

CẤU TRÚC

PHẦN	TT	NỘI DUNG	CÁC DẠNG TOÁN	Trang
ĐẠI SỐ	1	DẪY SỐ - CẤP SỐ CỘNG CẤP SỐ NHÂN Câu hỏi TN: 20 câu Bài tập TL: 07 bài	Xác định số hạng tổng quát; xét tính tăng giảm, tính bị chặn của một dãy số.	2 - 5
			Xác định số hạng tổng quát, số hạng U_1 , công sai d ; tính tổng n số hạng đầu tiên của một cấp số cộng.	
			Xác định số hạng tổng quát, số hạng U_1 , công bội q ; tính tổng n số hạng đầu tiên của một cấp số nhân.	
			Vận dụng CSC, CSN vào một số bài toán ứng dụng thực tế.	
	2	GIỚI HẠN Câu hỏi TN: 20 câu Câu hỏi TL: 06 bài	Tính giới hạn của một dãy số.	5 - 9
			Tính giới hạn của một hàm số tại một điểm, tại vô cực; tính giới hạn một bên.	
			Xét tính liên tục của hàm số tại một điểm, trên một tập cho trước.	
			Xét sự tồn tại nghiệm của một phương trình.	
	3	ĐẠO HÀM Câu hỏi TN: 10 câu Câu hỏi TL: 06 bài	Tính đạo hàm của một hàm số tại một điểm	9 - 11
			Tính đạo hàm của một hàm số trên tập xác định	
			Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số khi biết hoành độ tiếp điểm, hệ số góc...	
HÌNH HỌC	4	QUAN HỆ SONG SONG TRONG KHÔNG GIAN. Câu hỏi TN: 10 câu Bài tập TL: 5 bài	Xác định và chứng minh hai mặt phẳng song song.	11 -13
			Một số bài toán sử dụng tính chất của hai mặt phẳng song song.	
	5	VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN - QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN. Câu hỏi TN: 20 câu Bài tập TL: 12 bài	Xác định các đẳng thức vectơ, các tính chất đúng về vectơ trong không gian.	13 -16
			Chứng minh hai đường thẳng vuông góc, đường thẳng vuông góc với mặt phẳng, hai mặt phẳng vuông góc trong không gian.	
			Xác định và tính số đo góc: giữa hai đường thẳng, giữa đường thẳng và mặt phẳng, giữa hai mặt phẳng	
			Tính khoảng cách: từ một điểm đến mặt phẳng, giữa hai đường thẳng chéo nhau, giữa đường thẳng và mặt phẳng song song.	
			Xác định và tính diện tích thiết diện cắt bởi mặt phẳng có quan hệ vuông góc.	

PHẦN I. ĐẠI SỐ

Chương 3. Dãy số – Cấp số cộng – Cấp số nhân

I. Lý thuyết.

1. Kiến thức:

- Định nghĩa dãy số tăng, giảm, dãy số bị chặn, công thức số hạng tổng quát của một dãy số.
- ĐN, công thức số hạng tổng quát, tính chất, tổng n số hạng đầu tiên của một cấp số cộng.
- ĐN, công thức số hạng tổng quát, tính chất, tổng n số hạng đầu tiên của một cấp số nhân.
- Ứng dụng thực tế của dãy số, cấp số cộng, cấp số nhân.

2. Kỹ năng:

- Xác định được tính tăng giảm, tính bị chặn, công thức số hạng tổng quát của một dãy số.
- Xác định được các yếu tố của một cấp số cộng: Số hạng U_1 , công sai d , tổng n số hạng đầu tiên của một cấp số cộng.
- Xác định được các yếu tố của một cấp số nhân: Số hạng U_1 , công bội q , tổng n số hạng đầu tiên của một cấp số nhân.
- Vận dụng các kiến thức về dãy số, cấp số cộng, cấp số nhân vào các bài toán thực tế.

II. Câu hỏi trắc nghiệm khách quan.

Câu 1. Trong các dãy số sau, dãy số nào là dãy số giảm?

- A. $u_n = \frac{2n+1}{n-1}$. B. $u_n = n^3 - 1$. C. $u_n = n^2$. D. $u_n = 2n$.

Câu 2. Trong các dãy số sau đây dãy số nào bị chặn?

- A. $u_n = n + \frac{1}{n}$. B. $u_n = \sqrt{n^2 + 1}$. C. $u_n = 2^n + 1$. D. $u_n = \frac{n}{n+1}$.

Câu 3. Cho dãy số (u_n) với $\begin{cases} u_1 = -2 \\ u_{n+1} = -2 - \frac{1}{u_n} \end{cases}$. Công thức số hạng tổng quát của dãy số này là

- A. $u_n = -\frac{n-1}{n}$. B. $u_n = \frac{n+1}{n}$. C. $u_n = -\frac{n+1}{n}$. D. $u_n = -\frac{n}{n+1}$.

Câu 4. Cho cấp số cộng (u_n) có: $u_1 = -3$ và công sai $d = \frac{1}{2}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $u_n = -3 + \frac{1}{2}(n+1)$. B. $u_n = -3 + \frac{1}{2}n - 1$.
C. $u_n = -3 + \frac{1}{2}(n-1)$. D. $u_n = n\left(-3 + \frac{1}{4}(n-1)\right)$.

Câu 5. Cho một cấp số cộng có $u_1 = -3$; $u_6 = 27$. Tìm công sai d ?

- A. $d = 5$. B. $d = 7$. C. $d = 6$. D. $d = 8$.

Câu 6. Tìm x để 3 số $1-x$; x^2 ; $1+x$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng?

- A. Không có giá trị nào của x . B. $x = \pm 2$.
C. $x = \pm 1$. D. $x = 0$.

Câu 7. Cho CSC (u_n) có $u_5 = -15$; $u_{20} = 60$. Tổng 20 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đó là

- A. $S_{20} = 200$ B. $S_{20} = -200$ C. $S_{20} = 250$ D. $S_{20} = -250$

Câu 8. Cho 4 số thực a, b, c, d là 4 số hạng liên tiếp của một cấp số cộng. Biết tổng của chúng bằng 4 và tổng các bình phương của chúng bằng 24. Tính $P = a^3 + b^3 + c^3 + d^3$.

- A. $P = 64$ B. $P = 80$ C. $P = 16$ D. $P = 79$

Câu 9. Cho cấp số cộng (u_n) có các số hạng đều dương, số hạng đầu $u_1 = 1$ và tổng của 100 số hạng đầu tiên bằng 14950. Tính $S = \frac{1}{u_2\sqrt{u_1} + u_1\sqrt{u_2}} + \frac{1}{u_3\sqrt{u_2} + u_2\sqrt{u_3}} + \dots + \frac{1}{u_{2018}\sqrt{u_{2017}} + u_{2017}\sqrt{u_{2018}}}$.

- A. $\frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{6052}}\right)$. B. $1 - \frac{1}{\sqrt{6052}}$. C. 2018. D. 1.

Câu 10. Cho hai cấp số cộng $(x_n): 4, 7, 10, \dots$ và $(y_n): 1, 6, 11, \dots$. Hỏi trong 2018 số hạng đầu tiên của mỗi cấp số có bao nhiêu số hạng chung?

- A. 404. B. 673. C. 403. D. 672.

Câu 11. Trong hội chợ tết 2023, một công ty sữa muốn xếp 900 hộp sữa theo số lượng 1, 3, 5, ... từ trên xuống dưới (số hộp sữa trên mỗi hàng xếp từ trên xuống là các số lẻ liên tiếp - mô hình như hình vẽ). Hàng dưới cùng có bao nhiêu hộp sữa?



- A. 59. B. 30. C. 61. D. 57.

Câu 12. An muốn mua một món quà sinh nhật cho bạn nên quyết định bắt đầu tiết kiệm 1000 đồng vào ngày 01 tháng 01 năm 2016, sau đó cứ liên tục ngày sau hơn ngày trước 1000 đồng. Hỏi đến hết ngày 30 tháng 4 năm 2016, An đã tích lũy được bao nhiêu tiền?

- A. 7.381.000 đồng. B. 7.260.000 đồng. C. 7.140.000 đồng. D. 7.503.000 đồng.

Câu 13. Công thức nào dưới đây là công thức số hạng tổng quát của một cấp số nhân?

- A. $u_n = \frac{1}{4^n} - 1$ B. $u_n = \frac{1}{4^{n-2}}$ C. $u_n = n^2 + \frac{1}{4}$ D. $u_n = n^2 - \frac{1}{4}$

Câu 14. Tìm số hạng u_1 và công bội q của cấp số nhân (u_n) có $u_4 - u_2 = 54$ và $u_5 - u_3 = 108$.

- A. $u_1 = 3$ và $q = 2$. B. $u_1 = 9$ và $q = 2$. C. $u_1 = 9$ và $q = -2$. D. $u_1 = 3$ và $q = -2$.

Câu 15. Cho cấp số nhân (u_n) thỏa mãn: $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 13 \\ u_4 - u_1 = 26 \end{cases}$. Tính tổng 8 số hạng đầu tiên của cấp số nhân đó.

- A. $S_8 = 3280$. B. $S_8 = 9841$. C. $S_8 = 3820$. D. $S_8 = 1093$.

Câu 16. Tìm x để ba số $2x-1$; x ; $2x+1$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân.

- A. $x = \pm \frac{1}{3}$. B. $x = \pm \sqrt{3}$.
C. $x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$. D. Không có giá trị nào của x .

Câu 17. Giả sử $\frac{\sin \alpha}{6}$, $\cos \alpha$, $\tan \alpha$ theo thứ tự đó là một cấp số nhân. Tính $\cos 2\alpha$.

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. B. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $-\frac{1}{2}$.

Câu 18. Ba số phân biệt có tổng là 217, có thể coi là các số hạng liên tiếp của một cấp số nhân, cũng có thể coi là số hạng thứ 2, thứ 9, thứ 44 của một cấp số cộng. Hỏi phải lấy bao nhiêu số hạng đầu của cấp số cộng này để tổng của chúng bằng 820?

A. 20.

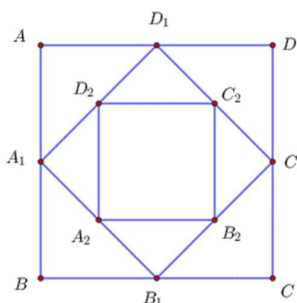
B. 42.

C. 21.

D. 17.

Câu 19. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a và có diện tích S_1 . Nối 4 trung điểm A_1, B_1, C_1, D_1 theo thứ tự của 4 cạnh AB, BC, CD, DA ta được hình vuông thứ hai có diện tích S_2 . Tiếp tục làm như thế, ta được hình vuông thứ ba là $A_2B_2C_2D_2$ có diện tích $S_3, \dots$ và cứ tiếp tục làm như thế, ta tính được các hình vuông lần lượt có diện tích $S_4, S_5, \dots, S_{100}$ (tham khảo hình bên).

Tính tổng $S = S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_{100}$.



A. $S = \frac{a^2(2^{100} - 1)}{2^{100}}$.

B. $S = \frac{a^2(2^{100} - 1)}{2^{99}}$.

C. $S = \frac{a^2}{2^{100}}$.

D. $S = \frac{a^2(2^{99} - 1)}{2^{98}}$.

Câu 20. Cho tam giác ABC cân tại đỉnh A , biết độ dài cạnh đáy BC , đường cao AH và cạnh bên AB theo thứ tự lập thành cấp số nhân với công bội q . Giá trị của q^2 bằng

A. $\frac{2 + \sqrt{2}}{2}$.

B. $\frac{2 - \sqrt{2}}{2}$.

C. $\frac{\sqrt{2} + 1}{2}$.

D. $\frac{\sqrt{2} - 1}{2}$.

III. Bài tập tự luận.

Bài 1. Bằng phương pháp quy nạp toán học, hãy chứng minh các mệnh đề sau đúng $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

a) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

b) $(6^{2n} + 10 \cdot 3^n) \div 11$

Bài 2. Chứng minh rằng: dãy số (u_n) với $u_n = \frac{3n+14}{n+2}$ là dãy số giảm và bị chặn.

Bài 3. Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng (u_n) biết:

a) $\begin{cases} u_4 = 10 \\ u_7 = 19 \end{cases}$

c) $\begin{cases} u_1 + 2u_5 = 0 \\ S_4 = 14 \end{cases}$

d) $\begin{cases} u_7 - u_3 = 8 \\ u_2 \cdot u_7 = 75 \end{cases}$

e) $\begin{cases} S_6 = 18 \\ S_{10} = 110 \end{cases}$

Bài 4.

a) Tính tổng các số hạng của một cấp số nhân có 11 số hạng, biết số hạng đầu bằng $\frac{4}{3}$, số hạng cuối bằng $\frac{81}{256}$.

b) Tìm ba số hạng liên tiếp của một cấp số nhân, biết rằng tổng của chúng bằng 147, hiệu của số hạng cuối với số hạng đầu bằng 105.

c) Cho ba số tạo thành một cấp số nhân mà tổng của chúng bằng 93. Ta có thể sắp đặt chúng (theo thứ tự của cấp số nhân kể trên) như là số hạng thứ nhất, thứ hai và thứ bảy của một cấp số cộng. Tìm ba số đó.

d) Tìm bốn số biết rằng ba số đầu theo thứ tự lập thành một cấp số nhân, ba số sau theo thứ tự lập thành một cấp số cộng. Tổng của hai số đầu và cuối bằng 14, còn tổng của hai số ở giữa bằng 12.

e) Cho 4 số lập thành cấp số cộng. Lần lượt trừ mỗi số ấy cho 2, 6, 7, 2 thì nhận được một cấp số nhân. Tìm các số đó.

Bài 5. Rút gọn các tổng sau:

$$\text{a) } S = 3 + 33 + 333 + \dots + \underbrace{333\dots3}_{2023 \text{ c/s } 3}$$

$$\text{b) } S = \left(2 + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(4 + \frac{1}{4}\right)^2 + \dots + \left(2^{2023} + \frac{1}{2^{2023}}\right)^2$$

$$\text{c) } S = \frac{1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{2023}}{1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{2023}}$$

Bài 6. Tìm m để phương trình:

a) $x^4 - 2(m+1)x^2 + 2m+1 = 0$ có 4 nghiệm phân biệt lập thành 1 cấp số cộng.

b) $x^3 - 3mx^2 + 2m(m-4)x + 9m^2 - m = 0$ có 3 nghiệm phân biệt lập thành 1 cấp số cộng.

Bài 7. Cho dãy số (u_n) : $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 3n \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$

a) Xét dãy số (v_n) thỏa mãn: $v_n = u_n + 3n + 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh dãy (v_n) là một cấp số nhân.

b) Tìm công thức số hạng tổng quát của dãy số (u_n) .

CHƯƠNG 4. GIỚI HẠN

I. Lý thuyết.

1. Kiến thức:

- Phát biểu được các quy tắc tính giới hạn hữu hạn, giới hạn vô cực của một dãy số.
- Phát biểu được các quy tắc tính giới hạn của hàm số tại một điểm, tại vô cực.
- Trình bày được điều kiện để một hàm số liên tục tại một điểm, liên tục trên một tập cho trước.
- Nêu được ứng dụng tính liên tục của hàm số để xét sự có nghiệm của một phương trình.

2. Kỹ năng.

- Tính thành thạo các giới hạn hữu hạn, giới hạn vô cực của một dãy số
- Tính thành thạo giới hạn hàm số tại một điểm, tại vô cực.
- Xét được tính liên tục của một hàm số tại một điểm, trên một tập cho trước và vận dụng vào xét sự có nghiệm của một phương trình.

II. Câu hỏi trắc nghiệm.

Câu 21. Cho dãy số (u_n) có $\lim u_n = 2$. Tính giới hạn $\lim \frac{3u_n - 1}{2u_n + 5}$.

A. $-\frac{1}{5}$

B. $\frac{3}{2}$

C. $\frac{5}{9}$

D. $+\infty$

Câu 22. Giới hạn $\lim \frac{5\sqrt{3n^2+n}}{2(3n+2)} = \frac{a\sqrt{3}}{b}$ (với a, b là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản).

Tính $T = a + b$.

A. $T = 21$.

B. $T = 11$.

C. $T = 7$.

D. $T = 9$.

Câu 23. Biết $\lim \frac{2n^3 + n^2 - 4}{an^3 + 2} = \frac{1}{2}$ với a là tham số. Khi đó $a - a^2$ bằng

A. -12 .

B. -2 .

C. 0 .

D. -6 .

Câu 24. Phát biểu nào sau đây là **sai** ?

A. $\lim u_n = c$ ($u_n = c$ là hằng số).

B. $\lim q^n = 0$ ($|q| > 1$).

C. $\lim \frac{1}{n} = 0$.

D. $\lim \frac{1}{n^k} = 0$ ($k > 1$).

Câu 25. Tính giới hạn $\lim \frac{1+3+5+\dots+(2n+1)}{3n^2+4}$.

A. 0.

B. $\frac{1}{3}$.

C. $\frac{2}{3}$.

D. 1.

Câu 26. Giới hạn $\lim \frac{1^2+2^2+3^2+4^2+\dots+n^2}{n^3+2n+7}$ có giá trị bằng

A. $\frac{2}{3}$.

B. $\frac{1}{6}$.

C. 0.

D. $\frac{1}{3}$.

Câu 27. Tìm giá trị của tổng $S = \sqrt{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots \right)$.

A. $\sqrt{2} + 1$.

B. 2.

C. $2\sqrt{2}$.

D. $\frac{1}{2}$.

Câu 28. Cho các số thực a, b thỏa mãn $|a| < 1; |b| < 1$. Tìm giới hạn $I = \lim \frac{1+a+a^2+\dots+a^n}{1+b+b^2+\dots+b^n}$.

A. $+\infty$.

B. $-\infty$.

C. $\frac{1-b}{1-a}$.

D. 1.

Câu 29. Có bao nhiêu giá trị nguyên của a thuộc khoảng $(0; 2018)$ để $\lim \sqrt{\frac{9^n+3^{n+1}}{5^n+9^{n+a}}} \leq \frac{1}{2187}$?

A. 2011.

B. 2016.

C. 2019.

D. 2009.

Câu 30. Giả sử ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = b$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) \cdot g(x)] = a \cdot b$.

B. $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - g(x)] = a - b$.

C. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$.

D. $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + g(x)] = a + b$.

Câu 31. Cho $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 2$; $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 3$, giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow x_0} [3f(x) - 4g(x)]$ bằng

A. 5.

B. 2.

C. -6.

D. 3.

Câu 32. Biết $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 4$. Khi đó $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{(x+1)^4}$ bằng

A. $-\infty$.

B. 4.

C. $+\infty$.

D. 0.

Câu 33. Tìm các giá trị của tham số $a; b$ thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + ax + b}{x - 3} = 3$.

A. $a = -3, b = 0$.

B. $a = 3, b = 0$.

C. $a = 0, b = -3$.

D. không tồn tại giá trị thỏa mãn.

Câu 34. Cho $f(x)$ là một đa thức thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 16}{x - 1} = 24$. Tính $I = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 16}{(x - 1)(\sqrt{2f(x) + 4} + 6)}$.

A. 24.

B. $I = +\infty$.

C. $I = 2$.

D. $I = 0$.

Câu 35. Biết $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 - 7x + 12}}{a|x| - 17} = \frac{2}{3}$. Giá trị của a bằng

A. -3 .

B. 3 .

C. 6 .

D. -6 .

Câu 36. Cho $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x}, & x > 0 \\ mx + m + \frac{1}{4}, & x \leq 0 \end{cases}$, m là tham số. Tìm m để hàm số có giới hạn tại $x = 0$.

A. $m = 1$.

B. $m = 0$.

C. $m = \frac{1}{2}$.

D. $m = -\frac{1}{2}$.

Câu 37. Tìm giới hạn $C = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt[n]{(x+a_1)(x+a_2)\dots(x+a_n)} - x \right]$.

A. $+\infty$.

B. $-\infty$.

C. $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$.

D. $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{2n}$.

Câu 38. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2x+8}-2}{\sqrt{x+2}} & x > -2 \\ 0 & x = -2 \end{cases}$. Xét các khẳng định sau:

(I) $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = 0$.

(II) $f(x)$ liên tục tại $x = -2$.

(III) $f(x)$ gián đoạn tại $x = -2$.

Số khẳng định đúng là

A. 3 .

B. 2 .

C. 1 .

D. 0

Câu 39. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{x^2+1}{x^3-x+6}} & x \neq 3; x \neq 2 \\ b + \sqrt{3} & x = 3; b \in \mathbb{R} \end{cases}$. Tìm giá trị của tham số b để hàm số

$f(x)$ liên tục tại $x = 3$.

A. $\sqrt{3}$.

B. $-\sqrt{3}$.

C. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

D. $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Câu 40. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} a^2x^2 & , x \leq \sqrt{2} \\ (2-a)x^2 & , x > \sqrt{2} \end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số a để hàm số

$f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

A. 1 và 2 .

B. 1 và -1 .

C. -1 và 2 .

D. 1 và -2 .

III. Bài tập tự luận.

Bài 8. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim \frac{2n^2 - n + 3}{3n^2 + 2n + 1}$

b) $\lim \frac{2n+1}{n^3 + 4n^2 + 3}$

c) $\lim \frac{3n^4}{(2n+1)(2-n)(n^2+1)}$

d) $\lim \frac{2n^4 + n^2 - 3}{3n^3 - 2n^2 + 1}$

e) $\lim \frac{\sqrt{9n^2+1} + 2n - 1}{\sqrt{4n^2+4n+1} + n}$

f) $\lim \frac{\sqrt{2n^2+3} - n - 4}{\sqrt{n^2+2} + n}$

g) $\lim \frac{1-3^n}{4+3^n}$

h) $\lim \frac{4 \cdot 3^n + 7^{n+1}}{5^n + 2 \cdot 7^n}$

i) $\lim \frac{1+2 \cdot 3^n - 7^n}{5^n + 2 \cdot 3^n}$

$$\begin{array}{lll} \text{k)} \lim (2n^2 - n + 3) & \text{l)} \lim (\sqrt{2n^2 - n} - 3n) & \text{m)} \lim (4 \cdot 3^n + 5^{n+1}) \\ \text{n)} \lim (\sqrt[3]{n^3 + 6n^2} - n) & \text{p)} \lim n (\sqrt{2n^2 + n} - \sqrt{2n^2 - 3}) & \text{q)} \lim \frac{\sqrt{4n^2 + 3n + 1} - 2n}{\sqrt[3]{n^3 + 2n^2 - 1} - n} \\ \text{r)} \lim \frac{n\sqrt{1+3+5+\dots+(2n+1)}}{n^3 + 3n + 2} & \text{s)} \lim \left(\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \right) & \end{array}$$

Bài 9. Tính các giới hạn sau:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^5 + 9x + 7}{3x^6 + x^3 + 1} & \text{b)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x^2 + 2x - 3} & \text{c)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{2x-1} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x} - 1} \\ \text{d)} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 3x^2 - 9x - 2}{x^3 - x - 6} & \text{e)} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{\sqrt{6x^2+3}+3x} & \text{f)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{4x-3} - 1}{x-1} \\ \text{g)} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^4 - 16}{x+2} & \text{h)} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 - \sqrt{5+x}}{1 - \sqrt{5-x}} & \text{i)} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[3]{3x-1} - \sqrt{x+1}}{x-3} \\ \text{k)} \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x^3} \right) & \text{l)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+8} - \sqrt{8x+1}}{\sqrt{5-x} - \sqrt{7x-3}} & \text{m)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{2x-1} + \sqrt[5]{x-2}}{x-1} \\ \text{n)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + x + 1} - 1}{x} & \text{p)} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{10-x} - 2}{x-2} & \text{q)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - nx + n - 1}{(x-1)^2} \end{array}$$

Bài 10. Tính các giới hạn sau:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-1)^2(7x+2)^2}{(2x+1)^4} & \text{b)} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+2) \frac{2x+1}{\sqrt{x^4+3}} & \text{c)} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+x+1} - x) \\ \text{d)} \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{2x^2-3} - 5x) & \text{e)} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{9x^2+1} - 3x) & \text{f)} \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+1} + x - 1) \\ \text{g)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{3x^6+2x^2+1}}{5x+7} & \text{h)} \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x+4+\sqrt{4x^2+x}) & \text{i)} \lim_{x \rightarrow 2^+} (2x-4) \frac{3x^2+x-1}{\sqrt{x^2-4}} \\ \text{k)} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{2x^2+3}}{4x+2} & \text{l)} \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{-2x^2+x+5}{x-3} & \text{m)} \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-2x^2+x+5}{x-3} \\ \text{n)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0} \text{ với } a_n \neq 0, b_m \neq 0 \end{array}$$

Bài 11.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \text{ Xét tính liên tục của hàm số } f(x) = \begin{cases} \frac{x+3}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ -1 & \text{khi } x = 1 \end{cases} \text{ tại điểm } x = 1. \\ \text{b)} \text{ Xét tính liên tục của hàm số } f(x) = \begin{cases} \frac{x-5}{\sqrt{2x-1}-3} & \text{khi } x > 5 \\ (x-5)^2 + 3 & \text{khi } x \leq 5 \end{cases} \text{ tại điểm } x = 5 \\ \text{c)} \text{ Xét tính liên tục của hàm số } f(x) = \begin{cases} \frac{x^3+x+2}{x^3+1} & \text{khi } x \neq -1 \\ \frac{4}{3} & \text{khi } x = -1 \end{cases} \text{ trên tập xác định.} \end{array}$$

Bài 12.

- a) Tìm giá trị của a để hàm số $f(x) = \begin{cases} ax+1 & \text{khi } x < 1 \\ \frac{\sqrt[3]{2x-1}-1}{\sqrt{x}-1} & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x=1$.
- b) Tìm giá trị của a để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-3x+2}{|x-1|} & \text{khi } x \neq 1 \\ a & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ liên tục trên R .

Bài 13.

- a) Chứng minh phương trình $(1-m^2)(x+1)^3 + x^2 - x - 3 = 0$ luôn có nghiệm với mọi m .
- b) Chứng minh phương trình $\frac{1}{\cos x} - \frac{1}{\sin x} = m$ luôn có nghiệm với mọi m .
- c) Chứng minh phương trình $x^5 - 3x^4 + 5x - 2 = 0$ có ít nhất 3 nghiệm trong khoảng $(-2; 5)$.

CHƯƠNG 5. ĐẠO HÀM**I. Lý thuyết.****1. Kiến thức:**

- Trình bày được định nghĩa, các công thức tính đạo hàm của một hàm số tại một điểm, trên tập xác định của hàm số và các tính chất của đạo hàm.
- Phát biểu được những ứng dụng của đạo hàm trong các bài toán chuyển động thẳng, viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số...

2. Kỹ năng:

- Tính thành thạo đạo hàm của một hàm số tại một điểm, trên tập xác định của hàm số.
- Vận dụng đạo hàm để giải các bài toán chuyển động, viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số...

II. Câu hỏi trắc nghiệm.

Câu 41. Cho hàm số $f(x) = -2x^2 + 3x$. Đạo hàm $f'(x)$ của hàm số đó là

- A. $-4x-3$. B. $-4x+3$. C. $4x+3$. D. $4x-3$.

Câu 42. Đạo hàm của hàm số $y = f(x) = 2 \sin \sqrt{x}$ là

- A. $y' = 2 \cos \sqrt{x}$. B. $y' = \frac{1}{\sqrt{x}} \cos \sqrt{x}$. C. $y' = 2\sqrt{x} \cdot \cos \frac{1}{\sqrt{x}}$. D. $y' = \frac{1}{\sqrt{x} \cdot \cos \sqrt{x}}$.

Câu 43. Đạo hàm của hàm số $f(x) = \frac{-3x+4}{2x+1}$ tại điểm $x = -1$ là

- A. $-\frac{11}{3}$. B. $\frac{1}{5}$. C. -11 . D. $-\frac{11}{9}$.

Câu 44. Đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{x^2 - 4x^3}$ là

- A. $\frac{x-6x^2}{\sqrt{x^2-4x^3}}$. B. $\frac{1}{2\sqrt{x^2-4x^3}}$. C. $\frac{x-12x^2}{2\sqrt{x^2-4x^3}}$. D. $\frac{x-6x^2}{2\sqrt{x^2-4x^3}}$.

Câu 45. Cho hàm số $f(x) = \frac{1-3x+x^2}{x-1}$. Tập nghiệm của bất phương trình $f'(x) > 0$ là

- A. $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. B. $\emptyset$. C. $(1; +\infty)$. D. $\mathbb{R}$.

Câu 46. Cho hàm số $f(x) = 2mx - mx^3$ với m là tham số. Bất phương trình $f'(x) \leq 1$ có một nghiệm $x=1$ khi và chỉ khi

- A. $m \geq 1$. B. $m \leq -1$. C. $-1 \leq m \leq 1$. D. $m \geq -1$.

Câu 47. Biết hàm số $g(x) = f(x) - f(2x)$ có đạo hàm bằng 5 tại $x=1$ và đạo hàm bằng 7 tại $x=2$. Tính đạo hàm của hàm số $h(x) = f(x) - f(4x)$ tại $x=1$.

- A. 8. B. 12. C. 16. D. 19.

Câu 48. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = (x+1)^2(x-2)$ tại điểm có $x=2$ là

- A. $y = -8x + 4$. B. $y = 9x + 18$. C. $y = -4x + 4$. D. $y = 9x - 18$.

Câu 49. Tìm m để tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = (2m-1)x^4 - m + \frac{5}{4}$ tại điểm có hoành độ $x = -1$ vuông góc với đường thẳng $d: 2x - y - 3 = 0$.

- A. $\frac{3}{4}$. B. $\frac{1}{4}$. C. $\frac{7}{16}$. D. $\frac{9}{16}$.

Câu 50. Cho hàm số $y = \frac{2x+m+1}{x-1}$ có đồ thị (C_m) . Tìm m để tiếp tuyến của (C_m) tại điểm có hoành độ $x_0 = 0$ đi qua điểm $A(4;3)$.

- A. $m = -\frac{16}{5}$. B. $m = -\frac{6}{5}$. C. $m = -\frac{1}{5}$. D. $m = -\frac{16}{15}$.

III. Bài tập tự luận.

Bài 14. Tìm đạo hàm của các hàm số sau trên tập xác định của nó.

a) $y = \frac{4x+1}{\sqrt{x^2+2}}$ b) $y = \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$ c) $y = \frac{1}{(x^2-x+1)^5}$ d) $y = \tan^3 \frac{\pi x}{6}$

Bài 15. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{x-1}$ biết:

- a) Tiếp điểm M có tung độ bằng 4.
b) Tiếp điểm M là giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành.
c) Tiếp điểm M là giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung.

Bài 16. Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y = x^2 - 2x + 2$. Viết phương trình tiếp tuyến với (C) trong các trường hợp sau:

- a) Tiếp điểm có tung độ bằng 1.
b) Tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $d: x + 6y = 0$.
c) Tiếp tuyến tạo với trục Ox một góc 45° .
d) Tiếp tuyến đi qua điểm $A(4;0)$.

Bài 17. Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ có đồ thị (C) .

- a) Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C) tại giao điểm của (C) với trục Oy .
b) Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C) , biết tiếp tuyến song song với $(d): y = 9x + 2018$
c) Chứng minh rằng: Qua điểm $A(0;2)$ có thể kẻ được 2 tiếp tuyến với đồ thị (C) , viết phương trình các tiếp tuyến đó.

Bài 18.

- a)** Cho hàm số $y = x^3$. Tìm các điểm M trên đồ thị hàm số (M không trùng gốc tọa độ) sao cho tiếp tuyến tại M tạo với 2 trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 6.
- b)** Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số biết tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất.

Bài 19. Cho hàm số $f(x) = x^3 - 2x^2 + mx - 3$. Tìm m để

- a)** $f'(x)$ viết được dưới dạng bình phương của một nhị thức.
b) $f'(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
c) $f'(x) < 0 \quad \forall x \in (0, 2)$.
d) $f'(x) > 0, \forall x > 0$.

PHẦN II. HÌNH HỌC

CHƯƠNG 2. QUAN HỆ SONG SONG TRONG KHÔNG GIAN

I. Lý thuyết.

1. Kiến thức.

- Phát biểu được khái niệm và các tính chất về hai mặt phẳng song song.
- Trình bày được cách chứng minh hai mặt phẳng song song.
- Phát biểu được cách xác định thiết diện của hình chóp, hình lăng trụ cắt bởi mặt phẳng có quan hệ song song.

2. Kỹ năng.

- Chứng minh được hai mặt phẳng song song và áp dụng một số tính chất hai mặt phẳng song song để giải quyết một số bài toán..
- Dụng được thiết diện của hình chóp, hình lăng trụ cắt bởi một mặt phẳng có quan hệ song song cho trước.

II. Câu hỏi trắc nghiệm.

Câu 51. Tìm khẳng định **sai** trong các khẳng định sau đây ?

- A.** Nếu hai mặt phẳng song song cùng cắt mặt phẳng thứ ba thì hai giao tuyến tạo thành song song với nhau.
- B.** Ba mặt phẳng đôi một song song chắn trên hai đường thẳng chéo nhau những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.
- C.** Nếu mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (Q) thì mọi đường thẳng nằm trên mặt phẳng (P) đều song song với mặt phẳng (Q) .
- D.** Nếu mặt phẳng (P) có chứa hai đường thẳng phân biệt và hai đường thẳng đó cùng song song với mặt phẳng (Q) thì mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (Q) .

Câu 52. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ có tâm lần lượt là O và O' , không cùng nằm trong một mặt phẳng. Gọi M là trung điểm AB , xét các khẳng định sau:

- $$\begin{array}{ll} (I):(ADF)//(BCE); & (II):(MOO')//(ADF); \\ (III):(MOO')//(BCE); & (IV):(ACE)//(BDF) \end{array}$$

Những khẳng định nào trong các khẳng định trên là **đúng**?

- A.** (I) . **B.** $(I), (II)$.
C. $(I), (II), (III)$. **D.** $(I), (II), (III), (IV)$.

Câu 53. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- A. $(ABB'A') \parallel (CDD'C')$. B. $(BDA') \parallel (D'B'C)$.
C. $(BA'D') \parallel (ADC)$. D. $(ACD') \parallel (A'C'B)$.

Câu 54. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M, N, P theo thứ tự là trung điểm của SA, SD và AB . Khẳng định nào sau đây **đúng**?

- A. (NOM) cắt (OPM) . B. $(MON) \parallel (SBC)$.
C. $(PON) \cap (MNP) = NP$. D. $(NMP) \parallel (SBD)$.

Câu 55. Cho hình bình hành $ABCD$. Qua A, B, C, D lần lượt vẽ các tia Ax, By, Cz, Dt ở cùng phía so với mặt phẳng $(ABCD)$, song song với nhau và không thuộc $(ABCD)$. Một mặt phẳng (P) cắt Ax, By, Cz, Dt tương ứng tại A', B', C', D' sao cho $AA' = 3, BB' = 5, CC' = 4$. Tính DD' .

- A. 4. B. 6. C. 2. D. 12.

Câu 56. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang và $AD \parallel BC$. Gọi M là trọng tâm tam giác SAD , N là điểm thuộc đoạn AC sao cho $NA = \frac{NC}{2}$, P là điểm thuộc đoạn CD sao cho

$PD = \frac{PC}{2}$. Khi đó, mệnh đề nào sau đây **đúng**?

- A. Giao tuyến của (SBC) và (MNP) là đường thẳng song song với BC .
B. MN cắt (SBC) .
C. $(MNP) \parallel (SAD)$.
D. $MN \parallel (SBC)$ và $(MNP) \parallel (SBC)$

Câu 57. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi I, J, K lần lượt là trọng tâm của các tam giác $ABC, ACC', A'B'C'$. Mặt phẳng nào sau đây song song với mặt phẳng (IJK) ?

- A. $(AA'C)$. B. $(A'BC')$. C. (ABC) . D. $(BB'C')$.

Câu 58. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Lấy điểm M trên AB với $AB = 4AM$, điểm N trên DD' với $ND = 3ND'$ và điểm P trên $B'C'$ với $B'C' = 4B'P$. Các mệnh đề sau mệnh đề nào **đúng**?

- A. (MNP) song song với $(AB'D')$. B. (MNP) song song với $(AC'D')$
C. MN song song với AP . D. Cả ba câu trên đều sai.

Câu 59. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi I là trung điểm AB . $M_p(IB'D')$ cắt hình hộp theo thiết diện là hình gì?

- A. Tam giác. B. Hình thang. C. Hình bình hành. D. Hình chữ nhật.

Câu 60. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành có tâm $O, AB = 8, SA = SB = 6$. Gọi (P) là mặt phẳng qua O và song song với (SAB) . Thiết diện của (P) và hình chóp $S.ABCD$ có diện tích bằng

- A. $5\sqrt{5}$. B. $6\sqrt{5}$. C. 12. D. 13.

III. Bài tập tự luận.

Bài 20. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi E và F lần lượt là trung điểm của SA và CD .

1. Chứng minh: $(OEF) \parallel (SBC)$.
2. Gọi M là trung điểm của SD và N là trung điểm của OE . Chứng minh $MN \parallel (SBC)$.

3. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của BC và AD . Xác định giao điểm G của EF và mặt phẳng (SIJ) . Chứng minh: G là trọng tâm tam giác SAF .

Bài 21. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi M là trung điểm của $B'C'$.

1. Giả sử: $(AA'M)$ cắt BC tại N . Chứng minh rằng: $AN \parallel A'M$.
2. Chứng minh rằng: $AC' \parallel (BA'M)$.
3. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng $(AB'C')$ và (ABC) .
4. E là trung điểm của AB . Xác định thiết diện của hình lăng trụ cắt bởi (α) qua E và song song với $A'B$ và AC' .

Bài 22. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi I, J, K lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC ; ACC' và $A'B'C'$.

1. Chứng minh rằng: $IJ \parallel (ABC')$; $KJ \parallel (BCC'B')$.
2. Chứng minh rằng: $(KIJ) \parallel (BCC'B')$.
3. Gọi các điểm M, N, P lần lượt là trung điểm của AA' , AC và $B'C'$. Xác định thiết diện của hình lăng trụ cắt bởi (MNP) .

Bài 23. Cho hình chóp $S.ABC$, M, N, F lần lượt là trung điểm của AB , AC và SC .

1. Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng (P) qua MN và song song với AF .
2. Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng (Q) qua A và song song với (P) .
3. Gọi H, K lần lượt là các giao điểm của (P) với các cạnh SB và SC , Chứng minh: HM, KN, SA đồng quy (tại D)
4. Giả sử SAB và SAC là các tam giác vuông đỉnh A . Chu vi tam giác SBC bằng p . Tính chu vi tam giác DHK .

Bài 24. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

1. Chứng minh rằng: $(BDA') \parallel (B'D'C')$.
2. Chứng minh rằng: đường chéo AC' đi qua trọng tâm G_1 và G_2 của 2 tam giác BDA' và $B'D'C'$ và $AG_1 = G_1G_2 = G_2C'$.
3. M là trung điểm của BC . Xác định thiết diện của hình hộp cắt bởi (α) qua M và song song với $(A'BD)$.
4. Gọi E và F lần lượt là 2 điểm di động trên 2 cạnh AB và $A'D'$ sao cho $EA = kEB$, $FD' = kFA'$ ($k > 0$). Chứng minh rằng: EF song song với một mặt phẳng cố định khi k thay đổi.

CHƯƠNG 3. QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

I. Lý thuyết.

1. Kiến thức.

- Phát biểu được khái niệm và các tính chất về vectơ trong không gian.
- Phát biểu được khái niệm và các tính chất về hai đường thẳng vuông góc, đường thẳng vuông góc với mặt phẳng và hai mặt phẳng vuông góc.
- Trình bày được cách xác định và tính số đo góc giữa hai đường thẳng, giữa đường thẳng và mặt phẳng, giữa hai mặt phẳng.
- Trình bày được cách xác định và tính khoảng cách từ một điểm đến mặt phẳng, giữa hai đường thẳng chéo nhau, giữa một đường thẳng và mặt phẳng song song.

2. Kỹ năng.

- Chứng minh được các tính chất về vectơ và vận dụng vectơ giải các bài toán hình học trong không gian.
- Chứng minh được hai đường thẳng vuông góc, đường thẳng vuông góc với mặt phẳng và hai mặt phẳng vuông góc.
- Xác định và tính được số đo góc giữa hai đường thẳng, giữa đường thẳng và mặt phẳng, giữa hai mặt phẳng.
- Xác định và tính được khoảng cách từ một điểm đến mặt phẳng, giữa hai đường thẳng chéo nhau, giữa một đường thẳng và mặt phẳng song song.
- Vẽ được thiết diện hình chóp, hình lăng trụ cắt bởi mặt phẳng có quan hệ vuông góc.

II. Câu hỏi trắc nghiệm.

Câu 61. Cho hình lăng trụ tam giác $ABCA'B'C'$. Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{d}$. Trong các biểu thức vectơ sau đây, biểu thức nào **đúng**.

- A. $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$. B. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$. C. $\vec{b} - \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$. D. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{d}$.

Câu 62. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J là trung điểm của AB và CD , G là trung điểm của IJ .

Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào đúng?

- A. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$. B. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 2\overrightarrow{IJ}$.
C. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{JI}$. D. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = -2\overrightarrow{JI}$.

Câu 63. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AD}$. B. $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AD}$.
C. $\overrightarrow{AD'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC'}$. D. $\overrightarrow{A'D} = \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{A'C'}$.

Câu 64. Cho các đường thẳng a, b, c và mặt phẳng (P) . Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- A. Nếu $a \perp (P)$ và $b \parallel (P)$ thì $a \perp b$.
B. Nếu $a \perp b$, $c \perp b$ và a cắt c thì b vuông góc với mặt phẳng chứa a và c .
C. Nếu $a \parallel b$ và $b \perp c$ thì $c \perp a$.
D. Nếu $a \perp b$ và $b \perp c$ thì $a \parallel c$.

Câu 65. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào là **đúng**?

- A. Một mặt phẳng (α) và một đường thẳng a không thuộc (α) cùng vuông góc với đường thẳng b thì (α) song song với a .
B. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì vuông góc với nhau
C. Hai mặt phẳng cùng vuông góc với một mặt phẳng thì cắt nhau
D. Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một mặt phẳng thì song song với nhau

Câu 66. Cho a, b, c là các đường thẳng. Mệnh đề nào sau đây là **đúng**?

- A. Cho $a \perp b$. Mọi mặt phẳng chứa b đều vuông góc với a .
B. Nếu $a \perp b$ và mặt phẳng (α) chứa a ; mặt phẳng (β) chứa b thì $(\alpha) \perp (\beta)$.
C. Cho $a \perp b$ nằm trong mặt phẳng (α) . Mọi mặt phẳng (β) chứa a và vuông góc với b thì $(\beta) \perp (\alpha)$.
D. Cho $a \parallel b$. Mọi mặt phẳng (α) chứa c trong đó $c \perp a$ và $c \perp b$ thì đều vuông góc với mặt phẳng (a, b) .

Câu 67. Hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ trở thành hình lăng trụ tứ giác đều khi có thêm các điều kiện nào sau đây?

- A. Tất cả các cạnh đáy bằng nhau và cạnh bên vuông góc với mặt đáy.
- B. Cạnh bên bằng cạnh đáy và cạnh bên vuông góc với mặt đáy.
- C. Có một mặt bên vuông góc với mặt đáy và đáy là hình vuông.
- D. Các mặt bên là hình chữ nhật và mặt đáy là hình vuông.

Câu 68. Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$. Hình chiếu vuông góc của A' lên (ABC) trùng với trực tâm H của tam giác ABC . Khẳng định nào sau đây không đúng?

- A. $(AA'B'B) \perp (BB'C'C)$.
- B. $(AA'H) \perp (A'B'C')$.
- C. $BB'C'C$ là hình chữ nhật.
- D. $(BB'C'C) \perp (AA'H)$.

Câu 69. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính góc giữa hai đường thẳng $B'D'$ và $A'A$.

- A. 90° .
- B. 45° .
- C. 60° .
- D. 30° .

Câu 70. Cho hình chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a . Gọi I và J lần lượt là trung điểm của SC và BC . Số đo của góc (IJ, CD) bằng:

- A. 30° .
- B. 45° .
- C. 60° .
- D. 90° .

Câu 71. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a . Gọi M , N lần lượt là trung điểm của AD và SD . Số đo của góc giữa hai đường thẳng MN và SC là

- A. 45° .
- B. 60° .
- C. 30° .
- D. 90° .

Câu 72. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và H là hình chiếu vuông góc của S lên BC . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $BC \perp SC$.
- B. $BC \perp AH$.
- C. $BC \perp AB$.
- D. $BC \perp AC$.

Câu 73. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, cạnh $AB = a$, $AD = \sqrt{3}a$. Cạnh bên $SA = a\sqrt{2}$ và vuông góc mặt phẳng đáy. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC) bằng

- A. 75° .
- B. 60° .
- C. 45° .
- D. 30° .

Câu 74. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và $SA = a$, $AB = a\sqrt{3}$. Tìm số đo góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) .

- A. 30° .
- B. 45° .
- C. 90° .
- D. 60° .

Câu 75. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a . Hình chiếu vuông góc của S lên (ABC) trùng với trung điểm của cạnh BC . Biết tam giác SBC là tam giác đều. Số đo của góc giữa SA và (ABC) bằng

- A. 30° .
- B. 45° .
- C. 60° .
- D. 75° .

Câu 76. Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy là hình vuông cạnh a . Đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Góc giữa (SCD) và $(ABCD)$ là α , khi đó $\tan \alpha$ bằng

- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.
- B. 1.
- C. $\sqrt{2}$.
- D. $\sqrt{3}$.

Câu 77. Tính cosin của góc giữa hai mặt của một tứ diện đều.

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
- B. $\frac{\sqrt{2}}{3}$.
- C. $\frac{1}{2}$.
- D. $\frac{1}{3}$.

Câu 78. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB = AA' = a$, $BC = 2a$, $CA = a\sqrt{5}$. Khẳng định nào sau đây sai?

- A. Đáy ABC là tam giác vuông.
- B. Hai mặt phẳng $(AA'B'B)$ và $(BB'C'C)$ vuông góc với nhau

C. Góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và $(A'BC)$ có số đo bằng 45° .

D. $AC' = 2a\sqrt{2}$.

Câu 79. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD

A. $a\sqrt{2}$.

B. $\frac{a}{2}$.

C. a .

D. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 80. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , SA vuông góc với mặt đáy và $SA = AB = \sqrt{3}$. Gọi G là trọng tâm của tam giác SAB . Khoảng cách từ G đến (SBC) bằng

A. $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

B. $\frac{\sqrt{6}}{6}$.

C. $\sqrt{3}$.

D. $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

III. Bài tập tự luận.

Bài 25. Cho hình chóp $SABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a , góc $\widehat{BAD} = 120^\circ$. Biết $SA = SC = a$, $SB = SD = \frac{3a}{2}$. Gọi M, I, J lần lượt là trung điểm AB, SD, CD ; G là trọng tâm tam giác SAB .

Tính số đo của góc giữa các cặp đoạn thẳng:

1. SA và DC

2. SB và AD

3. SM và BD

4. BG và IJ

Bài 26. Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SA = a\sqrt{2}$, $SA \perp (ABCD)$. Gọi M, N, P lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên các đường thẳng SB, SD, SC .

1. Chứng minh rằng: tất cả các mặt bên của hình chóp đều là các tam giác vuông.

2. Tính góc giữa các cạnh bên và mặt phẳng đáy của hình chóp.

3. Chứng minh rằng: $BD \perp (SAC)$, $BD // (AMN)$.

4. Chứng minh rằng: $SC \perp (AMN)$; AM, AN, AP đồng phẳng và $AP \perp MN$.

5. Tính diện tích thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (α) qua A và vuông góc với SB .

Bài 27. Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy và $SC = a\sqrt{2}$. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AB, AD .

1. Chứng minh rằng: $SH \perp (ABCD)$

2. Chứng minh rằng: $AC \perp SK$; $CK \perp SD$.

Bài 28. Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB = a$; $BC = a\sqrt{3}$, $SD = a\sqrt{5}$. Biết mặt bên SBC là tam giác vuông tại B , mặt bên SCD là tam giác vuông tại D .

1. Chứng minh rằng: $SA \perp (ABCD)$, tính độ dài đoạn thẳng SA .

2. Đường thẳng qua A vuông góc với AC cắt các đường CB, CD lần lượt tại I, J . Gọi H là hình chiếu của A lên SC ; K, L lần lượt là giao điểm của SB, SD với mặt phẳng (HIJ) .

Chứng minh rằng: $AK \perp (SBC)$; $AL \perp (SCD)$.

3. Tính diện tích tứ giác $AKHL$.

Bài 29. Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , mặt bên SAB là tam giác đều, mặt bên SCD là tam giác vuông cân tại S . Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB, AD .

1. Chứng minh rằng: $SI \perp (SCD)$, $SJ \perp (SAB)$

2. Gọi H là hình chiếu của S lên IJ . Chứng minh rằng: $SH \perp AC$

3. Gọi M là điểm thuộc đường thẳng CD sao cho: $BM \perp SA$. Tính độ dài AM theo a .

Bài 30. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a , gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$.

1. Tính độ dài đoạn SO
2. Gọi M là trung điểm của SC . Chứng minh rằng: $(MBD) \perp (SAC)$
3. Xác định và tính góc giữa hai mặt phẳng (MBD) và $ABCD$.
4. Xác định góc giữa cạnh bên và mặt đáy.
5. Xác định góc giữa mặt bên và mặt đáy.
6. Gọi (P) là mặt phẳng qua AM và song song với BD . Hãy tính diện tích thiết diện hình chóp cắt bởi (P) .

Bài 31. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm I , cạnh a , $\widehat{BAD} = 60^\circ$, $SC = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Biết (SBC) và (SCD) cùng vuông góc với $(ABCD)$.

1. Chứng minh rằng: $(SBD) \perp (SAC)$
2. Trong tam giác SCA kẻ IK vuông góc với SA tại K . Tính độ dài IK .
3. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) , (SAD) và $(ABCD)$.
4. Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi (α) là mặt phẳng qua C và vuông góc với SA .

Bài 32. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D . Biết rằng $AB = 2a$, $AD = DC = a$ và SA vuông góc với đáy, $SA = a$.

1. Chứng minh rằng: $(SAD) \perp (SDC)$; $(SAC) \perp (SBC)$.
2. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SDC) ; (SBC) và $(ABCD)$; (SBC) và (SAB) .
3. Xác định thiết diện hình chóp cắt bởi mặt phẳng (α) chứa SD và vuông góc với (SAC) .

Bài 33. Cho tứ diện $OABC$ có 3 cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc, $OA = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $OB = OC = a$.

Gọi I là trung điểm BC .

1. Chứng minh rằng: $(OAI) \perp (ABC)$.
2. Tính góc giữa AB và mặt phẳng (AOI) .
3. Dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung giữa hai đường thẳng OC và AB ; AI và OC .
4. Xác định thiết diện của tứ diện cắt bởi mặt phẳng chứa OB và vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Tính diện tích của thiết diện đó.

Bài 34. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là nửa lục giác đều cạnh a ($AB \parallel CD$, $AB > CD$). Mặt bên SAB là tam giác đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy.

1. Chứng minh rằng: $BD \perp SC$.
2. Tính khoảng cách từ điểm B đến (SAD) , khoảng cách giữa SD và AB .
3. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và $(ABCD)$.

Bài 35. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại C , $CA = a$, $CB = a\sqrt{3}$. Biết mặt bên $AA'B'B$ là hình vuông. Từ C kẻ $CH \perp AB'$, $HK \parallel A'B$ ($H \in AB'$, $K \in AA'$).

1. Chứng minh rằng: $BC \perp CK$, $AB' \perp (CHK)$.
2. Tính góc giữa $A'B$ và mặt phẳng $(BB'C'C)$.
3. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (CHK) .
4. Gọi M là trung điểm AB . Tính diện tích thiết diện của hình lăng trụ cắt bởi mặt phẳng (α) đi qua M và vuông góc với $A'B$.

Bài 36. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a .

1. Chứng minh rằng: $AD' \perp DB'$; $B'D \perp (BA'C')$; $(BDA') \perp (AB'C'D)$.
2. Tính góc giữa BC' và CD' ; BC' và $(BB'D'D)$.
3. Tính khoảng cách giữa BC' và mặt phẳng $(AD'C)$.

--- HẾT ---