

Mục lục

1	Hình học không gian (cổ điển)	1
I.	Một số vấn đề cơ bản về quan hệ song song	1
1.	Việc xác định giao tuyến của hai mặt phẳng	1
2.	Việc xác định giao điểm của đường thẳng và mặt phẳng	1
3.	Một số định lý về nhận dạng quan hệ song song	2
II.	Một số vấn đề cơ bản về quan hệ vuông góc	2
1.	Phương pháp chứng minh đường thẳng vuông góc với mặt phẳng	2
2.	Phương pháp chứng minh hai đường thẳng vuông góc	2
3.	Phương pháp chứng minh hai mặt phẳng vuông góc	2
III.	Phương pháp xác định các loại góc trong không gian	3
1.	Góc giữa hai đường thẳng	3
2.	Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng (<i>cắt nhau nhưng không vuông góc</i>)	3
3.	Góc giữa hai mặt phẳng (<i>cắt nhau</i>)	3
IV.	Phương pháp xác định khoảng cách	4
1.	Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng	4
2.	Khoảng cách giữa 2 đối tượng song song nhau	4
3.	Khoảng cách giữa 2 đường thẳng a và b chéo nhau	4
V.	Một số vấn đề về khối đa diện lồi, khối đa diện đều	5
1.	Tính chất của một hình đa diện, khối đa diện	5
2.	Bảng tổng hợp tính chất của các đa diện đều	5
VI.	Một số công thức tính toán hình học	6
1.	Công thức tính toán hình học liên quan đến tam giác	6
2.	Công thức tính toán hình học liên quan đến tứ giác	7
3.	Công thức thể tích khối chóp và khối lăng trụ	8
4.	Công thức tính toán với các khối nón - trụ - cầu	8
5.	Phương pháp dựng tâm I của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp	9
VII.	Một số khối đa diện thường gặp trong các đề thi	10
1.	Hình chóp tam giác đều	10
2.	Hình tam diện vuông $O.ABC$ (vuông tại O)	10
3.	Hình chóp $S.ABC$ có đường cao SA, AB vuông góc với BC	10
4.	Hình chóp $S.ABC$ có cạnh bên SA “thẳng đứng”, mặt đáy là tam giác “thường”	11
5.	Hình chóp $S.ABC$ có 1 mặt bên b “cân tại S ” và “đứng đứng”	11
6.	Hình chóp tứ giác đều	11
7.	Hình chóp $S.ABCD$ có cạnh bên SA “thẳng đứng”, mặt đáy là “hình chữ nhật”	12
8.	Hình chóp $S.ABCD$ có 1 mặt bên “cân tại S ” và “đứng đứng”	12
9.	Hình hộp chữ nhật	13

★ Công thức tính nhanh một số khối tứ diện đặc biệt 13

★ Một số công thức biệt liên quan khối tròn xoay 14

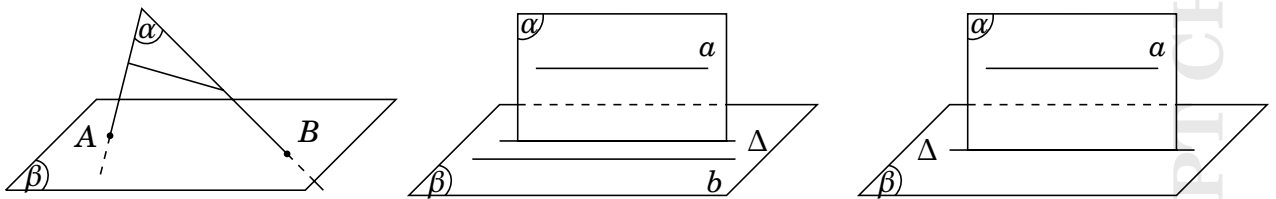
VIII. Ví dụ giải toán điển hình 15

Chương 1

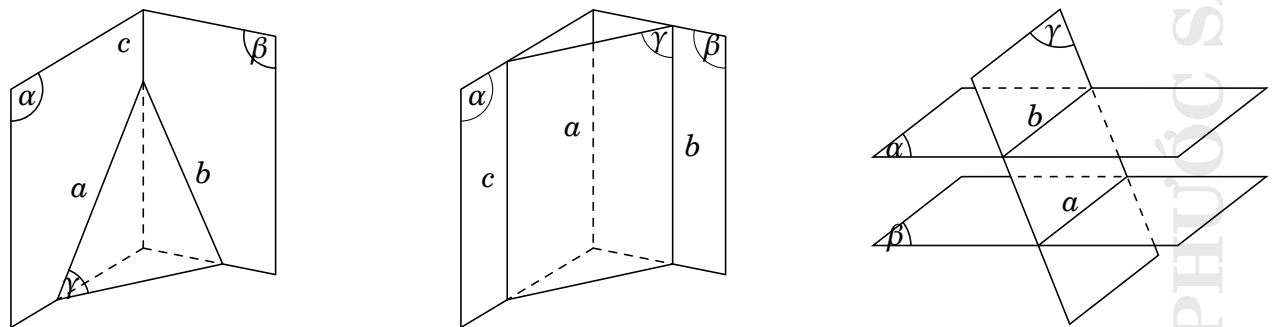
Hình học không gian (cổ điển)

I. Một số vấn đề cơ bản về quan hệ song song

1. Việc xác định giao tuyến của hai mặt phẳng



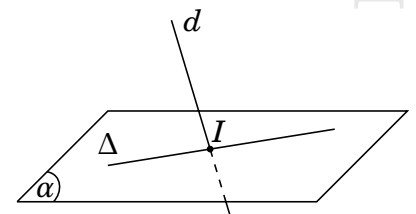
- ✓ Nếu 2 mặt phẳng phân biệt (α) và (β) có 2 điểm chung phân biệt A và B thì đường thẳng AB là giao tuyến của chúng.
- ✓ Hai mặt phẳng phân biệt lần lượt qua 2 đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng song song với cả hai đường thẳng đó hoặc trùng với 1 trong 2 đường thẳng đó.
- ✓ Hai mặt phẳng phân biệt nếu thỏa mãn tính chất “mặt phẳng này chứa đường thẳng a , còn mặt phẳng kia song song với a ” thì giao tuyến của chúng song song với a .



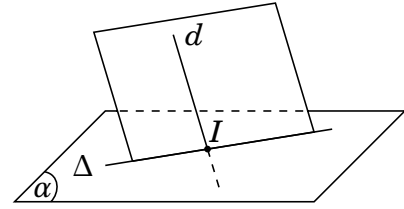
- ✓ Ba mặt phẳng đôi một cắt nhau tạo thành 3 giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến ấy hoặc đồng quy hoặc đôi một song song với nhau.
- ✓ Cho hai mặt phẳng song song với nhau. Nếu có mặt phẳng thứ ba cắt mặt phẳng thứ nhất thì mặt phẳng thứ ba đó cắt luôn mặt phẳng thứ hai, đồng thời hai đường giao tuyến tạo thành song song với nhau.

2. Việc xác định giao điểm của đường thẳng và mặt phẳng

- ✓ PP cơ bản: muốn tìm giao điểm của đường thẳng d với mặt phẳng (α) ta tìm giao điểm của đường thẳng d đó với 1 đường thẳng Δ (hợp lý) trong mặt phẳng (α) .
- ✓ Nếu chưa tìm được đường thẳng Δ trong (α) như trong PP cơ bản đã nêu, ta thực hiện 3 bước giải như sau:



- ⊕ Bước 1: chọn mặt phẳng phụ (β) chứa đường thẳng d .
- ⊕ Bước 2: tìm giao tuyến Δ của (β) và $mp(\alpha)$ đã cho.
- ⊕ Bước 3: tìm giao điểm I của Δ và đường thẳng d .

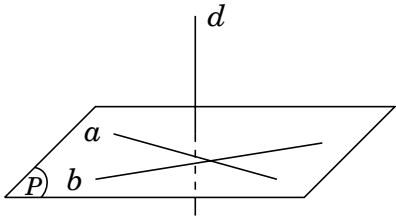


3. Một số định lý về nhận dạng quan hệ song song

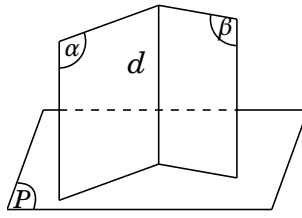
- ✓ Muốn chứng minh một đường thẳng song song với một mặt phẳng ta chứng minh đường thẳng đó nằm ngoài mặt phẳng đồng thời song song với 1 đường thẳng nào đó nằm trong mặt phẳng.
- ✓ Muốn chứng minh hai mặt phẳng song song với nhau ta chứng minh mặt phẳng này chứa 2 đường thẳng cắt nhau cùng song song với mặt phẳng kia.

II. Một số vấn đề cơ bản về quan hệ vuông góc

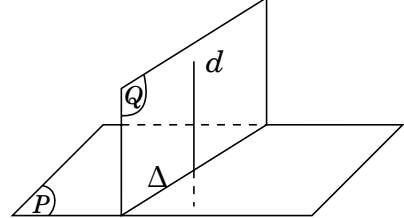
1. Phương pháp chứng minh đường thẳng vuông góc với mặt phẳng



$$\begin{cases} d \perp a \subset (P) \\ d \perp b \subset (P) \\ a \cap b = I \end{cases} \Rightarrow d \perp (P)$$



$$\begin{cases} (\alpha) \perp (P) \\ (\beta) \perp (P) \\ d = (\alpha) \cap (\beta) \end{cases} \Rightarrow d \perp (P)$$



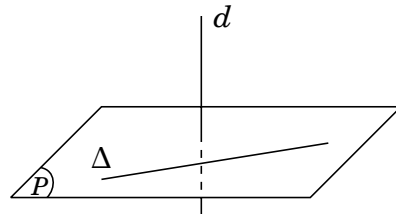
$$\begin{cases} (P) \perp (Q) \\ d \subset (Q) \\ d \perp \Delta = (P) \cap (Q) \end{cases} \Rightarrow d \perp (P)$$

- ✓ Muốn chứng minh một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng ta chứng minh đường thẳng đó vuông góc với 2 đường thẳng cắt nhau nằm trong mặt phẳng.
- ✓ Nếu hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì giao tuyến của chúng (nếu có) vuông góc với mặt phẳng thứ ba đó.
- ✓ Xét 2 mặt phẳng vuông góc với nhau: nếu trong mặt phẳng này có 1 đường thẳng vuông góc với giao tuyến của chúng thì đường thẳng đó vuông góc với mặt phẳng kia.

2. Phương pháp chứng minh hai đường thẳng vuông góc

- ✓ Muốn chứng minh hai đường thẳng vuông góc với nhau ta chứng minh đường thẳng này vuông góc với một mặt phẳng chứa đường thẳng kia

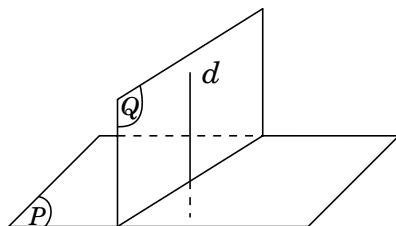
$$\begin{cases} d \perp (P) \\ \Delta \subset (P) \end{cases} \Rightarrow d \perp \Delta$$



3. Phương pháp chứng minh hai mặt phẳng vuông góc

- ✓ Muốn chứng minh hai mặt phẳng vuông góc với nhau ta chứng minh mặt phẳng này chứa đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.

$$\begin{cases} d \perp (P) \\ d \subset (Q) \end{cases} \Rightarrow (P) \perp (Q)$$



III. Phương pháp xác định các loại góc trong không gian

1. Góc giữa hai đường thẳng

- ☑ Góc giữa hai đường thẳng a và b là góc giữa hai đường thẳng a' và b' cắt nhau lần lượt song song hoặc trùng với hai đường thẳng a, b đó.

2. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng (cắt nhau nhưng không vuông góc)

- ☑ Bước 1: Xác định giao điểm I của d và (α)

(góc cần vẽ có đỉnh đặt tại đây)

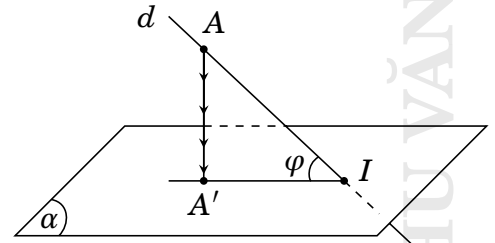
- ☑ Bước 2: Tìm hình chiếu vuông góc d' của d lên (α)

⊕ Trên d , lấy điểm A khác I .

⊕ Tìm hình chiếu A' của A trên (α)

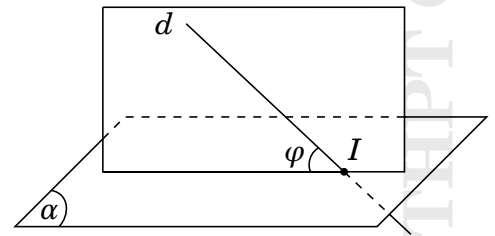
⊕ Kẻ đường thẳng nối I và A' , đó chính là d'

- ☑ Bước 3: Xác định góc $\varphi = (\widehat{d, (\alpha)}) = (\widehat{d, d'})$.



- ★ **Lưu ý:** Nếu đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (β) vuông góc với (α) thì góc hợp bởi d và (α) bằng góc hợp bởi d với giao tuyến của (α) và (β) .

(giao tuyến của (α) và (β) trong trường hợp này chính là hình chiếu vuông góc của d lên (α))



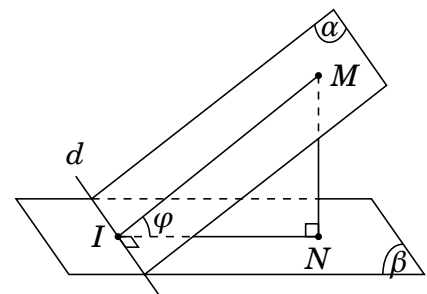
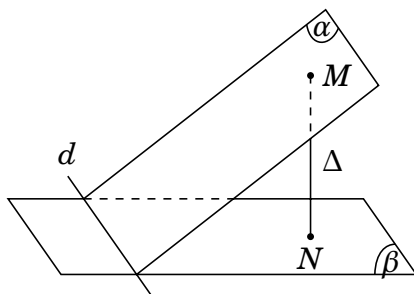
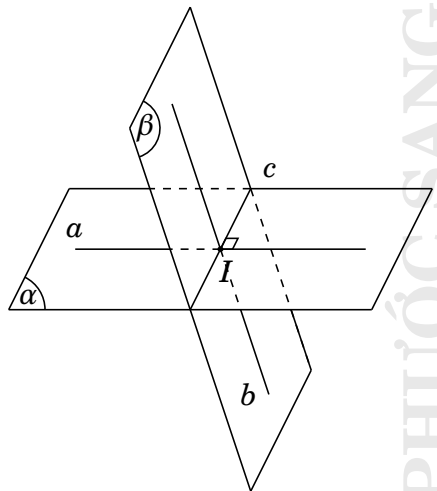
3. Góc giữa hai mặt phẳng (cắt nhau)

- ☑ Bước 1: xác định giao tuyến c của hai mặt phẳng (α) và (β) .

- ☑ Bước 2: tìm 2 đường thẳng a, b cắt nhau, cùng vuông góc với giao tuyến c , lần lượt nằm trong 2 mặt phẳng (α) và (β) .

- ☑ Bước 3: xác định góc giữa 2 mặt phẳng (α) và (β) : góc đó chính là góc $(\widehat{a, b}) \leq 90^\circ$.

- ★ **Lưu ý:** góc giữa 2 mặt phẳng được định nghĩa là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với 2 mặt phẳng đó.



★ **Đặc biệt:**

Nếu có đường thẳng Δ vuông góc với giao tuyến của 2 mặt phẳng (α) và (β) mà đường thẳng Δ đó đi qua 2 điểm $(M \in (\alpha) \text{ và } N \in (\beta))$, để xác định góc giữa 2 mặt phẳng (α) và (β) , từ điểm N ta vẽ $NI \perp d$ tại $I \in d$. Khi đó $((\alpha), (\beta)) = \widehat{MIN}$.

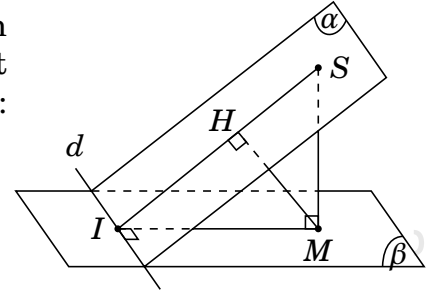
IV. Phương pháp xác định khoảng cách

1. Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

✓ Bài toán cơ bản 1:

Cho M là hình chiếu vuông góc của điểm $S \notin (\beta)$ lên mặt phẳng (β) . Để tính khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng nằm nghiêng (α) (qua S và cắt (β)) ta làm như sau:

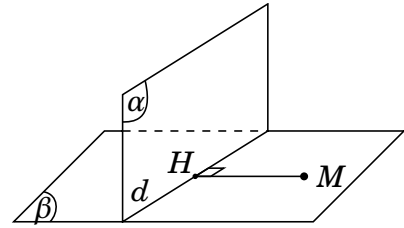
- ⊕ Bước 1: Xác định giao tuyến d của (α) và (β) .
- ⊕ Bước 2: Từ M , vẽ $MI \perp d$ tại $I \in d$.
- ⊕ Bước 3: Vẽ $MH \perp SI$ tại $H \in SI$ thì $d(M, (\alpha)) = MH$.



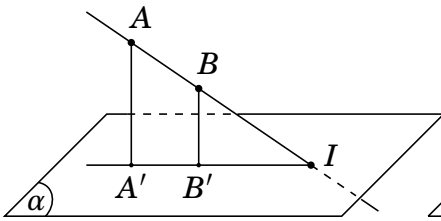
✓ Bài toán cơ bản 2:

Cho hai mặt phẳng (α) và (β) vuông góc với nhau, điểm $M \in (\beta)$. Để tính khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (α) ta làm như sau:

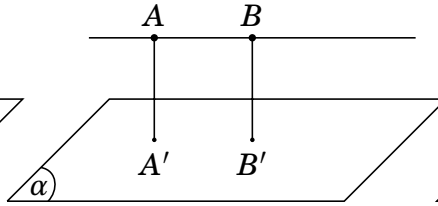
- ⊕ Bước 1: Xác định giao tuyến d của (α) và (β) .
- ⊕ Bước 2: vẽ $MH \perp d$ tại $H \in d$ thì $d(M, (\alpha)) = MH$.



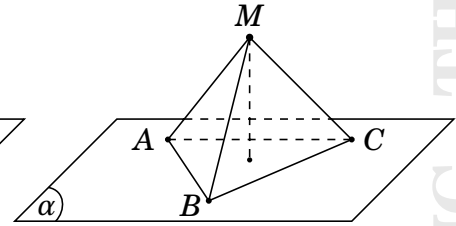
✓ Một số lưu ý:



$$\frac{d(A, (\alpha))}{d(B, (\alpha))} = \frac{AI}{BI}$$



$$d(A, (\alpha)) = d(B, (\alpha))$$

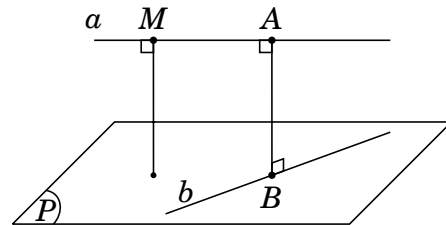
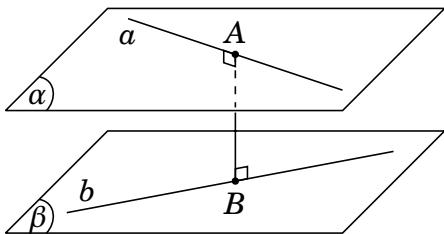


$$d(M, (ABC)) = \frac{3 \cdot V_{MABC}}{S_{\triangle ABC}}$$

2. Khoảng cách giữa 2 đối tượng song song nhau

- ✓ Khoảng cách giữa d và d' (song song nhau) là khoảng cách từ điểm $M \in d$ đến d' .
- ✓ Khoảng cách giữa d và (α) (song song nhau) là khoảng cách từ điểm $M \in d$ đến (α) .
- ✓ Khoảng cách giữa (α) và (β) (song song nhau) là khoảng cách từ điểm $M \in (\alpha)$ đến (β) .

3. Khoảng cách giữa 2 đường thẳng a và b chéo nhau



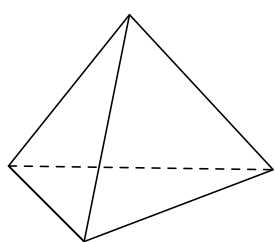
- ✓ Khoảng cách giữa 2 đường thẳng chéo nhau (a và b) bằng độ dài đoạn vuông góc chung của chúng (tức đoạn thẳng AB có $A \in a, B \in b$ và $AB \perp a, AB \perp b$).
- ✓ Khoảng cách giữa 2 đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa đường thẳng này và một mặt phẳng song song với nó đồng thời chứa đường thẳng kia.
- ✓ Khoảng cách giữa 2 đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa 2 mặt phẳng song song với nhau lần lượt chứa 2 đường thẳng đó.

V. Một số vấn đề về khối đa diện lồi, khối đa diện đều

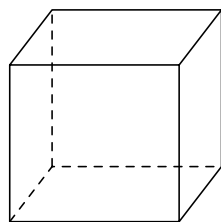
1. Tính chất của một hình đa diện, khối đa diện

- ☑ Hai đa giác phân biệt chỉ có thể: hoặc là không có điểm chung, hoặc chỉ có 1 đỉnh chung, hoặc chỉ có 1 cạnh chung. Mỗi đỉnh là đỉnh chung của ít nhất 3 đa giác.
- ☑ Mỗi cạnh của bất kỳ đa giác nào cũng đều là cạnh chung của đúng 2 đa giác.
- ☑ Bất cứ hình đa diện nào cũng có thể phân chia thành nhiều khối tứ diện.
- ☑ Bất cứ hình đa diện nào cũng có ít nhất 4 đỉnh, ít nhất 4 mặt và ít nhất 6 cạnh.
- ☑ Hình chóp có mặt đáy là n -giác thì có $(n+1)$ đỉnh, $(2n)$ cạnh và $(n+1)$ mặt.
- ☑ Hình lăng trụ có mặt đáy là n -giác thì có $(2n)$ đỉnh, $(3n)$ cạnh và $(n+2)$ mặt.
- ☑ Một hình đa diện có M mặt, mỗi mặt có p cạnh thì có $\frac{Mp}{2}$ cạnh.
- ☑ Với một đa diện lồi bất kỳ có D đỉnh, C cạnh và M mặt thì $M+C-D=2$ (định lý Euler).
- ☑ Khối đa diện là phần không gian giới hạn bởi một hình đa diện, kể cả hình đa diện đó.
- ☑ Khối đa diện lồi là một khối đa diện mà đoạn thẳng nối 2 điểm bất kỳ của khối đa diện đó luôn thuộc vào chính nó.

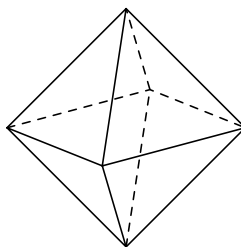
2. Bảng tổng hợp tính chất của các đa diện đều



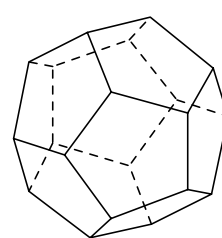
Tứ diện đều



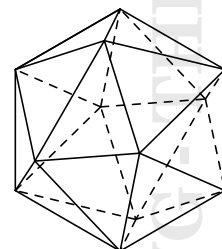
H.lập phương



Bát diện đều

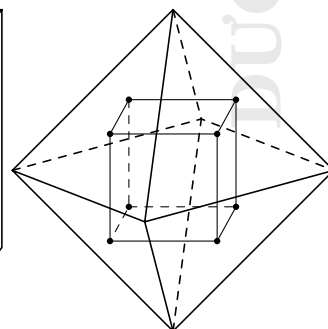
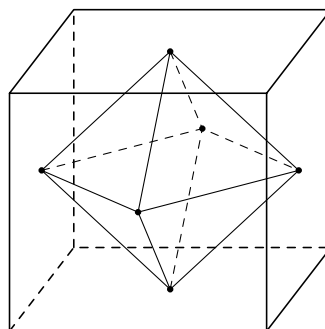
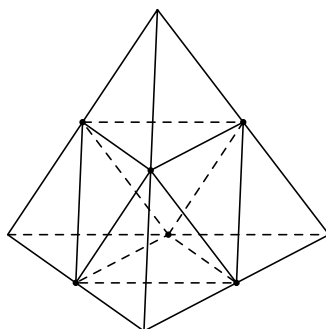
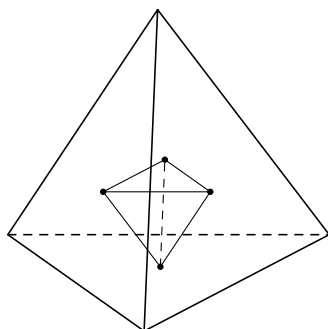


12 mặt đều



20 mặt đều

Tên đa diện	Loại	Số đỉnh	Số cạnh	Số mặt	Số mặt đ.xúng	Số trục đ.xúng	Thể tích	Bán kính mc ng.tiếp
Tứ diện đều	{3;3}	4	6	4	6	3	$V = \frac{\sqrt{2}c^3}{12}$	$R = \frac{\sqrt{6}c}{4}$
H.lập phương	{4;3}	8	12	6	9	9	$V = c^3$	$R = \frac{\sqrt{3}c}{2}$
Bát diện đều	{3;4}	6	12	8	9		$V = \frac{\sqrt{2}c^3}{3}$	$R = \frac{\sqrt{2}c}{2}$
12 mặt đều	{5;3}	20	30	12	15			
20 mặt đều	{3;5}	12	30	20	15			
Ký hiệu $\{p;q\}$ cho biết p là số cạnh của mỗi mặt, q là số mặt đi qua mỗi đỉnh								

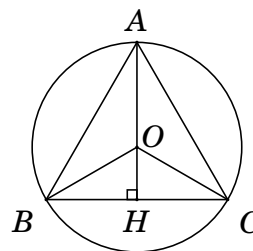


VI. Một số công thức tính toán hình học

1. Công thức tính toán hình học liên quan đến tam giác

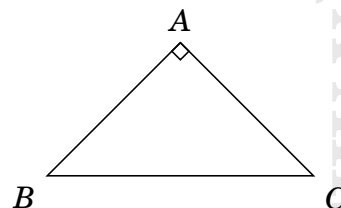
☑ Đối với tam giác đều

- ⊕ Độ dài đường cao: $h = \frac{(\text{cạnh}) \times \sqrt{3}}{2}$
- ⊕ Bán kính đường tròn ngoại tiếp: $R = \frac{(\text{cạnh}) \times \sqrt{3}}{3}$
- ⊕ Bán kính đường tròn nội tiếp: $r = \frac{(\text{cạnh}) \times \sqrt{3}}{6}$



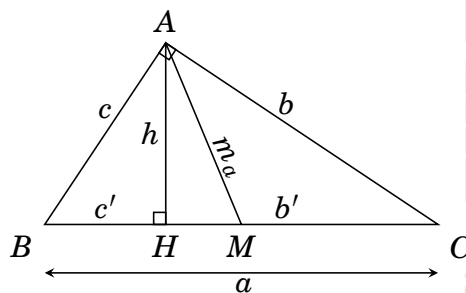
☑ Đối với tam giác vuông cân

- ⊕ Độ dài cạnh huyền: cạnh huyền = (cạnh góc vuông) $\times \sqrt{2}$
- ⊕ Độ dài cạnh góc vuông: cạnh góc vuông = $\frac{\text{cạnh huyền}}{\sqrt{2}}$



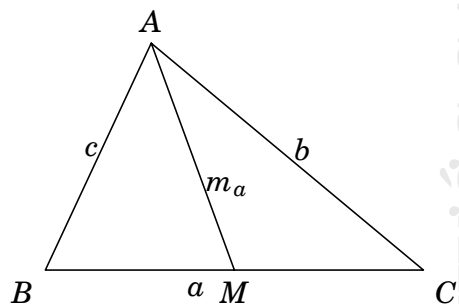
☑ Hệ thức lượng trong tam giác vuông

- ⊕ $a^2 = b^2 + c^2$
- ⊕ $b^2 = b' \cdot a$
- ⊕ $h = \frac{bc}{\sqrt{b^2 + c^2}}$
- ⊕ $h^2 = b' \cdot c'$
- ⊕ $\frac{b'}{a} = \frac{b^2}{a^2}$
- ⊕ $ah = bc$
- ⊕ $c^2 = c' \cdot a$
- ⊕ $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$
- ⊕ $a = 2 \cdot m_a$
- ⊕ $\frac{c'}{a} = \frac{c^2}{a^2}$



☑ Hệ thức lượng trong mọi tam giác

- ⊕ Định lý côsin: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$
- ⊕ Công thức tính góc: $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$
- ⊕ Định lý sin: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$
- ⊕ Định lý trung tuyến: $m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$



☑ Công thức tính diện tích tam giác

- ⊕ Diện tích của tam giác đều: $S_{\Delta \text{đều}} = \frac{(\text{cạnh})^2 \times \sqrt{3}}{4}$
- ⊕ Diện tích tam giác vuông bằng nửa tích của hai cạnh góc vuông.
- ⊕ Diện tích của mọi tam giác (bất kỳ):

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} a \cdot h_a = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{abc}{4R} = pr = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

* h_a : đường cao ứng với cạnh đáy a .

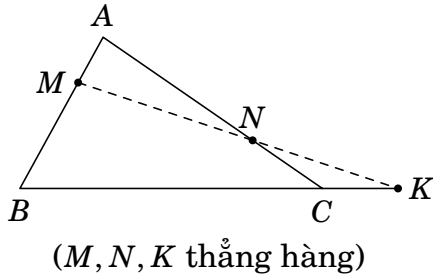
* $p = \frac{a+b+c}{2}$: nửa chu vi

* R : bán kính đường tròn ngoại tiếp

* r : bán kính đường tròn nội tiếp

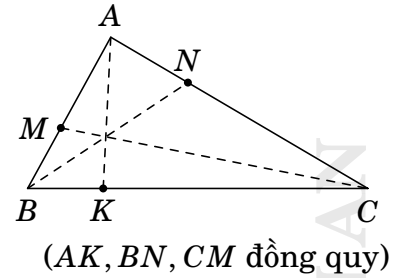
- ⊕ Công thức tỉ số diện tích: $\frac{S_{\Delta AB'C'}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{AB'}{AB} \cdot \frac{AC'}{AC}$, trong đó $B' \in AB, C' \in AC$.

☑ Định lý Menelaus



$$\frac{MA}{MB} \times \frac{KB}{KC} \times \frac{NC}{NA} = 1$$

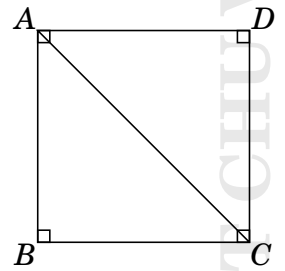
☑ Định lý Ceva



2. Công thức tính toán hình học liên quan đến tứ giác

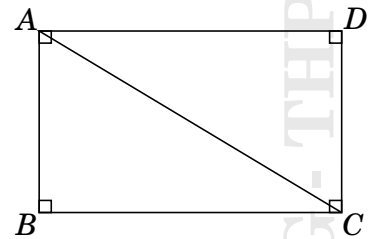
☑ Đối với hình vuông

- ⊕ Độ dài đường chéo: đường chéo = (cạnh) $\times \sqrt{2}$
- ⊕ Độ dài cạnh: cạnh = $\frac{\text{đường chéo}}{\sqrt{2}}$
- ⊕ Diện tích hình vuông: $S_{\text{h.v}} = (\text{cạnh})^2 = \frac{(\text{đường chéo})^2}{2}$



☑ Đối với hình chữ nhật

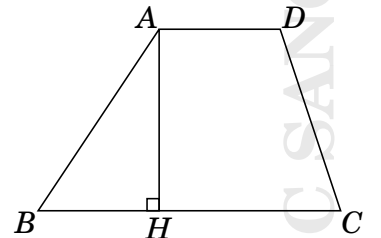
- ⊕ Độ dài đường chéo hình chữ nhật:
đường chéo = $\sqrt{(\text{chiều dài})^2 + (\text{chiều rộng})^2}$
- ⊕ Diện tích: $S_{\text{h.cn}} = (\text{chiều dài}) \times (\text{chiều rộng})$



☑ Đối với hình thang

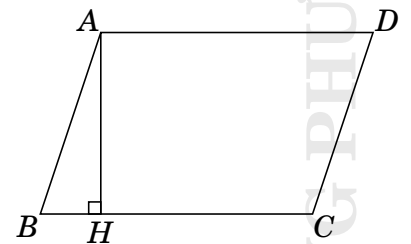
- ⊕ Diện tích hình thang bằng nửa tổng hai đáy nhân với chiều cao:

$$S_{\text{h.thang}} = \frac{(\text{đáy lớn}) + (\text{đáy bé})}{2} \times (\text{đường cao})$$



☑ Đối với hình bình hành

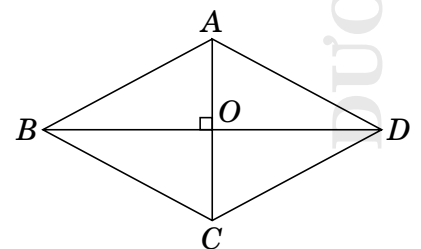
- ⊕ Diện tích h. bình hành bằng cạnh nhân với đường cao
 $S_{\text{h.bình hành}} = (\text{cạnh } BC) \times (\text{đường cao } AH)$
- ⊕ Diện tích hình bình hành bằng tích của 2 cạnh kề nhân với sin của một góc
 $S_{\text{h.bình hành}} = (\text{cạnh } AB) \times (\text{cạnh } BC) \times \sin \widehat{ABC}$



☑ Đối với hình thoi

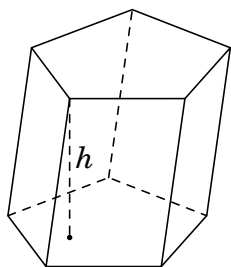
- ⊕ Diện tích hình thoi bằng nửa tích hai đường chéo
 $S_{\text{h.thoi}} = \frac{(\text{đường chéo 1}) \times (\text{đường chéo 2})}{2}$
- ★ Đặc biệt: hình thoi có góc 60° hoặc 120° có diện tích

$$S_{\text{h.thoi (ĐB)}} = \frac{(\text{cạnh})^2 \times \sqrt{3}}{2}$$



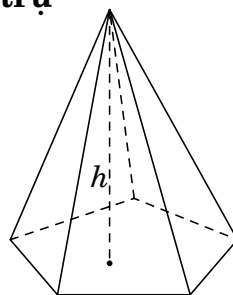
- ☑ Với tứ giác lồi có 2 đường chéo vuông góc: diện tích bằng nửa tích của 2 đường chéo.

3. Công thức thể tích thể tích khối chóp và khối lăng trụ

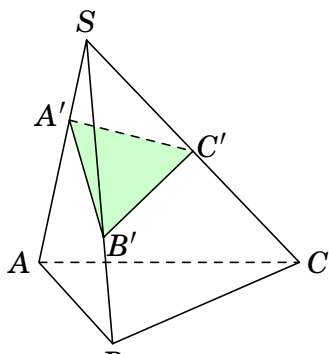


$$V_{\text{lăng trụ}} = S_{\text{mặt đáy}} \times h$$

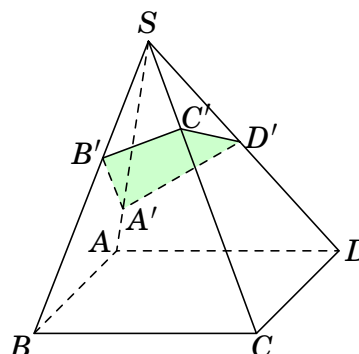
$$V_{\text{khối chóp}} = \frac{1}{3} S_{\text{mặt đáy}} \times h$$



☑ Công thức dùng để tính tỉ số thể tích:



$$\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC}$$



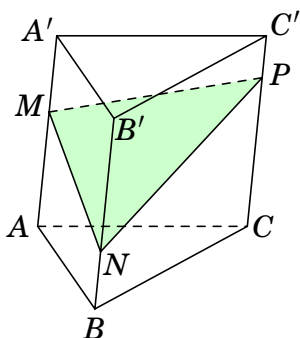
$$\frac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{a+b+c+d}{4abcd}$$

$$a = \frac{SA}{SA'}$$

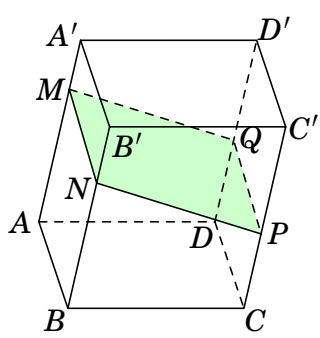
$$b = \frac{SB}{SB'}$$

$$c = \frac{SC}{SC'}$$

$$d = \frac{SD}{SD'}$$



$$\frac{V_{MNP.A'B'C'}}{V_{A'B'C'D'}} = \frac{1}{3} \left(\frac{A'M}{AA'} + \frac{B'N}{BB'} + \frac{C'P}{CC'} \right)$$



$$\frac{V_{MNPQ.A'B'C'D'}}{V_{A'B'C'D'}} = \frac{1}{2} \left(\frac{A'M}{AA'} + \frac{C'P}{CC'} \right)$$

4. Công thức tính toán với các khối nón - trụ - cầu

☑ Đối với hình nón - hình nón cụt

⊕ Diện tích mặt đáy: $S_{\text{đáy}} = \pi r^2$

⊕ Diện tích xung quanh: $S_{\text{xq}} = \pi r l$

⊕ Diện tích toàn phần: $S_{\text{tp}} = S_{\text{đáy}} + S_{\text{xq}}$

⊕ Thể tích: $V_{\text{nón}} = \frac{1}{3} S_{\text{đáy}} \cdot h = \frac{1}{3} \pi r^2 h$

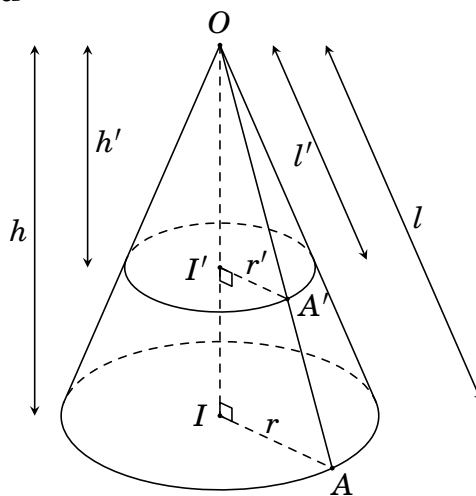
⊕ Chu vi đường tròn đáy: $C = 2\pi r$

⊕ Góc ở đỉnh nón: $2\beta = 2\widehat{IOA}$

⊕ Tỉ số thể tích: $\frac{V'_{(O,I',r')}}{V_{(O,I,r)}} = \left(\frac{r'}{r}\right)^3 = \left(\frac{h'}{h}\right)^3 = \left(\frac{l'}{l}\right)^3$

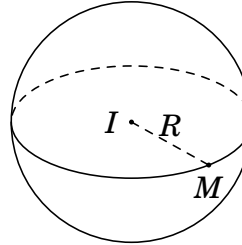
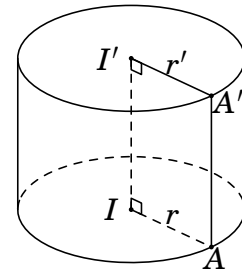
⊕ Thể tích hình nón cụt có hai đáy (I, r) và (I', r') là: $V_{\text{nón cụt}} = \frac{1}{3} \pi h (r^2 + rr' + r'^2)$

⊕ Diện tích xung quanh hình nón cụt nêu trên là: $S_{\text{xq (nón cụt)}} = \pi (r + r') l$



☑ Đối với hình trụ

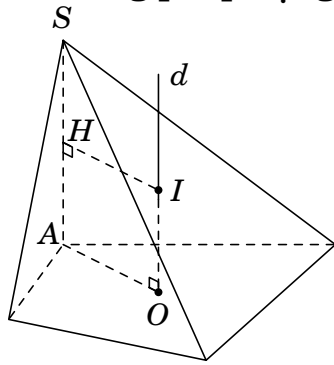
- ⊕ Diện tích mặt đáy: $S_{\text{đáy}} = \pi r^2$
- ⊕ Diện tích xung quanh: $S_{\text{xq}} = 2\pi r l$
- ⊕ Diện tích toàn phần: $S_{\text{tp}} = 2S_{\text{đáy}} + S_{\text{xq}}$
- ⊕ Thể tích: $V_{\text{trụ}} = S_{\text{đáy}} \cdot h = \pi r^2 h$
- ⊕ Chu vi đường tròn đáy: $C = 2\pi r$



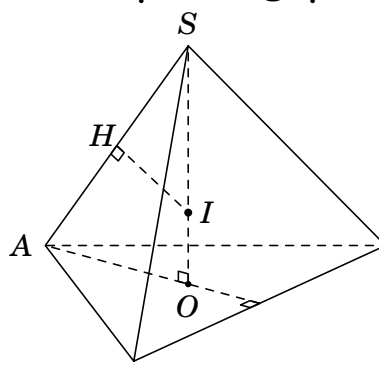
☑ Đối với hình cầu

- ⊕ Diện tích mặt cầu: $S_{\text{mặt cầu}} = 4\pi R^2$
- ⊕ Thể tích khối cầu: $V_{\text{khối cầu}} = \frac{4}{3}\pi R^3$

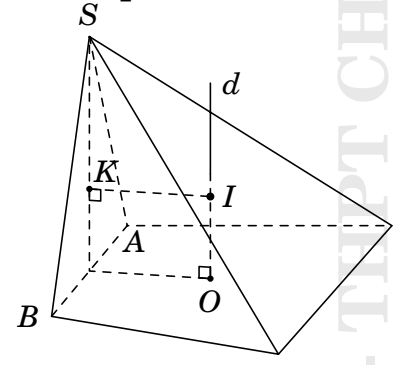
5. Phương pháp dựng tâm I của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp



$$R_{\text{mc}} = \sqrt{R_d^2 + \frac{1}{4}h^2}$$



$$R_{\text{mc}} = \frac{b^2}{2h}$$



$$R_{\text{mc}} = \sqrt{R_d^2 + R_b^2 - \frac{1}{4}(gt)^2}$$

★ Một số lưu ý:

- ⊕ Một hình chóp nội tiếp được một mặt cầu khi và chỉ khi mặt đáy của nó là một đa giác nội tiếp được đường tròn.
- ⊕ Tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp luôn nằm trên trục của đường tròn ngoại tiếp mặt đáy hình chóp.

☑ Với hình chóp có cạnh bên (SA chẳng hạn) vuông góc với mặt đáy

- ⊕ Gọi d là trục của đường tròn ngoại tiếp mặt đáy thì d chứa tâm I .
- ⊕ Gọi H là trung điểm của cạnh bên (vuông với đáy). Khi đó
 $IH \parallel AO$ và IH là 1 đường trung trực của cạnh bên SA .

☑ Với hình chóp đều

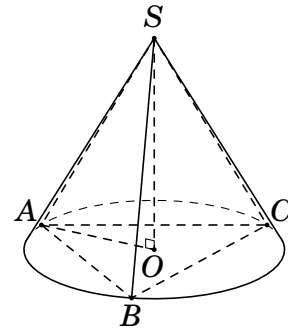
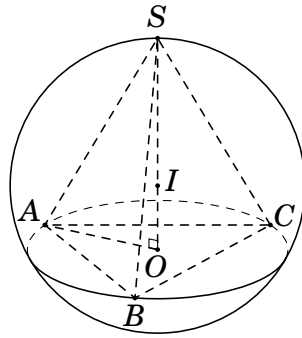
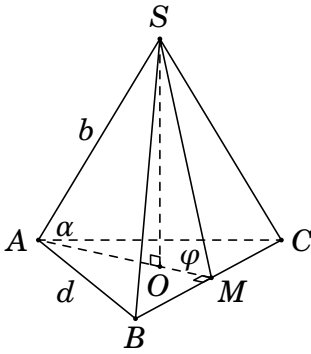
- ⊕ Gọi SO là đường cao của hình chóp đều thì SO chứa tâm I .
- ⊕ Gọi H là trung điểm của cạnh bên SA . Khi đó
 IH là 1 đường trung trực của cạnh bên SA .

☑ Với hình chóp có 1 mặt bên vuông góc với mặt đáy

- ⊕ Gọi d là trục của đường tròn ngoại tiếp mặt đáy thì d chứa tâm I .
- ⊕ Gọi K tâm của đường tròn ngoại tiếp mặt bên (vuông với đáy). Khi đó
 IK là trục của đường tròn ngoại tiếp mặt bên đó.

VII. Một số khối đa diện thường gặp trong các đề thi

1. Hình chóp tam giác đều



✓ Góc giữa cạnh bên và mặt đáy: $\alpha = \widehat{SAO} = \widehat{SBO} = \widehat{SCO}$

✓ Góc giữa mặt bên và mặt đáy: $\varphi = \widehat{SMO}$

✓ Công thức tính độ dài đường cao: $h = \sqrt{b^2 - \frac{1}{3}d^2} = \frac{b \tan \varphi}{\sqrt{\tan^2 \varphi + 4}}$

✓ Công thức thể tích khối chóp tam giác đều: $V = \frac{d^2 \sqrt{3b^2 - d^2}}{12} = \frac{d^3 \tan \varphi}{24} = \frac{d^3 \tan \alpha}{12}$

✓ Công thức tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp: $R = \frac{b^2}{2h}$

✓ Khoảng cách giữa 2 cạnh đối diện nhau: $d(SA, BC) = d(M, SA)$

✓ Tâm mặt cầu ngoại tiếp luôn thuộc SO đồng thời cách đều 2 điểm S và A.

2. Hình tam diện vuông O.ABC (vuông tại O)

✓ $OH \perp (ABC)$ tại H

$\Leftrightarrow H$ là trực tâm của $\triangle ABC$

✓ $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$

✓ Bán kính mặt cầu ngoại tiếp

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{OA^2 + OB^2 + OC^2}$$

✓ Đặt $a = OA, b = OB, c = OC$ và $S_1 = S_{\triangle OAB}; S_2 = S_{\triangle OBC}; S_3 = S_{\triangle OAC}$ thì

$$V_{O.ABC} = \frac{abc}{6} = \frac{\sqrt{2S_1S_2S_3}}{3}$$

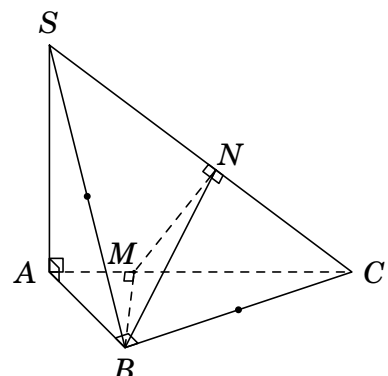
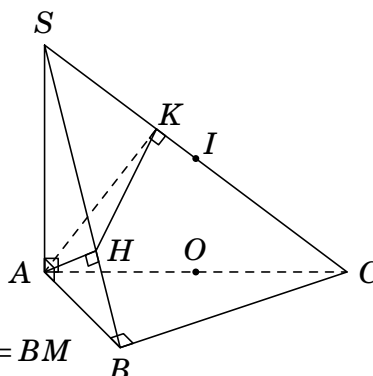
3. Hình chóp S.ABC có đường cao SA, AB vuông góc với BC

✓ $AH \perp (SBC), BC \perp (SAB),$
 $SC \perp (AHK), SC \perp (BMN),$
 $BM \perp (SAC).$

✓ $((SBC), (SAC)) = \widehat{AKH} = \widehat{BNM}$

✓ $((SBC), (ABC)) = \widehat{SBA}.$

✓ $d(A, (SBC)) = AH, d(M, (SAC)) = BM$



- ☑ Tâm mặt cầu ngoại tiếp $S.ABC$ (trường hợp này) là trung điểm I của cạnh bên SC .
- ☑ Tâm mặt cầu ngoại tiếp đa diện lồi $HK.ABC$ là trung điểm O của cạnh đáy AC .
- ☑ Tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $BCMN$ là trung điểm của cạnh đáy BC .
- ☑ Tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $B.SAMN$ là trung điểm của cạnh bên SB .

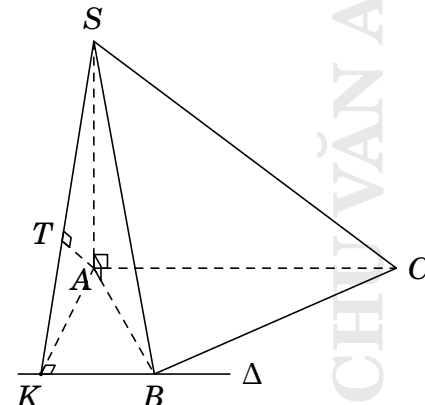
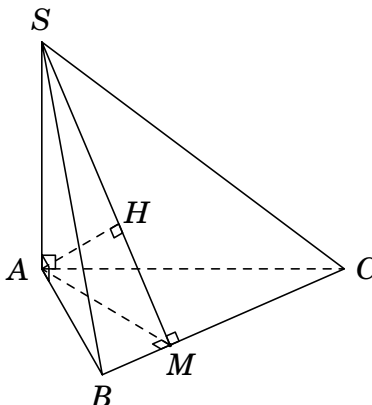
4. Hình chóp $S.ABC$ có cạnh bên SA “thẳng đứng”, mặt đáy là tam giác “thường”

☑ $((SBC), (ABC)) = \widehat{SMA}$

☑ $d(A, (SBC)) = AH$.

☑ $d(A, (SAC)) = d(B, AC)$

- ☑ Nếu mặt đáy ABC cân tại A
(hoặc mặt đáy ABC đều) thì
 M là trung điểm của cạnh
 BC , ngoài ra $SB = SC$.



☑ Khoảng cách giữa 2 cạnh đối diện SB và AC : $d(SB, AC) = d(AC, (SBK)) = AT$

☑ Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là $R = \sqrt{R_d^2 + \frac{1}{4}h^2}$

(trong đó đường cao $h = SA$ và R_d là bán kính đường tròn ngoại tiếp mặt đáy ABC)

5. Hình chóp $S.ABC$ có 1 mặt bên b “cân tại S ” và “dựng đứng”

- ☑ Nếu $\triangle ABC$ vuông tại A thì

M là trung điểm cạnh AB

N là trung điểm cạnh AC

☑ $((SAB), (ABC)) = \widehat{SMH}$

$((SAC), (ABC)) = \widehat{SNH}$

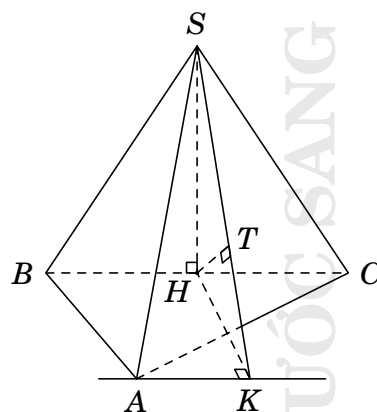
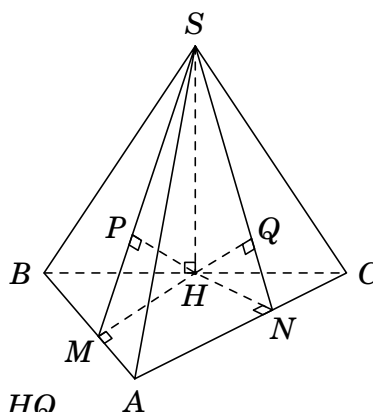
☑ $d(A, (SBC)) = d(A, BC)$

☑ $d(H, (SAB)) = HP, d(H, (SAC)) = HQ$

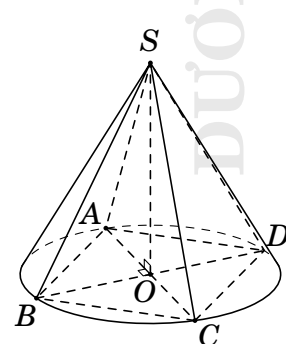
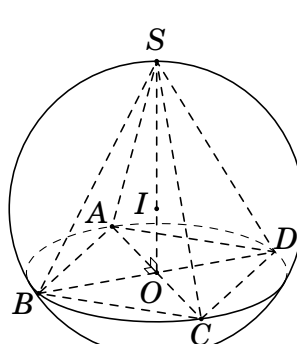
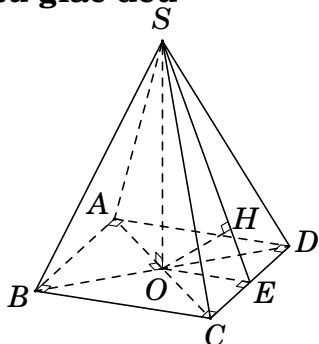
☑ Khoảng cách giữa hai cạnh SA và BC là $d(SA, BC) = d(BC, (SAK)) = AT$

☑ Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là $R = \sqrt{R_d^2 + R_b^2 - \frac{1}{4}(gt)^2}$

(R_d, R_b : bán kính đ.tròn ngoại tiếp mặt đáy và mặt bên, gt : giao tuyến của chúng)



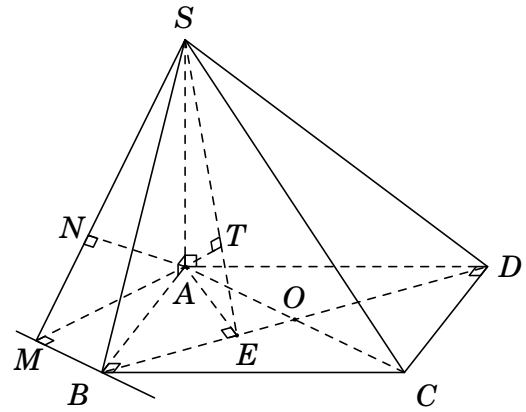
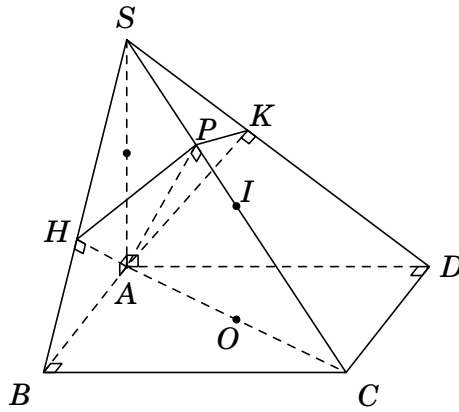
6. Hình chóp tứ giác đều



- ✓ Góc giữa cạnh bên và mặt đáy: $\alpha = \widehat{SAO} = \widehat{SBO} = \widehat{SCO} = \widehat{SCO}$
- ✓ Góc giữa mặt bên và mặt đáy: $\varphi = \widehat{SEO}$
- ✓ Công thức tính độ dài đường cao: $h = \sqrt{b^2 - \frac{1}{2}d^2} = \frac{b \tan \varphi}{\sqrt{\tan^2 \varphi + 2}}$
- ✓ Công thức thể tích: $V = \frac{d^2 \sqrt{4b^2 - 2d^2}}{6} = \frac{d^3 \tan \varphi}{6}$
- ✓ Công thức tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp (mọi hình chóp đều): $R = \frac{b^2}{2h}$
- ✓ Tâm mặt cầu ngoại tiếp luôn thuộc SO đồng thời cách đều 2 điểm S và A .

7. Hình chóp $S.ABCD$ có cạnh bên SA “thẳng đứng”, mặt đáy là “hình chữ nhật”

- ✓ $BC \perp (SAB)$,
- $AH \perp (SBC)$,
- $CD \perp (SAD)$,
- $AK \perp (SCD)$,
- $SC \perp (AHPK)$,
- $BD \perp (SAE)$,
- $AT \perp (SBD)$



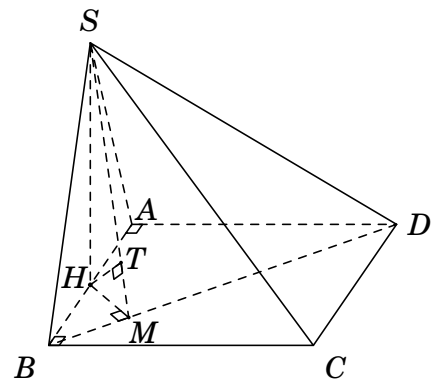
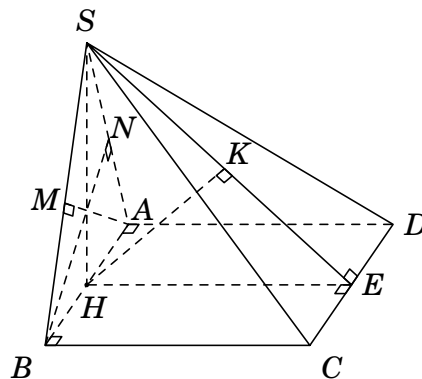
- ✓ $((SBC), (\widehat{ABCD})) = \widehat{SBA}$; $((SCD), (\widehat{ABCD})) = \widehat{SDA}$; $((SBD), (\widehat{ABCD})) = \widehat{SEA}$
- ✓ $d(A, (SBC)) = AH$; $d(A, (SCD)) = AK$; $d(A, (SBD)) = AT$; $d(SB, AC) = AN$
- $$\frac{1}{AT^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AD^2}$$

★ Chú ý: nếu $ABCD$ là hình vuông thì $E \equiv O$; $AM \parallel OB$; $AH = AK$; $HK \parallel BD$

- ✓ Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ là $R = \sqrt{R_d^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2}$
- ✓ Mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ có tâm là trung điểm I của cạnh bên SC
- ✓ Mặt cầu ngoại tiếp đa diện lồi $HPK.ABCD$ có tâm là tr.điểm O của mặt đáy $ABCD$
- ✓ Mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.AHPK$ có tâm là trung điểm của đường cao SA

8. Hình chóp $S.ABCD$ có 1 mặt bên “cân tại S ” và “dựng đứng”

- ✓ $CD \perp (SHE)$,
- $HK \perp (SCD)$,
- $AM \perp (SBC)$,
- $BN \perp (SAD)$,
- $HT \perp (SBD)$
- ✓ $d(A, (SBC)) = AM$
- ✓ $d(B, (SAD)) = BN$



- ✓ $((SBC), (\widehat{ABCD})) = \widehat{SBA}$; $((SCD), (\widehat{ABCD})) = \widehat{SEH}$; $((SBD), (\widehat{ABCD})) = \widehat{SMH}$

☑ Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là $R = \sqrt{R_d^2 + R_b^2 - \frac{1}{4}(gt)^2}$

(R_d, R_b : bán kính đ.tròn ngoại tiếp mặt đáy và mặt bên, gt : giao tuyến của chúng)

9. Hình hộp chữ nhật

☑ Độ dài đường chéo của hình hộp chữ nhật:

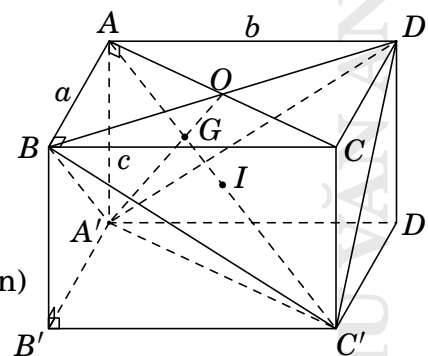
$$AC' = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

☑ Bán kính mặt cầu ngoại tiếp: $R = \frac{1}{2}AC'$

☑ Thể tích hình hộp chữ nhật: $V_{\text{hcn}} = abc = \sqrt{S_1 S_2 S_3}$

(S_1, S_2, S_3 là diện tích của 3 mặt chung 1 đỉnh của hcn)

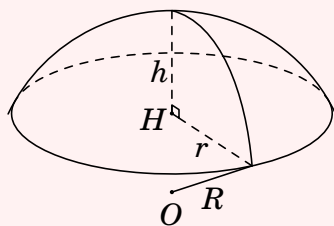
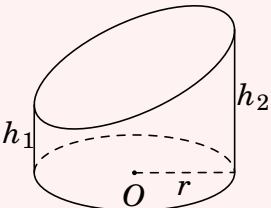
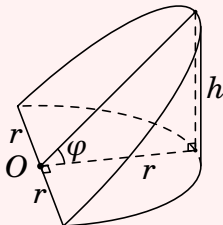
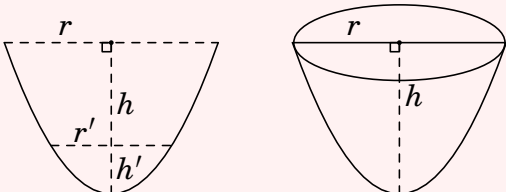
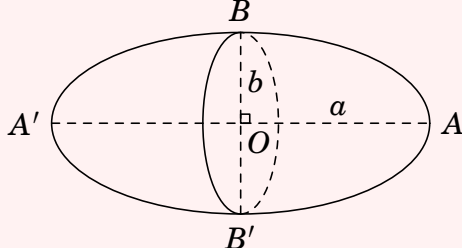
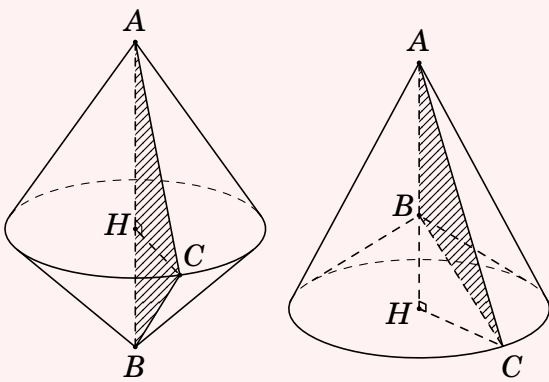
☑ Thể tích khối chóp $BDA'C'$: $V_{BDA'C'} = \frac{1}{3}V_{\text{hình hộp}}$



Công thức tính nhanh thể tích của một số khối tứ diện đặc biệt

Điều kiện	Công thức tính thể tích
$\begin{cases} SA = a, SB = b, SC = c \\ \widehat{ASB} = \alpha, \widehat{BSC} = \beta, \widehat{CSA} = \gamma \end{cases}$	$V = \frac{abc}{6} \sqrt{1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma}$ (biết 3 cạnh chung đỉnh và 3 góc tại đỉnh đó)
$\begin{cases} SA = a, BC = b \\ d(SA, BC) = d; (\widehat{SA, BC}) = \alpha \end{cases}$	$V = \frac{1}{6}abd \cdot \sin \alpha$ (biết 2 cạnh đối diện; khoảng cách và góc giữa chúng)
$\begin{cases} SA = a, S_{SAB} = S_1, S_{SAC} = S_2 \\ ((\widehat{SAB}), (\widehat{SAC})) = \varphi \end{cases}$	$V = \frac{2S_1 S_2 \sin \varphi}{3a}$ (biết 1 cạnh; diện tích và góc giữa 2 mặt kề với nó)
$\begin{cases} SA = a, SB = b, SC = c \\ \widehat{ASB} = \alpha, \widehat{ASC} = \beta \\ ((\widehat{SAB}), (\widehat{SAC})) = \varphi \end{cases}$	$V = \frac{1}{6}abc \cdot \sin \alpha \sin \beta \sin \varphi$ (biết 3 cạnh chứa đỉnh, 2 góc ở đỉnh và 1 góc nhị diện)
$\begin{cases} SA = BC = a \\ SB = AC = b \\ SC = AB = c \end{cases}$	$V = \frac{\sqrt{2}}{12} \sqrt{(a^2 + b^2 - c^2)(b^2 + c^2 - a^2)(a^2 + c^2 - b^2)}$ (biết các cặp cạnh đối diện bằng nhau)
$\begin{cases} SA = x, SB = y, SC = z \\ BC = a, AC = b, AB = c \end{cases}$	$\begin{cases} M = a^2 x^2 (b^2 + c^2 + y^2 + z^2 - a^2 - x^2)^{-1} \\ N = b^2 y^2 (a^2 + c^2 + x^2 + z^2 - b^2 - y^2)^{-1} \\ P = c^2 z^2 (a^2 + b^2 + x^2 + y^2 - c^2 - z^2)^{-1} \\ Q = (abc)^2 + (ayz)^2 + (xyc)^2 + (xbz)^2 \end{cases}$ $V = \frac{1}{12} \sqrt{M + N + P - Q}$

Một số công thức về hình, khối đặc biệt liên quan khối tròn xoay

Công thức	Hình minh họa
$S_{xq} = 2\pi R h = \pi(r^2 + h^2)$ $V_{\text{chòm cầu}} = \pi h^2 \left(R - \frac{h}{3} \right) = \frac{\pi h}{6} (h^2 + 3r^2)$	
$S_{xq} = \pi r(h_1 + h_2)$ $V = \pi r^2 \left(\frac{h_1 + h_2}{2} \right)$	
$V_{\text{hình nêm}} = \frac{2}{3} r^3 \tan \varphi = \frac{2}{3} r^2 h$	
$S_{\text{parabol}} = \frac{4}{3} r h ; \frac{S'}{S} = \left(\sqrt{\frac{h'}{h}} \right)^3 = \left(\frac{r'}{r} \right)^3$ $V_{\text{parabolic}} = \frac{1}{2} \pi r^2 h$	
$S_{\text{elip}} = \pi a b$ $V_{\text{quay quanh } 2a} = \frac{4}{3} \pi a b^2$ $V_{\text{quay quanh } 2b} = \frac{4}{3} \pi a^2 b$	
Quay mọi tam giác ABC xung quanh cạnh AB ta sẽ được hình tròn xoay có $V = \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{S_{\triangle ABC}^2}{AB}$ $S_{xq} = 2\pi S_{\triangle ABC} \left(\frac{AC + BC}{AB} \right)$	

VIII. Ví dụ giải toán điển hình

Ví dụ 1. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a , cạnh bên bằng $2a$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC . Tính góc hợp bởi hai đường thẳng dưới đây:

a) AM và SC .

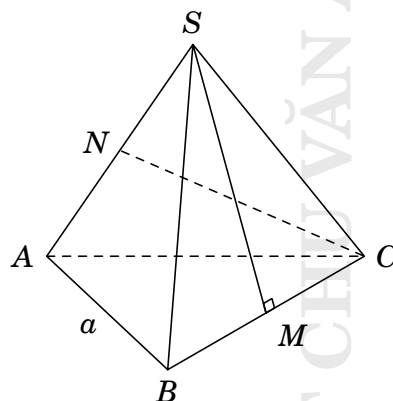
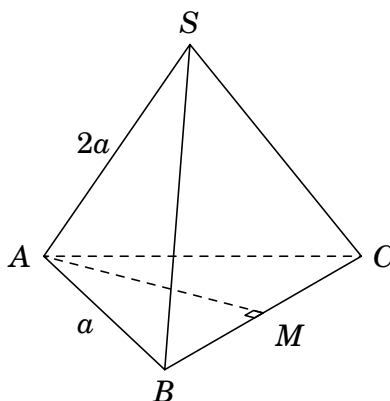
b) SM và NC .

❖ Lời giải

★ Phương pháp cổ điển

Để tính được góc giữa hai đường thẳng chéo nhau thường ta dựng thêm một đường thẳng song song với 1 trong 2 đường thẳng đó và cắt đường thẳng còn lại.

Góc giữa AM & SC dễ dựng hơn góc giữa SM & NC !



Câu a. Gọi K là trung điểm cạnh SB thì $MK \parallel SC$, do đó $(\widehat{AM, SC}) = (\widehat{AM, MK})$

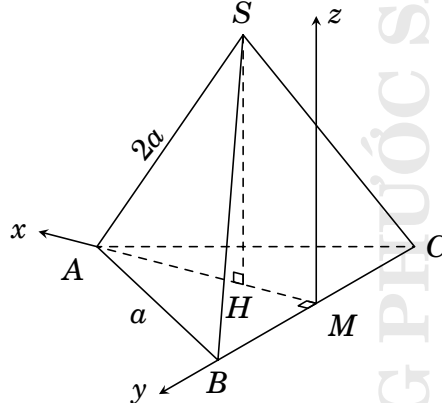
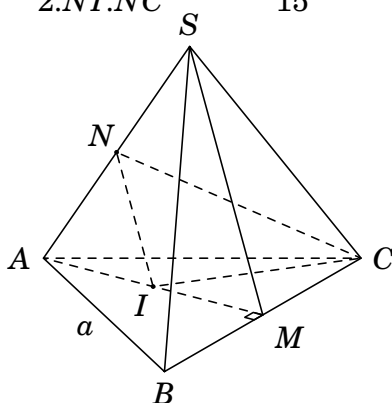
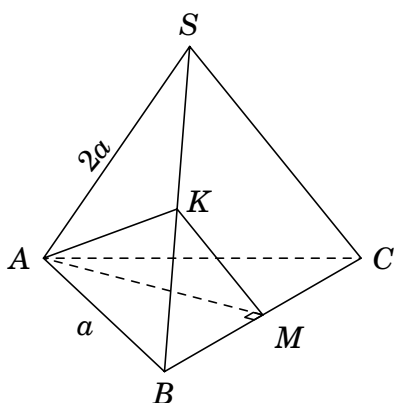
$$\text{Ta có } AK^2 = \frac{SA^2 + AB^2}{2} - \frac{SB^2}{4} = \frac{3a^2}{2}; \quad MK = \frac{1}{2}SC = a; \quad AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\triangle AMK \text{ có } \cos \widehat{AMK} = \frac{AM^2 + MK^2 - AK^2}{2 \cdot AM \cdot MK} = \frac{\sqrt{3}}{12} \Rightarrow (\widehat{AM, SC}) = \widehat{AMK} \approx 81^\circ 42'.$$

Câu b. Gọi I là trung điểm đoạn thẳng AM thì $NI \parallel SM$, do đó $(\widehat{SM, NC}) = (\widehat{NI, NC})$

$$\text{Ta có } NC = AK = \frac{a\sqrt{6}}{2}; \quad NI = \frac{1}{2}SM = \frac{1}{2}\sqrt{SC^2 - MC^2} = \frac{a\sqrt{15}}{4}; \quad IC = \sqrt{IM^2 + CM^2} = \frac{a\sqrt{7}}{4}$$

$$\triangle INC \text{ có } \cos \widehat{INC} = \frac{NI^2 + NC^2 - IC^2}{2 \cdot NI \cdot NC} = \frac{4\sqrt{10}}{15} \Rightarrow (\widehat{SM, NC}) = \widehat{INC} \approx 32^\circ 30'.$$



★ Phương pháp tọa độ

$$\text{Ta có } AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}; \quad AH = \frac{a\sqrt{3}}{6}; \quad SH = \sqrt{b^2 - \frac{1}{3}d^2} = \sqrt{(2a)^2 - \frac{1}{3}a^2} = \frac{a\sqrt{33}}{3}.$$

Gắn hệ trục $Mxyz$ (như hình vẽ) với tọa độ các điểm như sau:

$$M(0;0;0); \quad A\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; 0; 0\right); \quad C\left(0; -\frac{1}{2}; 0\right); \quad H\left(\frac{\sqrt{3}}{6}; 0; 0\right) \Rightarrow S\left(\frac{\sqrt{3}}{6}; 0; \frac{\sqrt{33}}{3}\right) \Rightarrow N\left(\frac{\sqrt{3}}{3}; 0; \frac{\sqrt{33}}{6}\right)$$

Đến đây dùng công thức tính góc giữa hai đường thẳng ta giải được cả 2 câu a và b.

$$\cos(\widehat{SM, SC}) = \frac{|\vec{AM} \cdot \vec{SC}|}{AM \cdot SC}; \quad \cos(\widehat{SM, NC}) = \frac{|\vec{SM} \cdot \vec{NC}|}{SM \cdot NC}$$

Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật với $AB = a, AD = 2a$, $SA = a\sqrt{3}$ và SA vuông góc với mặt đáy. Tính góc giữa các cặp đường thẳng và mặt phẳng sau đây: a) SC và (SAB) b) AC và (SCD)

🔍 **Lời giải**

Câu a. Ta có $SC \cap (SAB) = S$

Do $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases}$ nên $BC \perp (SAB)$ tại B . Do đó

$$(\widehat{SC, (SAB)}) = (\widehat{SC, SB}) = \widehat{BSC}$$

$\triangle SAB$ vuông tại A có $SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = 2a$

$\triangle SBC$ vuông tại B có $\tan \widehat{BSC} = \frac{BC}{SB} = 1 \Rightarrow \widehat{BSC} = 45^\circ$

Vậy $(\widehat{SC, (SAB)}) = 45^\circ$

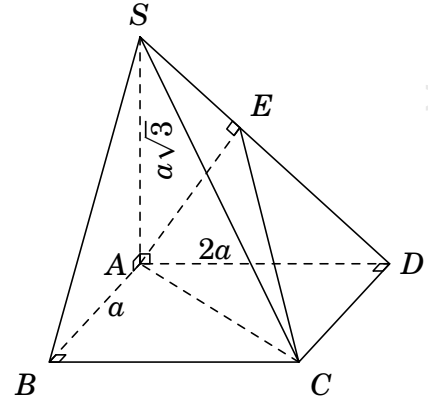
Câu b. Ta có $AC \cap (SCD) = C$

Vẽ $AE \perp SD$ tại $E \in SD$ thì ... $AE \perp (SCD)$

Như vậy $(\widehat{AC, (SCD)}) = (\widehat{AC, CE}) = \widehat{ACE}$

Ta có $AE = \frac{SA \cdot AD}{\sqrt{SA^2 + AD^2}} = \frac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$; $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = a\sqrt{5}$; $\sin \widehat{ACE} = \frac{AE}{AC} = \frac{2\sqrt{105}}{135}$

Vậy $(\widehat{AC, (SCD)}) \approx 35^\circ 50'$



Ví dụ 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật với $AB = 2a, BD = 3a$, mặt bên SAB là tam giác cân tại S đồng thời nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy. Biết $SB = a\sqrt{5}$, hãy tính góc hợp bởi các cặp mặt phẳng sau đây:

a) (SCD) và $(ABCD)$ b) (SBD) và $(ABCD)$ c) (SBC) và (SAD)

🔍 **Lời giải**

Gọi H là trung điểm của cạnh AB thì $SH \perp AB$ (do $\triangle SAB$ cân tại S)

Mà $\begin{cases} (SAB) \perp (ABCD) \\ SH \subset (SAB) \\ AB = (SAB) \cap (ABCD) \end{cases}$ nên $SH \perp (ABCD)$.

$\triangle SHB$ vuông tại H có $SH = \sqrt{SB^2 - HB^2} = 2a$.

$\triangle ABD$ vuông tại A có $AD = \sqrt{BD^2 - AB^2} = a\sqrt{5}$

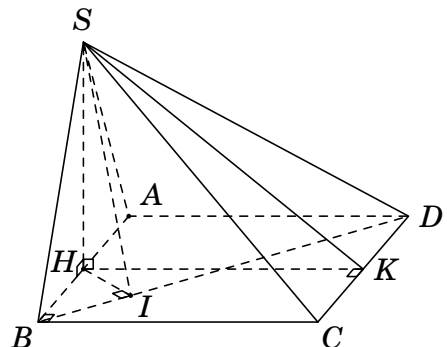
Câu a. Gọi K là trung điểm cạnh CD ta có

$$\begin{cases} CD \perp HK \\ CD \perp SH \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SHK) \Rightarrow CD \perp SK$$

Do $\begin{cases} CD = (SCD) \cap (ABCD) \\ CD \perp HK \subset (ABCD) \\ CD \perp SK \subset (SCD) \end{cases}$ nên $(\widehat{(SCD), (ABCD)}) = (\widehat{SK, HK})$

$\triangle SHK$ vuông tại H có $\tan \widehat{SKH} = \frac{SH}{HK} = \frac{2a}{a\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \widehat{SKH} \approx 41^\circ 48'$

Vậy $(\widehat{(SCD), (ABCD)}) \approx 41^\circ 48'$



Câu b. Vẽ $HI \perp BD$ tại $I \in BD$, ta sẽ chứng minh được $BD \perp (SHI)$ và $BD \perp SI$.

Với kết quả đó ta tiếp tục chứng minh được $((\widehat{SBD}), (\widehat{ABCD})) = (\widehat{SI}, \widehat{HI})$

$$\text{Ta có } \triangle BIH \sim \triangle BAD \text{ nên } \frac{HI}{AD} = \frac{BH}{BD} \Rightarrow HI = \frac{AD \cdot BH}{BD} = \frac{a\sqrt{5} \cdot a}{3a} = \frac{a\sqrt{5}}{3}$$

$$\text{Cuối cùng } \tan \widehat{SIH} = \frac{SH}{IH} = \frac{6}{\sqrt{5}}, \text{ do đó } ((\widehat{SBD}), (\widehat{ABCD})) = \widehat{SIH} \approx 69^\circ 33'.$$

Câu c. Do (SBC) và (SAD) có chung điểm S và có $BC \parallel AD$ nên giao tuyến Δ của chúng đi qua đỉnh S và song song với hai cạnh BC, AD .

Hình chóp $S.ABCD$ này có tính chất $SB \perp BC$ và $SA \perp AD$ vì thế $SB \perp \Delta$ và $SA \perp \Delta$

$$\text{Như vậy } ((\widehat{SBC}), (\widehat{SAD})) = (\widehat{SB}, \widehat{SC}) = 2 \cdot \widehat{BSH} \approx 53^\circ 8'.$$

► Ví dụ 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông tâm O cạnh bằng a , cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy, cạnh bên SC tạo với mặt đáy một góc bằng 60° .

- Tính theo a thể tích của khối chóp $S.ABCD$
- Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SCD)

► Lời giải

Câu a. Do $SC \cap (ABCD) = C$ và $SA \perp (ABCD)$ nên $(\widehat{SC}, (\widehat{ABCD})) = (\widehat{SC}, \widehat{AC}) \Rightarrow \widehat{SCA} = 60^\circ$

$$\text{Tam giác } SAC \text{ vuông tại } C \text{ có } \tan \widehat{SCA} = \frac{SA}{AC}$$

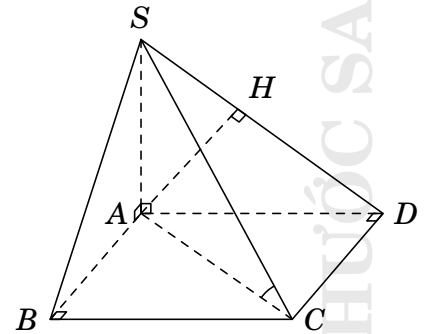
$$\Rightarrow SA = AC \cdot \tan \widehat{SCA} = a\sqrt{2} \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{6}$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SA = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot a\sqrt{6} = \frac{a^3 \sqrt{6}}{3}$$

Câu b. Vẽ $AH \perp SD$ tại $H \in SD$ ta sẽ chứng minh được

$$AH \perp (SCD) \text{ tại } H \in (SCD)$$

$$\text{Suy ra } d(A, (SCD)) = AH = \frac{SA \cdot AD}{\sqrt{SA^2 + AD^2}} = \frac{a\sqrt{42}}{7}.$$



► Ví dụ 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có mặt đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D với $CD = a$, $AB = AD = 2a$, mặt bên SAD cân tại S đồng thời nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy. Biết góc giữa (SBC) và $(ABCD)$ bằng 60° . Tính theo a

- Thể tích của khối chóp $S.ABCD$
- Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC)

► Lời giải

Câu a. Gọi H là trung điểm cạnh AD thì $SH \perp (ABCD)$

$$\text{Vẽ } HI \perp BC \text{ tại } I \in BC \text{ ta được } BC \perp SI, \text{ từ đó } ((\widehat{SBC}), (\widehat{ABCD})) = \widehat{SIH} = 60^\circ.$$

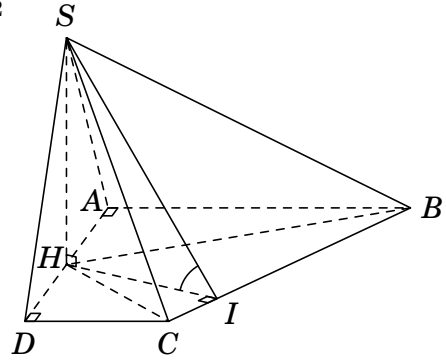
Hình thang $ABCD$ có $S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AB + CD).AD = 3a^2$

$$\text{Suy ra } S_{\triangle HBC} = S_{ABCD} - S_{\triangle HAB} - S_{\triangle HCD} = \frac{3a^2}{2}$$

$$\text{Từ đó } IH = \frac{2S_{\triangle HBC}}{BC} = \frac{3a^2}{a\sqrt{5}} = \frac{3a\sqrt{5}}{5}$$

$$\triangle SHI \text{ có } SH = IH \cdot \tan \widehat{SIH} = \frac{3a\sqrt{5}}{5} \tan 60^\circ = \frac{3a\sqrt{15}}{5}$$

$$\text{Vậy } V = \frac{3a^2}{3} \cdot \frac{3a\sqrt{15}}{5} = \frac{3a^3\sqrt{15}}{5}$$



Câu b. $S_{\triangle ABC} = S_{ABCD} - S_{\triangle ACD} = 2a^2 \Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{3}S_{\triangle ABC}.SH = \frac{a^3\sqrt{15}}{5}$

$$\triangle SIH \text{ có } SI = \sqrt{SH^2 + IH^2} = \frac{6a\sqrt{5}}{5} \Rightarrow S_{\triangle SBC} = \frac{1}{2}BC.SI = 3a^2$$

$$\text{Như vậy } d(A, (SBC)) = \frac{3V_{S.ABC}}{S_{\triangle SBC}} = \frac{a\sqrt{15}}{5}$$

Ví dụ 6. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $BC = a$, $\text{mp}(A'BC)$ tạo với đáy một góc 30° và $\triangle A'BC$ có diện tích bằng $a^2\sqrt{3}$. Tính thể tích khối lăng trụ.

◆ Lời giải

$$\text{Do } \begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp AA' \end{cases} \text{ nên } BC \perp A'B$$

$$\text{Do } \begin{cases} BC \perp AB \subset (ABC) \\ BC \perp A'B \subset (A'BC) \end{cases} \text{ nên } ((A'BC), (ABC)) = \widehat{ABA'}$$

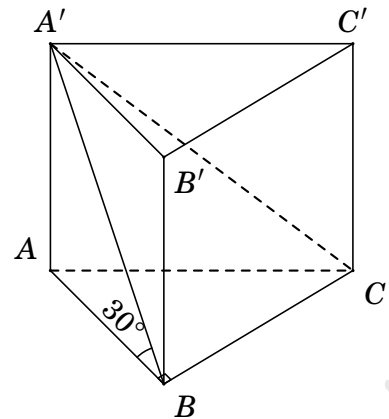
$$BC = (ABC) \cap (A'BC)$$

$$\text{Ta có } A'B = \frac{2.S_{\triangle A'BC}}{BC} = \frac{2a^2\sqrt{3}}{a} = 2a\sqrt{3}.$$

$$\triangle ABA' \text{ có } AB = A'B \cdot \cos \widehat{ABA'} = 2a\sqrt{3} \cdot \cos 30^\circ = 3a$$

$$AA' = A'B \cdot \sin \widehat{ABA'} = 2a\sqrt{3} \cdot \sin 30^\circ = a\sqrt{3}$$

$$\text{Vậy } V_{ABC.A'B'C'} = B \cdot h = S_{ABC} \cdot AA' = \frac{1}{2}AB \cdot BC \cdot AA' = \frac{1}{2} \cdot 3a \cdot a \cdot a\sqrt{3} = \frac{3a^3\sqrt{3}}{2}.$$



Ví dụ 7. Cho hình chóp $S.ABC$ có đường cao $SA = a$, AB vuông góc với BC , các cạnh $AB = a\sqrt{3}$ và $AC = 2a$. Một mặt phẳng (α) đi qua điểm A vuông góc với cạnh SB , cắt SB và SC lần lượt tại M và N . Tính theo a thể tích của khối chóp $A.BCNM$.

◆ Lời giải

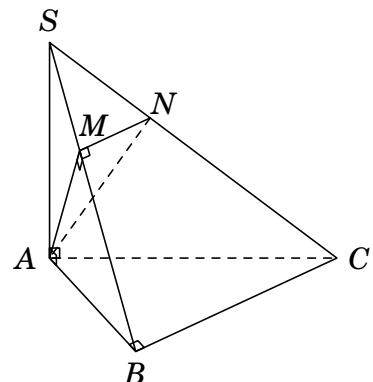
Để dàng chứng minh được $BC \perp (SAB)$ và $BC \perp SB$

Do $SB \perp (AMN)$ nên $SB \perp AM$ và $SB \perp MN$

$$\text{Xét trong } (AMN), \begin{cases} BC \perp SB \\ MN \perp SB \end{cases} \Rightarrow MN \parallel BC \Rightarrow \frac{SM}{SB} = \frac{SN}{SC}$$

$$\text{Do } V_{S.AMN} = \frac{SM}{SB} \cdot \frac{SN}{SC} \cdot V_{S.ABC} \text{ nên}$$

$$V_{A.BCNM} = \left(1 - \frac{SM^2}{SB^2}\right) V_{S.ABC}$$



$\triangle ABC$ vuông tại B có $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = a$

$$\Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2} \text{ và } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle ABC} \cdot SA = \frac{a^3 \sqrt{3}}{6}$$

$\triangle SAB$ vuông tại A có $\frac{SM}{SB} = \frac{SA^2}{SB^2} = \frac{SA^2}{SA^2 + AB^2} = \frac{1}{4}$.

$$\text{Vậy } V_{A.BCNM} = \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \cdot \frac{a^3 \sqrt{3}}{6} = \frac{5a^3 \sqrt{3}}{32}.$$

Chú ý

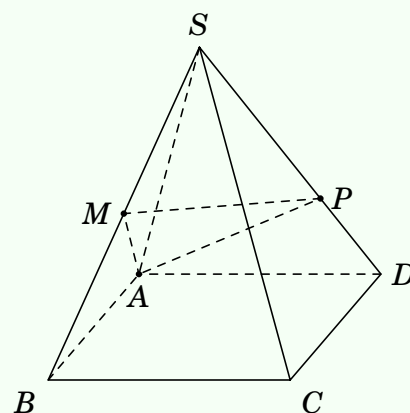
Giả thiết 2 đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với đường thẳng thứ 3 không đủ để kết luận hai đường thẳng đó song song với nhau. Chỉ khi cả 3 đường thẳng cùng nằm trên một mặt phẳng thì kết luận đó mới đúng.

Ví dụ 8.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành và có thể tích là V . Gọi M là trung điểm của cạnh SB ; P là điểm thuộc cạnh SD sao cho $SP = 2DP$. Mặt phẳng (AMP) cắt cạnh SC tại điểm N . Tính thể tích của khối chóp $S.AMNP$ theo V .

Nhận xét:

Nếu không dựng được thiết diện của hình chóp cắt bởi (AMP) thì không thể giải được bài toán này!



Lời giải

☑ Dựng giao điểm $N = SC \cap (AMP)$ (và tạo nên thiết diện của hình chóp cắt bởi (AMP))

+ Vẽ giao điểm $O = AC \cap BD$

+ Nối SO cắt MP tại I

+ Kéo dài AI cắt SD tại N

☑ Tính tỉ số $\frac{SI}{SO}$ (dựa vào tỉ số diện tích các tam giác):

$$+ \triangle SMP \text{ có } S_{\triangle SMP} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot S_{\triangle SBD} = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle SBD} \quad (1)$$

$$+ S_{\triangle SMP} = S_{\triangle SMI} + S_{\triangle SPI} = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{SI}{SO} + \frac{2}{3} \cdot \frac{SI}{SO}\right) \cdot \frac{1}{2} S_{\triangle SBD} \quad (2)$$

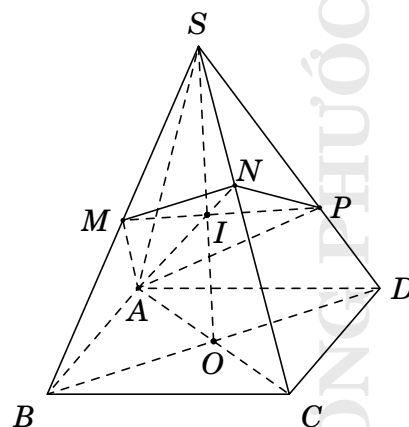
$$+ \text{Từ (1) và (2) ta tính được } \frac{SI}{SO} = \frac{4}{7}.$$

☑ Tính tỉ số $\frac{SN}{SC}$ (dựa vào tỉ số diện tích các tam giác):

$$+ \text{Dùng tỉ số giữa } S_{\triangle SAN} \text{ và } S_{\triangle SAC} \text{ 2 lần tương tự như trên ta tính được } \frac{SN}{SC} = \frac{2}{5}.$$

☑ Dùng tỉ số thể tích giữa hai khối chóp tam giác để tính $V_{S.AMNP}$

$$+ \text{Ta có } V_{S.AMNP} = V_{S.AMN} + V_{S.ANP} = \left(\frac{SM}{SB} \cdot \frac{SN}{SC} + \frac{SN}{SC} \cdot \frac{SP}{SD}\right) \cdot \frac{1}{2} V_{S.ABCD} = \frac{7}{30} V.$$



Ví dụ 9. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC đều cạnh a , tam giác SAB vuông tại B , tam giác SAC vuông tại C . Biết góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (ABC) bằng 60° . Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ theo a .

🔍 **Lời giải**

Gọi I, M tương ứng là trung điểm của các cạnh SA, AB .

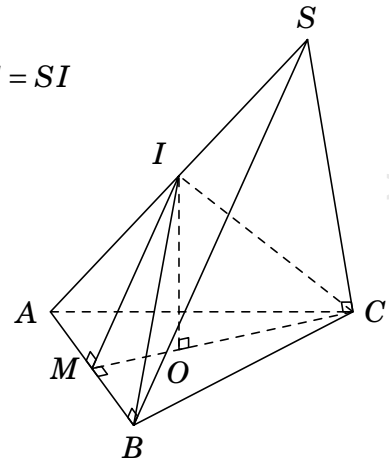
Do $\triangle SAB$ vuông tại B , $\triangle SAC$ vuông tại C nên $IA = IB = IC = SI$

Gọi O là tâm của mặt đáy ABC thì $IO \perp (ABC)$

Ngoài ra, $\begin{cases} IM \perp AB \\ OM \perp AB \end{cases} \Rightarrow ((SAB), (ABC)) = \widehat{IMO} \Rightarrow \widehat{IMO} = 60^\circ$

$\triangle IMO$ có $IO = OM$. $\tan \widehat{M} = \frac{a\sqrt{3}}{6} \cdot \tan 60^\circ = \frac{a}{2}$

Suy ra $V_{S.ABC} = 2V_{I.ABC} = \frac{2}{3} \cdot S_{\triangle ABC} \cdot IO = \frac{2}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.



★ **Ghi nhớ:** $V_{\text{hình chóp đều } S.ABC} = \frac{d^3 \tan \varphi}{24}$

★ **Chú ý:** nếu thuộc được công thức tính thể tích khối chóp tam giác đều khi biết trước cạnh đáy và góc hợp bởi mặt bên với mặt đáy thì bài toán sẽ được giải nhanh hơn

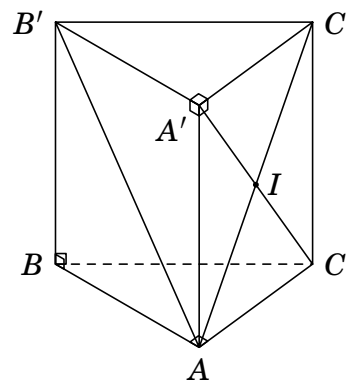
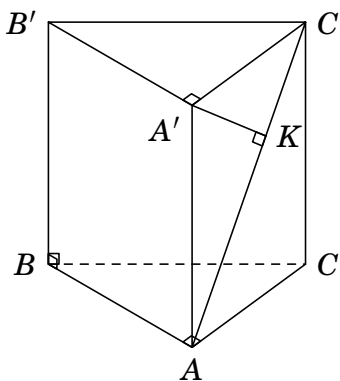
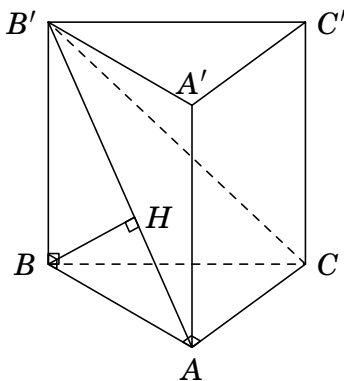
Ví dụ 10. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có mặt đáy ABC là tam giác vuông tại A . Biết $AB = a\sqrt{3}$, $AC = a$, $AA' = 2a$, hãy tính khoảng cách giữa:

a) B và (ACB')

b) $A'B'$ và AC' .

c) BC và AC' .

🔍 **Lời giải**



Chú ý: Với giả thiết của bài toán ta chứng minh được $A'C' \perp (ABB'A')$ và $A'B' \perp (ACC'A')$.

Câu a. Từ B , ta vẽ $BH \perp AB'$ tại $H \in AB'$ thì sẽ chứng minh được $BH \perp (ACB')$ tại H .

$$\text{Từ đó } d(B, (ACB')) = BH = \frac{BA \cdot BB'}{\sqrt{BA^2 + BB'^2}} = \frac{2a\sqrt{21}}{7}.$$

Câu a có thể giải bằng phương pháp thể tích như sau (nếu không vẽ được hình)

$$d(B, (ACB')) = \frac{3V_{B'.ABC}}{S_{\triangle ACB'}} = \frac{V_{\text{lăng trụ}}}{S_{\triangle ACB'}} \quad (\text{có thể dùng CT. Hê-rông để tính } S_{\triangle ACB'})$$

Câu b. Từ A' , ta vẽ $A'K \perp AC'$ sẽ chứng minh được $A'K \perp A'B'$.

$$\text{Kết hợp } A'K \perp AC' \text{ ta suy ra được } d(A'B', AC') = A'K = \frac{A'C' \cdot AA'}{\sqrt{A'C'^2 + AA'^2}} = \frac{2a\sqrt{5}}{5}.$$

Câu c. Ta có $BC \parallel (AB'C')$ nên $d(BC, AC') = d(BC, (AB'C')) = d(C, (AB'C'))$

Do CA' cắt $(AB'C')$ tại điểm I là trung điểm của CA' nên $d(C, (AB'C')) = d(A', (AB'C'))$

$A'.AB'C'$ là một tam diện vuông tại A' nên nếu đặt $h = d(A', (AB'C'))$ thì

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{A'B'^2} + \frac{1}{A'C'^2} + \frac{1}{AA'^2} = \frac{19}{12a^2} \Rightarrow d(A', (AB'C')) = h = \frac{2a\sqrt{57}}{19}.$$

Ví dụ 11. Cho hai hình vuông $ABCD$ và $ABEF$ có cạnh bằng 1, lần lượt nằm trên hai mặt phẳng vuông góc với nhau. Gọi S là điểm đối xứng với B qua đường thẳng DE . Tính thể tích của khối đa diện $ABCDSEF$.

❖ Lời giải

Cắt khối đa diện $ABCDSEF$ bởi mặt phẳng $(CDFE)$ ta được khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và khối chóp $S.CDFE$.

$$\text{Ta có } V_{ABC.A'B'C'} = \left(\frac{1}{2} \cdot BC \cdot BE \right) \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

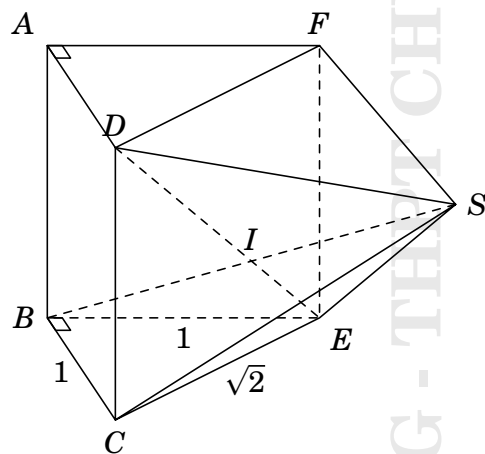
$$\text{Gọi } I = DE \cap BS \text{ ta có } \begin{cases} BS \cap (CDFE) = I \\ IB = IS \end{cases}$$

$$\Rightarrow d(S, (CDFE)) = d(B, (CDFE))$$

$$= d(B, CE) = \frac{BC \cdot BE}{CE} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\Rightarrow V_{S.CDFE} = \frac{1}{3} \cdot S_{CDFE} \cdot d(S, (CDFE)) = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{3}$$

$$\text{Vậy } V_{ABCDSEF} = V_{ABC.A'B'C'} + V_{S.CDFE} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}.$$



Ví dụ 12. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng $3a$. Một mặt phẳng thay đổi luôn song song với hai cạnh SB và AC , cắt hình chóp theo thiết diện là một đa giác (H) . Tính diện tích lớn nhất của (H) .

❖ Lời giải

Gọi (P) là mặt phẳng song song với SB và AC , (P) cắt AB tại M .

Khi đó thiết diện của hình chóp $S.ABC$ cắt bởi

(P) là hình hình hành $MNPQ$ (như hình vẽ)

Do $S.ABC$ là hình chóp đều nên $SB \perp AC$, từ đó

$MNPQ$ là hình chữ nhật.

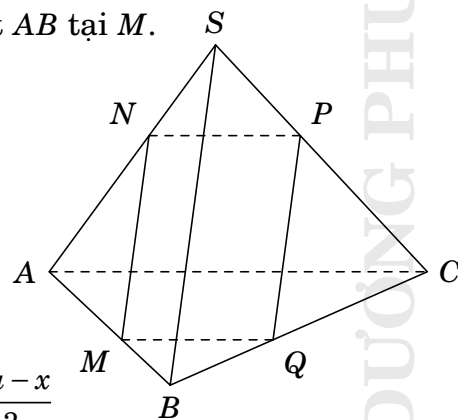
$$\text{Đặt } MN = x \ (0 < x < 3a), \text{ ta có } \frac{NA}{SA} = \frac{MN}{SB} = \frac{x}{3a}$$

$$\text{Suy ra } \frac{SN}{SA} = \frac{3a-x}{3a} \Rightarrow \frac{NP}{AC} = \frac{SN}{SA} = \frac{3a-x}{3a} \Rightarrow NP = \frac{3a-x}{3}$$

$$\text{Diện tích thiết diện: } S_{MNPQ} = MN \cdot NP = \frac{x(3a-x)}{3} \leq \frac{1}{3} \left(\frac{x+(3a-x)}{2} \right)^2 = \frac{3a^2}{4} (*)$$

Dấu "=" của $(*)$ xảy ra khi và chỉ khi $x = 3a - x \Leftrightarrow x = \frac{3a}{2} \in (0; 3a)$.

Vậy diện tích lớn nhất của thiết diện (H) là $S_{\max} = \frac{3a^2}{4}$.



Ví dụ 13. Cho một hình nón có độ dài đường sinh bằng 5, bán kính đáy bằng 3.

- a) Tính diện tích toàn phần và thể tích của hình nón đó.
 b) Một mặt phẳng (α) qua đỉnh của hình nón, cách tâm của mặt đáy một đoạn bằng 2. Tính diện tích của thiết diện tạo bởi hình nón và mặt phẳng (α) đó.

Lời giải

Xét hình nón đỉnh S có $l = 5, r = 3$. Khi đó $h = \sqrt{l^2 - r^2} = 4$

Câu a. $S_{tp} = S_{xq} + S_{đ} = \pi rl + \pi r^2 = \pi \cdot 3 \cdot 5 + \pi \cdot 3^2 = 24\pi$; $V = \frac{1}{3} \pi \cdot r^2 h = 12\pi$.

Câu b. Xét thiết diện SAB thỏa đề bài (như hình vẽ)

Gọi I là trung điểm dây cung AC

và H là hình chiếu vuông góc của O lên đoạn thẳng SI .

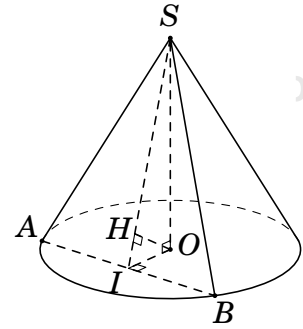
Khi đó ta chứng minh được $OH \perp (SAB)$ tại H .

Suy ra $OH = d(O, (SAB)) = 2$

$\triangle SOI$ vuông tại O có $\frac{1}{OI^2} = \frac{1}{OH^2} - \frac{1}{SO^2} = \frac{3}{16} \Rightarrow OI = \frac{4}{\sqrt{3}} \Rightarrow SI = \sqrt{SO^2 + OI^2} = \frac{8}{\sqrt{3}}$

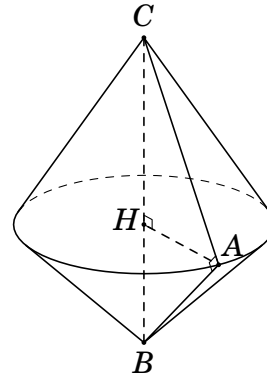
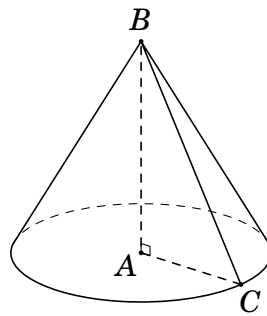
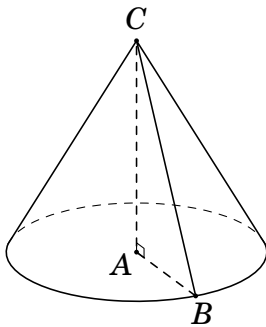
$\triangle IOB$ vuông tại I có $IB = \sqrt{OB^2 - OI^2} = \frac{\sqrt{33}}{3} \Rightarrow AB = 2IB = \frac{2\sqrt{33}}{3}$

Vậy diện tích thiết diện SAB là $S_{\triangle SAB} = \frac{1}{2} \cdot SI \cdot AB = \frac{8\sqrt{11}}{3}$



Ví dụ 14. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 3, AC = 4$. Quay tam giác ABC lần lượt quanh các cạnh của nó để tạo ra các khối tròn xoay. Tính tổng thể tích của các khối tròn xoay đó.

Lời giải



- ☑ Xét khối nón có trục là cạnh AC .

Khối nón này có $h_1 = AC = 4, r_1 = AB = 3 \Rightarrow V_1 = \frac{1}{3} \pi \cdot r_1^2 h_1 = \frac{1}{3} \pi \cdot 3^2 \cdot 4 = 12\pi$.

- ☑ Xét khối nón có trục là cạnh AB .

Khối nón này có $h_2 = AB = 4, r_2 = AC = 3 \Rightarrow V_2 = \frac{1}{3} \pi \cdot r_2^2 h_2 = \frac{1}{3} \pi \cdot 4^2 \cdot 3 = 16\pi$.

- ☑ Xét khối tròn xoay (T) do $\triangle ABC$ quay quanh cạnh BC tạo ra.

Khi đó (T) là hợp của hai khối nón (như hình vẽ), bán kính đáy chung $r_3 = AH = \frac{12}{5}$

Thể tích khối này là $V_3 = \frac{1}{3} \pi \cdot r_3^2 \cdot AH + \frac{1}{3} \pi \cdot r_3^2 \cdot BH = \frac{1}{3} \pi \cdot r_3^2 \cdot AB = \frac{48}{5} \pi$.

Vậy tổng thể tích của 3 khối là $V_1 + V_2 + V_3 = \frac{188}{5} \pi$.

Ví dụ 15. Một khối nón tròn xoay có thiết diện qua trục là một tam giác đều cạnh bằng 3. Một mặt phẳng qua đường kính AB của mặt đáy đồng thời hợp với mặt đáy một góc bằng 60° cắt khối nón theo thiết diện là một hình parabol. Tính diện tích của thiết diện đó.

◆ **Lời giải**

Gọi SMN là thiết diện qua trục vuông góc với AB của hình nón.

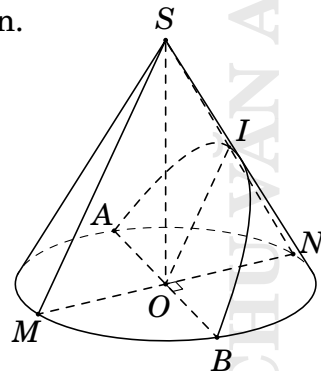
Gọi (T) là thiết diện cần tìm diện tích (với đỉnh I)

Từ giả thiết ta có $\widehat{ION} = \widehat{SMN} = 60^\circ \Rightarrow IO \parallel SM$ và $IO = \frac{1}{2}SM$

Theo giả thiết $SM = 3 \Rightarrow OI = \frac{3}{2}$, ngoài ra $OA = OB = \frac{AB}{2} = \frac{3}{2}$

Do thiết diện là một hình parabol nên có diện tích

$$S_{\text{th. diện}} = \frac{4}{3} \cdot OA \cdot OI = 3.$$



Ví dụ 16. Một hình trụ có bán kính đáy bằng 5, khoảng cách giữa hai đáy bằng 7.

- Tính thể tích và diện tích toàn phần của hình trụ.
- Cắt khối trụ bởi mặt phẳng song song với trục và cách trục một đoạn bằng 3. Tính diện tích thiết diện được tạo thành.

◆ **Lời giải**

Câu a. Theo giả thiết $r = 5$; $h = l = 7$ nên

$$S_{\text{tp}} = 2S_{\text{đ}} + S_{\text{xq}} = 2\pi \cdot r^2 + 2\pi \cdot r \cdot l = 2\pi \cdot 5^2 + 2\pi \cdot 5 \cdot 7 = 120\pi.$$

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot 5^2 \cdot 7 = 175\pi.$$

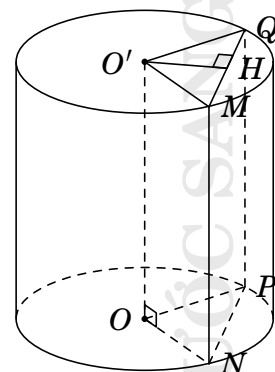
Câu b. Giả sử hình trụ (T) có trục OO' , thiết diện song song với trục là hình chữ nhật $MNPQ$ ($N, P \in (O)$ và $M, Q \in (O')$).

Gọi H là trung điểm MQ khi đó $O'H \perp MQ \Rightarrow O'H \perp (MNPQ)$.

Do đó $d(OO', (MNPQ)) = d(O', (MNPQ)) = O'H = 3$.

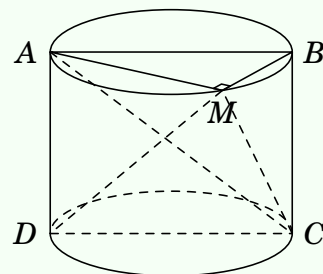
Ta có $MH = \sqrt{O'M^2 - O'H^2} = 4 \text{ cm} \Rightarrow MQ = 2 \cdot MH = 8$.

Diện tích thiết diện: $S = MH \cdot MN = 56$.



Ví dụ 17.

Cho hình trụ có thiết diện qua trục là hình vuông $ABCD$ cạnh $2\sqrt{3} \text{ cm}$ với AB là đường kính của đường tròn đáy. Gọi M là điểm thuộc cung $\widehat{AB}$ của đường tròn đáy sao cho $\widehat{ABM} = 60^\circ$. Tính thể tích của khối tứ diện $ACDM$.



◆ **Lời giải**

Ta có $\widehat{AMB} = 90^\circ$ nên $AM = AB \cdot \sin \widehat{ABM} = 2\sqrt{3} \cdot \sin 30^\circ = \sqrt{3} \text{ cm}$.

$d(AM, CD) = AD = 2\sqrt{3} \text{ cm}$ và $(\widehat{AM}, \widehat{CD}) = (\widehat{AM}, \widehat{AB}) = \widehat{MAB} = 30^\circ$.

$$V_{ACDM} = \frac{1}{6} \cdot AM \cdot CD \cdot d(AM, CD) \cdot \sin(\widehat{AM}, \widehat{CD}) = \frac{1}{6} \cdot \sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} \cdot \sin 30^\circ = \sqrt{3} \text{ cm}^2.$$

Ví dụ 18. Một hình trụ có bán kính đáy $r = 5$ và chiều cao $h = 6$. Gọi (α) là mặt phẳng không song song với trục của hình trụ, cắt hai đáy của hình trụ theo 2 dây cung có chiều dài cùng bằng 5. Tính khoảng cách từ tâm O của mặt đáy đến mặt phẳng (α) và diện tích của thiết diện tạo nên bởi khối trụ và (α) .

◆ **Lời giải**

Câu a. Gọi MN và PQ là hai dây cung do (α) cắt hai đường tròn đáy tạo nên

Khi đó $MN = PQ = 5$.

Gọi E, F lần lượt là trung điểm của MN, PQ

Gọi $I = EF \cap OO'$ thì I là trung điểm của EF lẫn OO' .

Vẽ $OI \perp PQ$ tại $F \in PQ$ và $OT \perp EF$ tại $T \in EF$ thì $OT \perp (\alpha)$

$$\triangle OFQ \text{ vuông tại } F \text{ có } OF = \sqrt{OQ^2 - FQ^2} = \sqrt{5^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

$$\triangle OIF \text{ vuông tại } O \text{ có } IF = \sqrt{OI^2 + OF^2} = \frac{\sqrt{111}}{2}$$

$$\text{Như vậy } d(O, (\alpha)) = OT = \frac{OI \cdot OF}{IF} = \frac{15}{\sqrt{37}}.$$

Câu b. Gọi K là giao điểm của EF với mặt trụ (mở rộng)

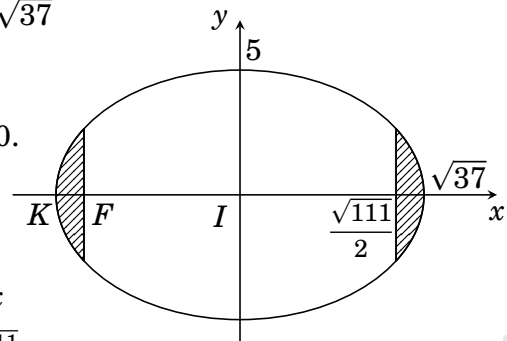
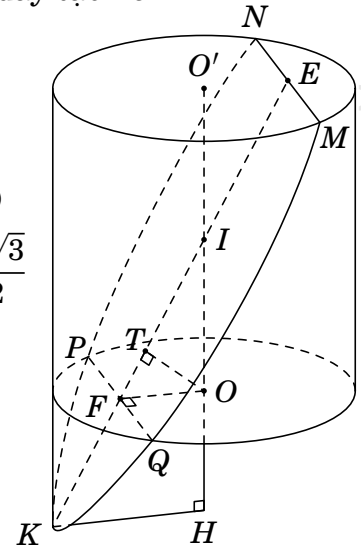
Gọi H là hình chiếu của K lên trục OO' (kéo dài)

$$\text{Ta có } OF \parallel HK \text{ nên } \frac{IK}{IF} = \frac{HK}{OF} \Rightarrow IK = \frac{HK \cdot IF}{OF} = \sqrt{37}$$

Thiết diện của khối trụ cắt bởi (α) là một hình elip cắt có trục lớn bằng $2\sqrt{37}$, trục nhỏ bằng 10.

$$\text{Phương trình của elip: } \frac{x^2}{37} + \frac{y^2}{25} = 1$$

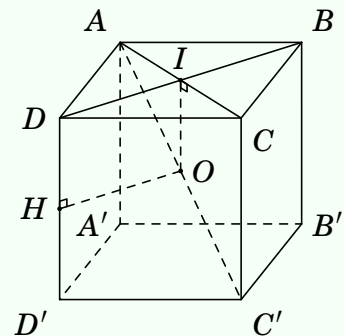
$$\begin{aligned} \text{Diện tích thiết diện: } S &= 4 \int_0^{\frac{\sqrt{111}}{2}} \frac{5}{\sqrt{37}} \sqrt{37 - x^2} dx \\ &= \frac{20}{\sqrt{37}} \left(\frac{x}{2} \sqrt{37 - x^2} + \frac{37}{2} \arcsin \frac{x}{\sqrt{37}} \right) \Big|_0^{\frac{\sqrt{111}}{2}} = \frac{5\sqrt{111}}{2} + \frac{10\pi\sqrt{37}}{3}. \end{aligned}$$



◆ **Ví dụ 19.**

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Tính bán kính của mặt cầu trong các trường hợp sau đây:

- Đi qua 8 đỉnh của hình lập phương;
- Tiếp xúc với 12 cạnh của hình lập phương;
- Tiếp xúc với 6 mặt bên của hình lập phương.



◆ **Lời giải**

Gọi O là trung điểm của đường chéo AC' thì O cách đều 8 đỉnh của hình lập phương,

O cách đều 12 cạnh của hình lập phương và O cách đều 6 mặt của hình lập phương.

- a) Bán kính mặt cầu qua 8 đỉnh của hình lập phương là $r_1 = \frac{1}{2}AC' = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.
- b) Bán kính mặt cầu tiếp xúc 12 cạnh của hình lập phương là $r_2 = d(O, DD') = \frac{1}{2}BD = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.
- c) Bán kính mặt cầu tiếp xúc 6 mặt của hình lập phương là $r_3 = d(O, (ABCD)) = \frac{1}{2}CC' = \frac{a}{2}$.

Ví dụ 20. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có 9 cạnh đều bằng a . Tính diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ.

◆ **Lời giải**

Gọi I và I' lần lượt là tâm của $\triangle ABC$ và $\triangle A'B'C'$

Ta có $II' \perp (ABC)$ và $II' \perp (A'B'C')$.

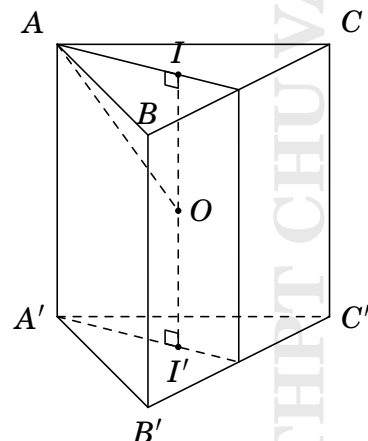
Gọi O là trung điểm của II' thì

O cách đều các đỉnh của hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

$\Rightarrow O$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

$$\triangle OIA \text{ vuông tại } I \text{ nên } OA^2 = AI^2 + IO^2 = \frac{a^2}{3} + \frac{a^2}{4} = \frac{7a^2}{12}.$$

$$\text{Diện tích mặt cầu là } S = 4\pi.OA^2 = 4\pi.\frac{7a^2}{12} = \frac{7\pi a^2}{3}.$$



Ví dụ 21. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a , mặt bên tạo với đáy một góc α ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$). Xác định tâm và tính theo a và α bán kính r của mặt cầu nội tiếp hình chóp đó.

◆ **Lời giải**

Gọi H là tâm của tam giác đều ABC , ta có $SH \perp (ABC)$.

Gọi M là trung điểm của BC , ta có
$$\begin{cases} BC = (SBC) \cap (ABC) \\ BC \perp SM \subset (SBC) \\ BC \perp AM \subset (ABC) \end{cases}$$

$$\Rightarrow ((SBC), (ABC)) = \widehat{SMA}. \text{ Do đó } \widehat{SMA} = \alpha.$$

Gọi I là tâm của mặt cầu nội tiếp $S.ABC$ thì $I \in SH$.

Vì I là tâm của mặt cầu nội tiếp hình chóp $S.ABC$ nên

MI là đường phân giác trong của góc $\widehat{SMA}$.

Khi đó, bán kính của mặt cầu nội tiếp $S.ABC$ là $r = IH$.

$$\triangle IHM \text{ vuông tại } H \text{ có } IH = MH \tan \frac{\alpha}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6} \times \tan \frac{\alpha}{2}.$$

