

GIẢI PHƯƠNG TRÌNH MŨ BẰNG PHƯƠNG PHÁP HÀM SỐ - ĐÁNH GIÁ (KHÔNG CHỨA THAM SỐ)

PHƯƠNG PHÁP

PHƯƠNG PHÁP HÀM SỐ

- **Tính chất 1:** Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục và luôn đồng biến (hoặc luôn nghịch biến) trên $(a; b)$ thì phương trình $f(x) = k$ có không quá một nghiệm trên $(a; b)$
- **Tính chất 2:** Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục và luôn đồng biến (hoặc luôn nghịch biến); hàm số $y = g(x)$ liên tục và luôn nghịch biến (hoặc luôn đồng biến) trên $(a; b)$ thì phương trình: $f(x) = g(x)$ có không quá một nghiệm trên $(a; b)$.
- **Tính chất 3:** Nếu $y = f(x)$ đồng biến hoặc nghịch biến trên $(a; b)$ thì $f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v, \forall u, v \in (a; b)$.
- **Tính chất 4:** Nếu $f^{(n)}(x) > 0 \forall x \in (a; b)$ hoặc $f^{(n)}(x) < 0 \forall x \in (a; b)$ thì phương trình $f(x) = 0$ có nhiều nhất n nghiệm $x \in (a; b)$.
- **Tính chất 5:** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm đến cấp k liên tục trên $(a; b)$. Nếu phương trình $f^{(k)}(x) = 0$ có đúng m nghiệm thì phương trình $f^{(k-1)}(x) = 0$ có nhiều nhất là $m+1$ nghiệm.

Lưu ý: có thể thay $(a; b)$ bằng $[a; b], (a; b], [a; b)$.

PHƯƠNG PHÁP ĐÁNH GIÁ

- **Quy tắc 1.** Giải phương trình $f(x) = g(x)$.
 - Xác định $x = x_0$ là một nghiệm của phương trình.
 - Chứng minh với mọi $\begin{cases} x > x_0 \\ x < x_0 \end{cases}$ thì phương trình vô nghiệm.
 - Kết luận $x = x_0$ là nghiệm duy nhất.
- **Quy tắc 2.** Giải phương trình $f(x) = g(x)$.
 - Xét trên tập xác định D ta có $\begin{cases} f(x) \leq m, \forall x \in D \\ g(x) \geq m, \forall x \in D \end{cases} \Leftrightarrow f(x) \leq m \leq g(x), \forall x \in D$.
 - Phương trình thỏa mãn khi $f(x) = g(x) = m$.
 - Hoặc đánh giá trực tiếp $f(x) \leq g(x); f(x) \geq g(x)$. Từ đó tìm dấu "=" xảy ra.
- **Quy tắc 3.** Sử dụng tính chất của hàm số lượng giác.
 - Ta có: $\sin x \in [-1; 1]; \cos x \in [-1; 1]$.
 - Điều kiện để hàm số lượng giác $a \cos x + b \sin x = c$ có nghiệm là $a^2 + b^2 \geq c^2$.
 - Giá trị lượng giác của góc (cung) có liên quan đặc biệt.

Câu 1. Tính tổng tất cả các nghiệm của phương trình sau:

$$3^x + 2^x + 4 = 3(x + 2).$$

A. 1.

B. 0.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn A;

Ta có $3^x + 2^x + 4 = 3(x + 2) \Leftrightarrow 3^x + 2^x - 3x - 2 = 0$

Xét hàm số $f(x) = 3^x + 2^x - 3x - 2$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f'(x) = 3^x \ln 3 + 2^x \ln 2 - 3$

Khi đó $f''(x) = 3^x \cdot (\ln 3)^2 + 2^x \cdot (\ln 2)^2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow f'(x)$ là hàm đồng biến, liên tục trên $\mathbb{R} \Rightarrow f'(x) = 0$ có nhiều nhất một nghiệm trên $\mathbb{R}$.

Suy ra $f(x) = 0$ có nhiều nhất là hai nghiệm.

Mà ta thấy $f(1) = f(0) = 0 \Rightarrow x = 0; x = 1$ là hai nghiệm của phương trình.

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \{0; 1\}$. Do đó tổng các nghiệm là 1.

Câu 2. Gọi S là tập hợp mọi nghiệm của phương trình

$$2^{x^2-3x+2} - 2^{x^2-x-2} = 2x - 4. \text{ Số phần tử của } S \text{ là:}$$

- A. 3. B. 2. C. 1. D. 4.

Lời giải

Chọn C

Ta có $2x - 4 = (x^2 - x - 2) - (x^2 - 3x + 2)$.

Phương trình đã cho tương đương $2^{x^2-3x+2} + x^2 - 3x + 2 = 2^{x^2-x-2} + x^2 - x - 2 \quad (1)$

Xét hàm số $f(t) = 2^t + t, (\forall t \in \mathbb{R})$.

Ta có $f'(t) = 2^t \ln 2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

Suy ra $f(t)$ là hàm số đồng biến trên tập $\mathbb{R}$.

Do đó, từ (1) ta có $x^2 - 3x + 2 = x^2 - x - 2 \Leftrightarrow x = 2$.

Câu 3. Cho phương trình $9^x + 9 = -6 \cdot 3^x \cos(\pi x)$, số nghiệm thực của phương trình là

- A. 1 B. 2. C. 3. D. vô nghiệm.

Lời giải

Chọn A

Ta có phương trình $9^x + 9 = -6 \cdot 3^x \cos(\pi x) \Leftrightarrow 3^x + \frac{9}{3^x} = -6 \cos(\pi x) \quad (*)$

Mà $3^x + \frac{9}{3^x} \geq 6; -6 \cos(\pi x) \leq 6, \forall x \in \mathbb{R}$.

Phương trình (*) có nghiệm khi và chỉ khi $\begin{cases} 3^x + \frac{9}{3^x} = 6 \\ \cos \pi x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$

Câu 4. Số nghiệm của phương trình $\left(\frac{1}{16}\right)^{\cos^3 x} - \left(\frac{1}{8}\right)^{\cos x} = \cos 3x$ trên $[0; 2021]$ là?

- A. 1932. B. 1930. C. 1925. D. 1927.

Lời giải

Chọn B

Phương trình đã cho tương đương với: $\left(\frac{1}{2}\right)^{4\cos^3 x} - \left(\frac{1}{2}\right)^{3\cos x} = 4\cos^3 x - 3\cos x$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{4\cos^3 x} - 4\cos^3 x = \left(\frac{1}{2}\right)^{3\cos x} - 3\cos x \quad (1)$$

Xét $f(t) = \left(\frac{1}{2}\right)^t - t$, ta có $f'(t) = \left(\frac{1}{2}\right)^t \ln \frac{1}{2} - 1 < 0, \forall t \in \mathbb{R}$

Suy ra hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Từ (1): $f(4\cos^3 x) = f(3\cos x)$

$$\Leftrightarrow 4\cos^3 x = 3\cos x \Leftrightarrow 4\cos^3 x - 3\cos x = 0 \Leftrightarrow \cos 3x = 0 \Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{2} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}, (k \in \mathbb{Z})$$

Theo bài ra ta có: $0 \leq \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} \leq 2021 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq k \leq 1929,41284$.

Vì $k \in \mathbb{Z}$ nên có 1930 nghiệm.

Câu 5. Tổng các nghiệm của phương trình $\frac{1}{5^{x+8}} + \frac{3^{(x+2)^2}}{27} + x + 1 = \frac{1}{5 \cdot 5^{x^2+4x}} + 9 \cdot 3^{x+6} + (x+4)(2-x)$ bằng

A. $\sqrt{37}$.

B. -6.

C. 3.

D. -3.

Lời giải

Chọn D

♦ Ta có: $\frac{1}{5^{x+8}} + \frac{3^{(x+2)^2}}{27} + x + 1 = \frac{1}{5 \cdot 5^{x^2+4x}} + 9 \cdot 3^{x+6} + (x+4)(2-x)$

$$\Leftrightarrow 5^{-x-8} - 3^{x+8} - x - 8 = 5^{-x^2-4x-1} - 3^{x^2+4x+1} - x^2 - 4x - 1.$$

♦ Xét hàm số: $f(t) = 5^{-t} - 3^t - t$.

♦ Có: $f'(t) = -5^{-t} \cdot \ln 5 - 3^t \cdot \ln 3 - 1 < 0$ với $\forall t \in \mathbb{R}$.

♦ Suy ra $f(t)$ là hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

♦ Khi đó $f(x+8) = f(x^2+4x+1)$

$$\Leftrightarrow x+8 = x^2+4x+1$$

$$\Leftrightarrow x^2+3x-7=0 \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{37}}{2}$$

(hoặc $a \cdot c = -7 < 0$ suy ra phương trình có 2 nghiệm phân biệt trái dấu).

♦ Tổng 2 nghiệm $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -3$.

Câu 6. Cho $y = f(x)$ là hàm số chẵn xác định trên $\mathbb{R}$, sao cho $f(0) \neq 0$ và phương trình $4^x - 4^{-x} = f(x)$ có đúng 10 nghiệm thực phân biệt. Số nghiệm thực của phương trình

$$4^x + 4^{-x} = f^2\left(\frac{x}{2}\right) + 2$$
 là

A. 10

B. 20.

C. 5.

D. 15.

Lời giải

Chọn B

Từ giả thiết $f(0) \neq 0$ ta suy ra $x=0$ không phải là nghiệm của hai phương trình

$$4^x - 4^{-x} = f(x) \quad \text{và} \quad 4^x + 4^{-x} = f^2\left(\frac{x}{2}\right) + 2$$

Ta có $4^x + 4^{-x} = f^2\left(\frac{x}{2}\right) + 2$ (*)

$$\Leftrightarrow (2^x - 2^{-x})^2 = f^2\left(\frac{x}{2}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x - 2^{-x} = f\left(\frac{x}{2}\right) & (1) \\ 2^x - 2^{-x} = -f\left(\frac{x}{2}\right) & (2) \end{cases}$$

$$\text{Từ (2)} \Leftrightarrow 2^{-x} - 2^x = f\left(-\frac{x}{2}\right) \quad (3)$$

Xét phương trình (1) đặt $t = \frac{x}{2}$. Khi đó ta có: $4^t - 4^{-t} = f(t)$ (4)

Theo giả thiết phương trình $4^x - 4^{-x} = f(x)$ có 10 nghiệm phân biệt nên phương trình (4) có 10 nghiệm t . Suy ra phương trình (1) có 10 nghiệm x phân biệt. Giả sử 10 nghiệm đó là $x_1; x_2; \dots; x_{10}$. Chứng minh tương tự ta có phương trình (3) có 10 nghiệm phân biệt là $-x_1; -x_2; \dots; -x_{10}$.

Dễ thấy số nghiệm của phương trình (*) bằng tổng số nghiệm phương trình (1) và (3) (nghiệm trùng nhau tính 1 lần). Vậy ta kết luận phương trình (*) có 20 nghiệm.

- Câu 7.** Cho tham số thực a . Biết phương trình $e^x - e^{-x} = 2\cos ax$ có 5 nghiệm thực phân biệt. Hỏi phương trình $e^x + e^{-x} = 2\cos ax + 4$ có bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?
- A.** 10 **B.** 20. **C.** 5. **D.** 15.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } e^x + e^{-x} = 2\cos ax + 4 \Leftrightarrow \left(e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}\right)^2 = 2(\cos ax + 1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}} = 2\cos \frac{ax}{2} & (1) \\ e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}} = -2\cos \frac{ax}{2} & (2) \end{cases}$$

Giả sử x_0 là nghiệm của phương trình $e^x - e^{-x} = 2\cos ax$ (*), thì $x_0 \neq 0$ và $2x_0$ là nghiệm của (1), $-2x_0$ là nghiệm của (2); hoặc ngược lại.

Phương trình (*) có 5 nghiệm nên hai phương trình (1), (2) có 5 nghiệm phân biệt.

Vậy phương trình $e^x + e^{-x} = 2\cos ax + 4$ có 10 nghiệm phân biệt.

- Câu 8.** Tính tổng tất cả các nghiệm của phương trình $e^{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} = \tan x$ thuộc đoạn $[0; 50\pi]$?
- A.** $\frac{1853\pi}{2}$. **B.** $\frac{2475\pi}{2}$. **C.** $\frac{2671\pi}{2}$. **D.** $\frac{2105\pi}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

$$\text{Phương trình } e^{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} = \tan x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sin x - \cos x}{\sqrt{2}} = \ln|\sin x| - \ln|\cos x| \\ \tan x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2} \ln|\cos x| - \cos x = \sqrt{2} \ln|\sin x| - \sin x \\ \tan x > 0 \end{cases}$$

+ Khi $\cos x < 0$ và $\sin x < 0$, xét hàm số $f(t) = \sqrt{2} \ln|t| - t$, trên tập $[-1; 0)$.

$$f'(t) = \frac{\sqrt{2}}{t} - 1 \text{ suy ra } f'(t) < 0, \forall t \in [-1; 0).$$

Nên hàm số $f(t) = \sqrt{2} \ln|t| - t$ nghịch biến trên $[-1; 0)$.

Mà phương trình $\sqrt{2} \ln|\cos x| - \cos x = \sqrt{2} \ln|\sin x| - \sin x$ có dạng $f(\cos x) = f(\sin x)$.

$$\text{Nên } \sqrt{2} \ln|\cos x| - \cos x = \sqrt{2} \ln|\sin x| - \sin x \Leftrightarrow \cos x = \sin x \quad (1)$$

+ Khi $\cos x > 0$ và $\sin x > 0$, xét hàm số $f(t) = \sqrt{2} \ln|t| - t$, trên tập $(0; 1]$

$$f'(t) = \frac{\sqrt{2}}{t} - 1 \text{ suy ra } f'(t) > 0, \forall t \in (0; 1].$$

Nên hàm số $f(t) = \sqrt{2} \ln|t| - t$ đồng biến trên $(0; 1]$.

Mà phương trình $\sqrt{2} \ln|\cos x| - \cos x = \sqrt{2} \ln|\sin x| - \sin x$ có dạng $f(\cos x) = f(\sin x)$.

$$\text{Nên } \sqrt{2} \ln|\cos x| - \cos x = \sqrt{2} \ln|\sin x| - \sin x \Leftrightarrow \cos x = \sin x \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta có } \cos x = \sin x \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Do chỉ xét } x \in [0; 50\pi] \text{ nên } 0 \leq \frac{\pi}{4} + k\pi \leq 50\pi \Leftrightarrow -\frac{1}{4} \leq k \leq \frac{199}{4}.$$

$$\text{Mà } k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k \in \{0; 1; 2; 3; \dots; 49\}.$$

$$\text{Vậy phương trình đã cho có các nghiệm } \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4} + \pi; \frac{\pi}{4} + 2\pi; \dots; \frac{\pi}{4} + 49\pi.$$

Dãy số trên là 50 số hạng đầu liên tiếp của một cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = \frac{\pi}{4}$ và công sai

$$d = \pi \text{ nên tổng các nghiệm trên là } S_{50} = \frac{50}{2} \left[2 \cdot \frac{\pi}{4} + (50-1)\pi \right] = \frac{2475\pi}{2}.$$

GIẢI PHƯƠNG TRÌNH MŨ BẰNG PHƯƠNG PHÁP HÀM ĐẶC TRƯNG (KHÔNG CHỨA THAM SỐ)

PHƯƠNG PHÁP

- ✚ Nếu hàm số $y = f(x)$ đơn điệu trên K thì với mọi $u, v \in K$ ta có $f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v$.
- ✚ Nếu hàm số $y = f(x)$ đơn điệu trên K thì trên K phương trình $f(x) = 0$ có tối đa một nghiệm.
- ✚ Phương trình $f(u) = f(v)$.
 - **Bước 1:** Biến đổi phương trình về dạng $f(u) = f(v)$ với $u, v \in K$, trong đó $y = f(t)$ là hàm số đơn điệu trên K
 - **Bước 2:** Khảo sát hàm số $y = f(t)$ để đưa ra tính đơn điệu của hàm số $y = f(t)$ trên K .
 - **Bước 3:** Kết luận $f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v$.
- ✚ Phương trình $f(u) = 0$.
 - **Bước 1:** Biến đổi phương trình về dạng $f(u) = 0$ với $u \in K$, trong đó $y = f(t)$ là hàm số đơn điệu trên K
 - **Bước 2:** Khảo sát hàm số $y = f(t)$ để đưa ra tính đơn điệu của hàm số $y = f(t)$ trên K .
 - **Bước 3:** Tìm giá trị u_0 sao cho $f(u_0) = 0$.
 - **Bước 3:** Kết luận phương trình $f(u) = 0 \Leftrightarrow u = u_0$

- Câu 1.** Tính tổng bình phương tất cả các nghiệm của phương trình $5^{x^2-2} = 5^{x^4-x^2-1} + (x^2-1)^2$.
- A. 1. B. 5. C. 2. D. 0.

Lời giải

Chọn C

$$5^{x^2-2} = 5^{x^4-x^2-1} + (x^2-1)^2 \Leftrightarrow 5^{x^2-2} + x^2 - 2 = 5^{x^4-x^2-1} + x^4 - x^2 - 1 (*)$$

Xét hàm số $f(t) = 5^t + t, t \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(t) = 5^t \ln 5 + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow y = f(t)$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Ta có $(*) \Leftrightarrow f(x^2-2) = f(x^4-x^2-1) \Leftrightarrow x^2-2 = x^4-x^2-1 \Leftrightarrow x^4-2x^2+1=0 \Leftrightarrow x^2=1$
 $\Leftrightarrow x = \pm 1$. Vậy tổng bình phương các nghiệm của phương trình là 2.

- Câu 2.** Số nghiệm thực của phương trình $3 \cdot 2^x + 4 \cdot 3^x + 5 \cdot 4^x = 6 \cdot 5^x$ là
- A. 1. B. 5. C. 2. D. 0.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } 3 \cdot 2^x + 4 \cdot 3^x + 5 \cdot 4^x = 6 \cdot 5^x \Leftrightarrow 3 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^x + 4 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^x + 5 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^x - 6 = 0.$$

$$\text{Xét hàm số } f(x) = 3 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^x + 4 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^x + 5 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^x - 6$$

$$\Rightarrow f'(x) = 3 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^x \cdot \ln \frac{2}{5} + 4 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^x \cdot \ln \frac{3}{5} + 5 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^x \cdot \ln \frac{4}{5} < 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow$ hàm số $y = f'(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ phương trình $f(x) = 0$ có nhiều nhất 1 nghiệm trên $\mathbb{R}$.

Mặt khác ta có hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(1) = \frac{8}{5}, f(2) = -\frac{22}{25} \Rightarrow f(1) \cdot f(2) < 0$.

Suy ra phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm nhất một nghiệm trên khoảng $(1; 2)$.

Vậy phương trình đã cho có đúng 1 nghiệm.

- Câu 3.** Trên đoạn $[-2021; 2022]$, phương trình $2020^{\sin x} = \sin x + \sqrt{2 - \cos^2 x}$ có bao nhiêu nghiệm thực?
A. 642. **B.** 643. **C.** 1286. **D.** 1287.

Lời giải

Chọn D

Ta có $2020^{\sin x} = \sin x + \sqrt{2 - \cos^2 x} \Leftrightarrow 2020^{\sin x} = \sin x + \sqrt{1 + \sin^2 x}$ (1)

Đặt $t = \sin x, t \in [-1; 1]$, khi đó phương trình (1) trở thành $2020^t = t + \sqrt{1 + t^2}$.

Ta có $\sqrt{1 + t^2} > \sqrt{t^2} = |t| \geq -t, \forall t \in [-1; 1] \Rightarrow t + \sqrt{1 + t^2} > 0, \forall t \in [-1; 1]$.

Nên (2) $\Leftrightarrow t = \log_{2020}(t + \sqrt{1 + t^2}) \Leftrightarrow \log_{2020}(t + \sqrt{1 + t^2}) - t = 0$ (2)

Xét hàm số $f(t) = \log_{2020}(t + \sqrt{1 + t^2}) - t \Rightarrow f'(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + t^2} \cdot \ln 2020} - 1 < 0, \forall t \in [-1; 1]$.

$\Rightarrow$ Hàm số $y = f(t)$ nghịch biến trên $[-1; 1]$.

Do đó trên $[-1; 1]$ phương trình $f(t) = 0$ có tối đa 1 nghiệm.

Mặt khác $f(0) = 0$ nên phương trình $f(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$.

Nghĩa là (2) $\Leftrightarrow t = 0 \Rightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Với $x \in [-2021; 2022]$ ta có $-2021 \leq k\pi \leq 2022 \Leftrightarrow -\frac{2021}{\pi} \leq k \leq \frac{2022}{\pi}$.

Mà $k \in \mathbb{Z}$ nên $k \in \{-643; -642; \dots; 643\}$.

Vậy trên $[-2021; 2022]$ phương trình có 1287 nghiệm thực.

- Câu 4.** Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $1 \leq x \leq 2022$ và $x + x^2 - 25^y = 5^y$.
A. 1010. **B.** 2022. **C.** 7. **D.** 5.

Lời giải

Chọn D

Theo bài: $x + x^2 - 25^y = 5^y \Leftrightarrow x + x^2 = 5^y + 25^y$.

Xét hàm $f(t) = t + t^2, (t > 0)$.

Ta có: $f'(t) = 1 + 2t > 0, \forall t > 0 \Rightarrow f(t)$ là hàm đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Vì vậy, (1) $\Leftrightarrow f(x) = f(5^y) \Leftrightarrow x = 5^y$.

Theo giả thiết, $1 \leq x \leq 2022 \Leftrightarrow 1 \leq 5^y \leq 2022 \Leftrightarrow 0 \leq y \leq \log_5 2022$.

Vì y nguyên nên

$y = 0 \Rightarrow x = 1$
$y = 1 \Rightarrow x = 5$
$y = 2 \Rightarrow x = 25$
$y = 3 \Rightarrow x = 125$
$y = 4 \Rightarrow x = 625$

. Vậy có tất cả 5 cặp $(x; y)$ thỏa mãn.

Câu 5. Có bao nhiêu số nguyên x , $x \in [-10; 10]$ thỏa mãn $3 \cdot 3^x + 2x + 1 + \cos 2y = 3^{\sin^2 y}$ (*) ?

- A.** 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

Ta có:

$$3 \cdot 3^x + 2x + 1 + \cos 2y = 3^{\sin^2 y}$$

$$\Leftrightarrow 3 \cdot 3^x + 2x + 1 + 1 - 2 \sin^2 y = 3^{\sin^2 y} \Leftrightarrow 3^{x+1} + 2(x+1) = 3^{\sin^2 y} + 2 \sin^2 y.$$

Đặt $f(t) = 3^t + 2t \Rightarrow f'(t) = 3^t \ln 3 + 2 > 0, \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Vì vậy phương trình (*)} \Leftrightarrow f(x+1) = f(\sin^2 y)$$

$$\Leftrightarrow x+1 = \sin^2 y \Leftrightarrow x = -\cos^2 y \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 0.$$

Mà x nguyên, $x \in [-10; 10]$ có 2 giá trị của x thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 6. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $x, y \in [-1; 14]$ và

$$\sqrt{x+1} = 2(y+1)^2 - 2(x+2) + \sqrt{y^2 + 2y}.$$

- A.** 8. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 17

Lời giải

Chọn B

$$\text{Điều kiện xác định } \begin{cases} y^2 + 2y \geq 0 \\ x+1 \geq 0 \end{cases}.$$

$$\text{Theo bài } \sqrt{x+1} = 2(y+1)^2 - 2(x+2) + \sqrt{y^2 + 2y}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+1} = 2(y^2 + 2y) + 2 - 2(x+2) + \sqrt{y^2 + 2y}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+1} + 2(x+1) = \sqrt{y^2 + 2y} + 2(y^2 + 2y) \quad (*).$$

Xét hàm số $f(t) = \sqrt{t} + 2t$ trên khoảng $(0; +\infty)$ ta có:

$$f'(t) = 2 + \frac{1}{2\sqrt{t}} > 0, \forall t > 0 \Rightarrow f(t) \text{ đồng biến trên } (0; +\infty).$$

$$(*) \Leftrightarrow f(x+1) = f(y^2 + 2y) \Leftrightarrow x+1 = y^2 + 2y \Leftrightarrow x = y^2 + 2y - 1.$$

$$\text{Do } x, y \in [-1; 14] \text{ nên } -1 \leq y^2 + 2y - 1 \leq 14 \Leftrightarrow 1 \leq (y+1)^2 \leq 16 \Leftrightarrow \begin{cases} -5 \leq y \leq -2 \\ 0 \leq y \leq 3 \end{cases}$$

Do $y \in \mathbb{Z}$, $y \in [-1; 14]$ và $y^2 + 2y \geq 0$ nên $y \in \{0; 1; 2; 3\}$.

Vậy có 4 cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa bài toán là

Câu 7. Số nghiệm của phương trình $14^{\sin x} - 14^{\cos x} = \frac{13}{2} 7^{\cos x} \cdot 2^{\sin x}$ trong khoảng $(0; 3\pi)$ là

- A.** 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } 14^{\sin x} - 14^{\cos x} = \frac{13}{2} 7^{\cos x} \cdot 2^{\sin x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{7^{\sin x}}{7^{\cos x}} - \frac{2^{\cos x}}{2^{\sin x}} = \frac{13}{2} \Leftrightarrow 7^{\sin x - \cos x} - 2^{-(\sin x - \cos x)} = 7 - 2^{-1}$$

Xét hàm số $f(u) = 7^u - 2^{-u} \Rightarrow f'(u) = 7^u \ln 7 + 2^{-u} \ln 2 > 0 \forall u \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ Hàm số $f(u)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow 7^{\sin x - \cos x} - 2^{-(\sin x - \cos x)} = 7 - 2^{-1}$ có nghiệm khi và chỉ khi $\sin x - \cos x = 1$.

$$\Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x - \frac{\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \pi + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

Suy ra tập các nghiệm thuộc $(0; 3\pi)$ của phương trình là: $S = \left\{\frac{\pi}{2}; \pi; \frac{5\pi}{2}\right\}$.

Vậy phương trình có 3 nghiệm thuộc $(0; 3\pi)$.

Câu 8. Cho phương trình $(2^{x^2} - 2^x)(2^{x^2} + 2^x) = (3x^4 - x^2 - 2x) \cdot \ln 2$. Chọn mệnh đề đúng.

A. Phương trình có hai nghiệm trái dấu thuộc đoạn $[-1; 1]$.

B. Tổng các nghiệm thuộc đoạn $[-1; 1]$ của phương trình bằng 1.

C. Tổng các nghiệm thuộc đoạn $[-1; 1]$ của phương trình bằng 0.

D. Phương trình vô nghiệm.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } (2^{x^2} - 2^x)(2^{x^2} + 2^x) = \ln 2 \cdot (3x^4 - x^2 - 2x)$$

$$\Leftrightarrow 4^{x^2} - 4^x = (3x^4 + 2x^2 - 3x^2 - 2x) \cdot \ln 2 \Leftrightarrow 4^{x^2} - (3x^4 + 2x^2) \ln 2 = 4^x - (3x^2 + 2x) \ln 2$$

$$\text{Xét hàm số } f(u) = 4^u - (3u^2 + 2u) \ln 2 \Rightarrow f'(u) = 4^u \ln 4 - \ln 4(3u + 1)$$

$$\Rightarrow f'(u) = 0 \Leftrightarrow 4^u - (3u + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = 0 \\ u = 1 \end{cases}$$

Lập BBT, ta dễ dàng suy ra hàm số $f(u)$ đồng biến trên $(-\infty; 0)$ và $(1; +\infty)$; hàm số $f(u)$ nghịch biến trên $(0; 1)$.

$$\text{Với } \begin{cases} x \in [0; 1] \Rightarrow x^2 \in [0; 1] \\ x \in [-1; 0) \Rightarrow x^2 \in [0; 1] \end{cases} \text{ khi đó hàm số } y = f(x^2) \text{ luôn đồng biến trên } [-1; 1]; \text{ hàm số}$$

$y = f(x)$ đồng biến trên $[0; 1]$ và nghịch biến trên $[-1; 0)$.

Suy ra phương trình $4^{x^2} - \ln 2 \cdot (3x^4 + 2x^2) = 4^x - \ln 2 \cdot (3x^2 + 2x)$ có tối đa 2 nghiệm.

$$\text{Xét } x \in [0; 1], \text{ phương trình có nghiệm khi và chỉ khi } x^2 = x \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases} \text{ là hai nghiệm phân biệt}$$

của phương trình. Từ đó, $x \in [-1; 0)$ thì phương trình vô nghiệm.

Vậy tổng các nghiệm của phương trình bằng 1.

Câu 9. Phương trình $e^{ax^2+bx} - e^{6x} = (6-b)x - ax^2$ có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi

A. $b \neq 6$.

B. $\forall a, b \in \mathbb{R}$.

C. $a \neq 0$.

D. $(a, b) \neq (0; 6)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $e^{ax^2+bx} - e^{6x} = (6-b)x - ax^2 \Leftrightarrow e^{ax^2+bx} + ax^2 + bx = e^{6x} + 6x$

Xét hàm số $f(u) = e^u + u \Rightarrow f'(u) = e^u + 1 > 0 \forall u \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ Hàm số $f(u)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow e^{ax^2+bx} + ax^2 + bx = e^{6x} + 6x$ có nghiệm khi và chỉ $ax^2 + bx = 6x$.

$$\Leftrightarrow ax^2 + (b-6)x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ ax+b-6=0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Phương trình có hai nghiệm khi và chỉ khi $a \neq 0$ và $b \neq 6$.

Câu 10. Có bao nhiêu số nguyên dương x thỏa mãn $2 + 2^x \cdot \cos^2 y = (2^{\sin^2 y} + x) \cdot 2^x$.

A. 2.

B. 1.

C. 0.

D. 3.

Lời giải

Chọn B

$$2 + 2^x \cdot \cos^2 y = (2^{\sin^2 y} + x) \cdot 2^x \Leftrightarrow 2 \cdot 2^{-x} + \cos^2 y = 2^{\sin^2 y} + x \Leftrightarrow 2^{1-x} + 1 - x = 2^{\sin^2 y} + \sin^2 y. \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t) = 2^t + t$. Ta có $f'(t) = 2^t \ln 2 + 1 > 0$ với mọi t .

Do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Khi đó } (1) \Leftrightarrow f(1-x) = f(\sin^2 y) \Leftrightarrow 1-x = \sin^2 y.$$

Vì $\sin^2 y \in [0;1]$ và x là số nguyên dương nên ta được $x=1$.

Câu 11. Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn $x \leq 2022$ và $x^4 - 2x^3 - 2 \cdot 3^y = 9^y - 3x^2 + 2x$.

A. 19.

B. 15.

C. 13.

D. 6.

Lời giải

Chọn C

$$\begin{aligned} x^4 - 2x^3 - 2 \cdot 3^y = 9^y - 3x^2 + 2x &\Leftrightarrow x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x = 3^{2y} + 2 \cdot 3^y \\ &\Leftrightarrow (x^2 - x)^2 + 2(x^2 - x) = (3^y)^2 + 2 \cdot 3^y. \quad (1) \end{aligned}$$

Vì x, y là các số nguyên dương do đó $x^2 - x \geq 0$ và $y > 0$.

Xét hàm số $f(t) = t^2 + 2t$ với $t > 0$. Ta có $f'(t) = 2t + 2 > 0$ với mọi $t > 0$.

Do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

$$\text{Khi đó } (1) \Leftrightarrow f(x^2 - x) = f(3^y) \Leftrightarrow x^2 - x = 3^y \Leftrightarrow y = \log_3(x^2 - x).$$

Điều kiện: $x^2 - x > 0$. Suy ra $x \in \{2; 3; \dots; 2022\}$.

$$\text{Suy ra } \log_3(2^2 - 2) \leq y \leq \log_3(2022^2 - 2022) \Rightarrow 1 \leq y \leq 13.$$

Với mỗi $y \in \{1; 2; \dots; 13\}$ ta có duy nhất x nguyên dương thỏa mãn.

Vậy có tất cả 13 cặp $(x; y)$ thỏa đề bài.

Câu 12. Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn $y \leq 1994$ và $5^{3x^2 - x^3 + y} \cdot (4 + 3^{x^3 - y}) = 4 + 27^{x^2}$.

A. 10.

B. 13.

C. 3.

D. 9.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$$5^{3x^2-x^3+y} \cdot (4+3^{x^3-y}) = 4+27^{x^2} \Leftrightarrow 5^{3x^2-x^3+y} \cdot (4+3^{x^3-y}) = 4+3^{3x^2} \Leftrightarrow \frac{4+3^{x^3-y}}{5^{x^3-y}} = \frac{4+3^{3x^2}}{5^{3x^2}}. \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t) = \frac{4+3^t}{5^t}$. Ta có $f'(t) = -\frac{4}{5^t} \cdot \ln 5 + \left(\frac{3}{5}\right)^t \cdot \ln \frac{3}{5} < 0$ với mọi t .

Suy ra hàm số $f(t)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Khi đó $(1) \Leftrightarrow f(x^3 - y) = f(3x^2) \Leftrightarrow x^3 - y = 3x^2 \Leftrightarrow y = x^3 - 3x^2$. (2)

Vì $y > 0$ và x là số nguyên dương nên $x \geq 4$.

$y \leq 1994$ và từ (2) ta có: $x^3 - 3x^2 \leq 1994 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - 1994 \leq 0$. (3)

Hàm số $g(x) = x^3 - 3x^2 - 1994$ đồng biến trên $[4; +\infty)$ và $g(13) < 0$, $g(14) > 0$.

Mặt khác x là số nguyên dương nên từ (3) ta có $x \leq 13$.

Suy ra $x \in \{4; 5; \dots; 13\}$. Và với mỗi giá trị của x ta được duy nhất giá trị y thỏa mãn.

Vậy có tất cả 10 cặp $(x; y)$ thỏa đề bài.

Câu 13. Tính tổng các nghiệm của phương trình $2021^{2021x} + 2021^{x+1} \cdot x = 2021^{x^2} + 2021^x \cdot x^2$.

A. 2.

B. 2021.

C. 2022.

D. 2023.

Lời giải

Chon C

Điều kiện: $x \in \mathbb{R}$

Chia 2 vế của phương trình cho $2021^x > 0$, ta được: $2021^{2020x} + 2021x = 2021^{x^2-x} + x^2$

$$\Leftrightarrow 2021^{2020x} + 2020x = 2021^{x^2-x} + x^2 - x$$

Xét hàm số $f(t) = 2021^t + t$ trên $\mathbb{R}$

$$f'(t) = 2021^t \cdot \ln(2021) + 1 > 0, \forall t$$

$\Rightarrow$ hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

ma $f(2021x) = f(x^2 - x)$

Từ đó suy ra: $2021x = x^2 - x \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2022 \end{cases}$

Vậy ta có: $x_1 + x_2 = 2022$.

Câu 14. Phương trình $x^6 + 6x^4 - 8^x x^3 + (15 - 3 \cdot 4^x)x^2 - 6 \cdot 2^x x + 10 = 0$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 1.

B. 0.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chon A

Điều kiện: $x \in \mathbb{R}$

Phương trình $\Leftrightarrow x^6 + 6x^4 + 15x^2 + 10 = 8^x x^3 + 3 \cdot 4^x x^2 + 6 \cdot 2^x x$

$$\Leftrightarrow (x^2+1)^3 + 3(x^2+1)^2 + 6(x^2+1) = (2^x x)^3 + 3.(2^x x)^2 + 6.(2^x x)$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 3t^2 + 6t$ trên $\mathbb{R}$

$$f'(t) = 3t^2 + 6t + 6 = 3[(t+1)^2 + 1] > 0, \forall t$$

$\Rightarrow$ hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

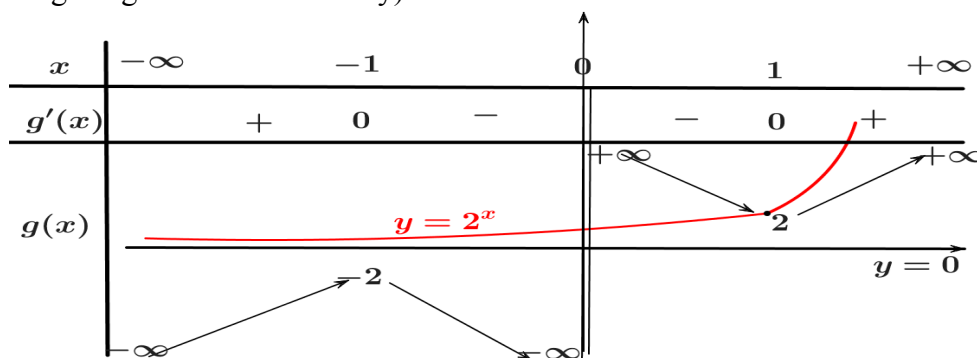
$$\text{mà } f(x^2+1) = f(2^x x)$$

Từ đó suy ra: $x^2+1 = x \cdot 2^x$ (2)

+ Xét $x=0 \Rightarrow 1=0$ (vô lý) $\Rightarrow x=0$ không là nghiệm của $pt(2)$.

+ Xét $x \neq 0$, chia 2 vế của $pt(2)$ cho x ta được: $\frac{x^2+1}{x} = 2^x$

Vậy số nghiệm của phương trình là số giao điểm của 2 đường $\begin{cases} y = 2^x \\ y = g(x) = \frac{x^2+1}{x} \end{cases}$ và bảng 1 (hiển thị trong bảng biến thiên dưới đây)



Câu 15. Cho hàm số $f(x) = 2022^x - 2022^{-x}$. Nghiệm x_0 của phương trình $\frac{f(2.5^x)}{f(-\sqrt{3.5^x+1})} = -1$ thuộc

khoảng nào dưới đây?

A. $(-2; -1)$.

B. $(-1; 1)$.

C. $(1; 5)$.

D. $(0; 3)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $f'(x) = 2022^x \cdot \ln(2022) + 2022^{-x} \cdot \ln(2022) > 0, \forall x$

$\Rightarrow$ hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Ta lại có: $f(-x) = 2022^{-x} - 2022^x = -f(x)$

$$\text{Phương trình } \frac{f(2.5^x)}{f(-\sqrt{3.5^x+1})} = -1 \Leftrightarrow f(2.5^x) = f(\sqrt{3.5^x+1})$$

$$\text{Từ đó ta có: } 2.5^x = \sqrt{3.5^x+1} \Leftrightarrow \begin{cases} 2.5^x > 0, \forall x \\ 4.25^x = 3.5^x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5^x = 1 \Rightarrow x = 0 \\ 5^x = -\frac{1}{4} (l) \end{cases}$$

Vậy nghiệm $x_0 = 0 \in (-1; 1)$.

Câu 16. Gọi S là tập hợp gồm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình $x(2^{x^2-x} + 9^{3-2x} - 4^{2x-3} - 3^{x-x^2}) + x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 2^{x^2-x} + 9^{3-2x} - 4^{2x-3} - 3^{x-x^2}$. Tính tổng bình phương các phần tử của S .

A. 5.

B. 25.

C. 13.

D. 14.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Phương trình } \Leftrightarrow (x-1)(2^{x^2-x} + 3^{6-4x} - 2^{4x-6} - 3^{x-x^2}) + (x-1)(x^2 - 5x + 6) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(2^{x^2-x} + 3^{6-4x} - 2^{4x-6} - 3^{x-x^2} + x^2 - 5x + 6) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ 2^{x^2-x} - 3^{x-x^2} + (x^2 - x) = 2^{4x-6} - 3^{6-4x} + (4x-6) \end{cases} \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t) = 2^t - 3^{-t} + t$ trên tập $\mathbb{R}$.

Ta có $f'(t) = 2^t \ln 2 + 3^{-t} \ln 3 + 1 > 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$ suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó:

$$\text{Phương trình (1)} \Leftrightarrow f(x^2 - x) = f(4x - 6) \Leftrightarrow x^2 - x = 4x - 6 \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=3 \end{cases}.$$

Vậy tổng cần tìm là $1^2 + 2^2 + 3^2 = 14$.

Câu 17. Cho phương trình $2021^{\sin^2 x - \sin x} = \frac{\cos^4 x + 2022}{\sin^2 x - 2 \sin x + 2023}$. Tổng các nghiệm thuộc $[-2021\pi; 2021\pi]$ của phương trình là.

A. 2021π .

B. $\frac{2023\pi}{2}$.

C. 1010π .

D. $\frac{2021\pi}{2}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Bất phương trình} \Leftrightarrow 2021^{1-\sin x - \cos^2 x} = \frac{(\cos^2 x)^2 + 2022}{(1 - \sin x)^2 + 2022}$$

$$\Leftrightarrow [(1 - \sin x)^2 + 2022] \cdot 2021^{1-\sin x} = [(\cos^2 x)^2 + 2022] \cdot 2021^{\cos^2 x} \quad (1).$$

Xét hàm số $f(t) = (t^2 + 2022)2021^t$ trên tập $\mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } f'(t) = (t^2 \ln 2021 + 2t + 2022 \ln 2021) \cdot 2021^t$$

Vì tam thức bậc hai $t^2 \ln 2021 + 2t + 2022 \ln 2021$ có $\Delta' = 1 - 2022 \ln^2 2021 < 0$ và $\ln 2021 > 0$

Suy ra $f'(t) = (t^2 \ln 2021 + 2t + 2022 \ln 2021) \cdot 2021^t > 0$ với $\forall t \in \mathbb{R}$

Hay hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó:

$$\text{Phương trình (1)} \Leftrightarrow f(1 - \sin x) = f(\cos^2 x) \Leftrightarrow 1 - \sin x = \cos^2 x \Leftrightarrow \sin^2 x - \sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \sin x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + m2\pi \end{cases}, (k, m \in \mathbb{Z}).$$

Xét các nghiệm thuộc $[-2021\pi; 2021\pi]$ ta có

$$+) \begin{cases} -2021\pi \leq k\pi \leq 2021\pi \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2021 \leq k \leq 2021 \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow k = -2021, -2020, \dots, 2020, 2021.$$

$$+) \begin{cases} -2021\pi \leq \frac{\pi}{2} + m2\pi \leq 2021\pi \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{4043}{4} \leq m \leq \frac{4041}{4} \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow m = -1010, -1009, \dots, 1009, 1010.$$

Tổng cần tìm là $S = [(-2021\pi) + (-2020\pi) + \dots + 2020\pi + 2021\pi]$

$$+ \left[\left(\frac{\pi}{2} - 1010\pi \right) + \left(\frac{\pi}{2} - 1009\pi \right) + \dots + \left(\frac{\pi}{2} + 1009\pi \right) + \left(\frac{\pi}{2} + 1010\pi \right) \right] = \frac{2021\pi}{2}$$

Câu 18. Cho $x; y$ là hai số thực dương thỏa mãn $(xy-1).3^{4-2y} + (x+2y).3^{x(1+3y)} = 0$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 3(x+y)$ bằng $a\sqrt{b}-c$, với $a; b; c$ là các số nguyên tố cùng nhau. Khi đó $a+b+c$ bằng

A. 17.

B. 14.

C. 16.

D. 15.

Lời giải

Chọn C

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } (xy-1).3^{4-2y} + (x+2y).3^{x(1+3y)} &= 0 \Leftrightarrow (xy-1).3^{4-3xy} + (x+2y).3^{x+2y} = 0 \\ \Leftrightarrow (3-3xy).3^{3-3xy} &= (x+2y).3^{x+2y} \quad (1) \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = t.3^t$ trên $(0; +\infty)$

$f'(t) = 3^t + t.3^t \ln 3 > 0 \forall t \in (0; +\infty)$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$

$$\text{Do đó } (1) \Leftrightarrow f(3-3xy) = f(x+2y) \Leftrightarrow 3-3xy = x+2y \Leftrightarrow y = \frac{3-x}{3x+2} \Rightarrow 0 < x < 3$$

$$\text{Khi đó } P = 3(x+y) = 3x + 3 \cdot \frac{3-x}{3x+2} = 3x + 2 + \frac{11}{3x+2} - 3 \geq 2\sqrt{11} - 3$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{11}-2}{3} \\ y = \frac{\sqrt{11}-1}{3} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } \min P = 2\sqrt{11} - 3 \Rightarrow a = 2; b = 11; c = 3 \Rightarrow a+b+c = 16.$$

Câu 19. Biết rằng phương trình $\sqrt{4x^3-3x^2} \cdot 2^{\frac{x^3-6x-4}{x^2}} - 24x = 32$ có nghiệm là $x = a - \sqrt[3]{b} - \sqrt[3]{c}, (a, b, c \in \mathbb{Q})$. Khi đó giá trị của $2abc$ bằng

A. 28.

B. 24.

C. 54

D. 50.

Lời giải

Chọn A

♦ Điều kiện $x \geq \frac{3}{4}$.

$$\text{♦ Phương trình } \Leftrightarrow \sqrt{4x-3} \cdot 2^{\frac{x^3-6x-4}{x^2}} = 8 \left(\frac{3x+4}{x} \right) \Leftrightarrow \sqrt{4x-3} \cdot (\sqrt[4]{2})^{4x-\frac{24x+16}{x^2}} = (\sqrt[4]{2})^{12} \left(\frac{3x+4}{x} \right)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{4x-3} \cdot (\sqrt[4]{2})^{4x-3} = \left(\frac{3x+4}{x} \right) (\sqrt[4]{2})^{\frac{9x^2+24x+16}{x^2}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{4x-3} \cdot (\sqrt[4]{2})^{4x-3} = \left(\frac{3x+4}{x} \right) (\sqrt[4]{2})^{\left(\frac{3x+4}{x} \right)^2} \quad (1)$$

♦ Dễ thấy $f(t) = t \cdot (\sqrt[4]{2})^{t^2}$ đồng biến trên $(0; +\infty)$

$$\text{Khi đó } (1) \Leftrightarrow f(\sqrt{4x-3}) = f\left(\frac{3x+4}{x}\right) \Leftrightarrow \sqrt{4x-3} = \frac{3x+4}{x} \Leftrightarrow 4x^3 - 12x^2 - 24x - 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^3 - 6x^2 - 12x - 8 = 0 \Leftrightarrow 3x^3 = (x+2)^3 \Leftrightarrow x\sqrt[3]{3} = x+2$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2}{\sqrt[3]{3}-1} = 1 + \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9} = 1 - \sqrt[3]{-3} - \sqrt[3]{-9} \Rightarrow 2abc = 54.$$

Câu 20. Gọi a, b lần lượt là nghiệm âm lớn nhất và nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình:
 $2^{2\sin x + 3\cos x} + (2^{-2\cos x} + \sin x - \cos x - 1) \cdot 2^{\cos x} = 4 \cdot 2^{5\cos x} + 2^{1-\sin x}$. Tính $2a + 8b$.

A. π .

B. 2π .

C. 0 .

D. $-\pi$.

Lời giải

Chọn A

$$2^{2\sin x + 3\cos x} + (2^{-2\cos x} + \sin x - \cos x - 1) \cdot 2^{\cos x} = 4 \cdot 2^{5\cos x} + 2^{1-\sin x}$$

$$\Leftrightarrow 2^{2\sin x + 2\cos x} + 2^{-2\cos x} + \sin x - \cos x - 1 = 4 \cdot 2^{4\cos x} + 2^{1-\sin x - \cos x}$$

$$\Leftrightarrow 4^{\sin x + \cos x} - 2^{1-\sin x - \cos x} + (\sin x + \cos x) = 4^{2\cos x + 1} - 2^{1-(2\cos x + 1)} + (2\cos x + 1) \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t) = 4^t - 2^{1-t} + t$ trên $\mathbb{R}$.

$$f'(t) = 4^t \ln 4 + 2^{1-t} \ln 2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Khi đó } (1) \Leftrightarrow f(\sin x + \cos x) = f(2\cos x + 1) \Leftrightarrow \sin x - \cos x = 1$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} \Rightarrow a = \frac{-3\pi}{2}, b = \frac{\pi}{2} \Rightarrow 2a + 8b = \pi.$$

Câu 21. Phương trình $2^{\sqrt{4-4x+2\sqrt{8+x}}} - 4^{\sqrt{3x+6}} = 3\sqrt{x+2} + \frac{6x+21}{\sqrt{3-3x}-\sqrt{24+3x}}$ có bao nhiêu nghiệm dương?

A. 0 .

B. 1 .

C. 3 .

D. 2 .

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $-2 \leq x \leq 1$.

$$2^{\sqrt{4-4x+2\sqrt{8+x}}} - 4^{\sqrt{3x+6}} = 3\sqrt{x+2} + \frac{6x+21}{\sqrt{3-3x}-\sqrt{24+3x}}$$

$$\Leftrightarrow 2^{2\sqrt{1-x+2\sqrt{8+x}}} - 4^{\sqrt{3x+6}} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3x+6} + \frac{(6x+21)(\sqrt{3-3x} + \sqrt{24+3x})}{(\sqrt{3-3x}-\sqrt{24+3x})(\sqrt{3-3x} + \sqrt{24+3x})}$$

$$\Leftrightarrow 2^{2\sqrt{1-x+2\sqrt{8+x}}} - 4^{\sqrt{3x+6}} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3x+6} + \frac{(6x+21)(\sqrt{3-3x} + \sqrt{24+3x})}{-6x-21}$$

$$\Leftrightarrow 2^{2(\sqrt{1-x} + \sqrt{8+x})} - 4^{\sqrt{3x+6}} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3x+6} - (\sqrt{3-3x} + \sqrt{24+3x})$$

$$\Leftrightarrow 4^{\sqrt{1-x} + \sqrt{8+x}} - 4^{\sqrt{3x+6}} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3x+6} - \sqrt{3}(\sqrt{1-x} + \sqrt{8+x})$$

$$\Leftrightarrow 4^{\sqrt{1-x} + \sqrt{8+x}} + \sqrt{3}(\sqrt{1-x} + \sqrt{8+x}) = 4^{\sqrt{3x+6}} + \sqrt{3} \cdot \sqrt{3x+6} \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t) = 4^t + \sqrt{3}t$, trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $f'(t) = 4^t \ln 4 + \sqrt{3} > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$

Do đó

$$(1) \Leftrightarrow f(\sqrt{1-x} + \sqrt{8+x}) = f(\sqrt{3x+6}) \Leftrightarrow \sqrt{1-x} + \sqrt{8+x} = \sqrt{3x+6}$$

$$\Leftrightarrow 9 + 2\sqrt{(1-x)(8+x)} = 3x + 6 \Leftrightarrow 3(\sqrt{1-x})^2 + 2\sqrt{(1-x)(x+8)} = 0.$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1-x}(3\sqrt{1-x} + 2\sqrt{x+8}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ 3\sqrt{1-x} + 2\sqrt{x+8} = 0 \text{ (VN)} \end{cases}$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$.

Câu 22. Phương trình $2^{\sqrt{4-4x+2\sqrt{8+x}}} - 4^{\sqrt{3x+6}} = 3\sqrt{x+2} + \frac{6x+21}{\sqrt{3-3x}-\sqrt{24+3x}}$ có bao nhiêu nghiệm dương?

- A.** 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $-2 \leq x \leq 1$

$$PT \Leftrightarrow 2^{2\sqrt{1-x+2\sqrt{8+x}}} - 4^{\sqrt{3x+6}} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3x+6} + \left(\frac{(6x+21)(\sqrt{3-3x} + \sqrt{24+3x})}{(\sqrt{3-3x} - \sqrt{24+3x})(\sqrt{3-3x} + \sqrt{24+3x})} \right)$$

$$\Leftrightarrow 2^{2\sqrt{1-x+2\sqrt{8+x}}} - 4^{\sqrt{3x+6}} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3x+6} + \left(\frac{(6x+21)(\sqrt{3-3x} + \sqrt{24+3x})}{-6x-21} \right)$$

$$\Leftrightarrow 2^{2(\sqrt{1-x} + \sqrt{8+x})} - 4^{\sqrt{3x+6}} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3x+6} - (\sqrt{3-3x} + \sqrt{24+3x})$$

$$\Leftrightarrow 4^{\sqrt{1-x} + \sqrt{8+x}} - 4^{\sqrt{3x+6}} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3x+6} - \sqrt{3}(\sqrt{1-x} + \sqrt{8+x})$$

$$\Leftrightarrow 4^{\sqrt{1-x} + \sqrt{8+x}} + \sqrt{3}(\sqrt{1-x} + \sqrt{8+x}) = 4^{\sqrt{3x+6}} + \sqrt{3} \cdot \sqrt{3x+6}$$

Xét hàm số $f(t) = 4^t + \sqrt{3}t$, với $t \in [3; 3\sqrt{2}]$;

Ta có: $f'(t) = 4^t \ln 4 + \sqrt{3} \Rightarrow f'(t) > 0$ với $t \in [3; 3\sqrt{2}] \Rightarrow$ hàm số đồng biến trên $[3; 3\sqrt{2}]$;

Do đó:

$$f(\sqrt{1-x} + \sqrt{8+x}) = f(\sqrt{3x+6}) \Leftrightarrow \sqrt{1-x} + \sqrt{8+x} = \sqrt{3x+6}$$

$$\Leftrightarrow x=1$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$

Câu 23. Gọi x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình $\frac{1}{5^{x+8}} + \frac{3^{(x+2)^2}}{27} + x + 1 = \frac{1}{5 \cdot 5^{x^2+4x}} + 9 \cdot 3^{x+6} + (x+4)(2-x)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = a^2 + (x_1 + x_2)a + 3x_1x_2$

- A.** $\sqrt{37}$. **B.** -6 . **C.** 3. **D.** $-\frac{37}{4}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có:

$$\frac{1}{5^{x+8}} + \frac{3^{(x+2)^2}}{27} + x + 1 = \frac{1}{5 \cdot 5^{x^2+4x}} + 9 \cdot 3^{x+6} + (x+4)(2-x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{5^{x+8}} + 3^{x^2+4x+1} + x + 1 = \frac{1}{5^{x^2+4x+1}} + 3^{x+8} - 2x - x^2 + 8$$

$$\Leftrightarrow 3^{x^2+4x+1} - \frac{1}{5^{x^2+4x+1}} + x^2 + 4x + 1 = 3^{x+8} - \frac{1}{5^{x+8}} + x + 8 \quad (1).$$

Xét hàm số $f(t) = 3^t - 5^{-t} + t$ trên tập $D = \mathbb{R}$.

Ta có $f'(t) = 3^t \ln 3 + 5^{-t} \ln 5 + 1 > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

Do đó hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên tập $D = \mathbb{R}$.

Phương trình (1) $\Leftrightarrow f(x^2 + 4x + 1) = f(x + 8) \Leftrightarrow x^2 + 4x + 1 = x + 8$.

$$\Leftrightarrow x^2 + 3x - 7 = 0.$$

Theo định lý Viet ta có: $x_1 + x_2 = -3; x_1 x_2 = \frac{-7}{3}$

$$P = a^2 + (x_1 + x_2)a + 3x_1 x_2 = a^2 - 3a - 7$$

$$P' = 2a - 3 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{3}{2} \Leftrightarrow P_{\min} = \frac{-37}{4}$$

Câu 24. Biết rằng phương trình $2022^{2021(x^2-6x+4)} = \frac{10}{x+4+\frac{4}{x}}$ có một nghiệm $x = a + \sqrt{b}$. Khi đó $ab - a^2$

bằng

A. 5.

B. 11.

C. 8.

D. 6.

Lời giải

Chọn D

Từ giả thiết $2022^{2021(x^2-6x+4)} = \frac{10}{x+4+\frac{4}{x}}$

$$\Leftrightarrow 2022^{2021(x^2-6x+4)} = \frac{10x}{(x+2)^2} \Leftrightarrow 2022^{2021[(x+2)^2-10x]} = \frac{10x}{(x+2)^2} \Leftrightarrow \frac{2022^{2021(x+2)^2}}{2022^{2021 \cdot 10x}} = \frac{10x}{(x+2)^2}$$

$$\Leftrightarrow (x+2)^2 \cdot 2022^{2021(x+2)^2} = 10x \cdot 2022^{2021 \cdot 10x} \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t) = t \cdot 2022^{2021t}$ với $t > 0$.

Ta có $f'(t) = 2022^{2021t} + 2021t \cdot 2022^{2021t} \cdot \ln 2022 > 0, \quad \forall t > 0$. Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên

$(0; +\infty)$. Khi đó (1) $\Leftrightarrow f((x+2)^2) = f(10x) \Leftrightarrow (x+2)^2 = 10x$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - \sqrt{5} \\ x = 3 + \sqrt{5} \end{cases}. \text{ Khi đó tìm được } a = 3; b = 5 \Leftrightarrow ab - a^2 = 6.$$

Câu 25. Biết rằng phương trình $4x \cdot 3^{4x^2+5x} + 4 \cdot 3^{4x^2+5x-1} + (4x+1)^2 = 9$ có một nghiệm dương $x = \frac{-a+\sqrt{b}}{c}$

, trong đó $a; b; c$ nguyên dương. Khi đó $a + b - c$ bằng

A. $a + b - c = 38$.

B. $a + b - c = 17$.

C. $a + b - c = 13$.

D. $a + b - c = 28$.

Lời giải

Chọn A

Từ có $4x \cdot 3^{4x^2+5x} + 4 \cdot 3^{4x^2+5x-1} + (4x+1)^2 = 9$

$$\Leftrightarrow 4(3x+1) \cdot 3^{4x^2+5x-1} + (4x+1)^2 = 9 \Leftrightarrow (3x+1) \cdot 3^{4x^2+5x-1} + \left(2x + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow (3x+1).3^{4x^2+5x-1} + 4x^2 + 2x + \frac{1}{4} = \frac{9}{4} \Leftrightarrow (3x+1).3^{4x^2+5x-1} = -4x^2 - 2x + 2$$

$$\Leftrightarrow 3^{4x^2+5x-1} = \frac{-4x^2 - 2x + 2}{3x+1} \Leftrightarrow 3^{3x+1-(-4x^2-2x+2)} = \frac{-4x^2 - 2x + 2}{3x+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3^{3x+1}}{3^{-4x^2-2x+2}} = \frac{-4x^2 - 2x + 2}{3x+1} \Leftrightarrow (3x+1)3^{3x+1} = (-4x^2 - 2x + 2)3^{-4x^2-2x+2} \quad (1)$$

Do $x > 0$ nên $3x+1 > 0$, nếu $-4x^2 - 2x + 2 \leq 0$ thì phương trình (1) vô nghiệm

Từ đó ta xét hàm số $f(t) = t.3^t$ với $\forall t > 0$

Ta có $f'(t) = 3^t + t.3^t \ln 3 > 0, \forall t > 0$. Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$ nên phương trình (1) tương đương với $f(3x+1) = f(-4x^2 - 2x + 2)$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + 5x - 1 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 + 5x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-5 - \sqrt{41}}{6} \\ x = \frac{-5 + \sqrt{41}}{8} \end{cases}$$

Vì $x > 0$ nên ta lấy $x = \frac{-5 + \sqrt{41}}{8}$. Khi đó $a = 5; b = 41; c = 8 \Rightarrow a + b - c = 38$.

GIẢI PHƯƠNG TRÌNH MŨ BẰNG PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ KHÔNG HOÀN TOÀN (KHÔNG CHỨA THAM SỐ)

PHƯƠNG PHÁP



Phương pháp :

- + Phương pháp đặt ẩn phụ không hoàn toàn là việc sử dụng một ẩn phụ chuyển phương trình ban đầu thành một phương trình với một ẩn phụ nhưng các hệ số vẫn còn chứa x .
- + Phương pháp này thường được sử dụng đối với những phương trình khi lựa chọn ẩn phụ cho một biểu thức thì các biểu thức còn lại không biểu diễn được triệt để qua ẩn phụ đó hoặc nếu biểu diễn được thì công thức biểu diễn lại quá phức tạp. Sau khi biểu diễn ta thường được phương trình bậc hai theo ẩn phụ (hoặc vẫn theo ẩn x) có biệt số Δ là một số chính phương.
- + Tìm mối liên hệ giữa ẩn phụ và x ; sau đó thế trở lại để tìm x .

VÍ DỤ

Câu 1. Cho phương trình:

$$16^{x^2} + (x^2 - 3)4^{x^2} - 2x^2 + 2 = 0.$$

Tổng bình phương tất cả các nghiệm của của phương trình bằng

- A.** 1. **B.** 0. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t = 4^{x^2}$, điều kiện $t \geq 1$ (vì $4^{x^2} \geq 4^0 = 1$).

Khi đó phương trình trở thành: $t^2 + (x^2 - 3)t - 2x^2 + 2 = 0$.

Ta có $\Delta = (x^2 - 3)^2 - 4(-2x^2 + 2) = (x^2 + 1)^2 > 0$. (luôn đúng)

Phương trình có hai nghiệm $t = 2$; $t = 1 - x^2$.

Với $t = 2 \Leftrightarrow 4^{x^2} = 2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Với $t = 1 - x^2 \Leftrightarrow 4^{x^2} = 1 - x^2$, ta có đánh giá sau:

$$\begin{cases} 4^{x^2} \geq 1 \\ 1 - x^2 \leq 1 \end{cases} \Rightarrow 4^{x^2} = 1 - x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 0.$$

Vậy, phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt và $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 0^2 = 1$.

Câu 2. Tính tổng tất cả các nghiệm của phương trình sau

$$3.25^{x-2} + (3x-10)5^{x-2} + 3 - x = 0 \text{ là:}$$

- A.** $4 - \log_5 3$. **B.** $2 - \log_5 3$. **C.** 2. **D.** $\log_5 3$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t = 5^{x-2} > 0$ được phương trình

$$3.t^2 + (3x-10)t + 3-x = 0 \Leftrightarrow (3t-1)(t+x-3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{3} \\ t = 3-x \end{cases}$$

Cách 2 chổ này: Tính $\Delta = (3x-8)^2 \geq 0$

* Với $t = \frac{1}{3}$ ta có $5^{x-2} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = 2 - \log_5 3$

* Với $t = 3-x$ ta có $5^{x-2} = 3-x$. Nhận thấy $y = 5^{x-2}$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ và $y = 3-x$ là hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$, mặt khác $x = 2$ thỏa mãn phương trình nên $5^{x-2} = 3-x$ có nghiệm duy nhất $x = 2$.

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $\{2 - \log_5 3; 2\}$ và tổng các nghiệm là $2 - \log_5 3 + 2 = 4 - \log_5 3$

Câu 3. Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $9^x + 2(x-2).3^x + 2x - 5 = 0$ là:

- A. 5. B. 1. C. -1. D. 4.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t = 3^x > 0$ được phương trình

$$t^2 + 2(x-2).t + 2x - 5 = 0 \Leftrightarrow (t+1)(t+2x-5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1(l) \\ t = 5-2x \end{cases}$$

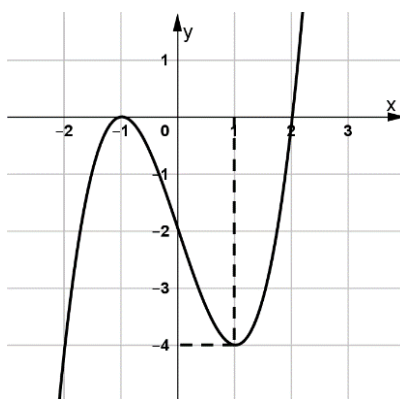
Cách 2 chổ này: Tính $\Delta' = (x-3)^2 \geq 0$

* Với $t = 5-2x$ ta có $3^x = 5-2x$

Nhận thấy $y = 3^x$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ và $y = 5-2x$ là hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$, mặt khác $x = 1$ thỏa mãn phương trình nên $3^x = 5-2x$ có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $\{1\}$ và tổng các nghiệm là 1.

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Gọi S là tập nghiệm của phương trình

$$f^2(x) \cdot 5^{f(x)-1} - (3^{f(x)} - 3 \cdot 5^{f(x)-1})f(x) + 2 \cdot 5^{f(x)-1} - 3^{f(x)} = 0. \text{ Tập } S \text{ có bao nhiêu phần tử?}$$

- A. 4. B. 5. C. 7. D. 3.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t = f(x)$ phương trình đã cho trở thành:

$$t^2 \cdot 5^{t-1} - (3^t - 3 \cdot 5^{t-1})t + 2 \cdot 5^{t-1} - 3^t = 0$$

$\Leftrightarrow 5^t \cdot t^2 - (5 \cdot 3^t - 3 \cdot 5^t)t + 2 \cdot 5^t - 5 \cdot 3^t = 0$ (*) (coi đây là phương trình bậc hai ẩn t). Phương

trình có: $\Delta = (5 \cdot 3^t - 3 \cdot 5^t)^2 - 4 \cdot 5^t (2 \cdot 5^t - 5 \cdot 3^t) = (5 \cdot 3^t - 5^t)^2 \geq 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = -2 + \left(\frac{3}{5}\right)^t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ \left(\frac{3}{5}\right)^t = \frac{t+2}{5} \end{cases} \quad (1)$$

Phương trình (1) có nghiệm $t = 1$. Hàm số $g(t) = \left(\frac{3}{5}\right)^t$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ còn hàm số

$h(t) = \frac{t+2}{5}$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên phương trình (1) có nghiệm duy nhất $t = 1$.

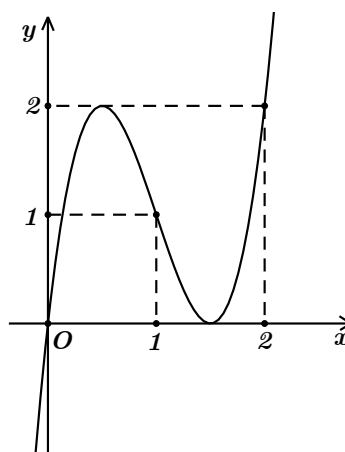
Vậy phương trình (*) có nghiệm $t = -1, t = 1$.

Với $t = -1 \Rightarrow f(x) = -1$, dựa vào đồ thị hàm số suy ra phương trình $f(x) = -1$ có 3 nghiệm phân biệt.

Với $t = 1 \Rightarrow f(x) = 1$, dựa vào đồ thị hàm số suy ra phương trình $f(x) = 1$ có 1 nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm.

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Phương trình $4^{f^2(x)} + (f^2(x) - 7)2^{f^2(x)} + 12 - 4f^2(x) = 0$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 6.

B. 8.

C. 7.

D. 9.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t = 2^{f^2(x)} > 0$, phương trình đã cho trở thành

$$t^2 + (f^2(x) - 7)t + 12 - 4f^2(x) = 0$$

$$\Delta = (f^2(x) - 7)^2 - 4(12 - 4f^2(x)) = (f^2(x) + 1)^2 \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{7 - f^2(x) + f^2(x) + 1}{2} = 4 \\ t = \frac{7 - f^2(x) - f^2(x) - 1}{2} = 3 - f^2(x) \end{cases}$$

Với $t = 4 \Rightarrow 2^{f^2(x)} = 4 \Leftrightarrow f^2(x) = 2 \Leftrightarrow f(x) = \pm\sqrt{2}$. Dựa vào đồ thị hàm số suy ra phương trình $f(x) = \pm\sqrt{2}$ có 4 nghiệm. (*)

$$\text{Vot } t = 3 - f^2(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - f^2(x) > 0 \\ 2^{f^2(x)} = 3 - f^2(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \in (-\sqrt{3}; \sqrt{3}) \\ 2^{f^2(x)} + f^2(x) = 3 \end{cases} \quad (1)$$

Đặt $y = f^2(x)$, $f(x) \in (-\sqrt{3}; \sqrt{3}) \Rightarrow y \in [0; 3)$. Khi đó phương trình (1) trở thành: $2^y + y = 3$.

Xét hàm số $g(y) = 2^y + y$, $\forall y \in [0; 3)$

$g'(y) = 2^y \cdot \ln 2 + 1 > 0 \Rightarrow g(y)$ đồng biến trên $[0; 3) \Rightarrow$ phương trình $2^y + y = 3$ nếu có nghiệm thì nghiệm là duy nhất, suy ra phương trình $2^y + y = 3$ có nghiệm duy nhất $y = 1 \Rightarrow f(x) = \pm 1$.

Dựa vào đồ thị hàm số suy ra phương trình $f(x) = \pm 1$ có 4 nghiệm. (**)

Từ (*) và (**) suy ra phương trình đã cho có 8 nghiệm.

Câu 6. Cho hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} 2^{2x-y+1} + 2^{-2x+y+1} + 3^{2x-y+1} + 3^{-2x+y+1} = 5^{2x-y+1} + 5^{-2x+y+1} & (1) \\ y(x^2 + 3x - 3) + 2 = 0 & (2) \end{cases}$$

Biết rằng hpt trên có nghiệm duy nhất $(x_0; y_0)$, vậy giá trị $x_0 + y_0$ gần với giá trị nào sau đây:

A. -3,4.

B. 3,4.

C. -3,5.

D. 3,5.

Lời giải

Chọn B

Đặt $2x - y = a$, phương trình (1) của hệ trở thành

$$2(2^a + 2^{-a}) + 3(3^a + 3^{-a}) = 5(5^a + 5^{-a})$$

Nếu a là nghiệm thì $-a$ cũng là nghiệm nên chỉ cần xét $a \geq 0$.

Xét hàm số $f(x) = x^t + x^{-t}$, $x > 1$ với số thực t dương tùy ý.

Ta có: $f'(x) = tx^{t-1}(1 - x^{-2t})$, do $x > 1$ nên $1 - x^{-2t} > 0$ suy ra hàm số này đồng biến trên $(1; +\infty)$.

Do đó, ta được bất đẳng thức sau: $2^a + 2^{-a} \leq 3^a + 3^{-a} \leq 5^a + 5^{-a}$ và dấu đẳng thức chỉ xảy ra khi $a = 0$.

$$\text{Suy ra } 2(2^a + 2^{-a}) + 3(3^a + 3^{-a}) \leq 5(5^a + 5^{-a})$$

Đẳng thức phải xảy ra nên $a = 0$ hay $2x - y = 0 \Leftrightarrow 2x = y$.

Thay vào phương trình (2) ta có: $2x(x^2 + 3x - 3) + 2 = 0 \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 - 3x + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow 2x^3 = x^3 - 3x^2 + 3x = 1 \Leftrightarrow 2x^3 = (x-1)^3$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{2x} = x-1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{1-\sqrt[3]{2}}. \text{ Suy ra } y = 2x = \frac{2}{1-\sqrt[3]{2}}$$

Suy ra hệ phương trình có nghiệm là: $\left(\frac{1}{1-\sqrt[3]{2}}; \frac{2}{1-\sqrt[3]{2}}\right) = (x_0; y_0)$

Như vậy, $x_0 + y_0 = \frac{1}{1 - \sqrt[3]{2}} + \frac{1}{1 - \sqrt[3]{2}} \approx -3,404$.

_____**TOANMATH.com**_____