; 4; 5$.

Câu 38: Chọn B

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } y' &= 9mx^8 + 6(m^2 - 3m + 2)x^5 + 4(2m^3 - m^2 - m)x^3 \\ &= x^3(9mx^5 + 6(m^2 - 3m + 2)x^2 + 4(2m^3 - m^2 - m)) \end{aligned}$$

Để hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì $y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Mặt khác ta thấy $y' = 0$ có nghiệm bội lẻ $x = 0$, do đó để $y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ thì phương trình

$$9mx^5 + 6(m^2 - 3m + 2)x^2 + 4(2m^3 - m^2 - m) = 0 \text{ có nghiệm } x = 0$$

$$\Rightarrow 2m^3 - m^2 - m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -\frac{1}{2} \\ m = 0 \end{cases}$$

Thử lại:

$$\text{Với } m = 0 \Rightarrow y' = 12x^5.$$

$$\text{Với } m = 1 \Rightarrow y' = 9x^8 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Với } m = -\frac{1}{2} \Rightarrow y' = -\frac{9}{2}x^8 + \frac{45}{2}x^5.$$

Vậy có 1 giá trị của m .

Câu 39: Chọn B

$$\text{Ta có: } f(x) = \frac{2}{5}m^2x^5 - \frac{8}{3}mx^3 - (m^2 - m - 20)x + 1.$$

$$\Rightarrow f'(x) = 2m^2x^4 - 8mx^2 - m^2 + m + 20$$

Để hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì

$$f'(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 2m^2x^4 - 8mx^2 - m^2 + m + 20 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Đặt $t = x^2, t \geq 0$ ta có: $2m^2t^2 - 8mt - m^2 + m + 20 \geq 0$ (*), $\forall t \geq 0$ nên ta có các trường hợp sau:

Trường hợp 1: $m = 0$: khi đó bpt (*) trở thành $20 \geq 0$. Nên $m = 0$ thỏa mãn.

$$\text{Trường hợp 2: } \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta = 64m^2 + 8m^4 - 8m^3 - 160m^2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m^2 - m - 12 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ -3 \leq m \leq 4 \end{cases}.$$

$$\text{Trường hợp 3: } \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta = 64m^2 + 8m^4 - 8m^3 - 160m^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m^2 - m - 12 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 4 \\ m < -3 \end{cases}.$$

Khi đó: Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ phương trình $2m^2t^2 - 8mt - m^2 + m + 20 = 0$ có hai nghiệm phân

$$\text{biệt thỏa mãn } t_1 < t_2 \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} S < 0 \\ P \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4}{m} < 0 \\ \frac{-m^2 + m + 20}{2m^2} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ -m^2 + m + 20 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ -4 \leq m \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow -4 \leq m < 0.$$

Kết hợp điều kiện ta có: $-4 \leq m < -3$

Vậy để hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì

$$\begin{cases} -3 \leq m \leq 4 \\ -4 \leq m < -3 \end{cases} \Leftrightarrow -4 \leq m \leq 4, m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}.$$

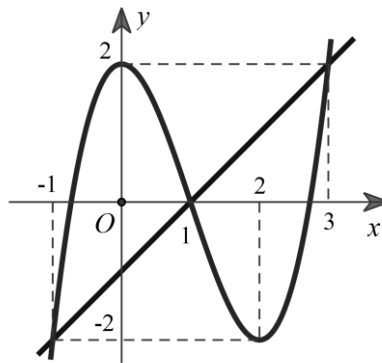
Câu 40: Chọn C

Ta có $g'(x) = f'(x-m) - (x-m-1)$

Cho $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x-m) = x-m-1$

Đặt $x-m=t \Rightarrow f'(t) = t-1$

Khi đó nghiệm của phương trình là hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = f'(t)$ và đường thẳng $y = t-1$



Dựa vào đồ thị hàm số ta có được $f'(t) = t-1 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 1 \\ t = 3 \end{cases}$

Bảng xét dấu của $g'(t)$

t	$-\infty$	-1		1		3	$+\infty$	
$g'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Từ bảng xét dấu ta thấy hàm số $g(t)$ đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$ và $(3; +\infty)$

$$\text{Hay } \begin{cases} -1 < t < 1 \\ t > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x-m < 1 \\ x-m > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-1 < x < m+1 \\ x > m+3 \end{cases}$$

Để hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(5; 6)$ thì $\begin{cases} m-1 \leq 5 < 6 \leq m+1 \\ m+3 \leq 5 < 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 \leq m \leq 6 \\ m \leq 2 \end{cases}$

Vì m là các số nguyên dương nên $S = \{1; 2; 5; 6\}$

Vậy tổng tất cả các phần tử của S là: $1+2+5+6=14$.

Câu 41: Chọn D

Ta có $f'(x) = 6 \cdot [(m+1)x^2 + (m^2 - 5m - 4)x - 8\sqrt{x+1} - 3m^2 + 6m + 19]$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; +\infty) \Leftrightarrow f'(x) \geq 0, \forall x \in (-1; +\infty)$

$$(m+1)x^2 + (m^2 - 5m - 4)x - 8\sqrt{x+1} - 3m^2 + 6m + 19 \geq 0, \forall x \in (-1; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow [x-3] \cdot \left[(m+1)x + m^2 - 2m - 1 - \frac{8}{\sqrt{x+1}+2} \right] \geq 0 \Leftrightarrow (x-3) \cdot g(x) \geq 0, \forall x \in (-1; +\infty)$$

$$\text{Với } g(x) = (m+1)x + m^2 - 2m - 1 - \frac{8}{\sqrt{x+1}+2}$$

$$\text{Điều kiện cần: } g(3) = 0 \Leftrightarrow 3(m+1) + m^2 - 2m - 1 - 2 = 0 \Leftrightarrow m^2 + m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = -1 \end{cases}$$

Điều kiện đủ:

$$\text{Với } m = 0 \text{ ta có } f'(x) = (x-3) \left(x - 1 - \frac{8}{\sqrt{x+1}+2} \right)$$

$$= (x-3) \left[(x-3) + \left(2 - \frac{8}{\sqrt{x+1}+2} \right) \right] = (x-3) \left[(x-3) + \frac{2(\sqrt{x+1}-2)}{\sqrt{x+1}+2} \right]$$

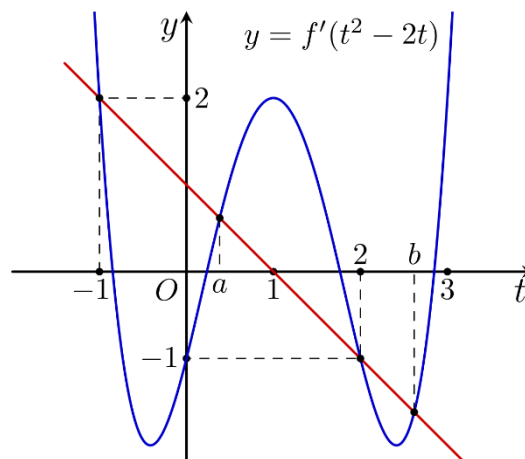
$$= (x-3)^2 \left[1 + \frac{2}{(\sqrt{x+1}+2)^2} \right] \geq 0, \forall x \in (-1; +\infty) \Rightarrow m = 0 \text{ thỏa mãn}$$

Với $m = -1$ ta có:

$$f'(x) = (x-3) \left(2 - \frac{8}{\sqrt{x+1}+2} \right) = (x-3) \cdot \frac{2(\sqrt{x+1}-2)}{\sqrt{x+1}+2} = \frac{2(x-3)^2}{(\sqrt{x+1}+2)^2} \geq 0, \forall x \in (-1; +\infty)$$

$\Rightarrow m = -1$ thỏa mãn.

Câu 42: Chọn C



Đặt $t = x + 1 \Leftrightarrow t - 1 = x$.

Khi đó $y(t) = f(t^2 - 2t) + \frac{2}{3}(t-1)^3 + 1$.

$$y'(t) = 2(t-1)f'(t^2 - 2t) + 2(t-1)^2 = 2(t-1)[f'(t^2 - 2t) + t - 1]$$

$$y'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ f'(t^2 - 2t) = 1 - t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -1 \\ t = a \in (0; 1) \\ t = 2 \\ t = b \in (2; 3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \\ x = a - 1 \in (-1; 0) \\ x = 1 \\ x = b - 1 \in (1; 2) \end{cases}$$

Với $x = 2 \Rightarrow t = 3$, ta có $\begin{cases} t - 1 > 0 \\ f'(t^2 - 2t) > 0 \end{cases} \Rightarrow y' > 0$. Ta có bảng biến thiên sau

x	$-\infty$	$\textcircled{-3}$	-2	$\textcircled{-1}$	$a - 1$	0	1	$b - 1$	$\textcircled{2}$	$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
y										

Từ bảng biến thiên ta có hàm số đồng biến trên khoảng $(-2; -1)$.

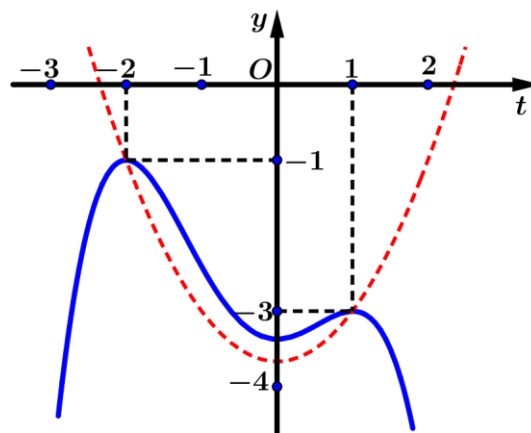
Câu 43: Chọn C

Ta có, $g'(x) = 3f'(3x+1) - (18x^2 + 12x - 9) < 0$

$$\Leftrightarrow f'(3x+1) < 6x^2 + 4x - 3 = \frac{2}{3}(9x^2 + 6x + 1) - \frac{11}{3} = \frac{2}{3}(3x+1)^2 - \frac{11}{3}.$$

Đặt $t = 3x+1$, ta được $f'(t) < \frac{2}{3}t^2 - \frac{11}{3}$.

Vẽ Parabol $(P): y = \frac{2}{3}t^2 - \frac{11}{3}$ trên cùng hệ trục tọa độ Oty với đồ thị hàm số $y = f'(t)$ như hình vẽ sau.



Ta thấy, $f'(t) < \frac{2}{3}t^2 - \frac{11}{3}$ với mọi $t \in (-\infty; -2) \cup (1; +\infty) \Rightarrow \begin{cases} 3x+1 < -2 \\ 3x+1 > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ x > 0 \end{cases}$.

Câu 44: Chọn D

Ta có $g(x) = f(x) - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x$ có $g'(x) = f'(x) - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

Cho: $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ (1)

Đặt $x = 2t+1$, phương trình (1) $\Leftrightarrow f'(2t+1) = \frac{1}{2}(2t+1) + \frac{1}{2} \Leftrightarrow f'(2t+1) = t+1$.

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(2x+1)$ phương trình có các nghiệm:

$$f'(2t+1) = t+1 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \\ t = 0 \\ t = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 1 \\ x = 5 \end{cases}$$

Bảng biến thiên

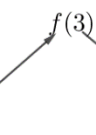
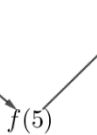
x	$-\infty$	-3		1		5		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$+\infty$							$+\infty$

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-3;1), (5;+\infty)$.

Câu 45: Chọn D

$$\text{Đặt } t = 3 - 2x \Rightarrow f'(t) = f'(3 - 2x). \text{ Cho } f'(t) = 0 \Leftrightarrow f'(3 - 2x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \Rightarrow t = 5 \\ x = 0 \Rightarrow t = 3 \\ x = 2 \Rightarrow t = -1 \end{cases}$$

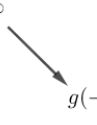
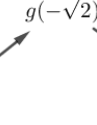
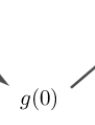
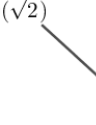
Từ đó ta có bảng biến thiên của $f(x)$:

x	$-\infty$	-1		3		5		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$							$+\infty$
			$f(-1)$		$f(3)$		$f(5)$	

Xét $g(x) = f(x^2 + 1)$, ta có $g'(x) = 2xf'(x^2 + 1)$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2xf'(x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(x^2 + 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + 1 = -1 \\ x^2 + 1 = 3 \\ x^2 + 1 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \\ x = \pm 2 \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	-2		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$+\infty$											$+\infty$
			$g(-2)$		$g(-\sqrt{2})$		$g(0)$		$g(\sqrt{2})$		$g(2)$	

Do đó hàm số $f(x^2 + 1)$ nghịch biến trên $(-1;0)$.

Câu 46: Chọn C

Chủ đề 01: Cơ bản về tính đơn điệu của hàm số

Hàm số $g(x)$ là hàm số bậc 3 nên có dạng:

$$g(x) = (f(2-x))' = a(x+4)(x-1)(x-4), a > 0 \Rightarrow f'(2-x) = -a(x+4)(x-1)(x-4)$$

Đặt $t = 2 - x \Rightarrow f'(t) = a(t-6)(t+2)(t-1)$

Đạo hàm của hàm số $y = f(x^2 + 2) - x^3 + 2x^2 - x + 2021$ là

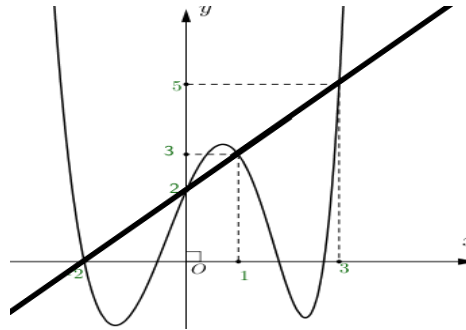
$$y' = 2xf'(x^2 + 2) - 3x^2 + 4x - 1 = 2ax(x^2 - 4)(x^2 + 4)(x^2 + 1) + \left[-3(x-1)\left(x - \frac{1}{3}\right) \right]$$

Lập bảng xét dấu

x	$-\infty$	-2	0	$\frac{1}{3}$	1	2	$+\infty$	
$2xf'(x^2+2)$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
$-3x^2+4x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$

Dựa vào bảng xét dấu trên ta có hàm số đã cho nghịch biến trên $(1; 2)$.

Câu 47: Chọn B



Ta có $g'(x) = 2xf'(x^2 - 4) - 2x^2 = 2x[f'(x^2 - 4) - x]$. Đặt $t = x - 2 \Rightarrow x = t + 2$

$$\text{Suy ra: } g'(t) = 2(t+2)[f'(t^2 + 4t) - t - 2]; g'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(t^2 + 4t) = t + 2 \\ t = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \\ t = 0 \\ t = 1 \\ t = 3 \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

t	$-\infty$	-2	0	1	3	$+\infty$
$g'(t)$		$-$	0	$-$	0	$+$

$$\text{Dựa vào bảng biến thiên ta có: } \begin{cases} t < 0 \\ 1 < t < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 < 0 \\ 1 < x - 2 < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2 \\ 3 < x < 5 \end{cases}$$

Câu 48: Chọn D

Ta có: $g(x) = [f(x^2 - 4)]' = 2xf'(x^2 - 4)$

Dựa trên đồ thị ta có $g(x) = kx(x-1)(x+1) = kx(x^2 - 1); k > 0$

Vì vậy, $f'(x^2 - 4) = \frac{k}{2}(x^2 - 1); k > 0$. Đặt $t = x^2 - 4, t \geq -4$ ta có $f'(t) = \frac{k}{2}(t + 3); k > 0$

Phương trình đạo hàm: $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -3$. Bảng xét dấu

t	-4	-3	$+\infty$
$f'(t)$	-	0	+

Hàm số $h(x) = f(x^2 + x + m)$ đồng biến trên $(0;1)$ khi:

$$h'(x) = (2x+1)f'(x^2+x+m) > 0, \forall x \in (0;1) \text{ mà } 2x+1 > 0, \forall x \in (0;1) \text{ nên:}$$

$$h'(x) > 0, \forall x \in (0;1) \Leftrightarrow f'(x^2+x+m) > 0, \forall x \in (0;1) \Leftrightarrow x^2+x+m > -3, \forall x \in (0;1)$$

$$\Leftrightarrow m > -x^2-x-3, \forall x \in (0;1) \Leftrightarrow m \geq \max_{x \in [0;1]}(-x^2-x-3) = -3 \text{ vì } \max_{x \in [0;1]}(-x^2-x-3) = -3 \text{ tại } x=0$$

Kết luận: có 3 giá trị nguyên âm của m thỏa đề là $m = -1; -2; -3$.

Câu 49: Chọn A

$$\text{Xét } y = f(x^2 - 2x) \text{ có } y' = 2xf'(x^2 - 1); y' = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(x^2 - 1) = 0 \end{cases}$$

Có $x = \pm\sqrt{2}$ là nghiệm bội lẻ của $f'(x^2 - 1) = 0$ và $f'(1) = 0$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$			

Xét $g(x) = f(2x^3 - x)$, cho $g'(x) = (6x^2 - 1)f'(2x^3 - x)$

$$\text{Cho } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 2x^3 - x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{1}{\sqrt{6}} \\ x = 1 \end{cases}$$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{\sqrt{6}}$	$\frac{1}{\sqrt{6}}$	1	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+	0	+
$g(x)$					

Hàm số $g(x)$ đồng biến trên các khoảng $\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}; \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ và $(1; +\infty)$.

Câu 50: Chọn C

Ta có $y' = 2x.f'(x^2 - 2)$, dựa vào bảng biến thiên ta thấy $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$ do đó

$$f'(x^2 - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases} \text{ và do đó } f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Xét $g(x) = f(x^3 - 3x + 3)$ ta có $g'(x) = (3x^2 - 3)f'(x^3 - 3x + 3)$

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} (3x^2-3)=0 \\ f'(x^3-3x+3)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm 1 \\ x^3-3x+3=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm 1 \\ x=1 \\ x=-2 \end{cases}$$

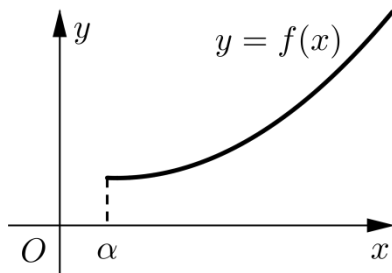
Ta có bảng xét dấu $g'(x)$

x	$-\infty$	-2	-1	1	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$

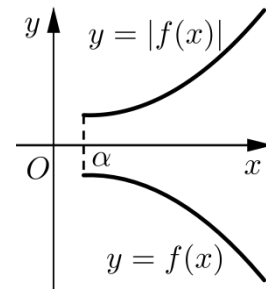
Vậy hàm số đồng biến trên $(1; 2)$.

DẠNG 4**Tính đơn điệu của hàm chứa GTĐ**

❖ Hàm số $y = |f(x)|$ đồng biến trên $[\alpha; +\infty)$ khi và chỉ khi

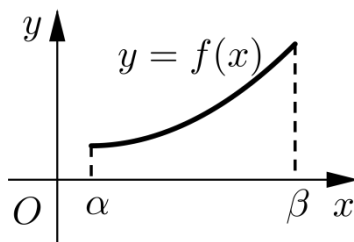


$$\bullet \begin{cases} y'(\alpha) \geq 0, \forall x \in [\alpha; +\infty) \\ y(\alpha) \geq 0 \end{cases}$$

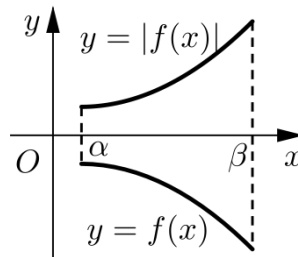


$$\bullet \begin{cases} y'(\alpha) \leq 0, \forall x \in [\alpha; +\infty) \\ y(\alpha) \leq 0 \end{cases}$$

❖ Hàm số $y = |f(x)|$ đồng biến trên $(\alpha; \beta)$ khi và chỉ khi



$$\bullet \begin{cases} y'(\alpha) \geq 0, \forall x \in (\alpha; \beta) \\ y(\alpha) \geq 0 \end{cases}$$



$$\bullet \begin{cases} y'(\alpha) \leq 0, \forall x \in (\alpha; \beta) \\ y(\alpha) \leq 0 \end{cases}$$

❖ Các dạng đồng biến $y = |f(x)|$ trên $(-\infty; a]$, $[\alpha; \beta]$ ta thực hiện tương tự.

❖ Hàm số nghịch biến làm ngược lại.

Câu 1: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = |x^5 - 5x^2 + 5(m-1)x - 8|$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$?

A. 2.

B. 0.

C. 4.

D. 1.

Câu 2: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = |2x^3 - mx + 1|$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$?

A. 2.

B. 6.

C. 3.

D. 4.

Câu 3: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m nhỏ hơn 10 để hàm số $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m|$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$?

A. 6.

B. 4.

C. 3.

D. 5.

Câu 4: Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = |x^4 + 2x^3 + mx + 2|$ đồng biến trên khoảng $(-1; +\infty)$?

Chủ đề 01: Cơ bản về tính đơn điệu của hàm số

A. $m \geq 1$. **B.** $m \in \emptyset$. **C.** $0 \leq m \leq 1$. **D.** $m \leq 0$.

Câu 5: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham m thuộc đoạn $[-10;10]$ để hàm số $y = \left| -x^3 + 3(m+1)x^2 - 3m(m+2)x + m^2(m+3) \right|$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$?

A. 21. **B.** 10. **C.** 8. **D.** 2.

Câu 6: Có bao nhiêu số nguyên m thuộc khoảng $(-4;4)$ để hàm số $y = \left| \frac{1}{3}x^3 - x^2 + mx + 1 \right|$ đồng biến trên $(1;+\infty)$?

A. 5. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 6.

Câu 7: Tổng tất cả các giá trị nguyên thuộc $[-5;5]$ của m để hàm số $g(x) = \left| \frac{1}{3}x^3 + (m-1)x^2 + (2m-3)x - \frac{2}{3} \right|$ đồng biến trên $(1;5)$ là:

A. 1. **B.** -1. **C.** 0. **D.** 2.

Câu 8: Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc đoạn $[-2019;2019]$ của tham số thực m để hàm số $y = \left| x^3 - 3(m+2)x^2 + 3m(m+4)x \right|$ đồng biến trên khoảng $(0;4)$?

A. 4033. **B.** 4032. **C.** 2018. **D.** 2016.

Câu 9: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của $m < 5$ để hàm số $y = \left| \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + m \right|$ đồng biến trên $(0,+\infty)$?

A. 2 **B.** 4 **C.** 6 **D.** 8

Câu 10: Có bao nhiêu số nguyên dương m để hàm số $y = \left| x^5 - mx + 4 \right|$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

A. 4. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

Câu 11: Có bao nhiêu số nguyên m thuộc khoảng $(-10;10)$ để hàm số $y = \left| 2x^3 - 2mx + 3 \right|$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$?

A. 12. **B.** 8. **C.** 11. **D.** 7.

Câu 12: Cho hàm số $y = \left| x^5 - mx + 1 \right|$. Gọi S là tập tất cả các số nguyên dương m sao cho hàm số đồng biến trên $[1;+\infty)$. Tính tổng tất cả các phần tử của S .

A. 15 **B.** 14 **C.** 12 **D.** 13

Câu 13: Cho hàm số $f(x) = \left| x^2 - 2mx + m + 2 \right|$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-9;9]$ để hàm số đồng biến trên khoảng $(0;2)$?

A. 3 **B.** 2 **C.** 16 **D.** 9

Câu 14: Cho hàm số $f(x) = \left| -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}(2m+3)x^2 - (m^2+3m)x + \frac{2}{3} \right|$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-9;9]$ để hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;2)$?

A. 3. **B.** 2. **C.** 16. **D.** 9.

Câu 15: Có bao nhiêu giá trị nguyên $m \in (-20; 20)$ để hàm số $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m|$ nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

- A. 4. B. 30. C. 8. D. 15.

Câu 16: Có bao nhiêu giá trị nguyên không âm m để hàm số $y = |x^4 - mx^2 + 9|$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

- A. 3. B. 6. C. 7. D. 4.

Câu 17: Cho hàm số $y = \left| \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(m+3)x^2 + (2m+3)x - 1 \right|$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên dương m để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(4; +\infty)$. Chọn mệnh đề **sai**?

- A. S có 4 phần tử.
 B. Tổng các giá trị của m thuộc S bằng 6.
 C. Tích các giá trị của m thuộc S bằng 0.
 D. Giá trị m lớn nhất thuộc S bằng 4.

Câu 18: Cho hàm số $f(x) = |x^3 - (2m-5)x + 2018|$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-2019; 2019]$ để hàm số đồng biến trên khoảng $(1; 3)$?

- A. 3032. B. 4039. C. 0. D. 2021.

Câu 19: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = g(x) = |x^3 - 3(m+1)x^2 + 3m(m+2)x|$ đồng biến trên nửa đoạn $[0; +\infty)$ biết rằng $-2021 \leq m \leq 2021$?

- A. 2020. B. 2021. C. 2022. D. 2019.

Câu 20: Gọi $S = [a; +\infty)$ là tập tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = |x^3 - 3x^2 + mx + 3m + 1|$ đồng biến trên khoảng $(-2; +\infty)$. Khi đó a bằng

- A. -3. B. 19. C. 3. D. -2.

Câu 21: Tính tổng S tất cả các giá trị nguyên của tham số m trong đoạn $[-10; 10]$ để hàm số $y = \left| \frac{mx+3}{x+m+2} \right|$ đồng biến trên $(1; +\infty)$.

- A. $S = 55$. B. $S = 54$. C. $S = 3$. D. $S = 5$.

Câu 22: Tìm m để hàm số $y = \left| \frac{x-2m+1}{x+m} \right|$ đồng biến trên $(1; +\infty)$

- A. $\frac{1}{3} < m \leq 1$. B. $m \in [-1; 1] \setminus \left\{ \frac{1}{3} \right\}$. C. $-1 \leq m < \frac{1}{3}$. D. $\frac{1}{3} < m \leq 1$.

Câu 23: Có bao nhiêu số nguyên của tham số m để hàm số $y = \left| \frac{x^2 - 2x + 2m + 2}{x - 1} \right|$ đồng biến trên $[3; +\infty)$?

- A. 4. B. 5. C. vô số. D. 6.

Câu 24: Tìm tất cả các giá thực của tham số m để hàm số $y = \left| x - \frac{2}{x} + m \right|$ đồng biến trên $[1; +\infty)$.

A. $m \leq -1$.

B. $-1 < m \leq 1$.

C. $m \geq 1$.

D. $m > 0$.

Câu 25: Biết rằng tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho hàm số $y = \left| x + 1 + \frac{m^2 - 2m - 1}{x + 1} \right|$ đồng biến trên $(2; +\infty)$ là $[a; b]$. Tính $a.b$.

A. -10 .

B. -9 .

C. 2 .

D. -7 .

Câu 26: Tìm tất cả các giá trị thực của m sao cho hàm số $y = \left| \frac{x + m}{x + 1} \right|$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$

A. $m < -1$.

B. $m > 1$.

C. $-1 \leq m \leq 1$.

D. $-1 \leq m < 1$

Câu 27: Tính tổng tất cả các giá trị nguyên dương của m để hàm số $y = \left| \frac{x^3 - 2mx + 2}{x - 1} \right|$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$

A. 3

B. 4

C. 2

D. 5

Câu 28: Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y = \left| \frac{x - m}{x + m + 3} \right|$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$?

A. 4 .

B. 2 .

C. 3 .

D. 1 .

Câu 29: Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của m để hàm số $y = \left| x + 5 + \frac{1 - m}{x - 2} \right|$ đồng biến trên $[5; +\infty)$?

A. 11 .

B. 10 .

C. 8 .

D. 9 .

Câu 30: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \left| \frac{x^2 + x + 2m - 3}{x - 1} \right|$ đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$?

A. 7 .

B. 5 .

C. 4 .

D. Vô số.

Câu 31: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \left| \frac{x - m + 1}{x + m} \right|$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

A. $m \leq \frac{1}{2}$ hoặc $m \geq 2$.

B. $\frac{1}{2} < m < 2$.

C. $\frac{1}{2} < m \leq 2$.

D. $\frac{1}{2} \leq m \leq 2$.

Câu 32: Cho hàm số $y = \left| \sqrt{2 - x} + \sqrt{x + 2} + \frac{m}{2}x - 1 \right|$. Có bao nhiêu giá trị m nguyên để hàm số nghịch biến trên $(0; 1)$

A. 4

B. 2 .

C. 3 .

D. 5 .

Câu 33: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in (-5; 5)$ để hàm số $y = \left| \sqrt{x^2 - 3} - 2x - 3m \right|$ nghịch biến trên $(2; 3)$?

A. 2 .

B. 3 .

C. 5 .

D. 9 .

Câu 34: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [0; 10]$ để hàm số $y = \left| x + m\sqrt{x^2 - 2x + 3} \right|$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$?

A. 11 .

B. 10 .

C. 12 .

D. 9 .

- Câu 35:** Cho hàm số $f(x) = \left| \sqrt{x^2 + 2x + 2} - x + m \right|$, trong đó m là tham số thực. S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m trên đoạn $[-2019; 2019]$ để hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1; +\infty)$. Số phần tử của tập S là
- A. 2018. B. 2017. C. 2019. D. 4039.
- Câu 36:** Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để hàm số $y = \left| 3\sqrt{x^2 + 1} + x + m \right|$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$?
- A. 5. B. 6. C. 4. D. Vô số.
- Câu 37:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \left| 4\sqrt{x^2 + 2x + 3} + 5x - m^2 + 5 \right|$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$?
- A. 9 B. 6 C. 11 D. 8
- Câu 38:** Cho hàm số $y = f(x) = \left| \sqrt{x^2 + 3} + 2x + m^2 - 5m \right|$. Hỏi m thuộc khoảng nào trong các khoảng sau để hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(1; +\infty)$.
- A. $(-\infty; 0]$. B. $(1; 4)$. C. $(-\infty; 2)$. D. $[3; +\infty)$.
- Câu 39:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m nhỏ hơn 10 để hàm số $y = \left| \sqrt{-x^2 + 6x} + m \right|$ đồng biến trên khoảng $(0; 3)$?
- A. 6. B. 4. C. 3. D. 10.
- Câu 40:** Tổng các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \left| x^3 - 3x^2 - 9x - 5 + \frac{m}{2} \right|$ có 5 điểm cực trị là.
- A. 2016. B. 1952. C. -2016. D. -496.
- Câu 41:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in [-2020; 2020]$ để hàm số $y = \left| \sqrt{x^2 + 1} - mx - 1 \right|$ đồng biến trên khoảng $(1; 2)$
- A. 4042 B. 4039 C. 4040 D. 4041
- Câu 42:** Có bao nhiêu giá trị m nguyên để hàm số $y = f(x) = \left| x^3 - 3x^2 + 3(m^2 + 5)x + (12 - 3m^2)\cos x \right|$ đồng biến trên $(0; \pi)$
- A. 3. B. 5. C. 4. D. Vô số
- Câu 43:** Các giá trị của tham số m để hàm số $y = \left| \sin x - \cos x + m \right|$ đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$ là
- A. $m > \sqrt{2}$. B. $m \geq \sqrt{2}$. C. $m > 1$. D. $m \geq 1$.
- Câu 44:** Cho hàm số $y = \left| \sin^3 x - m \cdot \sin x + 1 \right|$. Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên m sao cho hàm số đồng biến trên $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Tính số phần tử của S .

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 0.

Câu 45: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc $[-5;5]$ để hàm số $y = |\cos^3 x - 3m^2 \cos x|$ nghịch biến trên $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

A. 1.

B. 11.

C. 5.

D. 6

Câu 46: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để $y = |9^x + 3^x - m + 1|$ đồng biến trên đoạn $[0;1]$.

A. 1.

B. 4.

C. 3.

D. 6.

Câu 47: Có bao nhiêu giá trị m nguyên dương và nhỏ hơn 2020 để hàm số $y = |4^x - m \cdot 2^{x+1} + m + 2|$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$?

A. 2018.

B. 2019.

C. 2.

D. 3.

Câu 48: Cho hàm số $y = \left| e^{\frac{2x+2}{x-1}} + 3e^{\frac{x+1}{x-1}} - 2m + 5 \right|$ (1). Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(2;4)$?

A. 234.

B. Vô số.

C. 40.

D. Không tồn tại m .

Câu 49: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương $m \in (-2019;2020)$, để hàm số $y = |e^{-x^2} - e^{x^2} - m|$ nghịch biến trên $(1;e)$?

A. 401.

B. 0.

C. 2019.

D. 2016.

Câu 50: Giá trị lớn nhất của m để hàm số $y = |e^x + e^{2x} - m|$ đồng biến trên $(1;2)$ là

A. e .

B. $e + e^2$.

C. e^2 .

D. 2.

Câu 51: Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = |8^{\tan x} + 3 \cdot 2^{\tan x} - m + 2|$ đồng biến trên $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$.

A. $m \leq \frac{29}{8}$.

B. $m > \frac{29}{8}$.

C. $m < \frac{29}{8}$.

D. $m \geq \frac{29}{8}$.

Câu 52: Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc khoảng $(-100;100)$ của tham số m để hàm số $y = |\ln 3x - 4x^2 + m|$ đồng biến trên đoạn $[1;e^2]$?

A. 101.

B. 102.

C. 103.

D. 100.

Câu 53: Có bao nhiêu số nguyên $m < 2020$ để hàm số $y = |\ln(mx) - x + 2|$ nghịch biến trên $(1;4)$?

A. 2018.

B. 2019.

C. 1.

D. vô số.

Câu 54: Có bao nhiêu số nguyên m thuộc $(-2020;2020)$ để hàm số $y = |\ln(x^2 + 2x - m) - 2mx^2 - 1|$ luôn đồng biến trên $(0;10)$.

A. 4038.

B. 2020.

C. 2017.

D. 2017.

Câu 55: Có bao nhiêu số nguyên của tham số m trong đoạn $[-3;3]$ để hàm số $y = |\ln(x^3 + mx + 2)|$ đồng biến trên nửa khoảng $[1;3)$?

A. 7.

B. 4.

C. 6.

D. 5.

Câu 56: Cho hàm số $y = \left| \ln(x^2 - mx - m) - 1 \right|$. Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc khoảng $(-10; 10)$ của tham số m để hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{1}{2}; 1\right)$?

- A. 10. B. 6. C. 9. D. 5.

Câu 57: Tổng các giá trị m nguyên thuộc $[-5; 5]$ sao cho hàm số $y = \left| \ln(x^3 - 3x + m) + 1 \right|$ nghịch biến trên $[0; 1]$ bằng

- A. 10. B. 11. C. 12. D. 13.

Câu 58: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-10; 10]$ để hàm số $y = \left| \log_3(x^3 + x^2 - mx + 1) \right|$ đồng biến trên $[1; +\infty)$.

- A. 13. B. 12. C. 11. D. 10.

Câu 59: Tổng các giá trị nguyên của m trên $[-10; 10]$ để hàm số $y = g(x) = \left| \ln(x^2 + x + m) + x \right|$ đồng biến trên $(-1; 3)$ là

- A. 50. B. 100. C. 52. D. 105.

Câu 60: Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số $m \in [-2021; 2021]$ để phương trình

$$\frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+2} + \frac{x+3}{x+4} - |x+3| + x - m = 0 \text{ có đúng 3 nghiệm thực } x. \text{ Số phần tử của tập } S \text{ là:}$$

- A. 2018. B. 2021. C. 2019. D. 2022.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.D	2.C	3.D	4.C	5.B	6.A	7.B	8.A	9.B	10.B
11.A	12.A	13.A	14.B	15.D	16.A	17.D	18.A	19.A	20.B
21.B	22.D	23.A	24.C	25.A	26.D	27.A	28.A	29.C	30.A
31.C	32.A	33.B	34.A	35.A	36.A	37.A	38.A	39.D	40.A
41.D	42.B	43.B	44.A	45.B	46.C	47.A	48.C	49.A	50.B
51.C	52.B	53.A	54.C	55.C	56.D	57.C	58.A	59.C	60.D

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Chọn D

Xét hàm số $f(x) = x^5 - 5x^2 + 5(m-1)x - 8$.

Trường hợp 1: $f(x) = 0$ có nghiệm $x_0 \in (-\infty; 1)$ thì hàm số $y = |f(x)|$ không thể nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.

Trường hợp 2: $f(x) = 0$ không có nghiệm $x_0 \in (-\infty; 1)$.

Ta có: $f'(x) = 5x^4 - 10x + 5(m-1)$.

Khi đó $y = |x^5 - 5x^2 + 5(m-1)x - 8| = |f(x)| = \sqrt{f^2(x)}$ nên $y' = \frac{f'(x) \cdot f(x)}{\sqrt{f^2(x)}}$.

Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 1)$ khi và chỉ khi $y' \leq 0$ với $\forall x \in (-\infty; 1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) \cdot f(x) \leq 0 \\ f(x) \neq 0 \end{cases}, \forall x \in (-\infty; 1) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < 0 \\ f'(x) \geq 0 \end{cases}, \forall x \in (-\infty; 1) \quad (\text{vì } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 5x^4 - 10x + 5(m-1) \geq 0, \forall x \in (-\infty; 1) \\ f(1) = 5m - 17 \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -x^4 + 2x + 1, \forall x \in (-\infty; 1) \\ m \leq \frac{17}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \max_{(-\infty; 1)}(-x^4 + 2x + 1) = \frac{3}{2\sqrt[3]{2}} + 1 \\ m \leq \frac{17}{5} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2\sqrt[3]{2}} + 1 \leq m \leq \frac{17}{5} \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m = 3.$$

Câu 2: Chọn C

Xét hàm số $f(x) = 2x^3 - mx + 1$.

Trường hợp 1: $f(x) = 0$ có nghiệm $x_0 \in (1; +\infty)$ thì hàm số $y = |f(x)|$ không thể đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

Trường hợp 2: $f(x) = 0$ không có nghiệm $x_0 \in (1; +\infty)$. Ta có: $f'(x) = 6x^2 - m$.

Khi đó $y = |2x^3 - mx + 1| = |f(x)| = \sqrt{f^2(x)}$ nên $y' = \frac{f'(x) \cdot f(x)}{\sqrt{f^2(x)}}$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$ khi và chỉ khi $y' \geq 0$ với $\forall x \in (1; +\infty)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) \cdot f(x) \geq 0 \\ f(x) \neq 0 \end{cases}, \forall x \in (1; +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ f'(x) \geq 0 \end{cases}, \forall x \in (1; +\infty) \quad (\text{vì } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3 - mx + 1 > 0 \\ 6x^2 - m \geq 0 \end{cases}, \forall x \in (1; +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} f(1) \geq 0 \\ f'(1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - m + 1 \geq 0 \\ 6 - m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq 3 \Rightarrow m \in \{1; 2; 3\}.$$

Câu 3: Chọn D

Xét hàm số $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m \Rightarrow f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 12x(x^2 - x - 2)$

$$\Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$					

$\swarrow$ $m-5$ $\nearrow$ $\searrow$ $\nearrow$

Nhận thấy: hàm số $y = |f(x)|$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1) \Leftrightarrow m - 5 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 5$.

Lại do $\begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m < 10 \end{cases} \Rightarrow m \in \{5; 6; 7; 8; 9\}$. Vậy có 5 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 4: Chọn C

Đặt $f(x) = x^4 + 2x^3 + mx + 2 \Rightarrow f'(x) = 4x^3 + 6x^2 + m$; $y = |x^4 + 2x^3 + mx + 2| = |f(x)|$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ nên hàm số đồng biến trên $(-1; +\infty)$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} f'(x) \geq 0, \forall x \in (-1; +\infty) \\ f(-1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3 + 6x^2 + m \geq 0, \forall x \in (-1; +\infty) \\ 1 - m \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -4x^3 - 6x^2, \forall x \in (-1; +\infty) \\ 1 - m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \max_{(-1; +\infty)} (-4x^3 - 6x^2) \\ m \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 0 \\ m \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 1.$$

Câu 5: Chọn B

Xét hàm số $f(x) = -x^3 + 3(m+1)x^2 - 3m(m+2)x + m^2(m+3)$ trên khoảng $(0; 2)$.

$$f'(x) = -3x^2 + 6(m+1)x - 3m(m+2) = -3[x^2 - 2(m+1)x + m(m+2)].$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ x = m+2 \end{cases} \quad (m < m+2). \text{ Nhận xét: } f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ x = m+3 \end{cases}$$

Chủ đề 01: Cơ bản về tính đơn điệu của hàm số

x	$-\infty$	m	$m+2$	$m+3$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$-\infty$
$ f(x) $	$+\infty$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, suy ra hàm số $y = |f(x)|$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$ khi

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (0;1) \subset (m; m+2) \\ (0;1) \subset (m+3; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 < 1 \leq m+2 \\ m+3 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq m \leq 0 \\ m \leq -3 \end{cases}.$$

Mà m nguyên thuộc khoảng $[-10;10]$ nên có 10 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 6: Chọn A

Xét hàm số: $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + mx + 1 \Rightarrow f'(x) = x^2 - 2x + m$. Ta có: $\Delta' = 1 - m$

Trường hợp 1: $\Delta' \leq 0 \Leftrightarrow 1 - m \leq 0 \Leftrightarrow m \geq 1$. Suy ra $f'(x) \geq 0, \forall x \in (1; +\infty)$.

$$\text{Vậy yêu cầu bài toán} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 1 \\ f(1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 1 \\ \frac{1}{3} + m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 1 \\ m \geq -\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 1.$$

Kết hợp với điều kiện $m \in \mathbb{Z}; m \in (-4; 4)$ ta được $m \in \{-3; -2; -1; 0; 1\}$. Ta có 5 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Trường hợp 2: $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m < 1$. Suy ra $f'(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 ($x_1 < x_2$)

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$		
y'		+	0	-	0	+
y						
		</				

$$\text{Vậy yêu cầu bài toán} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ x_1 < x_2 \leq 1 \\ f(1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ f'(1) > 0 \\ \frac{5}{2} - 1 < 0 \\ f(1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ f'(1) > 0 \\ 1 - 1 < 0 \\ f(1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = \emptyset$$

Vậy tất cả có 5 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 7: Chọn B

Xét hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + (m-1)x^2 + (2m-3)x - \frac{2}{3}$

Ta có: $f'(x) = x^2 + 2(m-1)x + 2m-3$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3-2m \end{cases}$.

Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(1;5)$ khi và chỉ khi xảy ra một trong hai trường hợp sau:

Trường hợp 1: $\begin{cases} f(x) \text{ tăng bi\ddot{a}n tr\grave{a}n (1;5) \\ f(1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3-2m \leq 1 \\ 3m-4-\frac{1}{3} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 1 \\ 3m \geq \frac{13}{3} \end{cases} \Leftrightarrow m \geq \frac{13}{9}$

Kết hợp điều kiện m nguyên và thuộc $[-5;5]$ ta được $m \in \{2;3;4;5\}$

Trường hợp 2: $\begin{cases} f(x) \text{ nghịch biến trên (1;5) \\ f(1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 \leq 3-2m \\ 3m-4-\frac{1}{3} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -1 \\ 3m \leq \frac{13}{3} \end{cases} \Leftrightarrow m \leq -1$

Kết hợp điều kiện m nguyên và thuộc $[-5;5]$ ta được $m \in \{-1;-2;-3;-4;-5\}$

Vậy tổng tất cả các số nguyên của m để hàm số đồng biến trên $[-5;5]$ là: -1 .

Câu 8: Chọn A

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3(m+2)x^2 + 3m(m+4)x$ trên khoảng $(0;4)$

$$f'(x) = 3x^2 - 6(m+2)x + 3m(m+4) = 3[x^2 - 2(m+2)x + m(m+4)]$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ x = m+4 \end{cases} \quad (m < m+4)$$

Nhận xét: Đồ thị hàm số $y = f(x)$ luôn đi qua điểm $O(0;0)$.

Trường hợp 1: Nếu $m > 0$

x	$-\infty$	0	m	$m+4$	$+\infty$
$f(x)$		0			
$ f(x) $					

Từ bảng biến thiên, suy ra

hàm số $y = |f(x)|$ đồng biến trên khoảng $(0;4) \Leftrightarrow (0;4) \subset (0;m) \Leftrightarrow m \geq 4$

Kết hợp với $m > 0$, ta có $m \geq 4$.

Trường hợp 2: Nếu $m \leq 0 < m+4 \Leftrightarrow -4 < m \leq 0$

x	$-\infty$	m	0	$m+4$	$+\infty$
$f(x)$			0		
$ f(x) $					

Từ bảng biến thiên, suy ra

hàm số $y = |f(x)|$ đồng biến trên khoảng $(0;4) \Leftrightarrow (0;4) \subset (0;m+4) \Leftrightarrow m+4 \geq 4 \Leftrightarrow m \geq 0$

Kết hợp với $-4 < m \leq 0$, ta có $m = 0$.

Trường hợp 3: Nếu $m + 4 \leq 0 \Leftrightarrow m \leq -4$

x	$-\infty$	m	$m + 4$	0	$+\infty$
$f(x)$					
$ f(x) $					

Từ bảng biến thiên, suy ra hàm số $y = |f(x)|$ luôn đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$ nên hàm số

$$y = |f(x)| \text{ đồng biến trên khoảng } (0; 4) \text{ với mọi } m \leq -4. \text{ Vậy } \begin{cases} m \geq 4 \\ m = 0 \\ m \leq -4 \end{cases}$$

Mà m nguyên thuộc khoảng $[-2019; 2019]$ nên có 4033 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 9: Chọn B

Xét hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + m$ ta có $y' = x^2 + x + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Suy ra hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + m$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó điều kiện hàm số $y = \left| \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + m \right|$ đồng biến trên $(0, +\infty)$ là $y_{(0)} \geq 0 \Rightarrow m \geq 0$.

Lại có m nguyên dương và $m < 5$ vậy có 4 giá trị của m

Câu 10: Chọn B

$$\text{Ta có: } y = \begin{cases} x^5 - mx + 4 & \text{khi } (x^5 - mx + 4 \geq 0) \\ -x^5 + mx - 4 & \text{khi } (x^5 - mx + 4 < 0) \end{cases}; y' = \begin{cases} 5x^4 - m & \text{khi } (x^5 - mx + 4 \geq 0) \\ -5x^4 + m & \text{khi } (x^5 - mx + 4 < 0) \end{cases}$$

$$\text{Trường hợp 1: } y' = \begin{cases} 5x^4 - m \geq 0 \\ x^5 - mx + 4 \geq 0 \end{cases}, \forall x \geq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 5x^4 \\ m \leq x^4 + \frac{4}{x} \end{cases}, \forall x \geq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 5 \\ m \leq 1 + 4 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq 5.$$

$$\text{Trường hợp 2: } y' = \begin{cases} -5x^4 + m \geq 0 \\ x^5 - mx + 4 < 0 \end{cases}, \forall x \geq 1. \text{ Hệ vô nghiệm vì } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^5 - mx + 4) = +\infty.$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} m \leq 5 \\ m \in \mathbb{Z}^+ \end{cases} \Rightarrow m \in \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Câu 11: Chọn A

Xét hàm số: $f(x) = 2x^3 - 2mx + 3$ có $f'(x) = 6x^2 - 2m$

Trường hợp 1: Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$ và $f(1) \geq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x^2 - 2m \geq 0 \\ 5 - 2m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 3x^2 \forall x \in (1; +\infty) \\ m \leq \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 3 \\ m \leq \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m \leq \frac{5}{2}$$

Suy ra có 12 giá trị m thỏa yêu cầu

Trường hợp 2: Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$ và $f(1) \leq 0$

Trường hợp này không xảy ra do $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Vậy có tất cả 12 giá trị m thỏa yêu cầu đề bài.

Câu 12: Chọn A

$$\text{Ta có : } y' = \frac{x^5 - mx + 1}{|x^5 - mx + 1|} \cdot (5x^4 - m)$$

Để hàm số đồng biến trên $[1; +\infty)$ thì $g(x) = (x^5 - mx + 1)(5x^4 - m) \geq 0$ (*), $\forall x \geq 1$.

Với $m = 0$ ta có $g(0) = (x^5 + 1) \cdot 5x^4 > 0, \forall x \geq 1$.

Với $m > 0$. Do $m \in \mathbb{N} \Rightarrow$ (*) luôn có 1 nghiệm là $\sqrt[4]{\frac{m}{5}}$. Ta chú ý $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.

Do vậy, điều kiện cần để $g(x) \geq 0, \forall x \geq 1$ là $\sqrt[4]{\frac{m}{5}} \leq 1 \Leftrightarrow m \leq 5$.

Với $m = 1, m = 2; m = 3; m = 4; m = 5$, thay vào (*) kiểm tra bằng xét dấu thấy đúng
 $\Rightarrow$ nhận $m = 1; m = 2; m = 3; m = 4; m = 5$

Vậy $S = \{1; 2; 3; 4; 5\}$. Tổng các phần tử của S là 15.

Câu 13: Chọn A

Xét hàm $g(x) = x^2 - 2mx + m + 2$. Ta có $g'(x) = 2x - 2m$.

Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0; 2)$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} g(0) \geq 0 \\ g'(x) \geq 0 \end{cases}, \forall x \in (0; 2) \text{ hoặc } \begin{cases} g(0) \leq 0 \\ g'(x) \leq 0 \end{cases}, \forall x \in (0; 2).$$

$$\text{Trường hợp 1: } \begin{cases} g(0) \geq 0 \\ g'(x) \geq 0 \end{cases}, \forall x \in (0; 2) \Leftrightarrow \begin{cases} m + 2 \geq 0 \\ -2m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 0.$$

$$\text{Trường hợp 2: } \begin{cases} g(0) \leq 0 \\ g'(x) \leq 0 \end{cases}, \forall x \in (0; 2) \Leftrightarrow \begin{cases} m + 2 \leq 0 \\ -2m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -2 \\ m \geq 0 \end{cases} \text{ vô nghiệm.}$$

Do m là nguyên thuộc $[-9; 9]$ nên $m \in \{-2, -1, 0\}$.

Câu 14: Chọn B

Xét hàm $g(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}(2m+3)x^2 - (m^2+3m)x + \frac{2}{3}$. Ta có

$$g'(x) = -x^2 + (2m+3)x - (m^2+3m) = -(x-m)(x-m-3).$$

Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} g(2) \leq 0 \\ g'(x) \geq 0 \end{cases}, \forall x \in (1; 2) \text{ hoặc } \begin{cases} g(2) \geq 0 \\ g'(x) \leq 0 \end{cases}, \forall x \in (1; 2).$$

Trường hợp 1.

$$\begin{cases} g(2) \leq 0 \\ g'(x) \geq 0 \end{cases}, \forall x \in (1; 2) \Leftrightarrow \begin{cases} -2m^2 - 2m + 4 \leq 0 \\ -(x-m)(x-m-3) \geq 0 \end{cases}, \forall x \in (1; 2) \Leftrightarrow \begin{cases} m \in (-\infty; -2] \cup [1; +\infty) \\ m \in [-1; 1] \end{cases} \Leftrightarrow m = 1.$$

Trường hợp 2.

$$\begin{cases} g(2) \geq 0 \\ g'(x) \leq 0 \end{cases}, \forall x \in (1; 2) \Leftrightarrow \begin{cases} -2m^2 - 2m + 4 \geq 0 \\ -(x-m)(x-m-3) \leq 0 \end{cases}, \forall x \in (1; 2) \Leftrightarrow \begin{cases} m \in [-2; 1] \\ m \in (-\infty, -2] \cup [2; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow m = -2.$$

Do m là nguyên thuộc $[-9; 9]$ nên $m \in \{1, -2\}$.

Câu 15: Chọn D

$$\text{Ta có } y = \begin{cases} 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m & (3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m \geq 0) \\ -3x^4 + 4x^3 + 12x^2 - m & (3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m < 0) \end{cases}$$

$$\text{Nên } y' = \begin{cases} 12x^3 - 12x^2 - 24x & (3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m \geq 0) \\ -12x^3 + 12x^2 + 24x & (3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m < 0) \end{cases}$$

Yêu cầu bài toán tương đương với

$$\text{Trường hợp 1: } \begin{cases} 12x^3 - 12x^2 - 24x \leq 0 \\ 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m \geq 0 \end{cases}, \forall x > 1$$

$$m \geq -3x^4 + 4x^3 + 12x^2, \forall x < -1 \Leftrightarrow m \geq 5$$

$$\text{Trường hợp 1: } \begin{cases} -12x^3 + 12x^2 + 24x \leq 0 \\ 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m < 0 \end{cases}, \forall x > 1 \Rightarrow \text{Hệ này vô nghiệm.}$$

Vậy $m \in \{5; 6; \dots; 19\}$. Có 15 số nguyên thỏa mãn.

Câu 16: Chọn A

$$\text{Ta có } y = \begin{cases} x^4 - mx^2 + 9 & (x^4 - mx^2 + 9 \geq 0) \\ -x^4 + mx^2 - 9 & (x^4 - mx^2 + 9 < 0) \end{cases} \text{ nên } y' = \begin{cases} 4x^3 - 2mx & (x^4 - mx^2 + 9 \geq 0) \\ -4x^3 + 2mx & (x^4 - mx^2 + 9 < 0) \end{cases}$$

Yêu cầu bài toán tương đương với

$$\text{Trường hợp 1: } \begin{cases} 4x^3 - 2mx \geq 0 \\ x^4 - mx^2 + 9 \geq 0 \end{cases}, \forall x > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 2x^2 \\ m \leq x^2 + \frac{9}{x^2} \end{cases}, \forall x > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 2x^2 \\ m \leq x^2 + \frac{9}{x^2} \end{cases}, \forall x \geq 1$$

$$\Leftrightarrow m \leq 2 \Rightarrow m \in \{0; 1; 2\}$$

$$\text{Trường hợp 2: } \begin{cases} -4x^3 + 2mx \geq 0 \\ x^4 - mx^2 + 9 < 0 \end{cases}, \forall x > 1$$

Hệ này vô nghiệm vì khi $x \rightarrow +\infty$ thì $x^4 - mx^2 + 9 \rightarrow +\infty$.

Câu 17: Chọn D

$$\text{Đặt } f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(m+3)x^2 + (2m+3)x - 1.$$

$$\text{Ta có: } f'(x) = x^2 - (m+3)x + 2m+3.$$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(4; +\infty)$ khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} f'(x) \geq 0, \forall x \in (4; +\infty) \\ f(4) \geq 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} f'(x) \leq 0, \forall x \in (4; +\infty) \\ f(4) \leq 0 \end{cases}$$

$$\text{Trường hợp 1: } \begin{cases} f'(x) \geq 0, \forall x \in (4; +\infty) \\ f(4) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - (m+3)x + (2m+3) \geq 0, \forall x \in (4; +\infty) \\ 16 - 4(m+3) + 2m + 3 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 2}, \forall x \in (4; +\infty) \\ m \leq \frac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \min_{[4; +\infty)} \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 2} \\ m \leq \frac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{7}{2} \\ m \leq \frac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m \leq \frac{7}{2}$$

Trường hợp 2: $\begin{cases} f'(x) \leq 0, \forall x \in (4; +\infty) \\ f(4) \leq 0 \end{cases}$

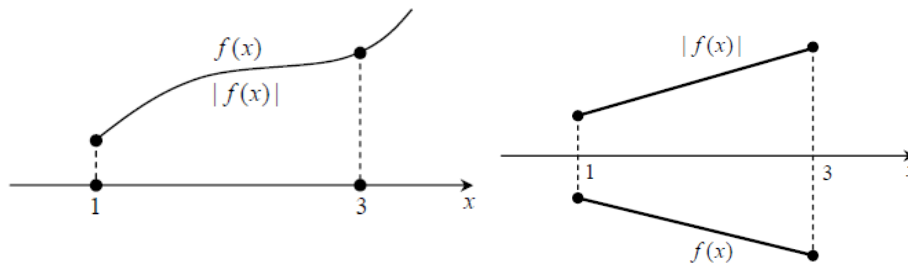
Hệ vô nghiệm vì $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - (m+3)x + (2m+3)) = +\infty$.

Vậy $m \leq \frac{7}{2}$, m nguyên dương nên $m \in \{0; 1; 2; 3\}$.

Câu 18: Chọn A

Xét hàm số $f(x) = x^3 - (2m-5)x + 2018$, có đạo hàm $f'(x) = 3x^2 - (2m-5)$.

Hàm số $y = |f(x)|$ đồng biến trên khoảng $(1; 3)$ thì đồ thị của hàm số trong khoảng $(1; 3)$ phải có hình dạng như sau:



Trường hợp 1: Hàm số $f(x)$ đồng biến trong khoảng $(1; 3)$ và không âm trên $(1; 3)$ tức là:

$$\begin{cases} f(1) \geq 0 \\ f'(x) \geq 0 \forall x \in (1; 3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m \leq 3x^2 + 5 \forall x \in (1; 3) \\ 2024 - 2m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 4 \\ m \leq 1012 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq 4.$$

Trường hợp 2: Hàm số $f(x)$ nghịch biến trong khoảng $(1; 3)$ và không dương trên $(1; 3)$ tức là:

$$\begin{cases} f(1) \leq 0 \\ f'(x) \leq 0 \forall x \in (1; 3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m \geq 3x^2 + 5 \forall x \in (1; 3) \\ 2024 - 2m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 4 \\ m \geq 1012 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 1012.$$

Kết hợp với điều kiện ta được kết quả $m \in [-2019; 4] \cup [1012; 2019]$. Vậy có 3032 giá trị của m .

Câu 19: Chọn A

Xét hàm số: $y = f(x) = x^3 - 3(m+1)x^2 + 3m(m+2)x$. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

Ta có: $y' = 3x^2 - 6(m+1)x + 3m(m+2)$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ x = m+2 \end{cases} (m < m+2, \forall m)$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		m		$m+2$		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$		$\nearrow$		$\searrow$		$+\infty$

Gọi (C_1) là phần đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 3m(m+2)x$ nằm trên Ox .

Chủ đề 01: Cơ bản về tính đơn điệu của hàm số

Gọi (C_2) là phần đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 3m(m+2)x$ nằm dưới $0x$.

Gọi (C'_2) là phần đồ thị đối xứng với (C_2) qua $0x$.

Suy ra đồ thị hàm số $y = g(x) = |x^3 - 3(m+1)x^2 + 3m(m+2)x|$ gồm $(C_1) \cup (C'_2)$.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy: hàm số $y = g(x) = |x^3 - 3(m+1)x^2 + 3m(m+2)x|$ đồng biến

trên nửa đoạn $[0; +\infty)$ khi và chỉ khi $\begin{cases} m+2 \leq 0 \\ f(0) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq -2$.

Kết hợp với điều kiện $-2021 \leq m \leq 2021$, ta suy ra có 2020 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 20: Chọn B

Đặt $f(x) = x^3 - 3x^2 + mx + 3m + 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 6x + m$.

Trường hợp 1: $\begin{cases} f'(x) \geq 0, \forall x \in (-2; +\infty) \\ f(-2) \geq 0 \end{cases}$.

$$\begin{cases} f'(x) \geq 0, \forall x \in (-2; +\infty) \\ f(-2) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 6x + m \geq 0, \forall x \in (-2; +\infty) \\ m \geq 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -3x^2 + 6x, \forall x \in (-2; +\infty) \\ m \geq 19 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m \geq \max_{x \in (-2; +\infty)} (-3x^2 + 6x) \\ m \geq 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 3 \\ m \geq 19 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 19.$$

Trường hợp 1: $\begin{cases} f'(x) \leq 0, \forall x \in (-2; +\infty) \\ f(-2) \leq 0 \end{cases}$.

$$\begin{cases} f'(x) \leq 0, \forall x \in (-2; +\infty) \\ f(-2) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 6x + m \leq 0, \forall x \in (-2; +\infty) \\ m - 19 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -3x^2 + 6x, \forall x \in (-2; +\infty) \\ m \leq 19 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m \leq \min_{x \in (-2; +\infty)} (-3x^2 + 6x) \\ m \leq 19 \end{cases}.$$

Vì $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-3x^2 + 6x) = -\infty \Rightarrow$ hàm số $y = -3x^2 + 6x$ không có giá trị nhỏ nhất. Vì vậy TH2 không có giá trị m thỏa mãn. Vậy tập các giá trị m cần tìm là $S = [19; +\infty)$.

Câu 21: Chọn B

Xét hàm số $y = \frac{mx+3}{x+m+2}$ với $x \neq -m-2$, có $y' = \frac{m^2+2m-3}{(x+m+2)^2}$.

Hàm số $y = \left| \frac{mx+3}{x+m+2} \right|$ đồng biến trên $(1; +\infty)$ khi xảy ra một trong hai trường hợp sau :

$$\text{Trường hợp 1: } \begin{cases} y' = \frac{m^2+2m-3}{(x+m+2)^2} > 0 \\ y(1) \geq 0 \\ -m-2 \notin (1; +\infty) \end{cases}, \forall x > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m^2+2m-3 > 0 \\ \frac{m+3}{m+3} \geq 0 \\ -m-2 \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -3 \\ m > 1 \\ m \geq -3 \end{cases} \Leftrightarrow m > 1.$$

$$\text{Trường hợp 2: } \begin{cases} y' = \frac{m^2 + 2m - 3}{(x + m + 2)^2} < 0 \\ y(1) \leq 0 \\ -m - 2 \notin (1; +\infty) \end{cases}, \forall x > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 2m - 3 < 0 \\ \frac{m + 3}{m + 3} \leq 0 \\ -m - 2 \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \emptyset.$$

Vậy $m \in (1; +\infty)$, lại do $\begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m \in [-10; 10] \end{cases}$ suy ra $m \in \{2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$, vậy $S = 54$.

Câu 22: Chọn B

$$\text{Đặt } f(x) = \frac{x - 2m + 1}{x + m}. \text{ Điều kiện: } x \neq -m \text{ khi đó } f'(x) = \frac{3m - 1}{(x + m)^2}$$

$$\text{Để hàm số đồng biến trên } (1; +\infty) \Leftrightarrow y' = \frac{f'(x) \cdot f(x)}{|f(x)|} \geq 0, \forall x \in (1; +\infty)$$

$$\begin{cases} f'(x) > 0, \forall x \in (1; +\infty) \\ f(1) \geq 0 \end{cases} \quad (I) \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} f'(x) < 0, \forall x \in (1; +\infty) \\ f(1) \leq 0 \end{cases} \quad (II)$$

$$\text{Ta có } (I) \Leftrightarrow \begin{cases} 3m - 1 > 0 \\ -m \leq 1 \\ \frac{2 - 2m}{1 + m} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{3} < m \leq 1; \quad (II) \Leftrightarrow \begin{cases} 3m - 1 < 0 \\ -m \leq 1 \\ \frac{2 - 2m}{1 + m} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \emptyset. \text{ Vậy } \frac{1}{3} < m \leq 1.$$

Câu 23: Chọn A

$$\text{Tập xác định: } D = \mathbb{R} \setminus \{1\}. \text{ Xét hàm số } f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2m + 2}{x - 1} \text{ có } f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 2m}{(x - 1)^2}$$

$$\text{Khi đó } y = |f(x)| = \sqrt{f^2(x)} \Rightarrow y' = \frac{f'(x) \cdot f(x)}{\sqrt{f^2(x)}}$$

$$\text{Hàm số đồng biến trên } [3; +\infty) \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in [3; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) \cdot f(x) \geq 0 \\ f(x) \neq 0 \end{cases}, \forall x \in [3; +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ f'(x) \geq 0 \end{cases}, \forall x \in [3; +\infty) \quad (\text{vì } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2 - 2x + 2m + 2}{x - 1} > 0 \\ \frac{x^2 - 2x - 2m}{(x - 1)^2} \geq 0 \end{cases}, \forall x \in [3; +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 2m + 2 > 0 \\ x^2 - 2x - 2m \geq 0 \end{cases}, \forall x \in [3; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m + 2 > -x^2 + 2x \\ 2m \leq x^2 - 2x \end{cases}, \forall x \in [3; +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} 2m + 2 > \max_{[3; +\infty)}(-x^2 + 2x) \\ 2m \leq \min_{[3; +\infty)}(x^2 - 2x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m + 2 > -3 \\ 2m \leq 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > -\frac{5}{2} \\ m \leq \frac{3}{2} \end{cases}. \text{ Vì } m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-2; -1; 0; 1\}.$$

Vậy có 4 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 24: Chọn C

$$\text{Ta có: } y = \left| x - \frac{2}{x} + m \right| = \sqrt{\left(x - \frac{2}{x} + m \right)^2} \Rightarrow y' = \frac{\left(x - \frac{2}{x} + m \right) \left(1 + \frac{2}{x^2} \right)}{\sqrt{\left(x - \frac{2}{x} + m \right)^2}}$$

Hàm số đồng biến trên $[1; +\infty) \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in [1; +\infty)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(x - \frac{2}{x} + m \right) \geq 0 \\ \left(1 + \frac{2}{x^2} \right) \geq 0 \end{cases}, \forall x \in [1; +\infty) \Leftrightarrow \left(x - \frac{2}{x} + m \right) \geq 0, \forall x \in [1; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{2}{x} + m \right) \geq 0, \forall x \in [1; +\infty) \Leftrightarrow m \geq -x + \frac{2}{x}, \forall x \in [1; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow m \geq \max_{[1; +\infty)} \left(-x + \frac{2}{x} \right) (*)$$

$$\text{Xét hàm số } g(x) = -x + \frac{2}{x}, \forall x \in [1; +\infty) \Rightarrow g'(x) = -1 - \frac{2}{x^2} < 0, \forall x \in [1; +\infty)$$

$$\Rightarrow \max_{[1; +\infty)} g(x) = \max_{[1; +\infty)} \left(-x + \frac{2}{x} \right) = g(1) = 1. \text{ Vậy } (*) \Leftrightarrow m \geq 1.$$

Câu 25: Chọn A

$$\text{Xét hàm số } f(x) = x + 1 + \frac{m^2 - 2m - 1}{x + 1}. \text{ Ta có } f'(x) = 1 - \frac{m^2 - 2m - 1}{(x + 1)^2}$$

$$\text{Khi đó } y = \left| x + 1 + \frac{m^2 - 2m - 1}{x + 1} \right| = |f(x)| = \sqrt{f^2(x)} \text{ nên } y' = \frac{f'(x) \cdot f(x)}{\sqrt{f^2(x)}}$$

Hàm số đồng biến trên $(2; +\infty)$ khi và chỉ khi $y' \geq 0$ với $\forall x \in (2; +\infty)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) \cdot f(x) \geq 0 \\ f(x) \neq 0 \end{cases}, \forall x \in (2; +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) > 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases}, \forall x \in (2; +\infty) \text{ (vì } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 + \frac{m^2 - 2m - 1}{x + 1} > 0 \\ 1 - \frac{m^2 - 2m - 1}{(x + 1)^2} \geq 0 \end{cases}, \forall x \in (2; +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 2m - 1 > -(x + 1)^2 \\ m^2 - 2m - 1 \leq (x + 1)^2 \end{cases}, \forall x \in (2; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 2m - 1 \geq \max_{(2; +\infty)} [-(x + 1)^2] = -9 \\ m^2 - 2m - 1 \leq \min_{(2; +\infty)} (x + 1)^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 2m + 8 \geq 0 \\ m^2 - 2m - 10 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 - \sqrt{11} \leq m \leq 1 + \sqrt{11}$$

Câu 26: Chọn D

$$\text{Điều kiện xác định: } x \neq -1. \text{ Đặt } f(x) = \frac{x + m}{x + 1} \Rightarrow f'(x) = \frac{1 - m}{(x + 1)^2}.$$

Khi đó ta có $y = |f(x)| = \sqrt{f^2(x)} \Rightarrow y' = \frac{f'(x)f(x)}{\sqrt{f^2(x)}}$

Hàm số đồng biến trên $(1; +\infty)$ nếu $y' \geq 0 \forall x \in (1; +\infty) \Leftrightarrow f'(x) \cdot f(x) \geq 0 \forall x \in (1; +\infty)$

Trường hợp 1: $\begin{cases} f'(x) > 0 \forall x \in (1; +\infty) \\ f(1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-m > 0 \\ \frac{1+m}{2} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ m \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq m < 1$

Trường hợp 2: $\begin{cases} f'(x) < 0 \forall x \in (1; +\infty) \\ f(1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-m < 0 \\ \frac{1+m}{2} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow m = \emptyset$

Vậy $m \in [-1; 1)$ là giá trị cần tìm.

Câu 27: Chọn A

Xét hàm số $f(x) = \frac{x^3 - 2mx + 2}{x-1}$. Ta có: $f'(x) = \frac{2x^3 - 3x^2 + 2m - 2}{(x-1)^2}$.

Khi đó $y = \left| \frac{x^3 - 2mx + 2}{x-1} \right| = |f(x)| = \sqrt{f^2(x)}$ nên $y' = \frac{f'(x) \cdot f(x)}{\sqrt{f^2(x)}}$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$ khi và chỉ khi $y' \geq 0$ với $\forall x \in (2; +\infty)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) \cdot f(x) \geq 0 \\ f(x) \neq 0 \end{cases}, \forall x \in (2; +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ f'(x) \geq 0 \end{cases}, \forall x \in (2; +\infty) \quad (\text{do } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} f(2) \geq 0 \\ \frac{2x^3 - 3x^2 + 2m - 2}{(x-1)^2} \geq 0, \forall x \in (2; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10 - 4m \geq 0 \\ 2x^3 - 3x^2 + 2m - 2 \geq 0, \forall x \in (2; +\infty) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{5}{2} \\ 2m \geq -2x^3 + 3x^2 + 2, \forall x \in (2; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{5}{2} \\ 2m \geq \max_{x \in [2; +\infty)} (-2x^3 + 3x^2 + 2) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{5}{2} \\ 2m \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{5}{2} \\ m \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq m \leq \frac{5}{2}$

Vì $m \in \mathbb{Z}^+$ nên $m \in \{1; 2\}$. Vậy tổng các giá trị nguyên dương của m là 3.

Câu 28: Chọn A

Đặt $f(x) = \frac{x-m}{x+m+3}$. Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-m-3\}$. Ta có $f'(x) = \frac{2m+3}{(x+m+3)^2}$.

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(2; +\infty) \Leftrightarrow y' = \frac{f(x) \cdot f'(x)}{|f(x)|} \leq 0, \forall x \in (2; +\infty)$

$\Leftrightarrow f(x) \cdot f'(x) > 0, \forall x \in (2; +\infty)$.

Trường hợp 1:

$$\begin{cases} f'(x) > 0, \forall x \in (2; +\infty) \\ f(2) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m+3 > 0 \\ -m-3 \leq 2 \\ \frac{2-m}{5+m} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\frac{3}{2} \\ m \geq -1 \\ -5 < m \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 2.$$

Trường hợp 2:

$$\begin{cases} f'(x) < 0, \forall x \in (2; +\infty) \\ f(2) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m+3 < 0 \\ -m-3 \leq 2 \\ \frac{2-m}{5+m} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -\frac{3}{2} \\ m \geq -1 \\ m \geq 2 \vee m < -5 \end{cases} \quad (\text{không có } m \text{ thỏa mãn}).$$

Vậy $-1 \leq m \leq 2$, mà $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-1; 0; 1; 2\}$. Vậy có 4 số nguyên m thỏa mãn.

Câu 29: Chọn C

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Xét hàm số $f(x) = x + 5 + \frac{1-m}{x-2}$. Đạo hàm: $f'(x) = 1 + \frac{m-1}{(x-2)^2} = \frac{x^2 - 4x + m + 3}{(x-2)^2}$.

Khi đó $y = |f(x)| = \sqrt{f^2(x)}$ nên $y' = \frac{f'(x) \cdot f(x)}{\sqrt{f^2(x)}}$.

Hàm số đồng biến trên $[5; +\infty)$ khi và chỉ khi $y' \geq 0, \forall x \in [5; +\infty)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) \cdot f(x) \geq 0 \\ f(x) \neq 0 \end{cases}, \forall x \in [5; +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ f'(x) \geq 0 \end{cases}, \forall x \in [5; +\infty) \quad (\text{vì } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 5 + \frac{1-m}{x-2} > 0 \\ 1 + \frac{m-1}{(x-2)^2} \geq 0 \end{cases}, \forall x \in [5; +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} m < x^2 + 3x - 9 \\ m \geq -x^2 + 4x - 3 \end{cases}, \forall x \in [5; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < \min_{[5; +\infty)} (x^2 + 3x - 9) \\ m \geq \max_{[5; +\infty)} (-x^2 + 4x - 3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 5^2 + 3 \cdot 5 - 9 \\ m \geq -5^2 + 4 \cdot 5 - 3 \end{cases} \Leftrightarrow -8 \leq m < 31.$$

Mà m nguyên âm nên ta có: $m \in \{-8; -7; -6; -5; -4; -3; -2; -1\}$.

Vậy có 8 giá trị nguyên âm của m để hàm số $y = \left| x + 5 + \frac{1-m}{x-2} \right|$ đồng biến trên $[5; +\infty)$.

Câu 30: Chọn A

$$\text{Đặt } f(x) = \frac{x^2 + x + 2m - 3}{x - 1} \Rightarrow f'(x) = \frac{x^2 - 2x + 2 - 2m}{(x - 1)^2}$$

$$\text{Khi đó } y = |f(x)| = \sqrt{f^2(x)} \Rightarrow y' = \frac{f'(x) \cdot f(x)}{\sqrt{f^2(x)}}$$

$$\text{Hàm số đồng biến trên khoảng } (3; +\infty) \text{ khi } y' \geq 0, \forall x \in (3; +\infty) \Leftrightarrow \frac{f'(x) \cdot f(x)}{\sqrt{f^2(x)}} \geq 0, \forall x \in (3; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) \cdot f(x) \geq 0 \\ f(x) \neq 0 \end{cases}, \forall x \in (3; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f'(x) \geq 0, \forall x \in (3; +\infty), \text{do } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \\ f(x) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(3) \geq 0 \\ f'(x) \geq 0, \forall x \in (3; +\infty) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{9+2m}{2} \geq 0 \\ x^2 - 2x + 2 - 2m \geq 0, \forall x \in (3; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -\frac{9}{2} \\ x^2 - 2x + 2 \geq 2m, \forall x \in (3; +\infty) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -\frac{9}{2} \\ x^2 - 2x + 2 \geq 2m, \forall x \in (3; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -\frac{9}{2} \\ m \leq \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{9}{2} \leq m \leq \frac{5}{2}$$

Ta có $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2\}$.

Câu 31: Chọn C

$$\text{Đặt } f(x) = \frac{x-m+1}{x+m}, (x \neq -m) \Rightarrow f'(x) = \frac{2m-1}{(x+m)^2}$$

Để hàm số y đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$ thì $y' \geq 0 \Leftrightarrow \frac{f'(x) \cdot f(x)}{|f(x)|} \geq 0, \forall x \in (1; +\infty)$

Trường hợp 1:

$$\begin{cases} f'(x) < 0, \forall x \in (1; +\infty) \\ f(1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m-1 < 0 \\ -m \leq 1 \\ \frac{2-m}{m+1} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{1}{2} \\ m \geq -1 \\ m < -1 \vee 2 \leq m \end{cases} \Leftrightarrow m \in \emptyset$$

Trường hợp 2:

$$\begin{cases} f'(x) > 0, \forall x \in (1; +\infty) \\ f(1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m-1 > 0 \\ -m \leq 1 \\ \frac{2-m}{1+m} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{1}{2} \\ m \geq -1 \\ -1 < m \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2} < m \leq 2$$

Vậy để hàm số đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$ thì $\frac{1}{2} < m \leq 2$.

Câu 32: Chọn A

$$\text{Đặt } f(x) = \sqrt{2-x} + \sqrt{x+2} + \frac{m}{2}x - 1. \text{ Ta có } f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{2-x}} + \frac{1}{2\sqrt{2+x}} + \frac{m}{2}$$

Do hàm số liên tục tại $x=0; x=1$ nên để hàm số nghịch biến trên $(0;1)$ ta xét 2 trường hợp sau:

Trường hợp 1:

$$\begin{cases} f'(x) \leq 0, \forall x \in [0;1] \\ f(1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m}{2} \leq \frac{1}{2\sqrt{2-x}} - \frac{1}{2\sqrt{2+x}}, \forall x \in [0;1] \\ f(1) \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m}{2} \leq \frac{1}{2\sqrt{2-x}} - \frac{1}{2\sqrt{2+x}}, \forall x \in [0;1] \\ \frac{m}{2} \geq -\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m}{2} \leq \min_{x \in [0;1]} \left\{ \frac{1}{2\sqrt{2-x}} - \frac{1}{2\sqrt{2+x}} \right\} \\ m \geq -2\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow -2\sqrt{3} \leq m \leq 0$$

Trường hợp 2:

$$\begin{cases} f'(x) \geq 0, \forall x \in [0;1] \\ f(1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m}{2} \geq \frac{1}{2\sqrt{2-x}} - \frac{1}{2\sqrt{2+x}}, \forall x \in [0;1] \\ f(1) \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m}{2} \geq \frac{1}{2\sqrt{2-x}} - \frac{1}{2\sqrt{2+x}}, \forall x \in [0;1] \\ \frac{m}{2} \leq -\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m}{2} \geq \max_{x \in [0;1]} \left\{ \frac{1}{2\sqrt{2-x}} - \frac{1}{2\sqrt{2+x}} \right\} \\ \frac{m}{2} \leq -\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ (vô nghiệm). Do } m \text{ nguyên nên } m \text{ nhận các giá trị sau } -3; -2; -1; 0 \\ m \leq -2\sqrt{3} \end{cases}$$

Câu 33: Chọn B

Xét hàm số $f(x) = \sqrt{x^2 - 3} - 2x - 3m$. Ta có: $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 3}} - 2 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{x - 2\sqrt{x^2 - 3}}{\sqrt{x^2 - 3}}$.

Cho $f'(x) = 0 \Rightarrow x - 2\sqrt{x^2 - 3} = 0 \Rightarrow x = 2$.

Ta thấy $f'(x) < 0, \forall x \in (2; 3)$ nên hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $(2; 3)$.

Để $y = \left| \sqrt{x^2 - 3} - 2x - 3m \right|$ nghịch biến trên $(2; 3)$ thì $f(3) \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{6} - 6 - 3m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq \frac{\sqrt{6} - 6}{3}$

Do $m \in (-5; 5)$ nên $m = \{-2; -3; -4\}$.

Câu 34: Chọn A

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$. Xét hàm số $f(x) = x + m\sqrt{x^2 - 2x + 3}$.

Ta có: $f'(x) = 1 + m \frac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x + 3}}$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(1; +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) \geq 0, \forall x \in (1; +\infty) \\ f(1) \geq 0 \\ f'(x) \leq 0, \forall x \in (1; +\infty) \\ f(1) \leq 0 \end{cases}$

Trường hợp 1:

$$f'(x) \geq 0, \forall x \in (1; +\infty) \Leftrightarrow 1 + m \frac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x + 3}} \geq 0, \forall x \in (1; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 2x + 3} + m(x-1) \geq 0, \forall x \in (1; +\infty).$$

Đặt $t = x - 1, t > 0 \Rightarrow \sqrt{t^2 + 2} + mt \geq 0 \quad \forall t > 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{-\sqrt{t^2 + 2}}{t}, \forall t > 0$

Xét $f(t) = \frac{-\sqrt{t^2+2}}{t}$, $f'(t) = \frac{2}{t^2\sqrt{t^2+2}} > 0 \quad \forall t > 0$. BBT:

t	0	$+\infty$
$f'(t)$		+
$f(t)$	$-\infty$	-1

Từ bảng biến thiên, ta có $\begin{cases} f'(x) \geq 0, \forall x \in (1; +\infty) \\ f(1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -1 \\ 1+m\sqrt{2} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -1 \\ m \geq \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow m \geq \frac{-1}{\sqrt{2}}.$

Trường hợp 2:

$$f'(x) \leq 0, \forall x \in (1; +\infty) \Leftrightarrow 1+m \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+3}} \leq 0, \forall x \in (1; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2-2x+3} + m(x-1) \leq 0, \forall x \in (1; +\infty).$$

$$\text{Đặt } t = x-1, t > 0 \Rightarrow \sqrt{t^2+2} + mt \leq 0 \quad (*), \forall t > 0$$

Mà $\lim_{t \rightarrow 0^+} (\sqrt{t^2+2} + mt) = 2 > 0$ nên với mỗi giá trị của m luôn có giá trị của t dương đủ nhỏ để VT của (*) lớn hơn 0. Suy ra không có giá trị nào của m để TH2 thỏa mãn.

Vậy có 11 giá trị nguyên của m thỏa mãn là $\{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$.

Câu 35: Chọn A

Xét hàm số $g(x) = \sqrt{x^2+2x+2} - x + m$ trên khoảng $(-1; +\infty)$.

$$\text{Ta có, } g'(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}} - 1 = \frac{x+1-\sqrt{x^2+2x+2}}{\sqrt{x^2+2x+2}} < 0, \forall x > -1$$

$$(\text{Do } x+1-\sqrt{x^2+2x+2} = (x+1) - \sqrt{(x+1)^2+1} < 0, \forall x > -1)$$

Vậy hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1; +\infty)$.

Suy ra, hàm số $f(x) = |g(x)|$ đồng biến trên khoảng $(-1; +\infty) \Leftrightarrow g(x) \leq 0, \forall x > -1$ (1)

Do hàm số $g(x)$ liên tục trên $[-1; +\infty)$ và nghịch biến trên khoảng $(-1; +\infty)$ nên hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $[-1; +\infty)$.

$$\text{Vậy (1)} \Leftrightarrow \max_{[-1; +\infty)} g(x) \leq 0 \Leftrightarrow g(-1) = m+2 \leq 0 \Leftrightarrow m \leq -2. \text{ Vậy } S = \{-2019; -2018; \dots; -2\}$$

Câu 36: Chọn A

$$\text{Xét hàm số } f(x) = 3\sqrt{x^2+1} + x + m \Rightarrow f'(x) = \frac{3x}{\sqrt{x^2+1}} + 1.$$

$$\text{Trên } (1; +\infty) \Rightarrow f'(x) > 0.$$

Bảng biến thiên:

x	1	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$3\sqrt{2} + 1 + m$	$+\infty$

Nhận thấy: hàm số $y = |f(x)|$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty) \Leftrightarrow 3\sqrt{2} + 1 + m \geq 0$

$$\Leftrightarrow m \geq -3\sqrt{2} - 1 \text{ mà } \begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m < 0 \end{cases} \Rightarrow m \in \{-5; -4; -3; -2; -1\}.$$

Vậy có 5 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 37: Chọn A

Xét hàm số $f(x) = 4\sqrt{x^2 + 2x + 3} + 5x - m^2 + 5$ xác định trên $\mathbb{R}$. Ta có $f'(x) = \frac{4(x+1)}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}} + 5$

Với $x > 1 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $(1; +\infty)$.

Vậy để hàm số $y = |f(x)|$ đồng biến trên $(1; +\infty) \Leftrightarrow f(1) \geq 0 \Leftrightarrow -m^2 + 10 + 4\sqrt{6} \geq 0$

$$\Leftrightarrow m^2 \leq 10 + 4\sqrt{6} \Leftrightarrow -2 - \sqrt{6} \leq m \leq 2 + \sqrt{6}$$

Mà $m \in \mathbb{Z}, \Rightarrow m \in \{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$ suy ra chọn đáp án A

Câu 38: Chọn A

Đặt $g(x) = \sqrt{x^2 + 3} + 2x + m^2 - 5m$. Ta có $g'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3}} + 2 > 0 \forall x \in (1; +\infty)$.

Để thấy $g(x)$ liên tục trên $[1; +\infty)$ và $g'(x) > 0 \forall x \in (1; +\infty)$ nên $g(x)$ đồng biến trên $[1; +\infty)$

$$\Rightarrow g(1) \geq 0 \Leftrightarrow m^2 - 5m + 4 \geq 0 \quad (*)$$

Nên $y = f(x) = |g(x)|$ đồng biến trên $[1; +\infty) \Rightarrow f(1) \geq 0$ kết hợp với (*) ta có:

$$m^2 - 5m + 4 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 1 \\ m \geq 4 \end{cases} \cdot \begin{cases} m \in (-\infty; 1] \\ m \in [4; +\infty) \end{cases}. \text{ Mà } m \in (-\infty; 0] \subset (-\infty; 1].$$

Câu 39: Chọn D

Tập xác định: $D = [0; 6]$. Xét hàm số $f(x) = \sqrt{-x^2 + 6x} + m \Rightarrow f'(x) = \frac{-2x + 6}{\sqrt{-x^2 + 6x}} = 0 \Leftrightarrow x = 3$.

Bsngr biến thiên

x	0	3	6
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	m	$m+3$	m

Hàm số $y = |f(x)|$ đồng biến trên khoảng $(0; 3) \Leftrightarrow m \geq 0$.

Lại do $\begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m < 10 \end{cases} \Rightarrow m \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$.

Vậy có 10 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 40: Chọn A

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 5 + \frac{m}{2}$. Ta có $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$			
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$		$\frac{m}{2}$		$\frac{m}{2}-32$		$+\infty$

Do $y = |f(x)| = \begin{cases} f(x), & f(x) \geq 0 \\ -f(x), & f(x) < 0 \end{cases}$ nên

- Nếu $\frac{m}{2} \leq 0 \Leftrightarrow m \leq 0$ thì $f(x) = 0$ có nghiệm $x_0 > 3$, ta có bảng biến thiên của hàm số đã cho là

x	$-\infty$	-1	3	x_0	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$+$
y	$+\infty$	$-\frac{m}{2}$	$-\frac{m}{2}+32$	0	$+\infty$

Trường hợp này hàm số đã cho có 3 điểm cực trị.

- Nếu $\frac{m}{2} - 32 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 64$ thì $f(x) = 0$ có nghiệm $x_0 < -1$, ta có bảng biến thiên của hàm số đã cho là

x	$-\infty$	x_0	-1	3	$+\infty$				
y'	$-$	$ $	$+$	0	$-$	0	$+$		
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{m}{2}$	$\searrow$	$\frac{m}{2}-32$	$\nearrow$	$+\infty$

Trường hợp này hàm số đã cho có 3 điểm cực trị.

- Nếu $\begin{cases} \frac{m}{2} > 0 \\ \frac{m}{2} - 32 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 64$ thì $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 5 + \frac{m}{2} = 0$ có ba nghiệm $x_1; x_2; x_3$ với $x_1 < -1 < x_2 < 3 < x_3$, ta có bảng biến thiên của hàm số đã cho là

Chủ đề 01: Cơ bản về tính đơn điệu của hàm số

	$-\infty$	x_1	-1	x_2	3	x_3	$+\infty$						
y'	$-$	$ $	$+$	0	$-$	$ $	$+$						
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{m}{2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$32 - \frac{m}{2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Trường hợp này hàm số đã cho có 5 điểm cực trị.

Như vậy, các giá trị nguyên của m để hàm số đã cho có 5 điểm cực trị là $m \in \{1; 2; 3; \dots; 63\}$.

Tổng các giá trị nguyên này là: $S = 1 + 2 + 3 + \dots + 63 = \frac{63(1+63)}{2} = 2016$.

Câu 41: Chọn D

Đặt $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - mx - 1$. Ta có $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} - m$

Vì hàm số liên tục tại $x = 1; x = 2$ nên để hàm số $y = |f(x)|$ đồng biến trên khoảng $(1; 2)$ ta xét hai trường hợp sau:

Trường hợp 1: $\begin{cases} f'(x) \geq 0, \forall x \in [1; 2] \\ f(1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} - m \geq 0, \forall x \in [1; 2] \\ m \leq \sqrt{2} - 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}, \forall x \in [1; 2] \\ m \leq \sqrt{2} - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \min_{[1; 2]} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \right) \\ m \leq \sqrt{2} - 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq \sqrt{2} - 1 \quad (1)$$

Trường hợp 2: $\begin{cases} f'(x) \leq 0, \forall x \in [1; 2] \\ f(1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} - m \leq 0, \forall x \in [1; 2] \\ m \geq \sqrt{2} - 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}, \forall x \in [1; 2] \\ m \geq \sqrt{2} - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \max_{[1; 2]} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \right) \\ m \geq \sqrt{2} - 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq \frac{2\sqrt{5}}{5} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có $\begin{cases} m \geq \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ m \leq \sqrt{2} - 1 \end{cases}$

Do $\begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m \in [-2020; 2020] \end{cases}$ nên có 4041 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 42:

Chọn B

Đặt $h(x) = x^3 - 3x^2 + 3(m^2 + 5)x + (12 - 3m^2)\cos x$.

Ta có $h'(x) = 3x^2 - 6x + 3(m^2 + 5) - (12 - 3m^2)\sin x$.

$$\Leftrightarrow h'(x) = 3(x-1)^2 + 12(1 - \sin x) + 3m^2(1 + \sin x) \geq 0 \quad \forall x \in (0; \pi).$$

Vậy hàm số $h(x)$ luôn đồng biến trên $(0; \pi)$.

Để $y = f(x)$ đồng biến trên $(0; \pi)$. Thì $h(0) \geq 0 \Leftrightarrow (12 - 3m^2) \geq 0 \Leftrightarrow m \in [-2; 2]$.

Kết luận: có 5 giá trị m nguyên thỏa mãn.

Câu 43: Chọn B

Xét hàm số $f(x) = \sin x - \cos x + m = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + m \Rightarrow f'(x) = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Khi đó $y = |\sin x - \cos x + m| = |f(x)| = \sqrt{f^2(x)}$. Nên $y' = \frac{f(x) \cdot f'(x)}{\sqrt{f^2(x)}}$.

Hàm số $y = |\sin x - \cos x + m|$ đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow y' \geq 0; \forall x \in \left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \cdot f'(x) \geq 0 \\ f(x) \neq 0 \end{cases}, \forall x \in \left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right) \quad (1).$$

Với $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\frac{\pi}{2} < x - \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{4} \Rightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) > 0, \forall x \in \left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$.

$$\Rightarrow f'(x) > 0, \forall x \in \left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right).$$

Nên $(1) \Leftrightarrow f(x) > 0, \forall x \in \left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow f\left(-\frac{\pi}{4}\right) \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{2} \cdot (-1) + m \geq 0 \Leftrightarrow m \geq \sqrt{2}$.

Câu 44: Chọn A

Trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, hàm số $y = \sin x$ đồng biến. Đặt $t = \sin x, x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow t \in (0; 1)$.

Khi đó hàm số $y = |\sin^3 x - m \cdot \sin x + 1|$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ khi và chỉ khi

$y = g(t) = |t^3 - mt + 1|$ đồng biến trên $(0; 1)$

Xét hàm số $y = f(t) = t^3 - mt + 1$ trên khoảng $(0; 1)$ có $f'(t) = 3t^2 - m$.

Khi $m = 0$: $f'(t) = 3t^2 > 0, \forall t \Rightarrow y = f(t) = t^3 + 1$ đồng biến trên $(0; 1)$ và đth $y = f(t) = t^3 + 1$ cắt trục hoành tại điểm duy nhất $t = -1$

$\Rightarrow y = g(t) = |t^3 - mt + 1|$ đồng biến trên $(0; 1) \Rightarrow m = 0$ thỏa mãn

Khi $m > 0$: $f'(t) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $t_1 = -\sqrt{\frac{m}{3}}, t_2 = \sqrt{\frac{m}{3}}$.

Hàm số $y = f(t) = t^3 - mt + 1$ đồng biến trên các khoảng $\left(-\infty; -\sqrt{\frac{m}{3}}\right)$ và $\left(\sqrt{\frac{m}{3}}; +\infty\right)$

Trường hợp 1: $-\sqrt{\frac{m}{3}} < 0 < \sqrt{\frac{m}{3}} < 1 \Leftrightarrow 0 < m < 3$

Hàm số $y = f(t) = t^3 - mt + 1$ nghịch biến trên khoảng $\left(0; \sqrt{\frac{m}{3}}\right)$ và đồng biến trên khoảng $\left(\sqrt{\frac{m}{3}}; 1\right)$

$\Rightarrow$ Không có giá trị của m để $y = g(t) = |t^3 - mt + 1|$ đồng biến trên $(0; 1)$

Trường hợp 2: $-\sqrt{\frac{m}{3}} < 0 < 1 \leq \sqrt{\frac{m}{3}} \Leftrightarrow m \geq 3$

Để $y = g(t) = |t^3 - mt + 1|$ đồng biến trên $(0; 1)$ thì $t^3 - mt + 1 \leq 0, \forall t \in (0; 1)$

$\Leftrightarrow mt \leq t^3 + 1, \forall t \in (0; 1) \Leftrightarrow m \leq t^2 + \frac{1}{t}, \forall t \in (0; 1) \Leftrightarrow m \leq \frac{3}{\sqrt[3]{4}} \Rightarrow$ Không có giá trị của m thỏa mãn. Vậy chỉ có giá trị $m = 0$ thỏa mãn

Câu 45: Chọn B

Đặt $t = \cos x$, vì $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow t \in (0; 1)$. Vì $t = \cos x$ là hàm số nghịch biến trên $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ nên

Yêu cầu bài toán trở thành tìm m nguyên thuộc $[-5; 5]$ để hàm số $y = |t^3 - 3m^2t|$ đồng biến trên $(0; 1)$. Xét $f(t) = t^3 - 3m^2t^2; t \in (0; 1); f'(t) = 3t^2 - 3m^2$.

Trường hợp 1: Nếu $m = 0 \Rightarrow f'(t) > 0; \forall t \in (0; 1) \Rightarrow f(t)$ luôn đồng biến trên $(0; 1)$.

Mà $f(0) = 0 \Rightarrow y = |f(t)|$ luôn đồng biến trên $(0; +\infty) \Rightarrow y = |f(t)|$ đồng biến trên $(0; 1)$.

Do đó $m = 0$ thỏa mãn bài toán (1).

Trường hợp 2: $m \neq 0 \Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = m \\ t = -m \end{cases}; f(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -m\sqrt{3} \\ t = 0 \\ t = m\sqrt{3} \end{cases}$

Với $m > 0$, ta có BBT sau:

t	0	m	$m\sqrt{3}$
$f'(t)$	-	0	+
$ f(t) $	0	$2m^3$	0

Từ bảng biến thiên, suy ra hàm số $y = |f(t)|$ đồng biến trên $(0; m)$.

Yêu cầu bài toán tương đương $(0; 1) \subset (0; m) \Leftrightarrow m \geq 1$ (2).

Với $m < 0$, ta có bảng biến thiên sau:

t	0	$-m$	$-m\sqrt{3}$
$f'(t)$	-	0	+
$ f(t) $	0	$-2m^3$	0

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số $y = |f(t)|$ đồng biến trên $(0; -m)$.

Yêu cầu bài toán tương đương $(0; 1) \subset (0; -m) \Leftrightarrow m \leq -1$ (3).

Từ (1); (2); (3) vậy có 11 giá trị nguyên của m thỏa mãn bài toán.

Câu 46: Chọn C

Đặt $3^x = t \Rightarrow t \in [1; 3]$ vì $x \in [0; 1]$.

$$\Rightarrow y = |t^2 + t - m + 1| = \sqrt{(t^2 + t - m + 1)^2} \Rightarrow y' = \frac{2 \cdot (t^2 + t - m + 1)' \cdot (t^2 + t - m + 1)}{2 \cdot |t^2 + t - m + 1|}$$

$$\text{Để hàm số đồng biến trên đoạn } t \in [1; 3] \text{ thì } y' = \frac{(2t+1) \cdot (t^2 + t - m + 1)}{|t^2 + t - m + 1|} \geq 0 \quad \forall t \in [1; 3]$$

Với mọi giá trị của $t \in [1; 3]$ thì $2t+1 > 0$ nên

$$\text{Để } y' \geq 0 \quad \forall t \in [1; 3] \text{ thì: } t^2 + t - m + 1 \geq 0 \quad \forall t \in [1; 3] \Rightarrow m - 1 \leq t^2 + t = g(t) \quad \forall t \in [1; 3]$$

$$\Rightarrow m - 1 \leq \min_{[1; 3]} g(t) = 2 \Rightarrow m \leq 3. \text{ Vậy có 3 giá trị nguyên } \{1; 2; 3\} \text{ thỏa mãn yêu cầu bài toán.}$$

Câu 47: Chọn A

Xét hàm số $f(x) = 4^x - m \cdot 2^{x+1} + m + 2$ (1) trên khoảng $(0; 1)$. Đặt $t = 2^x$, $t \in (1; 2)$.

Hàm số (1) trở thành $h(t) = t^2 - 2m \cdot t + m + 2$ trên khoảng $(1; 2)$. Suy ra $h'(t) = 2t - 2m$.

$$\text{Ta có } y = |f(x)| \text{ đồng biến trên khoảng } (0; 1) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \text{ đồng biến trên } (0; 1) \\ f(0) \geq 0 \\ f(x) \text{ nghịch biến trên } (0; 1) \\ f(0) \leq 0 \end{cases} (*)$$

Vì hàm số $t = 2^x$ đồng biến trên $(0; 1)$.

$$\text{Do đó, } (*) \Leftrightarrow \begin{cases} h(t) \text{ đồng biến trên } (1; 2) \\ 3 - m \geq 0 \\ h(t) \text{ nghịch biến trên } (1; 2) \\ 3 - m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t - 2m \geq 0 \quad \forall t \in (1; 2) \\ 3 - m \geq 0 \\ 2t - 2m \leq 0 \quad \forall t \in (1; 2) \\ 3 - m \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 1 \\ m \leq 3 \\ m \geq 2 \\ m \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 1 \\ m \geq 3 \end{cases}. \text{ Vậy có 2018 số nguyên dương nhỏ hơn 2020 thỏa ycbt.}$$

Câu 48: Chọn C

Đặt $t = e^{\frac{x+1}{x-1}}$, ta có $t' = e^{\frac{x+1}{x-1}} \cdot \left(\frac{x+1}{x-1}\right)' = e^{\frac{x+1}{x-1}} \cdot \frac{-2}{(x-1)^2} < 0 \quad \forall x \in (2;3) \Rightarrow t \in (e^2; e^3)$, đồng thời x và t sẽ ngược chiều biến thiên.

Khi đó hàm số trở thành $y = |t^2 + 3t - 2m + 5| = \sqrt{(t^2 + 3t - 2m + 5)^2} \quad (2)$

Ta có: $y' = \frac{2(t^2 + 3t - 2m + 5) \cdot (2t + 3)}{2\sqrt{(t^2 + 3t - 2m + 5)^2}} = \frac{(t^2 + 3t - 2m + 5) \cdot (2t + 3)}{\sqrt{(t^2 + 3t - 2m + 5)^2}}$.

Hàm số (1) nghịch biến trên khoảng $(2;3) \Leftrightarrow$ hàm số (2) đồng biến trên khoảng $(e^2; e^3)$

$$\Leftrightarrow \frac{2(t^2 + 3t - 2m + 5) \cdot (2t + 3)}{2\sqrt{(t^2 + 3t - 2m + 5)^2}} \geq 0 \quad \forall t \in (e^2; e^3) \Leftrightarrow t^2 + 3t - 2m + 5 > 0 \quad \forall t \in (e^2; e^3)$$

$$\Leftrightarrow m < \frac{t^2 + 3t + 5}{2} = g(t) \quad \forall t \in (e^2; e^3).$$

$$\text{Có } g'(t) = \frac{2t+3}{2} > 0 \quad \forall t \in (e^2; e^3) \Rightarrow \frac{e^4 + 3e^2 + 5}{2} < g(t) < \frac{e^6 + 3e^4 + 5}{2} \Rightarrow m \leq \frac{e^4 + 3e^2 + 5}{2}.$$

Với điều kiện m là số nguyên dương ta tìm được 40 giá trị của m .

Câu 49: Chọn A

$$\text{Đặt } f(x) = e^{-x^2} + e^{x^2} - m \Rightarrow f'(x) = -2xe^{-x^2} + 2xe^{x^2}$$

$$\text{Ta có } y = |f(x)| = \sqrt{f^2(x)} \Rightarrow y' = \frac{f'(x)f(x)}{\sqrt{f^2(x)}}$$

$$\text{Yêu cầu bài toán } \Leftrightarrow y' \leq 0, \forall x \in (1;e). (*)$$

$$\text{Vì } x \in (1;e) \text{ nên } -2xe^{-x^2} + 2xe^{x^2} = \frac{2x(e^{2x^2} - 1)}{e^{x^2}} > 0, \forall x \in (1;e)$$

$$\text{Khi đó, } (*) \Leftrightarrow f(x) \leq 0, \forall x \in (1;e) \Leftrightarrow e^{-x^2} + e^{x^2} - m \leq 0, \forall x \in (1;e) \Leftrightarrow e^{-x^2} + e^{x^2} \leq m, \forall x \in (1;e)$$

Ta có giá trị lớn nhất của hàm số $y = e^{-x^2} + e^{x^2}, x \in (1;e)$ là $e^{e^2} + e^{-e^2}$ nên $m \geq e^{e^2} + e^{-e^2} \approx 1618,18$

Vậy có 401 giá trị nguyên dương m thỏa mãn.

Câu 50: Chọn B

$$\text{Đặt } f(x) = e^x + e^{2x} - m \Rightarrow y = |f(x)| = \sqrt{f^2(x)}. \text{ Ta có } y' = \frac{f'(x)f(x)}{\sqrt{f^2(x)}}$$

$$\text{Hàm số đồng biến trên } (1;2) \Leftrightarrow y' \geq 0 \quad \forall x \in (1;2) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)f'(x) \geq 0 \\ f(x) \neq 0 \end{cases} \quad \forall x \in (1;2)$$

$$\text{Vì } f'(x) = e^x + 2e^{2x} > 0 \quad \forall x \in (1;2)$$

$$\text{Nên } y' \geq 0 \quad \forall x \in (1;2) \Leftrightarrow f(x) > 0 \quad \forall x \in (1;2) \Leftrightarrow m < e^x + e^{2x} \quad \forall x \in (1;2) \Leftrightarrow m \leq e + e^2$$

Câu 51: Chọn C

Đặt $2^{\tan x} = t$ vì $x \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$ suy ra $\tan x \geq -1$ nên $t \geq \frac{1}{2}$. Khi đó ta có hàm số:

$$y = |t^3 + 3t - m + 2| \quad (1).$$

Để hàm số ban đầu đồng biến trên $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$ thì hàm số (1) phải đồng biến trên $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 3t - m + 2$. Ta có: $f'(t) = 3t^2 + 3 > 0, \forall t$.

$$\text{Khi đó } y = |f(t)| = \sqrt{f^2(t)} \text{ nên } y' = \frac{f'(t) \cdot f(t)}{\sqrt{f^2(t)}}.$$

Hàm số đồng biến trên $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$ khi và chỉ khi $y' \geq 0, \forall t \in \left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

$$\Leftrightarrow f(t) \geq 0, \forall t \in \left[\frac{1}{2}; +\infty\right) \Leftrightarrow t^3 + 3t - m + 2 \geq 0, \forall t \in \left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$$

$$\Leftrightarrow m \leq t^3 + 3t + 2, \forall t \in \left[\frac{1}{2}; +\infty\right), (*)$$

Xét hàm số: $g(t) = t^3 + 3t + 2, \forall t \in \left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

$$g'(t) = 3t^2 + 3 > 0, \forall t. \text{ Vậy hàm số } g(t) \text{ luôn đồng biến trên } \mathbb{R} \text{ nên } g(t) \geq g\left(\frac{1}{2}\right).$$

$$\text{Từ } (*) \text{ suy ra: } m \leq g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{29}{8}.$$

Câu 52: Chọn B

$y = |\ln 3x - 4x^2 + m|$. Điều kiện $x > 0$. Xét hàm số $g(x) = \ln 3x - 4x^2 + m$ trên $[1; e^2]$.

$$\Rightarrow g'(x) = \frac{1}{x} - 8x = \frac{1 - 8x^2}{x} < 0, \forall x \in [1; e^2] \Rightarrow g(x) \text{ nghịch biến trên } [1; e^2].$$

x	1	e^2
$g'(x)$		0
$g(x)$	$\ln 3 - 4 + m$	$\ln 3 - 4e^4 + 2 + m$

$\Rightarrow$ hàm số $y = |g(x)| = |\ln 3x - 4x^2 + m|$ đồng biến trên đoạn $[1; e^2]$

$$\Leftrightarrow \ln 3 - 4 + m \leq 0 \Leftrightarrow m \leq 4 - \ln 3.$$

Mà m nguyên thuộc khoảng $(-100; 100)$ nên $m \in \{-99; -98; \dots; -1; 0; 1; 2\}$.

Vậy có 102 giá trị m nguyên thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 53: Chọn A

Xét $f(x) = \ln(mx) - x + 2$. Dễ thấy $\forall x \in (1; 4): mx > 0 \Leftrightarrow m > 0$.

Khi đó: $f'(x) = \frac{1}{x} - 1 < 0, \forall x \in (1; 4)$. Do đó $f(x)$ luôn nghịch biến trên $(1; 4)$.

Yêu cầu bài toán tương đương với $f(4) \geq 0 \Leftrightarrow \ln(4m) - 2 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{e^2}{4} \approx 1,6$.

Vậy $m \in [2; 2019]$ có 2018 số nguyên thỏa mãn.

Câu 54: Chọn C

Ta xét hàm số $f(x) = \ln(x^2 + 2x - m) - 2mx^2 - 1$ trên $(0; 10)$.

Điều kiện hàm số có nghĩa là $x^2 + 2x - m > 0, \forall x \in (0; 10) \Leftrightarrow x^2 + 2x > m, \forall x \in (0; 10)$ (1)

Ta lại có $x^2 + 2x = x(x + 2) > 0$ với mọi $x \in (0; 10)$ nên điều kiện (1) cho ta $m \leq 0$ (2)

Đạo hàm $f'(x) = \frac{2x+2}{x^2+2x-m} - 4mx$ do $m \leq 0$ và $x \in (0; 10)$ nên $\frac{2x+2}{x^2+2x-m} > 0; -4mx \geq 0$ suy

ra $f'(x) > 0$ hàm số đồng biến trên $(0; 10)$.

Từ đó để hàm số $y = |\ln(x^2 + 2x - m) - 2mx^2 - 1| = |f(x)|$ đồng biến trên $(0; 10)$ điều kiện đủ là $f(x) \geq 0$ với mọi $x \in (0; 10)$ (3).

Trường hợp 1: $m = 0$ khi đó $f(x) = \ln(x^2 + 2x) - 1$ có $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ không thỏa mãn (3)

Trường hợp 2: Xét $m < 0$, do hàm số $f(x)$ đồng biến nên ta chỉ cần $f(0) \geq 0 \Leftrightarrow \ln(-m) - 1 \geq 0 \Leftrightarrow -m \geq e \Leftrightarrow m \leq -e$.

Từ đó ta được: $\begin{cases} -2020 < m \leq -e \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow m \in \{-2019; -2018; -2017; \dots; -3\}$ có 2017 giá trị m thỏa mãn bài toán.

Câu 55: Chọn C

Điều kiện xác định: $x^3 + mx + 2 > 0$.

Xét hàm số $f(x) = \ln(x^3 + mx + 2)$. Ta có: $f'(x) = \frac{3x^2 + m}{x^3 + mx + 2}$.

Hàm số đồng biến trên nửa khoảng $[1; 3) \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f'(x) \geq 0 \end{cases}, \forall x \in [1; 3) \quad (1) \\ \begin{cases} f(x) \leq 0 \\ f'(x) \leq 0 \end{cases}, \forall x \in [1; 3) \quad (2) \end{cases}$.

Trường hợp 1:

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \ln(x^3 + mx + 2) \geq 0 \\ \frac{3x^2 + m}{x^3 + mx + 2} \geq 0 \end{cases}, \forall x \in [1; 3) \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + mx + 2 \geq 1 \\ 3x^2 + m \geq 0 \\ x^3 + mx + 2 > 0 \end{cases}, \forall x \in [1; 3)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -x^2 - \frac{1}{x}, \forall x \in [1; 3) \\ m \geq -3x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \max_{[1; 3)} \left(-x^2 - \frac{1}{x} \right) = -2 \\ m \geq \max_{[1; 3)} (-3x^2) = -3 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq -2.$$

Trường hợp 2:

$$\begin{aligned}
 (2) &\Leftrightarrow \begin{cases} \ln(x^3 + mx + 2) \leq 0 \\ \frac{3x^2 + m}{x^3 + mx + 2} \leq 0 \end{cases}, \forall x \in [1; 3] \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + mx + 2 \leq 1 \\ 3x^2 + m \leq 0 \\ x^3 + mx + 2 > 0 \end{cases}, \forall x \in [1; 3] \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -x^2 - \frac{1}{x} \\ m \leq -3x^2 \\ m > -x^2 - \frac{2}{x} \end{cases}, \forall x \in [1; 3] \Leftrightarrow \begin{cases} m < -\frac{28}{3} \\ m < -27 \\ m > \max_{[1; 3]} \left(-x^2 - \frac{2}{x} \right) = -3 \end{cases} \Rightarrow m \in \emptyset.
 \end{aligned}$$

Từ hai trường hợp suy ra $m \geq -2$. Vì chỉ lấy $m \in [-3; 3]$ nên $m \in \{-2; -1; 0; 1; 2; 3\}$.

Câu 56: Chọn D

Đặt $f(x) = \ln(x^2 - mx - m) - 1$.

$$\text{Hàm số đồng biến trên khoảng } \left(-\frac{1}{2}; 1\right) \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x^2 - mx - m > 0, \forall x \in \left(-\frac{1}{2}; 1\right) \\ f'(x) \geq 0, \forall x \in \left(-\frac{1}{2}; 1\right) \end{cases} & (1) \\ \begin{cases} f(x) \geq 0, \forall x \in \left(-\frac{1}{2}; 1\right) \\ \begin{cases} x^2 - mx - m > 0, \forall x \in \left(-\frac{1}{2}; 1\right) \\ f'(x) \leq 0, \forall x \in \left(-\frac{1}{2}; 1\right) \end{cases} & (2) \\ f(x) \leq 0, \forall x \in \left(-\frac{1}{2}; 1\right) \end{cases}
 \end{cases}$$

Xét $x^2 - mx - m > 0, \forall x \in \left(-\frac{1}{2}; 1\right) \Leftrightarrow x^2 > m(x+1), \forall x \in \left(-\frac{1}{2}; 1\right) \Leftrightarrow m < \frac{x^2}{x+1}, \forall x \in \left(-\frac{1}{2}; 1\right)$.

Đặt $g(x) = \frac{x^2}{x+1}$. Khi đó, $m < \frac{x^2}{x+1}, \forall x \in \left(-\frac{1}{2}; 1\right) \Leftrightarrow g(x) > m, \forall x \in \left(-\frac{1}{2}; 1\right)$.

Ta có: $g(x) = x - 1 + \frac{1}{x+1} \Rightarrow g'(x) = 1 - \frac{1}{(x+1)^2}$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \in \left(-\frac{1}{2}; 1\right) \\ x = -2 \notin \left(-\frac{1}{2}; 1\right) \end{cases}$.

Bảng biến thiên của hàm số $y = g(x)$ trên khoảng $\left(-\frac{1}{2}; 1\right)$.

x	$-\frac{1}{2}$	0	1
$g'(x)$		$-$	$+$
$g(x)$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$

Từ bảng biến thiên của hàm số $y = g(x)$ suy ra $g(x) > m \forall x \in \left(-\frac{1}{2}; 1\right) \Leftrightarrow m < g(0) = 0$.

Ta có: $f'(x) = \frac{2x-m}{x^2-mx-m}$.

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ 2x \geq m, \forall x \in \left(-\frac{1}{2}; 1\right) \\ \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^+} f(x) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m \leq -1 \\ \ln\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}m\right) - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -1 \\ \ln\left(\frac{1}{4} - \frac{m}{2}\right) \geq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -1 \\ \frac{1}{4} - \frac{m}{2} \geq e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -1 \\ m \leq \frac{1-4e}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m \leq \frac{1-4e}{2}.$$

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ 2x \leq m \forall x \in \left(-\frac{1}{2}; 1\right) \\ \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^+} f(x) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m \geq 2 \\ \ln\left(\frac{1}{4} - \frac{m}{2}\right) - 1 \leq 0 \end{cases} \text{ suy ra không tồn tại } m.$$

Vậy $m \leq \frac{1-4e}{2}$. Mà m nguyên, $-10 < m < 10$ nên có 5 giá trị m thỏa mãn bài toán

Câu 57: Chọn C

Đặt $f(x) = \ln(x^3 - 3x + m) + 1$, ta có $f'(x) = \frac{3x^2 - 3}{x^3 - 3x + m}$.

Điều kiện xác định của $f(x)$ là $x^3 - 3x + m > 0$.

Điều kiện cần để hàm số $y = |f(x)|$ nghịch biến trên $[0; 1]$ là

$$x^3 - 3x + m > 0, \forall x \in [0; 1] \Leftrightarrow m > -x^3 + 3x, \forall x \in [0; 1] \Leftrightarrow m > 2 \quad (1).$$

Với mọi $x \in [0; 1]$, ta có $3x^2 - 3 \leq 0$. Do đó từ điều kiện (1) ta suy ra

$$f'(x) = \frac{3x^2 - 3}{x^3 - 3x + m} \leq 0, \forall x \in [0; 1].$$

Điều kiện đủ để hàm số $y = |f(x)|$ nghịch biến trên $[0; 1]$ là

$$f(x) \geq 0, \forall x \in [0; 1] \Leftrightarrow \ln(x^3 - 3x + m) + 1 \geq 0, \forall x \in [0; 1]$$

$$\Leftrightarrow m - \frac{1}{e} \geq -x^3 + 3x, \forall x \in [0; 1] \Leftrightarrow m \geq \frac{1}{e} + 2 \approx 2,37.$$

Do m nguyên thuộc $[-5; 5] \Rightarrow m \in \{3; 4; 5\}$. Vậy tổng các giá trị của m bằng 12.

Câu 58: Chọn A

Đặt $f(x) = \log_3(x^3 + x^2 - mx + 1)$ nên $f'(x) = \frac{3x^2 + 2x - m}{(x^3 + x^2 - mx + 1)\ln 3}$.

$$\text{Hàm số đồng biến trên } y = |f(x)| \text{ đồng biến trên } [1; +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f'(x) \geq 0 \\ f(x) \leq 0 \\ f'(x) \leq 0 \end{cases}, \forall x \in [1; +\infty).$$

Trường hợp 1:

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f'(x) \geq 0 \end{cases}, \forall x \in [1; +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3(x^3 + x^2 - mx + 1) \geq 0 \\ x^3 + x^2 - mx + 1 > 0 \\ 3x^2 + 2x - m \geq 0 \end{cases}, \forall x \in [1; +\infty).$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + x^2 - mx + 1 \geq 1 \\ 3x^2 + 2x \geq m \end{cases}, \forall x \in [1; +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq x^2 + x \\ m \leq 3x^2 + 2x \end{cases}, \forall x \in [1; +\infty).$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \min_{[1; +\infty)}(x^2 + x) \\ m \leq \min_{[1; +\infty)}(3x^2 + 2x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 2 \\ m \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq 2.$$

Trường hợp 2:

$$\begin{cases} f(x) \leq 0 \\ f'(x) \leq 0 \end{cases}, \forall x \in [1; +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3(x^3 + x^2 - mx + 1) \leq 0 \\ x^3 + x^2 - mx + 1 > 0 \\ 3x^2 + 2x - m \leq 0 \end{cases}, \forall x \in [1; +\infty).$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + x^2 - mx + 1 \leq 1 \\ x^3 + x^2 - mx + 1 > 0 \\ 3x^2 + 2x \leq m \end{cases}, \forall x \in [1; +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x \leq m \\ x^2 + x + \frac{1}{x} > m \\ 3x^2 + 2x \leq m \end{cases}, \forall x \in [1; +\infty).$$

$$\text{Ta có: } m \geq x^2 + x, \forall x \in [1; +\infty) \Leftrightarrow m \geq \max_{[1; +\infty)}(x^2 + x), \quad (*).$$

Vì $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + x) = +\infty$ nên không tồn tại m thỏa mãn (*). Do đó trường hợp 2 không tồn tại giá trị nào của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Suy ra $m \leq 2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. Mặt khác $\begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m \in [-10; 10] \end{cases}$ nên có 13 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 59: Chọn C

Xét hàm số $f(x) = \ln(x^2 + x + m) + x$ trên khoảng $(-1; 3)$.

Điều kiện xác định là: $x^2 + x + m > 0$ với mọi $x \in (-1; 3)$.

$$\text{Khi đó } f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+m} + 1 = \frac{x^2+3x+m+1}{x^2+x+m}.$$

$$\text{Hàm số } g(x) \text{ đồng biến trên } (-1;3) \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x^2 + x + m > 0 \\ x^2 + 3x + m + 1 \geq 0 \\ \ln(x^2 + x + m) + x \geq 0 \end{cases} & (1) \\ \begin{cases} x^2 + x + m > 0 \\ x^2 + 3x + m + 1 \leq 0 \\ \ln(x^2 + x + m) + x < 0 \end{cases} & (2) \end{cases} \text{ với mọi } x \in (-1;3).$$

$$\text{Xét hệ bất phương trình (1): } \begin{cases} x^2 + x + m > 0 \\ x^2 + 3x + m + 1 \geq 0 \\ \ln(x^2 + x + m) + x \geq 0 \end{cases} \text{ đúng với mọi } x \in (-1;3).$$

Ta có: $x^2 + x + m > 0, \forall x \in (-1;3) \Leftrightarrow m > -x^2 - x, \forall x \in (-1;3).$

Khảo sát tính biến thiên của hàm số $y = -x^2 - x$ trên khoảng $(-1;3)$ ta suy ra

$$\text{Với } m > \max_{(-1;3)}(-x^2 - x) \Leftrightarrow m > \frac{1}{4}$$

Lại có $x^2 + 3x + m + 1 \geq 0, \forall x \in (-1;3) \Leftrightarrow m \geq -x^2 - 3x - 1, \forall x \in (-1;3).$

Khảo sát tính biến thiên của hàm số $y = -x^2 - 3x - 1$ trên khoảng $(-1;3)$ ta suy ra:

$$m \geq \max_{[-1;3]}(-x^2 - 3x - 1) \Leftrightarrow m \geq 1$$

Ngoài ra $\ln(x^2 + x + m) + x \geq 0, \forall x \in (-1;3) \Leftrightarrow m \geq -x^2 - x + e^{-x}, \forall x \in (-1;3).$

Đặt $k(x) = -x^2 - x + e^{-x}, k'(x) = -e^{-x} - 2x - 1 \leq 0, \forall x \in (-1;3).$

Do đó $m \geq -x^2 - x + e^{-x}, \forall x \in (-1;3) \Leftrightarrow m \geq e.$

Vậy (1) tương đương $m \geq e.$

Với hệ bất phương trình (2) ta cũng làm tương tự như trên thì được

$$\begin{cases} x^2 + x + m > 0 \\ x^2 + 3x + m + 1 \leq 0 \\ \ln(x^2 + x + m) + x < 0 \end{cases} \forall x \in (-1;3) \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{1}{4} \\ m \leq -19 \\ \ln(x^2 + x + m) + x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \emptyset.$$

Vậy hàm số $y = g(x) = |\ln(x^2 + x + m) + x|$ đồng biến trên $(-1;3)$ khi và chỉ khi $m \geq e$, mà m là số nguyên thuộc $[-10;10]$ nên $m \in \{3;4;5;6;7;8;9;10\}$. Do đó tổng các giá trị nguyên của m thỏa mãn là 52.

Câu 61: Chọn D

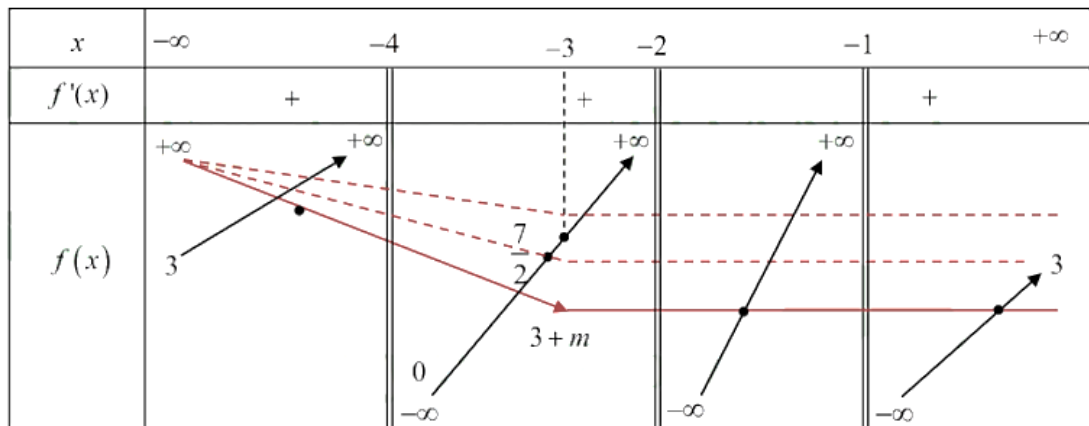
$$\text{Phương trình đã cho} \Leftrightarrow \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+2} + \frac{x+3}{x+4} = |x+3| - x + m \Leftrightarrow f(x) = g(x).$$

$$\text{Xét hàm số } f(x) = \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+2} + \frac{x+3}{x+4} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{1}{(x+4)^2} > 0.$$

Hàm số $f(x)$ có tập xác định là $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; -2; -4\}$ và có $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 3 \\ f(-3) = \frac{7}{2} \end{cases}$.

Xét hàm số $g(x) = |x+3| - x + m = \begin{cases} -2x-3+m & \text{neu } x < -3 \\ 3+m & \text{neu } x \geq -3 \end{cases}$.

Bảng biến thiên:

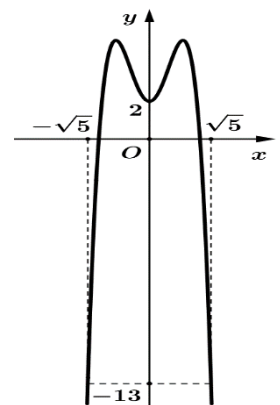


Để phương trình $f(x) = g(x)$ có 3 nghiệm thực x thì $3+m \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 0$.

Kết hợp $m \in \mathbb{Z}, m \in [-2021; 2021]$ suy ra có 2022 giá trị nguyên m thỏa mãn.

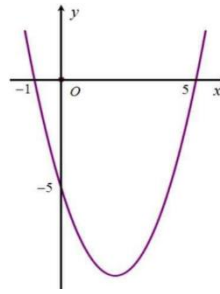
DẠNG 5**Ứng dụng đơn điệu vào PT, BPT, HPT, BĐT**

- Câu 1:** Cho hàm số $y = f(x)$ luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Tập nghiệm của bất phương trình $f\left(\frac{1}{x}\right) > f(1)$ là
- A. $(-\infty; 1)$. B. $(-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$. C. $(0; 1)$. D. $(-\infty; 0) \cup (0; 1)$.
- Câu 2:** Cho hàm số $y = f(x)$ luôn nghịch biến $\mathbb{R}$. Tập nghiệm của bất phương trình $f\left(\frac{1}{x}\right) > f(1)$
- A. $(-\infty; 1)$. B. $(-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$. C. $(0; 1)$ D. $(-\infty; 0) \cup (0; 1)$.
- Câu 3:** Giá trị của tham số m để bất phương trình $(x-2-m)\sqrt{x-1} \leq m-4$ có nghiệm là:
- A. $m \leq 3$. B. $m \geq 2$. C. $m \geq 0$. D. $m < 2$.
- Câu 4:** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $y' = -x^2 - 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Khẳng định nào sau đây đúng?
- A. $f(0) > f(2020)$. B. $f(-2) = f(2)$.
C. $f(-2020) < f(2020)$. D. $f(1) > f(0)$.
- Câu 5:** Cho hàm số $y = f(x)$ có $f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của x để $f(22x) > f(x^2)$?
- A. 23. B. 20. C. 21. D. 22.
- Câu 6:** Tìm m để bất phương trình $x + \frac{4}{x-1} \geq m$ có nghiệm trên khoảng $(-\infty; 1)$
- A. $m \leq 3$. B. $m \leq -3$. C. $m \leq 5$. D. $m \leq -1$.
- Câu 7:** Cho hàm số $f(x) = \log_3 x + 3^x - 3^{\frac{1}{x}}$. Tính tổng bình phương các giá trị của tham số m để phương trình $f\left(\frac{1}{4|x-m|+3}\right) + f(x^2 - 4x + 7) = 0$ có đúng ba nghiệm thực phân biệt:
- A. 14. B. 13. C. 10. D. 5.
- Câu 8:** Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ. Xét hàm số $g(x) = 2f(x) + 2x^3 - 4x - 3m - 6\sqrt{5}$ với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để $g(x) \leq 0, \forall x \in [-\sqrt{5}; \sqrt{5}]$



- A. $m \geq \frac{2}{3} f(-\sqrt{5}) - 4\sqrt{5}$. B. $m \geq \frac{2}{3} f(\sqrt{5})$.
C. $m \leq \frac{2}{3} f(\sqrt{5})$. D. $m \leq \frac{2}{3} f(0) - 2\sqrt{5}$.

Câu 9: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Biết $f(-1) = \frac{8}{3}$ và a, b, c là các số thực thỏa mãn $a \in (-3; -1), b \in (-1; 2), c \in (2; 5)$. Khẳng định nào sau đây đúng?



- A. $f(a) + f(b) - f(c) \leq 7a - 8b - c + \frac{44}{3}$. B. $f(a) + f(b) - f(c) \geq 7a - 8b - c + \frac{44}{3}$.
C. $2f(a) + f(b) - f(c) \leq 14a - 8b - c + \frac{83}{3}$. D. $2f(a) + f(b) - f(c) \geq 14a - 8b - c + \frac{83}{3}$.

Câu 10: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$	2	0	2	$-\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $\left[0; \frac{9\pi}{2}\right]$ của phương trình $f(f(\cos x)) = 2$ là

- A. 10. B. 8. C. 7. D. 9.

Câu 11: Cho hàm số $f(x) = x^3 + x + 2$. Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\sqrt[3]{f^3(x) + f(x) + m}\right) = -x^3 - x + 2$ có nghiệm $x \in [-1; 2]$ là

- A. 1746. B. 1750. C. 1747. D. 1748.

Câu 12: Cho hàm số $f(x) = x^3 + x + 2$. Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\sqrt[3]{f^3(x) + f(x) + m}\right) = -x^3 - x + 2$ có nghiệm $x \in [-1; 2]$ là

- A. 1746. B. 1750. C. 1747. D. 1748.

Câu 13: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	0	1	3
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	8	9	5

Gọi S là tập hợp các số nguyên dương m để bất phương trình $f(x) \geq mx^2(x^2 - 2) + 2m$ có nghiệm thuộc đoạn $[0; 3]$. Số phần tử của tập S là

- A. 9. B. 10. C. Vô số. D. 0.

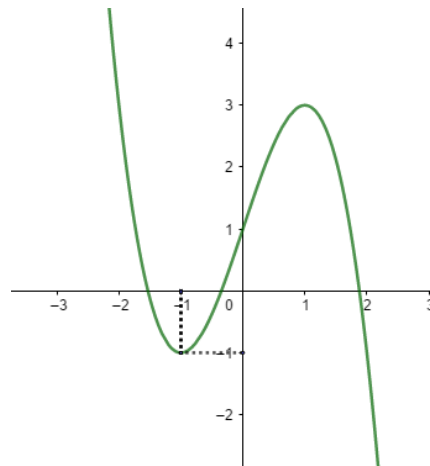
Câu 14: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x) > f'(x) + 1$ với mọi số thực x . Bất phương trình $f(x) < me^x + 1$ nghiệm đúng với mọi $x \in (0; +\infty)$ khi và chỉ khi

- A. $m > f(e) - 1$. B. $m \geq f(e) - 1$. C. $m \geq f(0) - 1$. D. $m > f(0) - 1$.

Câu 15: Tổng các nghiệm thực của phương trình $x^6 + 2020x^2 = (5x - 6)^3 - 2020(6 - 5x)$ là:

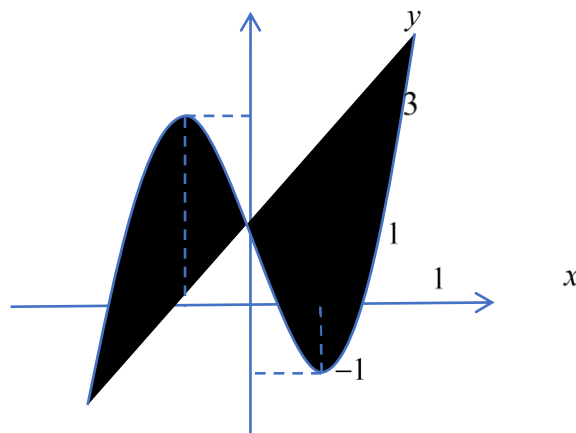
- A. 2021. B. -6. C. 2020 D. 5.

Câu 16: Cho hàm số $f(x)$, hàm số $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Bất phương trình $f(x) < x + m$ (m là một số thực) nghiệm đúng với mọi $x \in (-1; 0)$ khi và chỉ khi:



- A. $m > f(0)$. B. $m \geq f(-1) + 1$. C. $m > f(-1) + 1$. D. $m \geq f(0)$.

Câu 17: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $f(\cos x) = -2m + 1$ có nghiệm thuộc khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ là



- A. $(0; 1)$. B. $(-1; 1)$. C. $(0; 1]$. D. $(-1; 1]$.

Câu 18: Cho phương trình $\sin 2x - \cos 2x + |\sin x + \cos x| - \sqrt{2 \cos^2 x + m} - m = 0$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình có nghiệm thực?

A. 9.

B. 2.

C. 3.

D. 5.

Câu 19: Xét các số thực x, y thỏa mãn: $2^{x^2+y^2+1} \leq (x^2 + y^2 - 2x + 2) \cdot 4^x$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{4y}{2x + y + 1} \text{ gần nhất với số nào dưới đây?}$$

A. -2.

B. -3.

C. -5.

D. -4.

Câu 20: Có bao nhiêu cặp số nguyên dương (m, n) sao cho $m + n \leq 14$ và ứng với mỗi cặp (m, n) tồn tại đúng ba số thực $a \in (-1; 1)$ thỏa mãn $2a^m = n \ln(a + \sqrt{a^2 + 1})$?

A. 14.

B. 12.

C. 11.

D. 13.

Câu 21: Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới.

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$			
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$			4		0		$+\infty$
	$-\infty$						

Bất phương trình $x \cdot f(x) > mx + 1$ nghiệm đúng với mọi $x \in [1; 2020)$ khi

A. $m \geq f(2020) - \frac{1}{2020}$.

B. $m > f(2020) - \frac{1}{2020}$.

C. $m \leq f(1) - 1$.

D. $m < f(1) - 1$.

Câu 22: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $4\cos^3 x - \cos 2x + (m - 3)\cos x - 1 = 0$ có đúng bốn nghiệm khác nhau thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$?

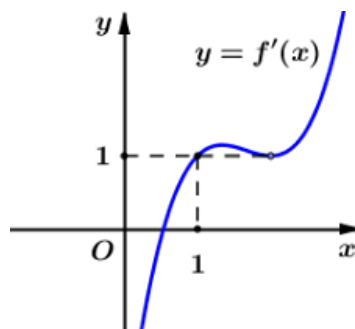
A. 3.

B. 2.

C. 0.

D. 1.

Câu 23: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ được cho bởi hình vẽ bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m trong khoảng $(1; 2021)$ để bất phương trình $f(1 - m^2) - f(-x^2 + 2mx + 1 - 3m^2) < x^2 - 2mx + 2m^2$ có nghiệm?



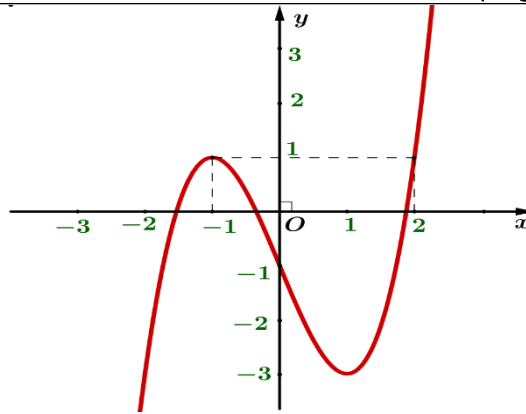
A. 0.

B. 1.

C. 2019.

D. 2020.

Câu 24: Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm đa thức bậc 4 thỏa mãn $f(-2) + f(1) = 2f(0)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ sau:



Tìm m để bất phương trình $f(x-1) - \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - x - \frac{1}{6} - m \geq 0$ có nghiệm thuộc $(-1; 2)$.

- A. $m \leq f(-1) - \frac{1}{6}$. B. $m < f(-1) - \frac{1}{6}$. C. $m < f(-2) + \frac{8}{3}$. D. $m \leq f(-2) + \frac{8}{3}$.

Câu 25: Cho hàm số $y = f(x) = \sqrt{1+x^2} + x$. Gọi S là tập tất cả các giá trị của tham số m để bất phương

trình $(x-m)f(x-m) + \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{f(1+\sqrt{1-x^2})} \leq 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in [-1; 1]$. Biết

$S = [a + \sqrt{b}; +\infty)$. Khi đó khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $a + 2b \geq 10$. B. $a + 2b = 5$. C. $ab = 3$. D. $a + b = 4$.

Câu 26: Cho $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$. Tổng bình phương các giá trị của tham số m để phương trình

$$-x^2 + 2x - 2 \leq f(x-m) + \frac{2|x-m| + 1}{f(2\sqrt{x^2 - 2mx + m^2} + 1)} = 0 \text{ có đúng 3 nghiệm}$$

phân biệt là:

- A. $\frac{13}{4}$. B. $\frac{7}{2}$. C. $\frac{5}{2}$. D. 3.

Câu 27: Cho hàm số $f(x) = (1-m^3)x^3 + 3mx^2 + (3m^2 - 2m + 2)x + m^3 + 2m$ với m là tham số. Có bao nhiêu số nguyên $m \in [-2020; 2021]$ sao cho $f(x) \geq 0$ với mọi $x \in [2020; 2021]$?

- A. 2023. B. 2022. C. 2021. D. 2020.

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

- Câu 1:** Cho hàm số $y = f(x)$ luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Tập nghiệm của bất phương trình $f\left(\frac{1}{x}\right) > f(1)$ là
- A. $(-\infty; 1)$. B. $(-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$. C. $(0; 1)$. D. $(-\infty; 0) \cup (0; 1)$.

Lời giải

Chọn B

Vì hàm số $y = f(x)$ luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$ nên

$$f\left(\frac{1}{x}\right) > f(1) \Leftrightarrow \frac{1}{x} < 1 \Leftrightarrow \frac{1-x}{x} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x > 1 \end{cases}.$$

- Câu 2:** Cho hàm số $y = f(x)$ luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Tập nghiệm của bất phương trình $f\left(\frac{1}{x}\right) > f(1)$
- A. $(-\infty; 1)$. B. $(-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$. C. $(0; 1)$ D. $(-\infty; 0) \cup (0; 1)$.

Lời giải

Chọn B

Vì hàm số $y = f(x)$ luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$ nên ta có

$$f\left(\frac{1}{x}\right) > f(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ \frac{1}{x} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ \frac{1}{x} < 1 \\ x > 0 \\ \frac{1}{x} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x > 1 \end{cases} \Rightarrow x \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty).$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $x \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$.

- Câu 3:** Giá trị của tham số m để bất phương trình $(x-2-m)\sqrt{x-1} \leq m-4$ có nghiệm là:
- A. $m \leq 3$. B. $m \geq 2$. C. $m \geq 0$. D. $m < 2$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t = \sqrt{x-1}; t \geq 0$.

Khi đó bất phương trình ban đầu trở thành: $(t^2 - m - 1)t \leq m - 4 \Leftrightarrow m \geq \frac{t^3 - t + 4}{t + 1}$.

Xét hàm số: $f(t) = \frac{t^3 - t + 4}{t + 1}, t \in [0; +\infty)$.

Có $f'(t) = \frac{2t^3 + 3t^2 - 5}{(t+1)^2} = \frac{(t-1)(2t^2 + 5t + 5)}{(t+1)^2}; f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$.

BBT của $f(t) = \frac{t^3 - t + 4}{t + 1}, t \in [0; +\infty)$:

t	0	1	$+\infty$
$f'(t)$	-	0	+
$f(t)$	4	2	$+\infty$

Từ BBT suy ra để bất phương trình có nghiệm thì $m \geq 2$.

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $y' = -x^2 - 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $f(0) > f(2020)$. B. $f(-2) = f(2)$.

C. $f(-2020) < f(2020)$.

D. $f(1) > f(0)$.

Lời giải

Chọn A

$y' = -x^2 - 1, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f' < 0, \forall x \in \mathbb{R}$, do đó hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$

Do $0 < 2020 \Rightarrow f(0) > f(2020)$.

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ có $f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của x để $f(22x) > f(x^2)$?

A. 23.

B. 20.

C. 21.

D. 22.

Lời giải

Chọn C

$f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Suy ra $f(22x) > f(x^2) \Leftrightarrow 22x > x^2 \Leftrightarrow 0 < x < 22$.

Vậy có 21 giá trị nguyên của x .

Câu 6: Tìm m để bất phương trình $x + \frac{4}{x-1} \geq m$ có nghiệm trên khoảng $(-\infty; 1)$

A. $m \leq 3$.

B. $m \leq -3$.

C. $m \leq 5$.

D. $m \leq -1$.

Lời giải

Chọn B

Bất phương trình $x + \frac{4}{x-1} \geq m$ có nghiệm trên khoảng $(-\infty; 1) \Leftrightarrow m \leq \max_{(-\infty; 1]} g(x)$

Với $g(x) = x + \frac{4}{x-1}$

$g'(x) = 1 - \frac{4}{(x-1)^2}; g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \notin (-\infty; 1) \\ x = -1 \in (-\infty; 1) \end{cases}$

x	$-\infty$		-1		1
y'		+	0	-	0
y	$-\infty$		-3		$-\infty$

Vậy $m \leq -3$.

Câu 7: Cho hàm số $f(x) = \log_3 x + 3^x - 3^{\frac{1}{x}}$. Tính tổng bình phương các giá trị của tham số m để phương trình $f\left(\frac{1}{4|x-m|+3}\right) + f(x^2 - 4x + 7) = 0$ có đúng ba nghiệm thực phân biệt:

A. 14.

B. 13.

C. 10.

D. 5.

Lời giải

Chọn A

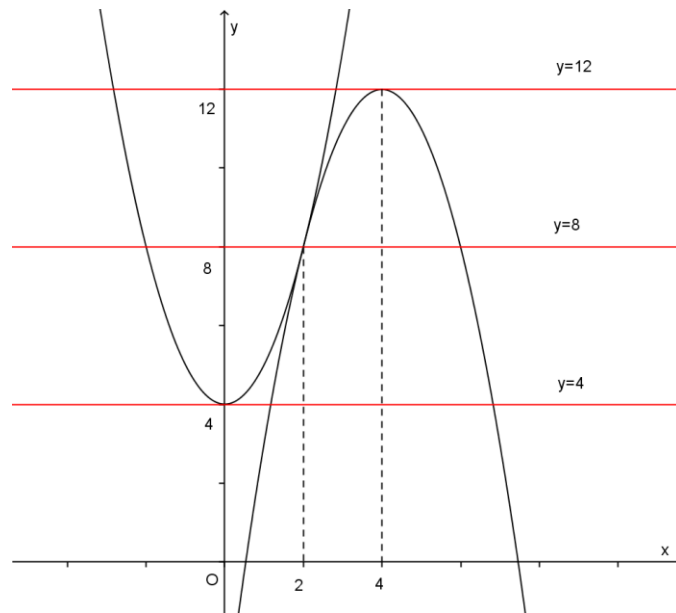
$$\text{Ta có: } f\left(\frac{1}{x}\right) = \log_3 \frac{1}{x} + 3^{\frac{1}{x}} - 3^x = -\left(\log_3 x + 3^x - 3^{\frac{1}{x}}\right) = -f(x) \forall x > 0$$

$$\text{Lại có: } f'(x) = \frac{1}{x \ln 3} + 3^x \cdot \ln 3 + \frac{1}{x^2} \cdot 3^{\frac{1}{x}} \cdot \ln 3 > 0 \forall x > 0 \Rightarrow \text{Hàm số } f(x) \text{ đồng biến trên } (0; +\infty)$$

$$\text{Do đó } f\left(\frac{1}{4|x-m|+3}\right) + f(x^2 - 4x + 7) = 0 \Leftrightarrow f(4|x-m|+3) = f(x^2 - 4x + 7)$$

$$\Leftrightarrow 4|x-m|+3 = x^2 - 4x + 7 \Leftrightarrow 4|x-m| = x^2 - 4x + 4 \Leftrightarrow \begin{cases} 4m = -x^2 + 8x - 4 \\ 4m = x^2 + 4 \end{cases}$$

Vẽ hai parabol $y = -x^2 + 8x - 4$ và $y = x^2 + 4$ trên cùng một hệ trục



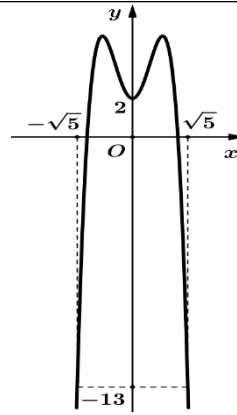
Hai parabol $y = -x^2 + 8x - 4$ và $y = x^2 + 4$ tiếp xúc với nhau tại điểm $A(2; 8)$

Parabol $y = -x^2 + 8x - 4$ có đỉnh $I_1(4; 12)$; parabol $y = x^2 + 4$ có đỉnh $I_2(0; 4)$

$$\text{Phương trình đã cho có đúng ba nghiệm thực phân biệt} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m = 4 \\ 4m = 8 \\ 4m = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 2 \\ m = 3 \end{cases}$$

Vậy tổng bình phương các giá trị của m là $1^2 + 2^2 + 3^2 = 14$.

Câu 8: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ. Xét hàm số $g(x) = 2f(x) + 2x^3 - 4x - 3m - 6\sqrt{5}$ với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để $g(x) \leq 0, \forall x \in [-\sqrt{5}; \sqrt{5}]$



A. $m \geq \frac{2}{3} f(-\sqrt{5}) - 4\sqrt{5}$.

B. $m \geq \frac{2}{3} f(\sqrt{5})$.

C. $m \leq \frac{2}{3} f(\sqrt{5})$.

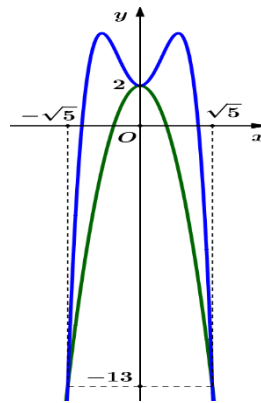
D. $m \leq \frac{2}{3} f(0) - 2\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $g'(x) = 2f'(x) + 6x^2 - 4$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 2 - 3x^2$

Vẽ parabol (P): $y = 2 - 3x^2$ lên cùng hệ trục với đồ thị $y = f'(x)$

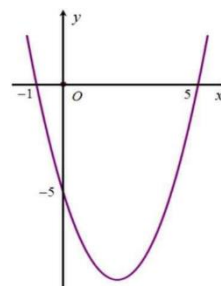


Dựa vào đồ thị, ta có $g'(x) \geq 0, \forall x \in [-\sqrt{5}; \sqrt{5}] \Rightarrow g(x)$ luôn đồng biến trên $[-\sqrt{5}; \sqrt{5}]$

$$\Leftrightarrow 2f(\sqrt{5}) + 10\sqrt{5} - 4\sqrt{5} - 3m - 6\sqrt{5} \leq 0 \Leftrightarrow 2f(\sqrt{5}) - 3m \leq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{2}{3} f(\sqrt{5})$$

$$\text{Do đó } g(x) \leq 0, \forall x \in [-\sqrt{5}; \sqrt{5}] \Leftrightarrow \max_{[-\sqrt{5}; \sqrt{5}]} g(x) = g(\sqrt{5}) \leq 0$$

Câu 9: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Biết $f(-1) = \frac{8}{3}$ và a, b, c là các số thực thỏa mãn $a \in (-3; -1)$, $b \in (-1; 2)$, $c \in (2; 5)$. Khẳng định nào sau đây đúng?



A. $f(a) + f(b) - f(c) \leq 7a - 8b - c + \frac{44}{3}$. **B.** $f(a) + f(b) - f(c) \geq 7a - 8b - c + \frac{44}{3}$.
C. $2f(a) + f(b) - f(c) \leq 14a - 8b - c + \frac{83}{3}$. **D.** $2f(a) + f(b) - f(c) \geq 14a - 8b - c + \frac{83}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Từ đồ thị ta có $f'(x) = x^2 - 4x - 5 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 5x + C$

Mà $f(-1) = \frac{8}{3} \Rightarrow C = 0$ nên $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 5x$

Cách 1:

$$f(a) - 7a - \frac{40}{3} = \frac{1}{3}a^3 - 2a^2 - 12a - \frac{40}{3} = \frac{1}{3}(a^3 - 6a^2 - 36a - 40)$$

$$= \frac{1}{3}(a+2)(a^2 - 8a - 20) = \frac{1}{3}(a+2)^2(a-10) \leq 0, \forall a \in (-3; -1)$$

$$\Rightarrow f(a) \leq 7a + \frac{40}{3}, \forall a \in (-3; -1)$$

Chúng minh tương tự ta có: $f(b) \leq -8b + \frac{4}{3}, \forall b \in (-1; 2), f(c) \geq -8c, \forall c \in (2; 5)$

$$\Rightarrow f(a) + f(b) - f(c) \leq \left(7a + \frac{40}{3}\right) + \left(-8b + \frac{4}{3}\right) - 8c = 7a - 8(b-c) + \frac{44}{3}, \text{ dấu bằng xảy ra khi } a = -2; b = 1; c = 3.$$

Cách 2:

Xét hàm số $g(x) = f(x) - 7x = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 12x$ với $x \in (-3; -1)$.

$$g'(x) = x^2 - 4x - 12, g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2, x = 4.$$

Bảng biến thiên

x	-3	-2	-1
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	9	$\frac{40}{3}$	$\frac{29}{3}$

Từ bảng biến thiên ta suy ra $g(x) \leq \frac{40}{3}, \forall x \in (-3; -1)$, suy ra $f(a) \leq 7a + \frac{40}{3}, \forall a \in (-3; -1)$.

Xét hàm số $h(x) = f(x) + 8x = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x$ với $x \in (-1; 5)$.

$$h'(x) = x^2 - 4x + 3, h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1, x = 3.$$

Bảng biến thiên

x	-1	1	2	3	5		
$h'(x)$		+	0	-	0	+	
$h(x)$	$-\frac{16}{3}$	$\nearrow$	$\frac{4}{3}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{20}{3}$

Từ bảng biến thiên ta suy ra $h(x) \leq \frac{4}{3}, \forall x \in (-1; 2)$, suy ra $f(b) \leq -8b + \frac{4}{3}, \forall b \in (-1; 2)$.

$-h(x) \leq 0, \forall x \in (2; 5)$, suy ra $-f(c) \leq 8c, \forall c \in (2; 5)$.

Từ các bất đẳng thức trên ta suy ra

$$f(a) + f(b) - f(c) \leq \left(7a + \frac{40}{3}\right) + \left(-8b + \frac{4}{3}\right) - 8c = 7a - 8(b - c) + \frac{44}{3}.$$

Cách 3:

Sử dụng máy tính cầm tay, nhập vào màn hình các biểu thức

$$f(A) + f(B) - f(C) - 7A + 8(B - C) - \frac{44}{3} \text{ và } 2f(A) + f(B) - f(C) - 14A + 8(B - C) - \frac{83}{3}$$

Sau đó tính giá trị các biểu thức trên tại một số giá trị $A \in (-3; -1), B \in (-1; 2), C \in (2; 5)$ từ đó suy ra đáp án đúng.

Câu 10: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$			2		2			
	$-\infty$		0		0		$-\infty$	

Số nghiệm thuộc đoạn $\left[0; \frac{9\pi}{2}\right]$ của phương trình $f(f(\cos x)) = 2$ là

A. 10.

B. 8.

C. 7.

D. 9.

Lời giải

Chọn D

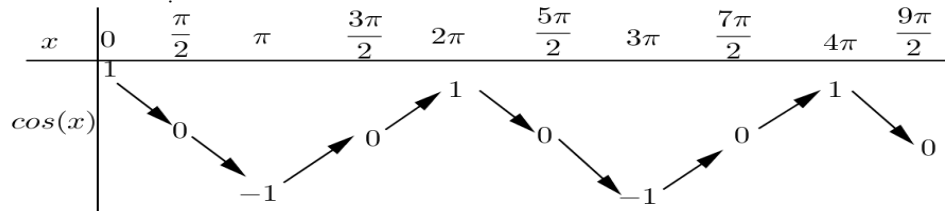
Từ bảng biến thiên ta có $f(f(\cos x)) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} f(\cos x) = -1 \\ f(\cos x) = 1 \end{cases}$

Phương trình $f(\cos x) = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = a_1, a_1 < -1 \\ \cos x = a_2, a_2 > 1 \end{cases}$.

Phương trình $f(\cos x) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = a, a < -1 \\ \cos x = b, b \in (-1; 0) \\ \cos x = c, c \in (0; 1) \\ \cos x = d, d > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = b, b \in (-1; 0) \\ \cos x = c, c \in (0; 1) \end{cases}$.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y = \cos x$ trên $\left[0; \frac{9\pi}{2}\right]$

Chủ đề 01: Cơ bản về tính đơn điệu của hàm số



Từ bảng biến thiên ta thấy $\cos x = b, b \in (-1; 0)$ có 4 nghiệm phân biệt và phương trình $\cos x = c, c \in (0; 1)$ có 5 nghiệm phân biệt.

Vậy phương trình có 9 nghiệm trên $\left[0; \frac{9\pi}{2}\right]$.

- Câu 11:** Cho hàm số $f(x) = x^3 + x + 2$. Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\sqrt[3]{f^3(x) + f(x) + m}\right) = -x^3 - x + 2$ có nghiệm $x \in [-1; 2]$ là
- A. 1746. B. 1750. C. 1747. D. 1748.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f\left(\sqrt[3]{f^3(x) + f(x) + m}\right) = -x^3 - x + 2$,

Đặt $t = \sqrt[3]{f^3(x) + f(x) + m}$, suy ra $(1) \Leftrightarrow f(t) = -x^3 - x + 2 \Leftrightarrow t^3 + t + 2 = (-x)^3 + (-x) + 2$,

Xét hàm số $y = h(u) = u^3 + u + 2$ có $h'(u) = 3u^2 + 1 > 0, \forall u \in \mathbb{R}$ nên hàm số $y = h(u)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó $(2) \Leftrightarrow h(t) = h(-x) \Leftrightarrow t = -x$.

Suy ra $\sqrt[3]{f^3(x) + f(x) + m} = -x \Leftrightarrow f^3(x) + f(x) + m = (-x)^3 \Leftrightarrow m = -f^3(x) - f(x) - x^3$.

Mà $f(x) = x^3 + x + 2$, suy ra $m = -(x^3 + x + 2)^3 - (x^3 + x + 2) - x^3$,

Xét hàm số $h(x) = -(x^3 + x + 2)^3 - (x^3 + x + 2) - x^3$ với $x \in [-1; 2]$.

Suy ra $h'(x) = -3(x^3 + x + 2)^2(3x^2 + 1) - (3x^2 + 1) - 3x^2 < 0, \forall x \in [-1; 2]$.

Do đó $h(-1) \geq h(x) \geq h(2) \Leftrightarrow 1 \geq h(x) \geq -1748$.

Vậy phương trình có nghiệm $x \in [-1; 2]$ khi và chỉ khi phương trình có nghiệm $x \in [-1; 2] \Leftrightarrow -1748 \leq m \leq 1$.

Lại có $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-1748; -1747; \dots; -1; 0; 1\}$. Vậy có 1750 giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\sqrt[3]{f^3(x) + f(x) + m}\right) = -x^3 - x + 2$ có nghiệm $x \in [-1; 2]$.

- Câu 12:** Cho hàm số $f(x) = x^3 + x + 2$. Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\sqrt[3]{f^3(x) + f(x) + m}\right) = -x^3 - x + 2$ có nghiệm $x \in [-1; 2]$ là
- A. 1746. B. 1750. C. 1747. D. 1748.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, suy ra hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$\forall x \in [-1; 2] \Rightarrow f(x) \in [0; 12]$

Phương trình đã cho tương đương với: $f\left(\sqrt[3]{f^3(x)+f(x)+m}\right)=f(-x)$

$$\sqrt[3]{f^3(x)+f(x)+m}=-x \Leftrightarrow f^3(x)+f(x)+m=-x^3$$

$$\Leftrightarrow f^3(x)+f(x)+x^3=-m \quad (*)$$

Xét hàm số $g(x)=f^3(x)+f(x)+x^3$, ta có:

$$g'(x)=3f^2(x).f'(x)+f'(x)+3x^2>0 \quad \forall x \in \mathbb{R}, \text{ suy ra hàm số } g(x) \text{ đồng biến trên } [-1;2].$$

Vậy phương trình (*) có nghiệm khi và chỉ khi

$$\min_{[-1;2]} g(x) \leq -m \leq \max_{[-1;2]} g(x) \Leftrightarrow g(-1) \leq -m \leq g(2)$$

$$\Leftrightarrow f^3(-1)+f(-1)-1 \leq -m \leq f^3(2)+f(2)+8$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq -m \leq 12^3+12+8$$

$$\Leftrightarrow -1748 \leq m \leq 1$$

Câu 13: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	0	1	3
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	8	9	5

Gọi S là tập hợp các số nguyên dương m để bất phương trình $f(x) \geq mx^2(x^2-2)+2m$ có nghiệm thuộc đoạn $[0;3]$. Số phần tử của tập S là

A. 9.

B. 10.

C. Vô số.

D. 0.

Lời giải

Chọn A

Từ bảng biến thiên suy ra $f(x) \in [5;9], \forall x \in [0;3]$ và $\max_{[0;3]} f(x)=9$ tại $x=1$

$$f(x) \geq mx^2(x^2-2)+2m \quad f(x) \geq m(x^4-2x^2+2)$$

Xét hàm số $g(x)=x^4-2x^2+2$ trên đoạn $[0;3]$.

$$\text{Ta có } g'(x)=4x^3-4x=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \Rightarrow y=2 \\ x=\pm 1 \Rightarrow y=1 \end{cases}$$

Bảng biến thiên của $g(x)$

x	0	1	3	
$g'(x)$		-	0	+
$g(x)$	2	1	65	

Từ bảng biến thiên suy ra $g(x) \in [1;65], \forall x \in [0;3]$ và $\min_{[0;3]} g(x)=1$ tại $x=1$.

Do đó $\frac{f(x)}{g(x)} \leq 9, \forall x \in [0; 3]$ và $\max_{[0;3]} \frac{f(x)}{g(x)} = 3$ tại $x = 1$.

$$f(x) \geq mx^2(x^2 - 2) + 2m \Leftrightarrow m \leq \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Khi đó có nghiệm thuộc đoạn $[0; 3] \Leftrightarrow m \leq \max_{[0;3]} \frac{f(x)}{g(x)} \Leftrightarrow m \leq 9$.

Vì m nguyên dương nên $m \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$.

Câu 14: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x) > f'(x) + 1$ với mọi số thực x . Bất phương trình $f(x) < me^x + 1$ nghiệm đúng với mọi $x \in (0; +\infty)$ khi và chỉ khi

A. $m > f(e) - 1$. B. $m \geq f(e) - 1$. C. $m \geq f(0) - 1$. D. $m > f(0) - 1$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f(x) < me^x + 1 \Leftrightarrow f(x) - 1 < me^x \Leftrightarrow \frac{f(x) - 1}{e^x} < m$

Xét hàm $g(x) = \frac{f(x) - 1}{e^x}$ trên $(0; +\infty)$

Có $g'(x) = \frac{f'(x) - [f(x) - 1]}{e^x} < 0, \forall x \in (0; +\infty)$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$			-
$g(x)$		$f(0) - 1$	

Vậy bất phương trình $f(x) < me^x + 1$ nghiệm đúng với mọi $x \in (0; +\infty)$ khi và chỉ khi $m \geq f(0) - 1$

Câu 15: Tổng các nghiệm thực của phương trình $x^6 + 2020x^2 = (5x - 6)^3 - 2020(6 - 5x)$ là:

A. 2021. B. -6. C. 2020 D. 5.

Lời giải

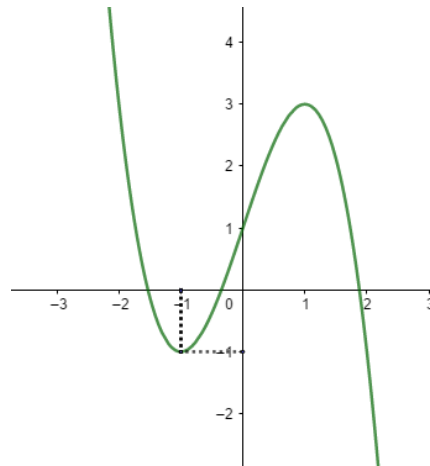
Chọn D

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 2020t \Rightarrow f'(t) = 3t^2 + 2020 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ nên hàm số $y = f(t)$ đồng biến trên khoảng $\mathbb{R}$. Phương trình $x^6 + 2020x^2 = (5x - 6)^3 - 2020(6 - 5x)$ có dạng:

$$f(x^2) = f(5x - 6) \Leftrightarrow x^2 = 5x - 6 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 3 \end{cases}.$$

Vậy tổng các nghiệm là 5.

Câu 16: Cho hàm số $f(x)$, hàm số $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Bất phương trình $f(x) < x + m$ (m là một số thực) nghiệm đúng với mọi $x \in (-1; 0)$ khi và chỉ khi:



- A. $m > f(0)$. B. $m \geq f(-1) + 1$. C. $m > f(-1) + 1$. D. $m \geq f(0)$.

Lời giải

Chọn B

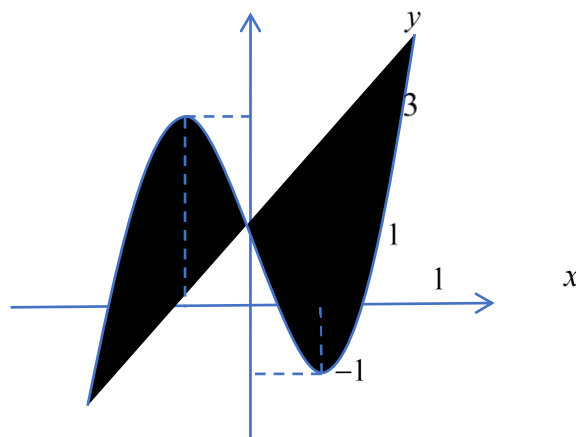
Ta có: $f(x) < x + m \Leftrightarrow f(x) - x < m$.

Xét $g(x) = f(x) - x$, ta có: $g'(x) = f'(x) - 1$. Với mọi $x \in (-1; 0)$ thì $-1 < f'(x) < 1$.

Từ đó $g'(x) = f'(x) - 1 < 0$ nên hàm số nghịch biến trên $(-1; 0)$.

Suy ra $g(x) = f(x) - x < f(-1) + 1$. Yêu cầu bài toán tương đương với $m \geq f(-1) + 1$.

Câu 17: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $f(\cos x) = -2m + 1$ có nghiệm thuộc khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ là



- A. $(0; 1)$. B. $(-1; 1)$. C. $(0; 1]$. D. $(-1; 1]$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $\cos x = t, t \in (0; 1)$.

Phương trình đã cho có nghiệm thuộc khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow$ phương trình $f(t) = -2m + 1$ có nghiệm thuộc khoảng $(0; 1)$. Dựa vào đồ thị trên suy ra $-1 < -2m + 1 < 1 \Leftrightarrow 1 > m > 0$.

Câu 18: Cho phương trình $\sin 2x - \cos 2x + |\sin x + \cos x| - \sqrt{2\cos^2 x + m} - m = 0$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình có nghiệm thực?

- A. 9. B. 2. C. 3. D. 5.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $2\cos^2 x + m \geq 0$.

Ta có: $\sin 2x - \cos 2x + |\sin x + \cos x| - \sqrt{2\cos^2 x + m} - m = 0$

$$\Leftrightarrow 2\sin x \cdot \cos x - 2\cos^2 x + 1 + |\sin x + \cos x| - \sqrt{2\cos^2 x + m} - m = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)^2 + |\sin x + \cos x| = 2\cos^2 x + m + \sqrt{2\cos^2 x + m} \quad (1).$$

Xét hàm số $f(u) = u^2 + u$ với $u \geq 0$ có $f'(u) = 2u + 1 > 0, \forall u \geq 0$.

Nên phương trình

$$(1) \Leftrightarrow |\sin x + \cos x| = \sqrt{2\cos^2 x + m} \Leftrightarrow 1 + \sin 2x = 2\cos^2 x + m \Leftrightarrow \sin 2x - \cos 2x = m.$$

Điều kiện để phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow 1^2 + 1^2 \geq m^2 \Leftrightarrow -\sqrt{2} \leq m \leq \sqrt{2}$.

Do $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-1; 0; 1\}$.

Câu 19: Xét các số thực x, y thỏa mãn: $2^{x^2+y^2+1} \leq (x^2 + y^2 - 2x + 2) \cdot 4^x$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{4y}{2x + y + 1} \text{ gần nhất với số nào dưới đây?}$$

- A. -2. B. -3. C. -5. D. -4.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } 2^{x^2+y^2+1} \leq (x^2 + y^2 - 2x + 2) \cdot 4^x \Leftrightarrow \frac{2^{x^2+y^2+1}}{4^x} \leq x^2 + y^2 - 2x + 2$$

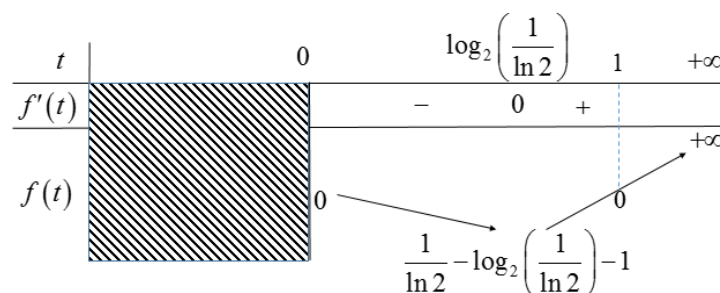
$$\Leftrightarrow 2^{x^2+y^2-2x+1} - (x^2 + y^2 - 2x + 1) - 1 \leq 0 \quad (*).$$

Đặt $t = x^2 + y^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow t = (x-1)^2 + y^2 \geq 0$. Khi đó $(*)$ trở thành $2^t - t - 1 \leq 0$.

Xét hàm số: $f(t) = 2^t - t - 1$ trên $[0; +\infty)$

$$f'(t) = 2^t \ln 2 - 1 \Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \log_2 \left(\frac{1}{\ln 2} \right).$$

Bảng biến thiên:



Dựa vào bảng biến thiên ta có $f(t) \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq t \leq 1 \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 \leq 1$.

Khi đó $2x + y + 1 > 0$ và $P = \frac{4y}{2x + y + 1} \Leftrightarrow 2Px + (P - 4)y + P = 0$.

Các cặp $(x; y)$ thỏa mãn: $(x - 1)^2 + y^2 \leq 1$ là tọa độ các điểm $(x; y)$ thuộc hình tròn (C)

Tâm $I(1; 0)$, bán kính $R = 1$.

Các cặp $(x; y)$ thỏa mãn: $2Px + (P - 4)y + P = 0$ là tọa độ các điểm $(x; y)$ thuộc đường thẳng $(d): 2Px + (P - 4)y + P = 0$.

Do đó tồn tại giá trị nhỏ nhất của P khi đường thẳng (d) phải có điểm chung với hình tròn (C)

$$\Leftrightarrow d_{(I; d)} \leq R \Leftrightarrow \frac{|3P|}{\sqrt{4P^2 + (P - 4)^2}} \leq 1 \Leftrightarrow P^2 + 2P - 4 \leq 0 \Leftrightarrow -1 - \sqrt{5} \leq P \leq -1 + \sqrt{5}.$$

Vậy $\min P = -1 - \sqrt{5} \approx -3,24$.

Dấu bằng xảy ra khi $(x; y)$ là tọa độ tiếp điểm của đường thẳng (d) với hình tròn (C) .

Câu 20: Có bao nhiêu cặp số nguyên dương (m, n) sao cho $m + n \leq 14$ và ứng với mỗi cặp (m, n) tồn tại đúng ba số thực $a \in (-1; 1)$ thỏa mãn $2a^m = n \ln(a + \sqrt{a^2 + 1})$?

A. 14.

B. 12.

C. 11.

D. 13.

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình: $2a^m = n \ln(a + \sqrt{a^2 + 1})$ (1).

Nhận xét: $a = 0$ là một nghiệm của phương trình (1).

Với $a \neq 0$, phương trình (1) $\Leftrightarrow \frac{2}{n} = \frac{\ln(a + \sqrt{a^2 + 1})}{a^m}$ (*).

Xét hàm số: $f(a) = \frac{\ln(a + \sqrt{a^2 + 1})}{a^m}$ trên $(-1; 1)$; $f'(a) = \frac{\frac{a}{\sqrt{a^2 + 1}} - m \ln(a + \sqrt{a^2 + 1})}{a^{m+1}}$.

Xét phương trình $\frac{a}{\sqrt{a^2 + 1}} - m \ln(a + \sqrt{a^2 + 1}) = 0$ (2).

Xét hàm số $g(a) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + 1}} - m \ln(a + \sqrt{a^2 + 1})$ trên $(-1; 1)$.

$$g'(a) = \frac{1-m}{\sqrt{a^2 + 1}} - \frac{a^2}{(\sqrt{a^2 + 1})^3} \Rightarrow g'(a) \leq 0, \forall a \in (-1; 1); m \in \mathbb{N}^*.$$

Suy ra hàm số $g(a)$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.

Do đó, phương trình (2) có nghiệm duy nhất $a = 0$.

Trường hợp 1: m chẵn.

a	-1	0	1
$f'(a)$	-		-
$f(a)$	$\ln(\sqrt{2}-1)$	$+\infty$	$\ln(\sqrt{2}+1)$

Phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(-1;1)$ khi và chỉ khi phương trình (*) có 2 nghiệm phân biệt khác 0 thuộc khoảng $(-1;1)$

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy với n nguyên dương phương trình $f(a) = \frac{2}{n}$ không có hai nghiệm phân biệt. Suy ra loại trường hợp m chẵn.

Trường hợp 2: m lẻ và $m \neq 1$.

a	-1	0	1
$f'(a)$	+		-
$f(a)$	$\ln(1+\sqrt{2})$	$+\infty$	$\ln(1+\sqrt{2})$

Phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(-1;1)$ khi và chỉ khi phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt khác 0 thuộc khoảng $(-1;1)$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{n} > \ln(1+\sqrt{2}) \Leftrightarrow n < \frac{2}{\ln(1+\sqrt{2})} \Leftrightarrow \begin{cases} n=1 \\ n=2 \end{cases}$$

Với $n=1$, m lẻ và $m \neq 1$, $m+1 \leq 14$ suy ra $m \in \{3;5;7;9;11;13\}$.

Với $n=2$, m lẻ và $m \neq 1$, $m+2 \leq 14$ suy ra $m \in \{3;5;7;9;11\}$.

Trường hợp 3: $m=1$.

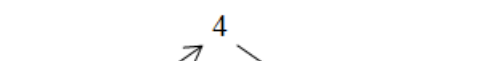
a	-1	0	1
$f'(a)$	+		-
$f(a)$	$\ln(1+\sqrt{2})$	1	$\ln(1+\sqrt{2})$

Phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(-1;1)$ khi và chỉ khi phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt khác 0 thuộc khoảng $(-1;1)$

$$\Leftrightarrow \ln(1+\sqrt{2}) < \frac{2}{n} < 1 \Leftrightarrow 2 < n < \frac{2}{\ln(1+\sqrt{2})} \text{ suy ra không tồn tại số tự nhiên } n \text{ thỏa mãn.}$$

Vậy có 11 cặp $(m; n)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 21: Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới.

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$			
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$							

Bất phương trình $x \cdot f(x) > mx + 1$ nghiệm đúng với mọi $x \in [1; 2020)$ khi

- A. $m \geq f(2020) - \frac{1}{2020}$. B. $m > f(2020) - \frac{1}{2020}$.
 C. $m \leq f(1) - 1$. D. $m < f(1) - 1$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $x \cdot f(x) > mx + 1$ nghiệm đúng với mọi $x \in [1; 2020)$

$$\Leftrightarrow f(x) > m + \frac{1}{x} \Leftrightarrow m < f(x) - \frac{1}{x} \text{ nghiệm đúng với mọi } x \in [1; 2020)$$

Xét hàm số: $g(x) = f(x) - \frac{1}{x}$ với $x \in [1; 2020)$. Ta có: $g'(x) = f'(x) + \frac{1}{x^2}$

$$\text{Do } \begin{cases} f'(x) \geq 0 \\ \frac{1}{x^2} > 0 \end{cases} \text{ với mọi } x \in [1; 2020) \text{ nên } g'(x) = f'(x) + \frac{1}{x^2} > 0 \text{ với mọi } x \in [1; 2020).$$

Suy ra hàm số $g(x)$ đồng biến trên nửa khoảng $[1; 2020)$.

Vậy yêu cầu bài toán tương đương $m < \min_{[1; 2020)} g(x) = g(1) = f(1) - 1$.

Câu 22: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $4\cos^3 x - \cos 2x + (m-3)\cos x - 1 = 0$ có đúng bốn nghiệm khác nhau thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$?

- A. 3. B. 2. C. 0. D. 1.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $4\cos^3 x - \cos 2x + (m-3)\cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow 4\cos^3 x - (2\cos^2 x - 1) + (m-3)\cos x - 1 = 0$.

$$\Leftrightarrow 4\cos^3 x - 2\cos^2 x + (m-3)\cos x = 0.$$

$$\Leftrightarrow \cos x (4\cos^2 x - 2\cos x + (m-3)) = 0.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi. & (1) \\ 4\cos^2 x - 2\cos x + (m-3) = 0. & (2) \end{cases}$$

Ta thấy nghiệm không thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ nên phương trình đã cho có đúng bốn nghiệm thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ khi và chỉ khi phương trình có đúng bốn nghiệm thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Xét: $4\cos^2 x - 2\cos x + (m-3) = 0$ (2).

Đặt $\cos x = t$, dễ thấy với mỗi $t, 0 < t < 1$ thì có 2 giá trị x thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Do đó phương trình có đúng 4 nghiệm thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ khi và chỉ khi phương trình $4t^2 - 2t + (m-3) = 0$ có đúng 2 nghiệm $t, 0 < t < 1$.

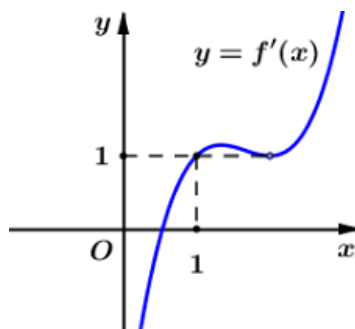
Ta tìm m để phương trình: $-4t^2 + 2t + 3 = m$ có đúng 2 nghiệm $t, 0 < t < 1$.

Xét $f(t) = -4t^2 + 2t + 3$ có $f'(t) = -8t + 2$.

t	0	$\frac{1}{4}$	1	
$f'(t)$		+	0	-
$f(t)$		$\frac{13}{4}$		
	3		1	

Từ bảng biến thiên suy ra $1 < m < \frac{13}{4}$. Do m nguyên nên $m = 2; m = 3$.

Câu 23: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ được cho bởi hình vẽ bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m trong khoảng $(1; 2021)$ để bất phương trình $f(1-m^2) - f(-x^2 + 2mx + 1 - 3m^2) < x^2 - 2mx + 2m^2$ có nghiệm?



A. 0.

B. 1.

C. 2019.

D. 2020.

Lời giải

Chọn C

$$f(1-m^2) - f(-x^2 + 2mx + 1 - 3m^2) < x^2 - 2mx + 2m^2$$

$$\Leftrightarrow -x^2 + 2mx + 1 - 3m^2 - f(-x^2 + 2mx + 1 - 3m^2) < 1 - m^2 - f(1 - m^2) \quad (*)$$

Ta có: $1 - m^2 < 0, \forall m \in (1; 2021)$.

$$-x^2 + 2mx + 1 - 3m^2 = -(x-m)^2 - 2m^2 + 1 < 0, \forall m \in (1; 2021), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Xét hàm số $g(t) = t - f(t), t < 0$.

Có $g'(t) = 1 - f'(t) > 0, \forall t < 0$

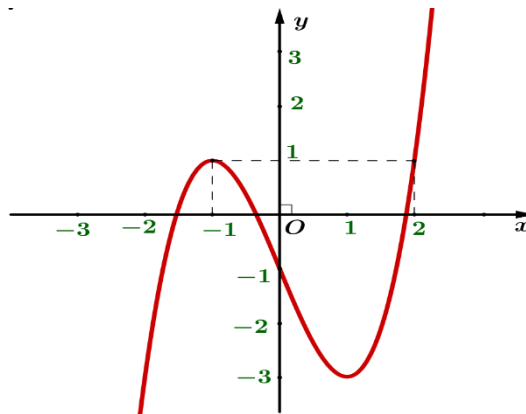
Vậy $g(t)$ là hàm số đồng biến trên $(-\infty; 0)$.

(*) có dạng $g(-x^2 + 2mx + 1 - 3m^2) < g(1 - m^2)$

$$\Leftrightarrow -x^2 + 2mx + 1 - 3m^2 < 1 - m^2$$

$$\Leftrightarrow -x^2 + 2mx - m^2 < m^2 \Leftrightarrow -(x-m)^2 < m^2$$

Câu 24: Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm đa thức bậc 4 thỏa mãn $f(-2) + f(1) = 2f(0)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ sau:



Tìm m để bất phương trình $f(x-1) - \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - x - \frac{1}{6} - m \geq 0$ có nghiệm thuộc $(-1; 2)$.

A. $m \leq f(-1) - \frac{1}{6}$. **B.** $m < f(-1) - \frac{1}{6}$. **C.** $m < f(-2) + \frac{8}{3}$. **D.** $m \leq f(-2) + \frac{8}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f(x-1) - \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - x - \frac{1}{6} - m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq f(x-1) - \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - x - \frac{1}{6}$ (*)

Gọi $g(x) = f(x-1) - \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - x - \frac{1}{6}$

Đặt $t = x - 1$ vì $x \in (-1; 2) \Rightarrow t \in (-2; 1)$

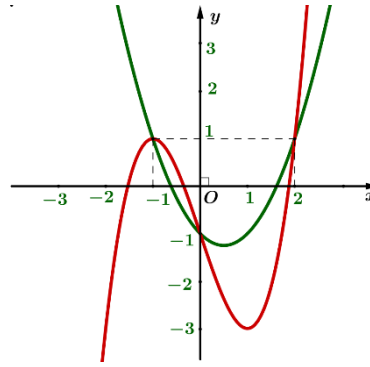
(*) $\Rightarrow m \leq f(t) - \frac{1}{3}(t+1)^3 + \frac{3}{2}(t+1)^2 - (t+1) - \frac{1}{6}$

Xét hàm số $g(t) = f(t) - \frac{1}{3}(t+1)^3 + \frac{3}{2}(t+1)^2 - (t+1) - \frac{1}{6}$

$$g'(t) = f'(t) - (t+1)^2 + 3(t+1) - 1$$

$$g'(t) = f'(t) - t^2 + t + 1$$

$$g'(t) = 0 \Leftrightarrow f'(t) = t^2 - t - 1$$



Dựa vào đồ thị ta thấy $f'(t) = t^2 - t - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \Rightarrow x = 0 \\ t = 0 \Rightarrow x = 1 \\ t = 2(l) \end{cases}$

Ta có bảng biến thiên

x	-1	0	1	2	
$g'(x)$	-	0	+	0	-
$g(x)$	$g(-1)$	$g(0)$	$g(1)$	$g(2)$	

$$g(-1) = f(-2) + \frac{8}{3}; \quad g(1) = f(0)$$

$$\text{Lại có } f(-2) + f(1) = 2f(0) \Leftrightarrow f(-2) - f(0) = f(0) - f(1)$$

$$\text{Xét } g(-1) - g(1) = f(-2) - f(0) + \frac{8}{3} = f(0) - f(1) + \frac{8}{3} > 0. \text{ Do đó } g(-1) > g(1)$$

$$\text{Vậy } m \leq f(x-1) - \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - x - \frac{1}{6} \Leftrightarrow m < g(-1) = f(-2) + \frac{8}{3}.$$

Câu 25: Cho hàm số $y = f(x) = \sqrt{1+x^2} + x$. Gọi S là tập tất cả các giá trị của tham số m để bất phương

$$\text{trình } (x-m)f(x-m) + \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{f(1+\sqrt{1-x^2})} \leq 0 \text{ nghiệm đúng với mọi } x \in [-1; 1]. \text{ Biết}$$

$$S = [a + \sqrt{b}; +\infty). \text{ Khi đó khẳng định nào sau đây là đúng?}$$

A. $a + 2b \geq 10$.

B. $a + 2b = 5$.

C. $ab = 3$.

D. $a + b = 4$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } f(-x) = \sqrt{1+x^2} - x;$$

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2} + x} = \frac{\sqrt{1+x^2} - x}{1+x^2 - x^2} = \sqrt{1+x^2} - x = f(-x)$$

$$\text{BPT: } (x-m)f(x-m) + \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{f(1+\sqrt{1-x^2})} \leq 0$$

$$\Rightarrow (x-m)f(x-m) + (1+\sqrt{1-x^2})f(-1-\sqrt{1-x^2}) \leq 0$$

$$\Rightarrow (x-m)f(x-m) - (-1-\sqrt{1-x^2})f(-1-\sqrt{1-x^2}) \leq 0$$

$$\Rightarrow (x-m)f(x-m) \leq (-1-\sqrt{1-x^2})f(-1-\sqrt{1-x^2}) \quad (*)$$

Xét hàm số $g(t) = t.f(t) = t\sqrt{1+t^2} + t^2$;

$$g'(t) = \sqrt{1+t^2} + \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}} + 2t = \frac{1+t^2+2t\sqrt{1+t^2}+t^2}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{(\sqrt{1+t^2}+t)^2}{\sqrt{1+t^2}} > 0 \text{ với mọi } t \in \mathbb{R}$$

suy ra hàm số $g(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Do đó BPT } (*) : g(x-m) \leq g(-1-\sqrt{1-x^2}) \Leftrightarrow x-m \leq -1-\sqrt{1-x^2}$$

$$\Leftrightarrow x+1+\sqrt{1-x^2} \leq m \quad (**) \text{ với mọi } x \in [-1;1].$$

Xét hàm số: $h(x) = x+1+\sqrt{1-x^2} \quad (-1 \leq x \leq 1)$

$$h'(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\sqrt{1-x^2}-x}{\sqrt{1-x^2}}; h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}} \in [-1;1]$$

Nhận xét: $h(-1) = 0, h\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1+\sqrt{2}, h(1) = 2$ nên $\max_{[-1;1]} h(x) = 1+\sqrt{2}$

Vậy BPT (**) đúng với mọi $x \in [-1;1]$ khi và chỉ khi $\max_{[-1;1]} h(x) \leq m$ hay $m \geq 1+\sqrt{2}$.

Ta có: $a+\sqrt{b} = 1+\sqrt{2}$ và $a, b \in \mathbb{N}$ nên $(a, b) = (1, 2)$.

Câu 26: Cho $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$. Tổng bình phương các giá trị của tham số m để phương trình

$$-x^2 + 2x - 2 + f(-x^2 + 2x - 2) + \frac{2|x-m|+1}{f(2\sqrt{x^2-2mx+m^2}+1)} = 0 \text{ có đúng 3 nghiệm}$$

phân biệt là:

A. $\frac{13}{4}$.

B. $\frac{7}{2}$.

C. $\frac{5}{2}$.

D. 3.

Lời giải

Chọn B

Ta có:

$$\sqrt{x^2 - 2mx + m^2} = |x-m|; f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}} > 0$$

$$f(-x) = -x + \sqrt{x^2+1} \Rightarrow f(x).f(-x) = 1 \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{f(-x)} \Rightarrow f(-x^2+2x-2) = \frac{1}{f(x^2-2x+2)}.$$

$$\text{Phương trình tương đương } \frac{2|x-m|+1}{f(2\sqrt{x^2-2mx+m^2}+1)} = \frac{x^2-2x+2}{f(x^2-2x+2)}$$

Xét hàm số:

$$g(t) = \frac{t}{f(t)} (t > 0) \Rightarrow g'(t) = \frac{f(t)-t.f'(t)}{f^2(t)} = \frac{t+\sqrt{t^2+1}-t-\frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}}}{f^2(t)} = \frac{1}{\sqrt{t^2+1}.f^2(t)} > 0$$

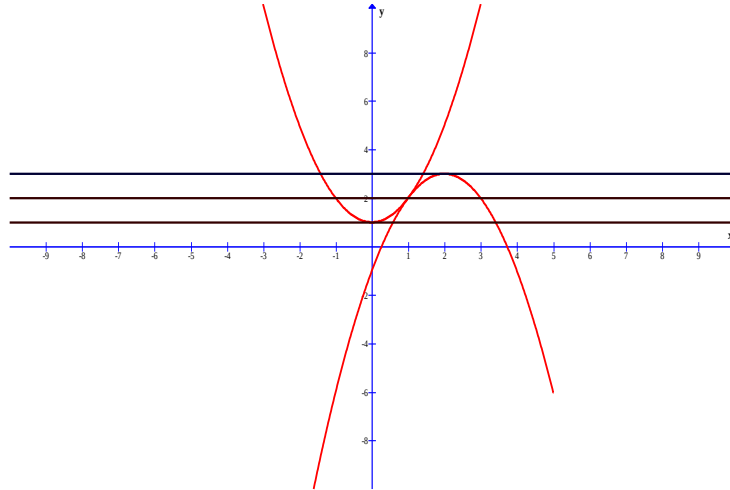
Chủ đề 01: Cơ bản về tính đơn điệu của hàm số

Vậy hàm số $g(t)$ đồng biến, khi đó phương trình tương đương với pt

$$x^2 - 2x + 2 = 2|x - m| + 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 2|x - m| \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 1 = 2(x - m) \\ x^2 - 2x + 1 = -2(x - m) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m = -x^2 + 4x - 1 \\ 2m = x^2 + 1 \end{cases}.$$

Ta thấy hai parabol $y = -x^2 + 4x - 1$, $y = x^2 + 1$ tiếp xúc với nhau tại điểm có tọa độ $(1; 2)$ nên đồ thị của chúng trong cùng hệ tọa độ Oxy như sau.



Khi đó để phương trình có 3 nghiệm thì đường thẳng $y = 2m$ cắt hai parabol tại 3 điểm phân

biệt, từ đồ thị suy ra $\begin{cases} 2m = 3 \\ 2m = 2 \\ 2m = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{3}{2} \\ m = 1 \\ m = \frac{1}{2} \end{cases}.$

Vậy tổng bình phương các giá trị của m bằng $\frac{7}{2}$.

Câu 27: Cho hàm số $f(x) = (1 - m^3)x^3 + 3mx^2 + (3m^2 - 2m + 2)x + m^3 + 2m$ với m là tham số. Có bao nhiêu số nguyên $m \in [-2020; 2021]$ sao cho $f(x) \geq 0$ với mọi $x \in [2020; 2021]$?

A. 2023. **B.** 2022. **C.** 2021. **D.** 2020.

Lời giải

Chọn B

$$f(x) = (1 - m^3)x^3 + 3mx^2 + (3m^2 - 2m + 2)x + m^3 + 2m \geq 0 \quad \forall x \in [2020; 2021]$$

$$\Leftrightarrow (x + m)^3 + 2(x + m) \geq (mx)^3 + 2mx \quad \forall x \in [2020; 2021] \quad (1)$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = t^3 + 2t, \quad f'(t) = 3t^2 + 2 > 0 \quad \forall t$$

Vậy hàm số $f(t)$ đồng biến trên R nên (1) suy ra

$$x + m \geq mx \quad \forall x \in [2020; 2021] \Leftrightarrow m \leq \frac{x}{x-1} \quad \forall x \in [2020; 2021] \Leftrightarrow m \leq \frac{2021}{2020}.$$

Vậy trên đoạn $[-2020; 2021]$ có 2022 giá trị nguyên của m thỏa mãn.