CHƯƠNG IV: GIỚI HẠN

CHỦ ĐỀ 1 : GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

Dạng 1: Tìm giới hạn của dãy số

I. Dãy số có giới hạn hữu hạn

1. Định nghĩa: Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn là L hay (u_n) dần tới L khi n dần tới vô cực ($n \to +\infty$), nếu $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(u_n - L\right) = 0$. Kí hiệu:

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(u_n\right) = L$ hay $u_n \to L$ khi $n \to +\infty$.

- ***Chú ý:*** $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(u_n\right) = \lim\left(u_n\right)$.

2. Một số định lý:

- Định lí 1: Giả sử $\lim u_n = L$, khi đó:
  - ✓ $\lim\left|u_n\right| = \left|L\right|, \lim\sqrt[3]{u_n} = \sqrt[3]{L}$
  - ✓ Nếu $u_n \ge 0, \forall n \Rightarrow L \ge 0$ và $\lim\sqrt{u_n} = \sqrt{L}$
- Định lí 2: Giả sử $\lim u_n = L, \lim v_n = M, c = const$
  - ✓ $\lim(u_n + v_n) = L + M$
  - ✓ $\lim(u_n - v_n) = L - M$
  - ✓ $\lim(u_n.v_n) = L.M$, $\lim c.u_n = c.L$
  - ✓ $\lim\dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{L}{M}\ (M \ne 0)$
- Định lí 3: Cho 3 dãy số $(u_n),(v_n),(w_n)$. Nếu $u_n < v_n < w_n, \forall n$ và $\lim u_n = \lim w_n = L \Rightarrow \lim v_n = L$
- Định lí 4: Dãy số tăng và bị chặn trên thì có giới hạn. Dãy số giảm và bị chặn dưới thì có giới hạn.

3. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn:

$$S = u_1 + u_1q + u_1q^2 + \ldots = \frac{u_1}{1-q} \quad \left(|q| < 1\right)$$

II. DÃY SỐ CÓ GIỚI HẠN VÔ CỰC

1. ***Dãy số có giới hạn*** $+\infty$ ***:*** $\lim u_n = +\infty \Leftrightarrow$ mọi số hạng của dãy số đều lớn hơn một số dương tùy ý cho trước kể từ số hạng nào đó trở đi.
2. ***Dãy số có giới hạn*** $-\infty$ ***:*** $\lim u_n = -\infty \Leftrightarrow$ mọi số hạng của dãy số đều nhỏ hơn một số âm tùy ý cho trước kể từ số hạng nào đó trở đi.

Chú ý: $\lim u_n = +\infty \rightarrow \lim(-u_n) = -\infty$

3. Một vài qui tắc tìm giới hạn vô cực:

- Qui tắc 1:

$\lim u_n$	$\lim v_n$	$\lim u_n.v_n$
$+\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$-\infty$	$\pm\infty$	$\mp\infty$

- Qui tắc 2:

$\lim u_n$	Dấu của $\lim v_n = L$	$\lim u_n.v_n$
$+\infty$	$\pm$	$\pm\infty$
$-\infty$	$\pm$	$\mp\infty$

- Qui tắc 3:

$\lim u_n = L \neq 0$ Dấu của L	$\lim v_n = 0, v_n \neq 0$ Dấu của $\lim v_n$	$\lim \frac{u_n}{v_n}$
+	$\pm$	$\pm\infty$
-	$\pm$	$\mp\infty$

Loại 1: Giới hạn của dãy số hữu tỉ

Phương pháp: Xem xét bậc cao nhất của tư và mẫu. Sau đó, chia tử và mẫu cho bậc cao nhất của tử và mẫu. Hoặc cũng có thể đặt nhân tử cao nhất của từ và mẫu để được những giới hạn cơ bản. Tính giới hạn này.

Bài tập mẫu 1: Tính các giới hạn sau:

a. $\lim \dfrac{5n^3 - 3n^2 + 6}{4n^2 - 3n^3 + 7n}$

c. $\lim \dfrac{2n^2 - n + 3}{3n^2 + 2n + 1}$

b. $\lim \dfrac{6n^4 + 2n^2 - 1}{1 + 5n^2 - 3n^4}$

d. $\lim \dfrac{-2n^2 + 3n - 1}{n^2 - 1}$

e. $\lim \dfrac{4n + 2017}{\sqrt{4n^2 + 1} + n}$

f. $\lim \dfrac{\sqrt{n^2 + 1} + 4n}{3n - 2}$

Hướng dẫn giải

a. Ta có biến đổi:

$$\lim \frac{5n^3 - 3n^2 + 6}{4n^2 - 3n^3 + 7n} = \lim \frac{n^3\left(5 - \frac{3}{n} + \frac{6}{n^3}\right)}{n^3\left(\frac{4}{n} - 3 + \frac{7}{n^2}\right)} \quad = \lim \frac{5 - \frac{3}{n} + \frac{6}{n^3}}{\frac{4}{n} - 3 + \frac{7}{n^2}} = \frac{-5}{3}$$

Vì khi $n \to +\infty$ thì $\begin{cases} \lim \frac{3}{n} = 0 \\ \lim \frac{6}{n^3} = 0 \\ \lim \frac{4}{n} = 0 \\ \lim \frac{7}{n^2} = 0 \end{cases}$

b. Ta có biến đổi:

$$\lim \frac{6n^4 + 2n^2 - 1}{1 + 5n^2 - 3n^4} = \lim \frac{6n^4 + 2n^2 - 1}{1 + 5n^2 - 3n^4} = \lim \frac{n^4\left(6 + \frac{2}{n^2} - \frac{1}{n^4}\right)}{n^4\left(\frac{1}{n^4} + \frac{5}{n^2} - 3\right)} = \lim \frac{6 + \frac{2}{n^2} - \frac{1}{n^4}}{\frac{1}{n^4} + \frac{5}{n^2} - 3} = -2$$

Vì khi $n \to +\infty$ thì $\begin{cases} \lim \dfrac{2}{n^2} = 0 \\ \lim \dfrac{1}{n^4} = 0 \\ \lim \dfrac{5}{n^2} = 0 \end{cases}$

c. Ta có biến đổi:

$$\lim \frac{2n^2 - n + 3}{3n^2 + 2n + 1} \lim \frac{2n^2 - n + 3}{3n^2 + 2n + 1} = \lim \frac{n^2\left(2 - \dfrac{1}{n} + \dfrac{3}{n^2}\right)}{n^2\left(3 + \dfrac{2}{n} + \dfrac{1}{n^2}\right)} = \lim \frac{\left(2 - \dfrac{1}{n} + \dfrac{3}{n^2}\right)}{\left(3 + \dfrac{2}{n} + \dfrac{1}{n^2}\right)} = \frac{2}{3}$$

Vì khi $n \to +\infty$ thì $\begin{cases} \lim \dfrac{1}{n} = 0 \\ \lim \dfrac{3}{n^2} = 0 \\ \lim \dfrac{2}{n} = 0 \\ \lim \dfrac{1}{n^2} = 0 \end{cases}$

d. Ta có biến đổi:

$$\lim \frac{-2n^2 + 3n - 1}{n^2 - 1} = \lim \frac{n^2\left(-2 + \dfrac{3}{n} - \dfrac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)} = \lim \frac{-2 + \dfrac{3}{n} - \dfrac{1}{n^2}}{1 - \dfrac{1}{n^2}} = -2$$

Vì khi $n \to +\infty$ thì $\begin{cases} \lim \dfrac{3}{n} = 0 \\ \lim \dfrac{1}{n^2} = 0 \end{cases}$

e. Ta có biến đổi:

$$\lim \frac{4n + 2017}{\sqrt{4n^2 + 1} + n} = \lim \frac{4n + 2017}{\sqrt{n^2\left(4 + \dfrac{1}{n^2}\right)} + n} = \lim \frac{4n + 2017}{n\sqrt{4 + \dfrac{1}{n^2}} + n} = \lim \frac{4 + \dfrac{2017}{n}}{\sqrt{4 + \dfrac{1}{n^2}} + 1} = \frac{4}{3}$$

Vì khi $n \to +\infty$ thì $\begin{cases} \lim \dfrac{2017}{n} = 0 \\ \lim \dfrac{1}{n^2} = 0 \end{cases}$

f. Ta có biến đổi:

$$\lim \frac{\sqrt{n^2+1}+4n}{3n-2} = \lim \frac{\dfrac{\sqrt{n^2+1}+4n}{n}}{\dfrac{3n-2}{n}} = \lim \frac{\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}+4}{3-\dfrac{2}{n}} = \frac{1+4}{3} = \frac{5}{3}$$

Vì khi $n \to +\infty$ thì $\begin{cases} \lim \dfrac{1}{n^2} = 0 \\ \lim \dfrac{2}{n} = 0 \end{cases}$

<u>Bài tập mẫu 2:</u> Tính các giới hạn sau:

a. $\lim \dfrac{n^4-3n^2-2}{n^3-2}$

c. $\lim \dfrac{2n^4+n^2-3}{3n^3-2n^2+1}$

b) $\lim \dfrac{8n^4-3n^2+2n+1}{3+4n-2n^2}$

d. $\lim \dfrac{-3n^4+2n+5}{2n^3+4}$

Hướng dẫn giải

a. Ta có biến đổi:

$$\lim \frac{n^4-3n^2-2}{n^3-2} = \lim \frac{n^4\left(1-\dfrac{3}{n^2}-\dfrac{2}{n^4}\right)}{n^3\left(1-\dfrac{2}{n^2}\right)} = \lim \frac{n\left(1-\dfrac{3}{n^2}-\dfrac{2}{n^4}\right)}{1-\dfrac{2}{n^2}} = +\infty$$

Vì $\lim n = +\infty$. và $\lim \dfrac{\left(1-\dfrac{3}{n^2}-\dfrac{2}{n^4}\right)}{1-\dfrac{2}{n^2}} = 1$

b) Ta có biến đổi:

$$\lim\frac{8n^4-3n^2+2n+1}{3+4n-2n^2}=\lim\frac{n^4\left(\frac{8n^4}{n^4}-\frac{3n^2}{n^4}+\frac{2n}{n^4}+\frac{1}{n^4}\right)}{n^2\left(\frac{3}{n^2}+\frac{4n}{n^2}-\frac{2n^2}{n^2}\right)}$$

$$=\lim\ n^2\left(\frac{8-\frac{3}{n^2}+\frac{2}{n^3}+\frac{1}{n^4}}{\frac{3}{n^2}+\frac{4}{n}-2}\right)=-\infty$$

Do $\lim\ n^2=+\infty$ và $\lim\left(\frac{8-\frac{3}{n^2}+\frac{2}{n^3}+\frac{1}{n^4}}{\frac{3}{n^2}+\frac{4}{n}-2}\right)=\frac{8-0+0-0}{0+0-2}=-4<0$

c. Ta có biến đổi:

$$\lim\frac{2n^4+n^2-3}{3n^3-2n^2+1}=\lim\frac{2n^4+n^2-3}{3n^3-2n^2+1}=\lim\frac{n^4\left(2+\frac{1}{n^2}-\frac{3}{n^4}\right)}{n^3\left(3-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^3}\right)}=\lim\frac{n\left(2+\frac{1}{n^2}-\frac{3}{n^4}\right)}{\left(3-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^3}\right)}$$

Vì $\begin{cases}\lim n=+\infty\\ \lim\frac{\left(2+\frac{1}{n^2}-\frac{3}{n^4}\right)}{\left(3-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^3}\right)}=\frac{2}{3}>0\end{cases}$. Nên $\lim\frac{n\left(2+\frac{1}{n^2}-\frac{3}{n^4}\right)}{\left(3-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^3}\right)}=+\infty$

d. Ta có biến đổi:

$$\lim\frac{-3n^4+2n+5}{2n^3+4}=\lim\frac{n^4\left(-3+\frac{2}{n^3}+\frac{5}{n^4}\right)}{n^3\left(2+\frac{4}{n^3}\right)}=\lim n.\left(\frac{-3+\frac{2}{n^3}+\frac{5}{n^4}}{2+\frac{4}{n^3}}\right)=-\infty$$

Do $\lim n=+\infty$ và $\lim\left(\frac{-3+\frac{2}{n^3}+\frac{5}{n^4}}{2+\frac{4}{n^3}}\right)=\frac{-3+0+0}{2+0}=-\frac{3}{2}<0$

Bài tập mẫu 3: Tính các giới hạn sau:

a. $\lim \dfrac{2n-1}{n^2+2n+4}$ b. $\lim \dfrac{n+5}{3n^3+1}$

Hướng dẫn giải

a. Ta có biến đổi:

$$\lim \frac{2n-1}{n^2+2n+4} = \lim \frac{\frac{2n}{n^2}-\frac{1}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2}+\frac{2n}{n^2}+\frac{4}{n^2}} = \lim \frac{\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{2}{n}+\frac{4}{n^2}} = \frac{0}{1} = 0$$

Vì khi $n \to +\infty$ thì $\begin{cases} \lim \dfrac{2}{n} = 0 \\ \lim \dfrac{1}{n^2} = 0 \\ \lim \dfrac{4}{n^2} = 0 \end{cases}$

b. Ta có biến đổi:

$$\lim \frac{n+5}{3n^3+1} = \lim \frac{\frac{n}{n^3}+\frac{5}{n^3}}{\frac{3n^3}{n^3}+\frac{1}{n^3}} = \lim \frac{\frac{1}{n^2}+\frac{5}{n^3}}{3+\frac{1}{n^3}} = \frac{0}{3} = 0$$

Do : Vì khi $n \to +\infty$ thì $\begin{cases} \lim \dfrac{1}{n^2} = 0 \\ \lim \dfrac{5}{n^3} = 0 \\ \lim \dfrac{1}{n^3} = 0 \end{cases}$

Trích dẫn: Qua 3 bài toán ở trên dạng dãy số dạng hữu tỉ ta rút ra nhận xét như sau.

+ Nếu bậc của tử lớn hơn bậc của mẫu thì giới hạn đó bằng $\pm\infty$

+ Nếu bậc của tử bằng bậc của mẫu thì giới hạn đó bằng hệ số bậc cao nhất của tử trên hệ số bậc cao nhất của mẫu

+ Nếu bậc của tử bé hơn bậc của mẫu thì giới hạn đó bằng 0.

Điều này rất cần thiết cho tất cả chúng ta giải bài toán giới hạn dạng hữu tỉ khi giải trắc nghiệm. Bởi vì một giới hạn hữu tỉ khi nhìn vào ta hoàn toàn có thể biết được kết quả ngay lập tức. Thật vậy những bài toán sau các em hoàn toàn biết được kết quả một cách nhanh chóng và chính xác.

Thật vậy, sử dụng nhận xét đó ta thực hiện nhanh các bài tập trắc nghiệm sau:

Bài tập trắc nghiệm tự luyện

Bài tập 1: Giới hạn $\lim\frac{2n^3+n^2-3n+1}{3n-2}$ bằng:

a. $\frac{2}{3}$ b. 0 c. $+\infty$ d. 3

Đáp án: C

Vì bậc cao nhất của tử là bậc 3 có hệ số dương và bậc cao nhất của mẫu là bậc 1 nên giới hạn này bằng $+\infty$

Bài tập 2: Giới hạn $\lim\frac{-n^3+n^2-3n+1}{4n+2}$ bằng:

a. $-\infty$ b. $-\frac{1}{4}$ c. $+\infty$ d. 0

Đáp án: A

Vì bậc cao nhất của tử là bậc 3 có hệ số âm và bậc cao nhất của mẫu là bậc 1 nên giới hạn này bằng $-\infty$

Bài tập 3: Giới hạn $\lim\frac{3n^2+n+1}{2n^3+1}$ bằng:

a. $\frac{3}{2}$ b. $-\frac{1}{4}$ c. $+\infty$ d. 0

Đáp án: D

Vì bậc cao nhất của tử là bậc hai và bậc cao nhất của mẫu là bậc ba. Nên giới hạn này có giới hạn bằng 0.

Bài tập 4: Giới hạn $\lim\frac{-3n^2+5n+1}{2n^2-n+3}$ bằng:

a. $\frac{3}{2}$ b. $-\frac{3}{2}$ c. 0 d. $+\infty$

Đáp án: B

Bậc cao nhất của tử là bậc hai có hệ số bằng -3 và bậc cao nhất của mẫu cũng là bậc hai có hệ số bằng 2 . Nên giới hạn này bằng $-\frac{3}{2}$

Bài tập 5: Giới hạn $\lim\frac{n^4-n^2-5}{2n^3-7n}$ bằng:

a. 4 b. $\frac{1}{2}$ c. $+\infty$ d. $-\infty$

Đáp án: C

Ta có: $\lim\frac{n^4-n^2-5}{2n^3-7n}=\lim\frac{n^4\left(1-\frac{1}{n^2}-\frac{5}{n^4}\right)}{n^3\left(2-\frac{7}{n}\right)}=\lim\frac{n\left(1-\frac{1}{n^2}-\frac{5}{n^4}\right)}{2-\frac{7}{n}}=+\infty$

Vì $\lim n=+\infty.$ và $\lim\frac{\left(1-\frac{1}{n^2}-\frac{5}{n^4}\right)}{2-\frac{7}{n}}=\frac{1}{2}$

Bài tập 6: Giới hạn $\lim\frac{2n^2-n+3}{3n^2+2n+1}$ bằng:

a. $\frac{2}{3}$ b. 3 c. $-\frac{1}{2}$ d. 0

Đáp án: A

Bậc cao nhất của tử là bậc hai có hệ số bằng 2 và bậc cao nhất của mẫu cũng là bậc hai có hệ số bằng 3 . Nên giới hạn này bằng $\frac{2}{3}$

Bài tập 7: Giới hạn $\lim \frac{2n+1}{n^3+4n^2+3}$ bằng:

a. $-\infty$ b. 0 c. 2 d. $\frac{1}{3}$

Đáp án: B

Bậc cao nhất của tử là bậc 1 và bậc cao nhất của mẫu là bậc ba có hệ số bằng 3 . Nên giới hạn này bằng 0.

Bài tập 8: Giới hạn $\lim \frac{3n^3+2n^2+n}{n^3+4}$ bằng:

a. $\frac{3}{4}$ b. $\frac{1}{3}$ c. $+\infty$ d. 3

Đáp án: D

Bậc cao nhất của tử là bậc ba có hệ số bằng 3 và bậc cao nhất của mẫu cũng là bậc ba có hệ số bằng 3 . Nên giới hạn này bằng 3.

Bài tập 9: Giới hạn $\lim \frac{n^4}{(n+1)(2+n)(n^2+1)}$ bằng:

a. 4 b. $\frac{1}{2}$ c. 1 d. $+\infty$

Đáp án: C

Bậc cao nhất của tử là bậc bốn có hệ số bằng 1 và bậc cao nhất của mẫu cũng là bậc bốn có hệ số bằng 1 . Nên giới hạn này bằng 1.

Bài tập 10: Giới hạn $\lim \frac{n^2+1}{2n^4+n+1}$ bằng:

a. $\frac{1}{2}$ b. 0 c. $-\infty$ d. 1

Đáp án: B

Bậc cao nhất của tử là bậc hai và bậc cao nhất của mẫu là bậc 4 nên giới hạn này bằng 0

Bài tập 11: Giới hạn $\lim\frac{2n^4+n^2-3}{3n^3-2n^2+1}$ bằng:

a.-3 b. $\frac{4}{3}$ c. $-\frac{1}{2}$ d. $+\infty$

Vì bậc cao nhất của tử là bậc 4 và bậc cao nhất của mẫu là bậc 3 nên giới hạn này bằng $+\infty$

Bài tập 12: Giới hạn $\lim\frac{\sqrt{4n^2+1}+2n-1}{\sqrt{n^2+4n+1}+n}$ bằng:

a. 2 b. 4 c. $+\infty$ d. 0

Đáp án: A

Sau khi biến đổi ta có bậc cao nhất của tử là bậc nhất có tổng các hệ số bằng 4 và bậc cao nhất của mẫu là bậc nhất có tổng các hệ số bằng 2. Nên giới hạn này bằng 2.

Thật vậy ta cần chứng minh :

$$\lim\frac{\sqrt{4n^2+1}+2n-1}{\sqrt{n^2+4n+1}+n}=\lim\frac{\sqrt{\frac{4n^2}{n^2}+\frac{1}{n^2}}+\frac{2n}{n}-\frac{1}{n}}{\sqrt{\frac{n^2}{n^2}+\frac{4n}{n^2}+\frac{1}{n^2}}+\frac{n}{n}}=\lim\frac{\sqrt{4+\frac{1}{n^2}}+2-\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}}+1}=\frac{4}{2}=2$$

Bài tập 13: Giới hạn $\lim\frac{\sqrt{n^2+3}+n-4}{\sqrt{n^2+2}+n}$ bằng:

a. 0 b. 1 c. 2 d. 4

Đáp án: B

Thực hiện tương tự câu trên

Bài tập 14: Giới hạn $\lim\frac{n^2+\sqrt[3]{1+n^6}}{\sqrt{n^4+1}+n^2}$ bằng:

a. 0 b. 1 c. 2 d. 4

Đáp án: B

Thực hiện tương tự câu trên

Bài tập 15: Giới hạn $\lim\frac{(2n\sqrt{n}+1)(\sqrt{n}+3)}{(n+1)(n+2)}$ bằng:

a. $+\infty$ b. $\frac{3}{2}$ c. $\frac{2}{3}$ d. 2

Đáp án: D

Ta có biến đổi:

$$\lim\frac{(2n\sqrt{n}+1)(\sqrt{n}+3)}{(n+1)(n+2)}=\lim\frac{2n^2+7n\sqrt{n}+3}{n^2+3n+2}$$

Do đó: Bậc cao nhất của tử là bậc hai hệ số bằng 2. Bậc cao nhất của mẫu là bậc hai hệ số bằng 1. Nên giới hạn này bằng 2.

Bài tập 16: Giới hạn $\lim\frac{\sqrt{n^2-4n}+\sqrt{4n^2+1}}{\sqrt{3n^2+1}+n}$ bằng:

a. $\frac{3}{\sqrt{3}+1}$ b. $\frac{1}{\sqrt{3}+1}$ c. $\frac{1}{\sqrt{3}}$ d. $\frac{4}{\sqrt{3}}$

Đáp án: A

Thực hiện tương tự như những bài trên.

Bài tập 17: Giới hạn $\lim\frac{\sqrt{n^2+2}}{\sqrt{4n^2-2}}$ bằng:

a. 1 b. $\frac{1}{4}$ c. $\frac{1}{2}$ d. -1

Đáp án: C

Thực hiện tương tự như những bài trên.

Bài tập 18: Giới hạn $\lim\frac{\sqrt[3]{8n^3+1}}{2n-5}$ bằng:

a. 4 b. $+\infty$ c. $-\frac{1}{5}$ d. 1

Đáp án: D

Thật vậy, bậc cao nhất của tử là bậc nhất hệ số bằng $\sqrt[3]{8}=2$ và bậc cao nhất của mẫu là bậc nhất hệ số bằng 2. Do đó, giới hạn này có giới hạn bằng 1.

Bài tập 19: Giới hạn $\lim\frac{\sqrt{4n^4+n^2+3}}{3n+2}$ bằng:

a. $\frac{4}{3}$ b. $\frac{1}{3}$ c. $+\infty$ d. 4

Đáp án: C

Bậc lớn nhất của tử là 2 hệ số bằng $\sqrt{4}=2$, bậc lớn nhất của mẫu là bậc nhất nên giới hạn này có giới hạn bằng $+\infty$

Bài tập 20: Giới hạn $\lim\frac{-3n^4+2n^2-3n+1}{\sqrt{n^4+n^2+1}}$ bằng:

a. -3 b. $-\infty$ c. 2 d. 1

Đáp án: B

Bậc lớn nhất của tử là bậc 4 hệ số bằng -3, bậc của mẫu là bậc 2 nên giới hạn này bằng $-\infty$

Bài tập 21: Giới hạn $\lim\frac{3n-1}{\sqrt{3n^2+2n-2}}$ bằng:

a. $\sqrt{3}$ b. 1 c. 3 d.0

Đáp án: A

Thực hiện tương tự như những bài trên

Bài tập 22: Giới hạn $\lim\frac{3n^2+2n-1}{\sqrt{4n^2+n-2}}$ bằng:

a. $\frac{3}{2}$ b. $\frac{3}{4}$ c. $\frac{1}{2}$ d. $+\infty$

Đáp án: D

Thực hiện tương tự như những bài trên

Bài tập 23: Giới hạn $\lim\frac{4n+1}{\sqrt{3n^2-2n+1}+2n}$ bằng:

a. $\frac{4}{3}$ b. $\frac{4}{\sqrt{3}+2}$ c. 0 d. 2

Đáp án: B

Thực hiện tương tự như những bài trên

Bài tập 24: Giới hạn $\lim\frac{\sqrt{3n^4-n^3+4n^2}-n}{3n^2-2}$ bằng:

a. $+\infty$ b. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ c. $+\infty$ d. $-\frac{1}{3}$

Đáp án: B

Thực hiện tương tự như những bài trên

Bài tập 25: Giới hạn $\lim\frac{\sqrt{n+\sqrt{n+1}}}{\sqrt{n-\sqrt{n}}}$ bằng:

a. 1 b. $+\infty$ c. -1 d. $\frac{1}{2}$

Đáp án: A

Thực hiện tương tự như những bài trên

Bài tập 26: Giới hạn $\lim\frac{\sqrt[3]{8n^3+4n-2}}{5n-1}$ bằng:

a. $\frac{8}{5}$ b. $+\infty$ c. $\frac{2}{5}$ d. $\frac{4}{5}$

Đáp án: C

Thực hiện tương tự như những bài trên

Bài tập 27: Giới hạn $\lim\frac{\sqrt{n\sqrt{2n\sqrt{4n}}}}{n+1}$ bằng:

a.2 b. 4 c. $+\infty$ d. 0

Đáp án: D

Thực hiện tương tự như những bài trên

Bài tập 28: Giới hạn $\lim\frac{1+2+3+...+n}{2n^2+n-1}$ bằng:

a. 0 b. $\frac{1}{4}$ c. $\frac{1}{2}$ d. $+\infty$

Đáp án: B

Sử dụng phương pháp quy nạp toán học ta có:

$$\lim\frac{1+2+3+...+n}{2n^2+n-1}=\lim\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{2n^2+n-1}=\lim\frac{n(n+1)}{2(2n^2+n-1)}=\lim\frac{n^2+n}{4n^2+2n-2}$$

Áp dụng các nhận xét ở giới hạn dãy hữu tỉ ta có giới hạn này bằng $\frac{1}{4}$

Loại 2: Giới hạn của dãy có căn thức.

Phương pháp : Nếu dãy số có chứa căn thức mà không có dạng hữu tỉ để xét bậc, thì ta tiến hành nhân thêm lượng liên hiệp để tính giới hạn. Nhưng đồng thời các em cũng sử dụng nhận xét ở tính giới hạn hữu tỉ.

Lưu ý :

+ Biểu thức nhân lượng liên hiệp bậc hai : $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$

+ Biểu thức nhân lượng liên hiệp bậc ba :

$$(A+B)(A^2-AB+B^2)=A^3+B^3$$
$$(A-B)(A^2+AB+B^2)=A^3-B^3$$

Sau khi nhân thêm lượng liên hiệp ta cũng có thể sử dụng nhận xét về giới hạn của dãy số hữu tỉ để có thể tinh giới hạn nhanh hơn.

Bài tập mẫu 1: Tính các giới hạn sau:

a. $\lim\left(\sqrt{n^2+2n}-n\right)$

b. $\lim\left(\sqrt{n^2+2n+3}-n\right)$

c. $\lim\left(\sqrt[3]{n+2}-\sqrt[3]{n}\right)$

d. $\lim\dfrac{1}{\sqrt{3n+2}-\sqrt{2n+1}}$

e. $\lim\left(n+1-\sqrt{n^2+2n+5}\right)$

f. $\lim\left(\sqrt[3]{n^3+3n^2+1}-\sqrt{n^2+4n}\right)$

Hướng dẫn giải

a. Ta có biến đổi:

$$\lim\left(\sqrt{n^2+2n}-n\right)=\lim\frac{\left(\sqrt{n^2+2n}-n\right)\left(\sqrt{n^2+2n}+n\right)}{\sqrt{n^2+2n}+n}$$
$$=\lim\frac{n^2+2n-n^2}{\sqrt{n^2+2n}+n}=\lim\frac{2n}{\sqrt{n^2+2n}+n}=\lim\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1}=1$$

b. Ta có biến đổi:

$$\lim\left(\sqrt{n^2+2n+3}-n\right)=\lim\frac{\left(\sqrt{n^2+2n+3}-n\right)\left(\sqrt{n^2+2n+3}+n\right)}{\sqrt{n^2+2n+3}+n}$$

$$=\lim\frac{n^2+2n+3-n^2}{\sqrt{n^2+2n+3}+n}=\lim\frac{2n+3}{\sqrt{n^2+2n+3}+n}$$

$$=\lim\frac{2n+3}{n\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}+1\right)}=\lim\frac{2+\frac{3}{n}}{\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}+1}=\frac{2}{1+1}=1$$

$$\boxed{\sqrt{n^2+2n+3}+n \text{ là biểu thức liên hợp của } \sqrt{n^2+2n+3}-n}$$

c. Ta có biến đổi:

$$\lim\left(\sqrt[3]{n+2}-\sqrt[3]{n}\right)=\lim\frac{\left(\sqrt[3]{n+2}-\sqrt[3]{n}\right)\left(\sqrt[3]{(n+2)^2}+\sqrt[3]{n+2}.\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n^2}\right)}{\sqrt[3]{(n+2)^2}+\sqrt[3]{n+2}.\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n^2}}$$

$$=\lim\frac{\left(\sqrt[3]{n+2}\right)^3-\left(\sqrt[3]{n}\right)^3}{\sqrt[3]{(n+2)^2}+\sqrt[3]{n+2}.\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n^2}}=\lim\frac{n+2-n}{\sqrt[3]{(n+2)^2}+\sqrt[3]{n+2}.\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n^2}}$$

$$=\lim\frac{2}{\sqrt[3]{(n+2)^2}+\sqrt[3]{n+2}.\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n^2}}=0$$

d. Ta có biến đổi:

$$\lim\frac{1}{\sqrt{3n+2}-\sqrt{2n+1}}=\lim\frac{\sqrt{3n+2}+\sqrt{2n+1}}{\left(\sqrt{3n+2}-\sqrt{2n+1}\right)\left(\sqrt{3n+2}+\sqrt{2n+1}\right)}$$

$$=\lim\frac{\sqrt{3n+2}+\sqrt{2n+1}}{3n+2-2n-1}=\lim\left(\sqrt{3n+2}+\sqrt{2n+1}\right)=+\infty$$

e. Ta có biến đổi:

$$\lim\left(n+1-\sqrt{n^2+2n+5}\right)=\lim\frac{\left(n+1-\sqrt{n^2+2n+5}\right)\left(n+1+\sqrt{n^2+2n+5}\right)}{n+1+\sqrt{n^2+2n+5}}$$
$$=\lim\frac{(n+1)^2-\left(n^2+2n+5\right)}{n+1+\sqrt{n^2+2n+5}}=\lim\frac{n^2-n^2-2n-5}{n+1+\sqrt{n^2+2n+5}}$$
$$=\lim\frac{-2n-5}{n+1+\sqrt{n^2+2n+5}}=-1$$

f. Ta có biến đổi:

$$\lim\left(\sqrt[3]{n^3+3n^2+1}-\sqrt{n^2+4n}\right)=\lim\left(\sqrt[3]{n^3+3n^2+1}-n+n-\sqrt{n^2+4n}\right)$$
$$=\lim\left(\left(\sqrt[3]{n^3+3n^2+1}-n\right)+\left(n-\sqrt{n^2+4n}\right)\right)$$
$$=\lim\left(\sqrt[3]{n^3+3n^2+1}-n\right)+\lim\left(n-\sqrt{n^2+4n}\right)$$

Đặt: $\begin{cases}L_1=\lim\left(\sqrt[3]{n^3+3n^2+1}-n\right)\\ L_2=\lim\left(n-\sqrt{n^2+4n}\right)\end{cases}$

Với L_1 ta sử dụng nhân lượng liên hiệp bậc ba.

$$L_1=\lim\left(\sqrt[3]{n^3+3n^2+1}-n\right)$$
$$=\lim\frac{\left(\sqrt[3]{n^3+3n^2+1}-n\right)\left(\left(\sqrt[3]{n^3+3n^2+1}\right)^2+n\sqrt[3]{n^3+3n^2+1}+n^2\right)}{\left(\sqrt[3]{n^3+3n^2+1}\right)^2+n\sqrt[3]{n^3+3n^2+1}+n^2}$$
$$=\lim\frac{n^3+3n^2+1-n^3}{\left(\sqrt[3]{n^3+3n^2+1}\right)^2+n\sqrt[3]{n^3+3n^2+1}+n^2}$$
$$=\lim\frac{3n^2+1}{\left(\sqrt[3]{n^3+3n^2+1}\right)^2+n\sqrt[3]{n^3+3n^2+1}+n^2}$$

Với L_1 ta sử dụng nhân lượng liên hiệp bậc hai.

$$L_2 = \lim\left(n - \sqrt{n^2+4n}\right) = \lim\frac{\left(n-\sqrt{n^2+4n}\right)\left(n+\sqrt{n^2+4n}\right)}{n+\sqrt{n^2+4n}}$$

$$= \lim\frac{n^2-n^2-4n}{n+\sqrt{n^2+4n}} = \lim\frac{-4n}{n+\sqrt{n^2+4n}} = -2$$

Vậy: $\lim\left(\sqrt[3]{n^3+3n^2+1} - \sqrt{n^2+4n}\right) = L_1 + L_2 = 1 + (-2) = -1$

<u>Bài tập mẫu 2:</u> Tính các giới hạn sau:

a) $\lim(\sqrt{n^2+3n+2} - n + 1)$

b) $\lim\frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n+3}}$

c) $\lim(\sqrt{n^2+3n-1} - \sqrt{n+1})$

d) $\lim\left(\frac{\sqrt{4n^2+n+4}-\sqrt{n}}{2n+1}\right)$

Hướng dẫn giải

a) Ta có biến đổi:

$$\lim\left(\sqrt{n^2+3n+2} - n + 1\right) = \lim\frac{\left(\sqrt{n^2+3n+2}-(n-1)\right)\left(\sqrt{n^2+3n+2}+(n-1)\right)}{\sqrt{n^2+3n+2}+n-1}$$

$$= \lim\frac{\left(\sqrt{n^2+3n+2}\right)^2-(n-1)^2}{\sqrt{n^2+3n+2}+n-1} = \lim\frac{n^2+3n+2-n^2+2n-1}{\sqrt{n^2+3n+2}+n-1}$$

$$= \lim\frac{5n+1}{\sqrt{n^2+3n+2}+n-1} = \frac{5}{2}$$

b)Ta có biến đổi:

$$\lim\frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n+3}} = \lim\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+3}}{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n+3}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n+3}\right)}$$

$$= \lim\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+3}}{n+1-n-3} = \lim\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+3}}{-2} = -\infty$$

c) Ta có biến đổi:

$$\lim\left(\sqrt{n^2+3n-1}-\sqrt{n+1}\right)=\lim\frac{\left(\sqrt{n^2+3n-1}-\sqrt{n+1}\right)\left(\sqrt{n^2+3n-1}+\sqrt{n+1}\right)}{\sqrt{n^2+3n-1}+\sqrt{n+1}}$$

$$=\lim\frac{n^2+3n-1-n-1}{\sqrt{n^2+3n-1}+\sqrt{n+1}}=\lim\frac{n^2+3n-2}{\sqrt{n^2+3n-1}+\sqrt{n+1}}=+\infty$$

d) Ta có biến đổi:

$$\lim\left(\frac{\sqrt{4n^2+n+4}-\sqrt{n}}{2n+1}\right)=\lim\frac{\left(\sqrt{4n^2+n+4}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{4n^2+n+4}+\sqrt{n}\right)}{(2n+1)\left(\sqrt{4n^2+n+4}+\sqrt{n}\right)}$$

$$=\lim\frac{4n^2+n+4-n}{(2n+1)\left(\sqrt{4n^2+n+4}+\sqrt{n}\right)}=\lim\frac{4n^2+4}{(2n+1)\left(\sqrt{4n^2+n+4}+\sqrt{n}\right)}=1$$

Bài tập trắc nghiệm tự luyện

<u>Bài tập 1</u>: Giới hạn $\lim\frac{\sqrt{n^2+3n+1}-n}{n+1}$ bằng:

a. -1 b. $\frac{1}{2}$ c. $+\infty$ d. 0

Đáp án: D

Ta có biến đổi:

$$\lim\frac{\sqrt{n^2+3n+1}-n}{n+1}=\lim\frac{\left(\sqrt{n^2+3n+1}-n\right)\left(\sqrt{n^2+3n+1}+n\right)}{(n+1)\left(\sqrt{n^2+3n+1}+n\right)}$$

$$=\lim\frac{n^2+3n+1-n^2}{(n+1)\left(\sqrt{n^2+3n+1}+n\right)}=\lim\frac{3n+1}{(n+1)\left(\sqrt{n^2+3n+1}+n\right)}=0$$

Vì bậc của tử là bậc nhất và bậc lớn nhất của mẫu là bậc hai. Nên giới hạn này bằng 0.

<u>Bài tập 2</u>: Giới hạn $\lim\frac{\sqrt{3n^2+2n}-n}{3n-2}$ bằng:

a. $\frac{2}{3\left(\sqrt{3}+2\right)}$ b. $\frac{2}{3\left(\sqrt{3}+1\right)}$ c. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ d. $\frac{1}{2}$

Đáp án: B

Ta có biến đổi:

$$\lim\frac{\sqrt{3n^2+2n}-n}{3n-2}=\lim\frac{\left(\sqrt{3n^2+2n}-n\right)\left(\sqrt{3n^2+2n}+n\right)}{(3n-2)\left(\sqrt{3n^2+2n}+n\right)}$$

$$=\lim\frac{2n^2+2n}{(3n-2)\left(\sqrt{3n^2+2n}+n\right)}=\frac{2}{3\left(\sqrt{3}+1\right)}$$

<u>Bài tập 3:</u> Giới hạn $\lim(\sqrt{2n^2+1}-\sqrt{2n^2-1})$ bằng:

a. -1 b. 4 c. $+\infty$ d. 0

Đáp án: D

Ta có biến đổi:

$$\lim\left(\sqrt{2n^2+1}-\sqrt{2n^2-1}\right)=\lim\frac{\left(\sqrt{2n^2+1}-\sqrt{2n^2-1}\right)\left(\sqrt{2n^2+1}+\sqrt{2n^2-1}\right)}{\sqrt{2n^2+1}+\sqrt{2n^2-1}}$$

$$=\lim\frac{2n^2+1-2n^2+1}{\sqrt{2n^2+1}+\sqrt{2n^2-1}}=\lim\frac{2}{\sqrt{2n^2+1}+\sqrt{2n^2-1}}=0$$

Bậc lớn nhất của tử là bậc 0 và bậc lớn nhất của mẫu là bậc nhất. Do đó, giới hạn này bằng 0.

<u>Bài tập 4:</u> Giới hạn $\lim(\sqrt{3n+2}-\sqrt{3n-2})$ bằng:

a. 9 b. $-\infty$ c. 0 d. 6

Đáp án: C

Ta có biến đổi:

$$\lim\left(\sqrt{3n+2}-\sqrt{3n-2}\right)=\lim\frac{\left(\sqrt{3n+2}-\sqrt{3n-2}\right)\left(\sqrt{3n+2}+\sqrt{3n-2}\right)}{\sqrt{3n+2}+\sqrt{3n-2}}$$

$$=\lim\frac{3n+2-3n+2}{\sqrt{3n+2}+\sqrt{3n-2}}=\lim\frac{4}{\sqrt{3n+2}+\sqrt{3n-2}}=0$$

Bài tập 5: Giới hạn $\lim n(\sqrt{n+3}-\sqrt{n+2})$ bằng:

a. $+\infty$ b. 5 c. $\frac{3}{2}$ d. 0

Đáp án: A

Ta có biến đổi:

$$\lim n\left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n+2}\right)=\lim \frac{n\left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n+2}\right)\left(\sqrt{n+3}+\sqrt{n+2}\right)}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n+2}}$$
$$=\lim \frac{n\left(n+3-n-2\right)}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n+2}}=\lim \frac{n}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n+2}}=+\infty$$

Bài tập 6: Giới hạn $\lim \frac{n\sqrt{2n+1}-\sqrt{n^3+n^2+1}}{\sqrt{4n^3+3n}}$ bằng:

a. $+\infty$ b. 0 c. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ d. $\frac{1}{2\left(\sqrt{2}+1\right)}$

Đáp án: D

Ta có biến đổi:

$$\lim \frac{n\sqrt{2n+1}-\sqrt{n^3+n^2+1}}{\sqrt{4n^3+3n}}=\lim \frac{\sqrt{2n^3+n^2}-\sqrt{n^3+n^2+1}}{\sqrt{4n^3+3n}}$$
$$=\lim \frac{\left(\sqrt{2n^3+n^2}-\sqrt{n^3+n^2+1}\right)\left(\sqrt{2n^3+n^2}+\sqrt{n^3+n^2+1}\right)}{\sqrt{4n^3+3n}\left(\sqrt{2n^3+n^2}+\sqrt{n^3+n^2+1}\right)}$$
$$=\lim \frac{2n^3+n^2-n^3-n^2-1}{\sqrt{4n^3+3n}\left(\sqrt{2n^3+n^2}+\sqrt{n^3+n^2+1}\right)}=\lim \frac{n^3-1}{\sqrt{4n^3+3n}\left(\sqrt{2n^3+n^2}+\sqrt{n^3+n^2+1}\right)}$$

Bậc cao nhất của tử là bậc ba có hệ số bằng 1 và bậc cao nhất của mẫu sau khi nhân phân phối ta được bậc ba hệ số bằng $2\left(\sqrt{2}+1\right)$. Nên giới hạn này có giới hạn bằng $\frac{1}{2\left(\sqrt{2}+1\right)}$

Bài tập 7: Giới hạn $\lim\frac{\sqrt[3]{n^3-2n+4}-n}{n+1}$ bằng:

a. 0 b. 1 c. 2 d. $+\infty$

Đáp án: A

Ta có biến đổi:

$$\lim\frac{\sqrt[3]{n^3-2n+4}-n}{n+1}=\lim\frac{\left(\sqrt[3]{n^3-2n+4}-n\right)\left(\left(\sqrt[3]{n^3-2n+4}\right)^2+n\sqrt[3]{n^3-2n+4}+n^2\right)}{(n+1)\left(\left(\sqrt[3]{n^3-2n+4}\right)^2+n\sqrt[3]{n^3-2n+4}+n^2\right)}$$

$$=\lim\frac{n^3-2n+4-n^3}{(n+1)\left(\left(\sqrt[3]{n^3-2n+4}\right)^2+n\sqrt[3]{n^3-2n+4}+n^2\right)}$$

$$=\lim\frac{-2n+4}{(n+1)\left(\left(\sqrt[3]{n^3-2n+4}\right)^2+n\sqrt[3]{n^3-2n+4}+n^2\right)}=0$$

Dạng 3: Dãy số chứa lũy thừa – Mũ

Phương pháp: Tương tự như dãy hữu tỉ, ta tiến hành chia tử và mẫu cho mũ với cơ số lớn nhất

Một số công thức lưu ý:

+ $\frac{a^n}{b^n}=\left(\frac{a}{b}\right)^n$ + $\frac{1}{a^n}=a^{-n}$ + $\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$ + $1^n=1$

Giới hạn của lũy thừa: $\lim a^n=0$ với $0<a<1$.

Bài tập mẫu 1: Tính các giới hạn sau:

a. $\lim\frac{2^n+5^n}{2.3^n+3.5^n}$

b. $\lim\frac{3^{n+1}-2^{n+1}}{5.3^n-4.2^{n-1}}$

c. $\lim\frac{3^{n+1}+2^{n+1}+5^n}{5.5^n+3.2^n-3^{n+1}}$

d. $\lim\frac{10^n+1}{2^n+5^n}$

e. $\lim\frac{\sqrt{9^n+1}}{3^n-1}$

Hướng dẫn giải

a. Ta có biến đổi: Chia tử và mẫu cho 5^n ta được

$$\lim\frac{\frac{2^n}{5^n}+\frac{5^n}{5^n}}{2.\frac{3^n}{5^n}+3.\frac{5^n}{5^n}}=\lim\frac{\left(\frac{2}{5}\right)^n+1}{2.\left(\frac{3}{5}\right)^n+3}=\frac{1}{3}$$

Vì $\begin{cases}0<\frac{2}{5}<1\\0<\frac{3}{5}<1\end{cases}$ nên ta có $\begin{cases}\lim\left(\frac{2}{5}\right)^n=0\\\lim\left(\frac{3}{5}\right)^n=0\end{cases}$

b. Ta có biến đổi:

$$\lim\frac{3^{n+1}-2^{n+1}}{5.3^n-4.2^{n-1}}=\lim\frac{3^n.3-2^n.2}{5.3^n-4.\frac{2^n}{2}}=\lim\frac{3.3^n-2.2^n}{5.3^n-2.2^n}$$

Ta có biến đổi: Chia tử và mẫu cho 3^n ta được

$$\lim\frac{3.\frac{3^n}{3^n}-2.\frac{2^n}{3^n}}{5.\frac{3^n}{3^n}-2.\frac{2^n}{3^n}}=\lim\frac{3-2.\left(\frac{2}{3}\right)^n}{5-2.\left(\frac{2}{3}\right)^n}=\frac{3}{5}$$

Vì $0<\frac{2}{3}<1$ nên $\lim\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$

c. Ta có biến đổi:

$$\lim\frac{3^{n+1}+2^{n+1}+5^n}{5.5^n+3.2^n-3^{n+1}}=\lim\frac{3^n.3+2^n.2+5^n}{5.5^n+3.2^n-3^n.3}=\lim\frac{3.3^n+2.2^n+5^n}{5.5^n+3.2^n-3.3^n}$$

Chia tử và mẫu cho 5^n ta được:

$$\lim\frac{3.\frac{3^n}{5^n}+2.\frac{2^n}{5^n}+\frac{5^n}{5^n}}{5.\frac{5^n}{5^n}+3.\frac{2^n}{5^n}-\frac{3^n}{5^n}.3}=\lim\frac{3.\left(\frac{3}{5}\right)^n+2.\left(\frac{2}{5}\right)^n+1}{5+3.\left(\frac{2}{5}\right)^n-3.\left(\frac{3}{5}\right)^n}=\frac{1}{5}$$

Vì $\begin{cases}0<\frac{2}{5}<1\\0<\frac{3}{5}<1\end{cases}$ nên ta có $\begin{cases}\lim\left(\frac{2}{5}\right)^n=0\\\lim\left(\frac{3}{5}\right)^n=0\end{cases}$

d. Ta có biến đổi: chia tử và mẫu cho 10^n ta được

$$\lim\frac{10^n+1}{2^n+5^n}=\lim\frac{\frac{10^n}{10^n}+\frac{1}{10^n}}{\frac{2^n}{10^n}+\frac{5^n}{10^n}}=\lim\frac{1+\left(\frac{1}{10}\right)^n}{\left(\frac{1}{5}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^n}=+\infty$$

Vì $\begin{cases}0<\frac{1}{10}<1\\0<\frac{1}{5}<1\\0<\frac{1}{2}<1\end{cases}$ nên ta có $\begin{cases}\lim\left(\frac{1}{10}\right)^n=0\\\lim\left(\frac{1}{5}\right)^n=0\\\lim\left(\frac{1}{2}\right)^n=0\end{cases}$

e. Chia tử và mẫu cho 3^n ta được:

$$\lim\frac{\sqrt{9^n+1}}{3^n-1}=\lim\frac{\sqrt{\frac{9^n}{9^n}+\frac{1}{9^n}}}{\frac{3^n}{3^n}-\frac{1}{3^n}}=\lim\frac{\sqrt{1+\left(\frac{1}{9}\right)^n}}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}=1$$

Vì $\begin{cases}0<\frac{1}{9}<1\\0<\frac{1}{3}<1\end{cases}$ nên ta có $\begin{cases}\lim\left(\frac{1}{9}\right)^n=0\\\lim\left(\frac{1}{3}\right)^n=0\end{cases}$

Lưu ý: Khi chia cho 3^n vào trong căn bậc hai nghĩa là chia cho 9^n

Trích dẫn: Cũng tương tự giới hạn của dãy số hữu tỉ. Ta cũng hoàn toàn có thể tự nhẩm được kết quả của giới hạn dãy số dạng này. Bằng cách quan sát hệ số của những số mũ với cơ số lớn nhất ở tử và mẫu. Từ đó ta hoàn toàn có thể tính nhanh để thực hiện những bài toán giới hạn dưới dạng trắc nghiệm.

Bài tập trắc nghiệm tự luyện

<u>Bài tập 1:</u> Giới hạn $\lim\frac{1+3^n}{4+3^n}$ bằng:

a. $\frac{1}{4}$ b. $+\infty$ c. 1 d. $\frac{3}{4}$

Đáp án: C

Vì hệ số của sơ số cao nhất của tử là 1 và hệ số của cơ số cao nhất ở mẫu là 1 nên giới hạn đó bằng 1.

<u>Bài tập 2</u>: Giới hạn $\lim\frac{4.3^n+7^{n+1}}{2.5^n+7^n}$ bằng:

a. 1 b. 7 c. $\frac{3}{5}$ d. $\frac{7}{5}$

Đáp án: B

Thật vậy trước khi nhận xét ta có biến đối

$$\lim\frac{4.3^n+7^{n+1}}{2.5^n+7^n}=\lim\frac{4.3^n+7^n.7}{2.5^n+7^n}$$

Vì hệ số của sơ số cao nhất của tử là 7 và hệ số của cơ số cao nhất ở mẫu là 1 nên giới hạn đó bằng 7.

Bài tập 3: Giới hạn $\lim\frac{4^{n+1}+6^{n+2}}{5^n+8^n}$ bằng:

a. 0 b. $\frac{6}{8}$ c. $-\infty$ d. $\frac{4}{5}$

Đáp án: A

Thật vậy trước khi nhận xét ta có biến đổi

$$\lim\frac{4^{n+1}+6^{n+2}}{5^n+8^n}=\lim\frac{4^n.4+6^n.6^2}{5^n+8^n}=\lim\frac{4.4^n+36.6q^n}{5^n+8^n}$$

Nhận xét: Cơ số cao nhất của tử là 6 và cơ số cao nhất của mẫu là 8. Nên giới hạn đó bằng 0.

Bài tập 4: Giới hạn $\lim\frac{2^n+5^{n+1}}{1+5^n}$ bằng:

a. 2 b. $\frac{1}{5}$ c. $\frac{2}{5}$ d. 5

Đáp án: D

Ta có biến đổi: $\lim\frac{2^n+5^{n+1}}{1+5^n}=\lim\frac{2^n+5.5^n}{1+5^n}$

Vì hệ số của sơ số cao nhất của tử là 5 và hệ số của cơ số cao nhất ở mẫu là 1 nên giới hạn đó bằng 5.

Bài tập 5: Giới hạn $\lim\frac{1+2.3^n-7^n}{5^n+2.7^n}$ bằng:

a. 2 b. $\frac{1}{5}$ c. $-\frac{1}{2}$ d. 0

Đáp án: C

Vì hệ số của sơ số cao nhất của tử là -1 và hệ số của cơ số cao nhất ở mẫu là 2 nên giới hạn đó bằng $-\frac{1}{2}$.

Bài tập 6: Giới hạn $\lim\frac{1-2.3^n+6^n}{2^n(3^{n+1}-5)}$ bằng:

a. $+\infty$ b. $\frac{1}{2}$ c. 1 d. $\frac{1}{3}$

Đáp án: D

Ta có biến đổi:

$$\lim\frac{1-2.3^n+6^n}{2^n(3^{n+1}-5)}=\lim\frac{1-2.3^n+6^n}{2^n(3.3^n-5)}=\lim\frac{1-2.3^n+6^n}{3.6^n-5.2^n}$$

Vì hệ số của sơ số cao nhất của tử là 1 và hệ số của cơ số cao nhất ở mẫu là 3 nên giới hạn đó bằng $\frac{1}{3}$.

Dạng 2: Tìm giới hạn bằng chứng minh hoặc theo định nghĩa

Phương pháp 1: Dùng định lí kẹp

Phát biểu: Cho 3 dãy số $(u_n),(v_n),(w_n)$. Nếu $u_n<v_n<w_n,\forall n$ và $\lim u_n=\lim w_n=L\Rightarrow\lim v_n=L$

Một số kiến thức cũ:

+ $-1\le\sin u\le1$

+ $-1\le\cos u\le1$

Bài tập mẫu 1: Tính các giới hạn $\lim\frac{\sin(3n)}{n}$

Hướng dẫn giải

Ta có nhận xét:

$$-1 \le \sin(3n) \le 1$$

$$-\frac{1}{n} \le \frac{\sin(3n)}{n} \le \frac{1}{n}$$

Ta có: $\begin{cases} \lim\left(-\frac{1}{n}\right) = 0 \\ \lim\frac{1}{n} = 0 \end{cases}$ nên $\lim\frac{\sin(3n)}{n} = 0$

Bài tập mẫu 2: Chứng minh rằng: $\lim\left(-2 + \frac{\cos 3n}{n^2}\right) = -2$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\lim\left(-2 + \frac{\cos 3n}{n^2}\right) = \lim(-2) + \lim\left(\frac{\cos 3n}{n^2}\right) = -2 + \lim\left(\frac{\cos 3n}{n^2}\right)$

Thực hiện tương tự bài tập mẫu 1 ta được:

$$-1 \le \cos(3n) \le 1$$

$$-\frac{1}{n^2} \le \frac{\cos(3n)}{n^2} \le \frac{1}{n^2}$$

Ta có: $\begin{cases} \lim\left(-\frac{1}{n^2}\right) = 0 \\ \lim\frac{1}{n^2} = 0 \end{cases}$ nên $\lim\frac{\cos(3n)}{n} = 0$

Do đó: $\lim\left(-2 + \frac{\cos 3n}{n^2}\right) = -2$

Bài tập mẫu 3: Chứng minh rằng: $\lim\left(\frac{(-1)^n}{n+1} + 1\right) = 1$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\lim\left(\frac{(-1)^n}{n+1} + 1\right) = \lim\frac{(-1)^n}{n+1} + \lim 1 = \lim\frac{(-1)^n}{n+1} + 1$

Ta có nhận xét :

$$-1 \le (-1)^n \le 1$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{n+1} \le \frac{(-1)^n}{n+1} \le \frac{1}{n+1}$$

Mà: $\begin{cases} \lim\left(-\frac{1}{n+1}\right) = 0 \\ \lim\left(\frac{1}{n+1}\right) = 0 \end{cases}$ nên $\lim \frac{(-1)^n}{n+1} = 0$

Do đó: $\lim\left(\frac{(-1)^n}{n+1} + 1\right) = 1$

Bài tập trắc nghiệm tương tự

Bài tập 1: Giới hạn $\lim \frac{n + \sin 3n}{2n+1}$ bằng :

a. $\frac{1}{2}$ b. $\frac{3}{2}$ c. 0 d. $+\infty$

Đáp án: A

Ta có biến đổi:

$$\lim \frac{n+\sin 3n}{2n+1} = \lim \frac{n}{2n+1} + \lim \frac{\sin 3n}{2n+1}$$

Mà khi n dần ra $+\infty$ thì ta có : $\begin{cases} \lim \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} \\ \lim \frac{\sin 3n}{2n+1} = 0 \end{cases}$

Nên: $\lim \frac{n+\sin 3n}{2n+1} = \frac{1}{2}$

Bài tập 2: Giới hạn $u_n = \frac{\sin n\sqrt{3}}{n}$ bằng

a. $+\infty$ b. 1 c. $\sqrt{3}$ d. 0

Đáp án: D

Thực hiện tương tự như những bài tập trên áp dụng định lí kẹp

Bài tập 3: Giới hạn $u_n = \dfrac{2n+\cos n}{3n+2}$ bằng :

a. $\dfrac{2}{3}$ b. $\dfrac{1}{3}$ c. 0 d. $+\infty$

Đáp án: A

Thực hiện tương tự như những bài tập trên áp dụng định lí kẹp

Bài tập 4: Giới hạn $\lim \dfrac{(-1)^{n+1}-2n^2}{5n^2+\cos n}$ bằng :

a. $+\infty$ b. $\dfrac{2}{5}$ c. $-\dfrac{2}{5}$ d. $-\dfrac{1}{5}$

Đáp án: C

Thực hiện tương tự như những bài tập trên áp dụng định lí kẹp

Bài tập 5: Giới hạn $u_n = \dfrac{2n^2+(-1)^{n+1}}{\cos n+3n^2}$ bằng

a. $\dfrac{2}{3}$ b. $\dfrac{3}{2}$ c. $-\dfrac{2}{3}$ d. 1

Đáp án: A

Thực hiện tương tự như những bài tập trên áp dụng định lí kẹp

Bài tập 6: Giới hạn $u_n = \dfrac{\sin n+\cos n}{n\sin 2n}$ bằng

a. 2 b. $\sqrt{2}$ c. 0 d. $\dfrac{\pi}{4}$

Đáp án: C

Thực hiện tương tự như những bài tập trên áp dụng định lí kẹp