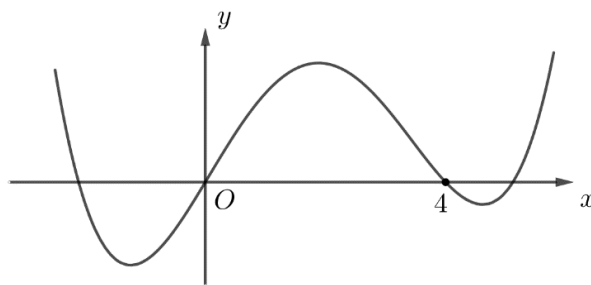


TÌM CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ HỢP $f(u(x))$ KHI BIẾT ĐỒ THỊ HÀM SỐ $f(x)$ **KIẾN THỨC CẦN NHỚ:**

♦ Đạo hàm của hàm số hợp:

$$\uparrow \quad g(x) = f[u(x)] \Rightarrow g'(x) = u'(x) \cdot f'[u(x)].$$

$$\uparrow \quad g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u'(x) = 0 \\ f'[u(x)] = 0 \end{cases}$$

♦ Lập bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ khi biết đồ thị hàm số $y = f'(x)$ B1. Xác định giao điểm của đồ thị hàm số $y = f'(x)$ với trục hoànhB2: Xét dấu của hàm số $y = f'(x)$, ta làm như sau- Phần đồ thị của $f'(x)$ nằm bên trên trục hoành trong khoảng $(a; b)$ thì $f'(x) > 0$, $x \in (a; b)$ - Phần đồ thị của $f'(x)$ nằm bên dưới trục hoành trong khoảng $(a; b)$ thì $f'(x) < 0$, $x \in (a; b)$ ♦ Lập bảng biến thiên của hàm số $g(x) = f(x) + u(x)$ khi biết đồ thị hàm số $y = f'(x)$ B1: Đạo hàm $g'(x) = f'(x) + u'(x)$. Cho $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -u'(x)$ B2. Xác định giao điểm của đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và đồ thị hàm số $y = -u'(x)$ B3: Xét dấu của hàm số $y = g'(x)$, ta làm như sau- Phần đồ thị của $f'(x)$ nằm bên trên đồ thị $-u'(x)$ trong khoảng $(a; b)$ thì $g'(x) > 0$, $x \in (a; b)$ - Phần đồ thị của $f'(x)$ nằm bên dưới đồ thị $-u'(x)$ trong khoảng $(a; b)$ thì $g'(x) < 0$, $x \in (a; b)$ **BÀI TẬP MẪU**Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị như hình bênSố điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x^3 + 3x^2)$ là

A. 5.

B. 3

C. 7.

D. 11.

Phân tích hướng dẫn giải

1. DẠNG TOÁN: Đây là dạng toán tìm số cực trị của hàm hợp $f(u(x))$ khi biết đồ thị hàm số $f(x)$.

2. KIẾN THỨC CẦN NHỚ:

♦ **Đạo hàm của hàm hợp:**

$$\left[f(u(x)) \right]' = u'(x) \cdot f'(u)$$

♦ **Định lý về cực trị của hàm số:**

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên D .

Điểm $x_0 \in D$ là điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ khi $f'(x_0) = 0$ hoặc $f'(x_0)$ không xác định và $f'(x)$ đổi dấu khi đi qua x_0 .

♦ **Sự tương giao của hai đồ thị:**

Hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ là nghiệm của phương trình

$$f(x) = g(x) \quad (1)$$

Số nghiệm của phương trình (1) bằng số giao điểm của hai cực trị.

♦ **Tính chất đổi dấu của biểu thức:**

Gọi $x = \alpha$ là một nghiệm của phương trình: $f(x) = 0$. Khi đó

Nếu $x = \alpha$ là nghiệm bội bậc chẵn $((x - \alpha)^2, (x - \alpha)^4, \dots)$ thì hàm số $y = f(x)$ không đổi dấu khi đi qua α .

Nếu $x = \alpha$ là nghiệm đơn hoặc nghiệm bội bậc lẻ $((x - \alpha), (x - \alpha)^3, \dots)$ thì hàm số $y = f(x)$ đổi dấu khi đi qua α .

3. HƯỚNG GIẢI:

B1: Tính đạo hàm của hàm số: $g(x) = f(x^3 + 3x^2)$

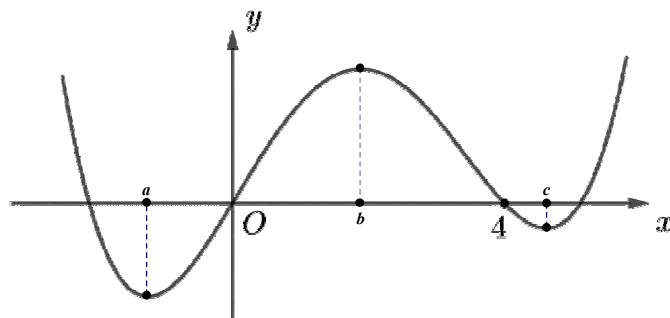
B2: Dựa vào đồ thị của hàm $f(x)$ ta suy ra số nghiệm của phương trình: $g'(x) = 0$

B3: Lập bảng biến thiên của hàm số $g(x) = f(x^3 + 3x^2)$ và suy ra số cực trị.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn B



Từ đồ thị, ta có bảng biến thiên của $y = f(x)$ như sau:

x	$-\infty$	a		b		c		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$							$+\infty$

$$g(x) = f(x^3 + 3x^2) \Rightarrow g'(x) = (x^3 + 3x^2)' f'(x^3 + 3x^2) = (3x^2 + 6x) f'(x^3 + 3x^2)$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow (3x^2 + 6x) f'(x^3 + 3x^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 6x = 0 \\ f'(x^3 + 3x^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 0 \\ x^3 + 3x^2 = a < 0 \\ x^3 + 3x^2 = b \in (0; 4) \\ x^3 + 3x^2 = c > 4 \end{cases} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \end{matrix}$$

$$\text{Xét hàm số } h(x) = x^3 + 3x^2 \Rightarrow h'(x) = 3x^2 + 6x \Rightarrow h'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$		
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	$-\infty$		4		0	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta thấy

Đường thẳng $y = a$ cắt đồ thị hàm số $y = h(x)$ tại 1 điểm

Đường thẳng $y = b$ cắt đồ thị hàm số $y = h(x)$ tại 3 điểm.

Đường thẳng $y = c$ cắt đồ thị hàm số $y = h(x)$ tại 1 điểm.

Như vậy, phương trình $g'(x) = 0$ có tất cả 7 nghiệm đơn phân biệt.

Vậy hàm số $g(x) = f(x^3 + 3x^2)$ có 7 cực trị.

Cách trình bày khác:

Phân tích hướng dẫn giải

1. DẠNG TOÁN: Đây là dạng toán sử dụng đồ thị (hoặc bảng biến thiên) của hàm số $y = f(x)$ (hoặc $y = f'(x)$) để tìm cực trị hàm số $g(x) = f[u(x)]$.

2. HƯỚNG GIẢI:

B1: Lập bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$

- Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$ xác định cực trị của hàm số $y = f(x)$.

- Lập bảng biến thiên

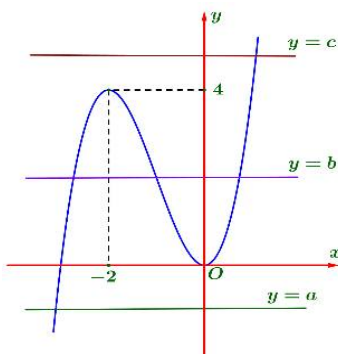
x	$-\infty$	a		b		c		$+\infty$	
$f'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$								$+\infty$

B2: Tìm các điểm tới hạn của hàm số $g(x) = f(x^3 + 3x^2)$

- Đạo hàm $g'(x) = (3x^2 + 6x) \cdot f'(x^3 + 3x^2)$

$$- \text{Cho } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 6x = 0 \\ f'(x^3 + 3x^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \\ x^3 + 3x^2 = a; a < 0 \\ x^3 + 3x^2 = b; 0 < b < 4 \\ x^3 + 3x^2 = c; c > 4 \end{cases}$$

B3: Khảo sát hàm số $h(x) = x^3 + 3x^2$ để tìm số giao điểm của đồ thị $h(x) = x^3 + 3x^2$ với các đường thẳng $y = a, y = b, y = c$



Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn C

Từ đồ thị ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ như sau

x	$-\infty$	a		b		c		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$							$+\infty$

Ta có $g(x) = f(x^3 + 3x^2) \Rightarrow g'(x) = (3x^2 + 6x) \cdot f'(x^3 + 3x^2)$

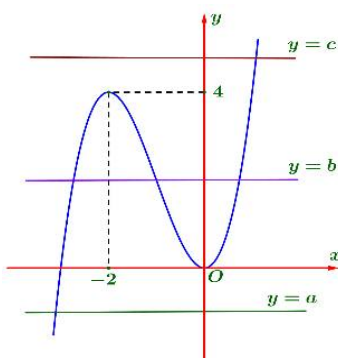
$$\text{Cho } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 6x = 0 \\ f'(x^3 + 3x^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \\ x^3 + 3x^2 = a; a < 0 \\ x^3 + 3x^2 = b; 0 < b < 4 \\ x^3 + 3x^2 = c; c > 4 \end{cases}$$

Xét hàm số $h(x) = x^3 + 3x^2 \Rightarrow h'(x) = 3x^2 + 6x$. Cho $h'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$h'(x)$		+	0	-	0	+	
$h(x)$	$-\infty$		4		0		$+\infty$

Ta có đồ thị của hàm $h(x) = x^3 + 3x^2$ như sau



Từ đồ thị ta thấy:

Đường thẳng $y = a$ cắt đồ thị hàm số $y = h(x)$ tại 1 điểm.

Đường thẳng $y = b$ cắt đồ thị hàm số $y = h(x)$ tại 3 điểm.

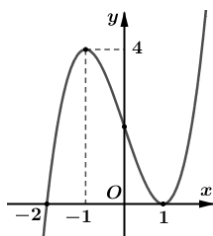
Đường thẳng $y = c$ cắt đồ thị hàm số $y = h(x)$ tại 1 điểm.

Như vậy phương trình $g'(x) = 0$ có tất cả 7 nghiệm đơn phân biệt.

Vậy hàm số $g(x) = f(x^3 + 3x^2)$ có 7 cực trị.

Bài tập tương tự và phát triển:

Câu 46.1: Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên.



Tìm số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x^2 - 3)$.

A. 2.

B. 3

C. 4.

D. 5.

Lời giải

Chọn B

Ta có $g'(x) = 2xf'(x^2 - 3)$

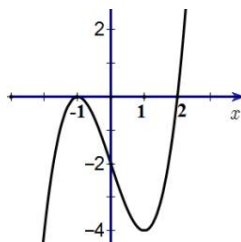
$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(x^2 - 3) = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{theo đồ thị } f'(x)} \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 3 = -2 \\ x^2 - 3 = 1 \text{ (nghiệm kép)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \\ x = \pm 2 \text{ (nghiệm kép)} \end{cases}.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-2		-1		0		1		2		$+\infty$
g'		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$
g												

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số có 3 điểm cực trị.

Câu 46.2: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ.



Tìm số điểm cực trị hàm số $g(x) = f(x^2 - 2x - 1)$.

A. 6.

B. 5.

C. 4.

D. 3.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $g'(x) = (2x-2)f'(x^2-2x-1)$. Nhận xét: $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x^2-2x-1=-1 \\ x^2-2x-1=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\pm 1 \\ x=2; x=3 \end{cases}$

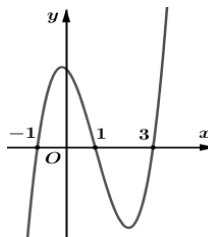
Ta có bảng biến thiên:

x		-1		0		1		2		3		
$g'(x)$		-	0	+	0	+	0	-	0	-	0	+
$g(x)$												

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy hàm số có đúng ba cực trị.

Câu 46.3: Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$. Đồ thị hình bên dưới là đồ thị của đạo hàm $f'(x)$. Hàm số

$g(x) = f(\sqrt{x^2 + 2x + 2})$ có bao nhiêu điểm cực trị?



A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn C

Ta có $g'(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}} f'(\sqrt{x^2+2x+2})$.

Suy ra $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ f'(\sqrt{x^2+2x+2})=0 \end{cases} \xrightarrow{\text{theo đồ thị } f'(x)} \begin{cases} x+1=0 \\ \sqrt{x^2+2x+2}=-1 \\ \sqrt{x^2+2x+2}=1 \\ \sqrt{x^2+2x+2}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=-1+\sqrt{2} \\ x=-1-\sqrt{2} \end{cases}$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	$-1-\sqrt{2}$		-1		$-1+\sqrt{2}$		$+\infty$
g'		-	0	+	0	-	0	+

Từ đó suy ra hàm số $g(x) = f(\sqrt{x^2+2x+2})$ có 3 điểm cực trị.

Câu 46.4: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của $y = f'(x)$ như sau

x	$-\infty$	-2		1		3		$+\infty$
f'		-	0	+	0	+	0	-

Hỏi hàm số $g(x) = f(x^2 - 2x)$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

A. 1.

B. 2

C. 3.

D. 4.

Lời giải

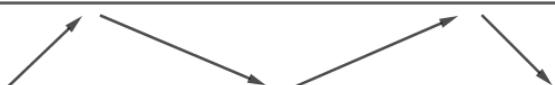
Chọn A

Ta có $g'(x) = (2x-2)f'(x^2-2x)$;

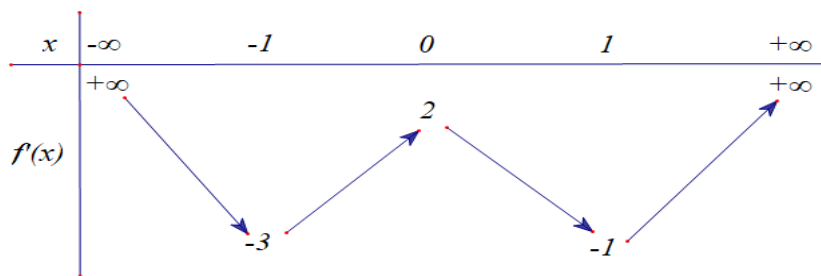
$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-2=0 \\ f'(x^2-2x)=0 \end{cases} \xleftrightarrow{\text{theo BBT } f'(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x^2-2x=-2 \\ x^2-2x=1 \text{ (nghiem kep)} \\ x^2-2x=3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=1 \pm \sqrt{2} \text{ (nghiem kep)} \\ x=-1 \\ x=3 \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	$1-\sqrt{2}$	1	$1+\sqrt{2}$	3	$+\infty$
g'	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
g							

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số có một điểm cực tiểu.

Câu 46.5: Cho hàm số $f(x)$, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau:Số điểm cực trị của hàm số $y = f(4x^2 - 4x)$ là

A. 9.

B. 5.

C. 7.

D. 3.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Dựa vào bảng biến thiên ta có: } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \in (-\infty; -1) \\ x = b \in (-1; 0) \\ x = c \in (0; 1) \\ x = d \in (1; +\infty) \end{cases}$$

Ta có: $y' = (8x-4)f'(4x^2-4x)$, $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 8x-4=0 \\ f'(4x^2-4x)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ 4x^2-4x = a \in (-\infty; -1) \\ 4x^2-4x = b \in (-1; 0) \\ 4x^2-4x = c \in (0; 1) \\ 4x^2-4x = d \in (1; +\infty) \end{cases}.$

Ta có khi $x = \frac{1}{2} \Rightarrow 4x^2 - 4x = -1$ và $f'(-1) = -3 \neq 0$

Mặt khác: $4x^2 - 4x = (2x-1)^2 - 1 \geq -1$ nên:

- $4x^2 - 4x = a$ vô nghiệm.
- $4x^2 - 4x = b$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 .
- $4x^2 - 4x = c$ có 2 nghiệm phân biệt x_3, x_4 .
- $4x^2 - 4x = d$ có 2 nghiệm phân biệt x_5, x_6 .

Vậy phương trình $y' = 0$ có 7 nghiệm bội lẻ phân biệt nên hàm số có 7 điểm cực trị.

Câu 46.6: Cho hàm số $f(x)$, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y	$+\infty$		2		$+\infty$
		-3		-1	

Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x^2 - 2x)$ là

A. 9.

B. 3.

C. 7.

D. 5.

Lời giải

Chọn B

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y	$+\infty$		2		$+\infty$
		-3		-1	

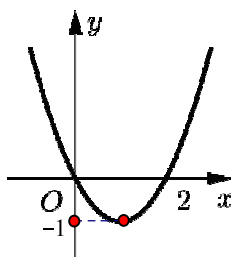
Từ bảng biến thiên ta có phương trình $f'(x) = 0$ có các nghiệm tương ứng

$$\text{là } \begin{cases} x = a, a \in (-\infty; -1) \\ x = b, b \in (-1; 0) \\ x = c, c \in (0; 1) \\ x = d, d \in (1; +\infty) \end{cases}.$$

Xét hàm số $y = f(x^2 - 2x) \Rightarrow y' = 2(x-1)f'(x^2 - 2x)$.

$$\text{Giải phương trình } y' = 0 \Leftrightarrow 2(x-1)f'(x^2 - 2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ f'(x^2 - 2x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x^2 - 2x = a \quad (1) \\ x^2 - 2x = b \quad (2) \\ x^2 - 2x = c \quad (3) \\ x^2 - 2x = d \quad (4) \end{cases}.$$

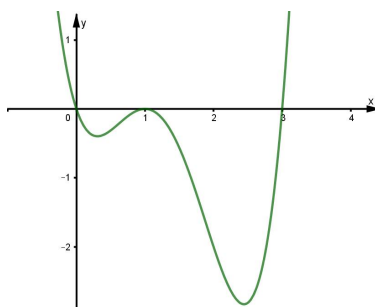
Vẽ đồ thị hàm số $h(x) = x^2 - 2x$



Dựa vào đồ thị ta thấy: phương trình (1) vô nghiệm. Các phương trình (2); (3); (4) mỗi phương trình có 2 nghiệm. Các nghiệm đều phân biệt nhau.

Vậy phương trình $y' = 0$ có 7 nghiệm phân biệt nên hàm số $y = f(x^2 - 2x)$ có 7 điểm cực trị.

Câu 46.7: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên khoảng $(-\infty; +\infty)$. Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ



Đồ thị của hàm số $y = (f(x))^2$ có bao nhiêu điểm cực đại, cực tiểu?

A. 2 điểm cực đại, 3 điểm cực tiểu.

B. 1 điểm cực đại, 3 điểm cực tiểu.

C. 2 điểm cực đại, 2 điểm cực tiểu.

D. 3 điểm cực đại, 2 điểm cực tiểu.

Lời giải

Chọn A

Từ đồ thị hàm số ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	x_1	1	x_2	$+\infty$				
$f'(x)$		-	0	+	0	+			
f	$+\infty$	$\searrow$	y_1	$\nearrow$	0	$\searrow$	y_2	$\nearrow$	$+\infty$

$$y = (f(x))^2 \Rightarrow y' = 2f(x) \cdot f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ f'(x) = 0 \end{cases}$$

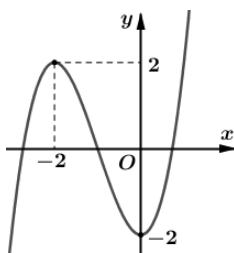
$$\text{Quan sát đồ thị ta có } f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 3 \end{cases} \text{ và } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \\ x = 1 \\ x = x_2 \end{cases} \text{ với } x_1 \in (0;1) \text{ và } x_2 \in (1;3).$$

$$\text{Suy ra } y' > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ f'(x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (3; +\infty) \\ x \in (0; x_1) \cup (1; x_2) \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0; x_1) \cup (1; x_2) \cup (3; +\infty)$$

Từ đó ta lập được bảng biến thiên của hàm số $y = (f(x))^2$

x	$-\infty$	0	x_1	1	x_2	3	$+\infty$			
$y'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0			
y	$+\infty$	$\searrow$	$\nearrow$	y_1	$\searrow$	$\nearrow$	y_2	$\searrow$	$\nearrow$	$+\infty$

Suy ra hàm số có 2 điểm cực đại, 3 điểm cực tiểu.

Câu 46.8: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số như hình bên.Hàm số $g(x) = f(-x^2 + 3x)$ có bao nhiêu điểm cực đại ?

A. 3.

B. 4

C. 5.

D. 6.

Lời giải

Chọn B

Ta có $g'(x) = (-2x+3) \cdot f'(-x^2+3x)$;

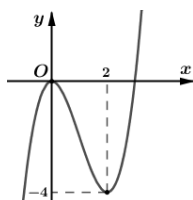
$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+3=0 \\ f'(-x^2+3x)=0 \end{cases} \xrightarrow{\text{theo đồ thị } f'(x)} \begin{cases} x=\frac{3}{2} \\ -x^2+3x=-2 \\ -x^2+3x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{3}{2} \\ x=\frac{3\pm\sqrt{17}}{2} \\ x=0 \\ x=3 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$\frac{3-\sqrt{17}}{2}$	0	1,5	3	$\frac{3+\sqrt{17}}{2}$	$+\infty$
g'	+	0	-	0	+	0	-
g							

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số có 4 điểm cực trị.

Câu 46.9: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Hàm số $g(x) = f[f(x)]$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3.

B. 5.

C. 4.

D. 6.

Lời giải

Chọn C

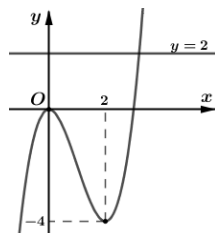
Dựa vào đồ thị ta thấy $f(x)$ đạt cực trị tại $x=0, x=2$.

$$\text{Suy ra } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \text{ (nghiem đơn)} \\ x=2 \text{ (nghiem đơn)} \end{cases}.$$

$$\text{Ta có } g'(x) = f'(x) \cdot f'[f(x)]; g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f'[f(x)] = 0 \end{cases}.$$

$$\bullet f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \text{ (nghiem đơn)} \\ x=2 \text{ (nghiem đơn)} \end{cases}.$$

$$\bullet f'[f(x)] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \text{ (1)} \\ f(x) = 2 \text{ (2)} \end{cases}.$$

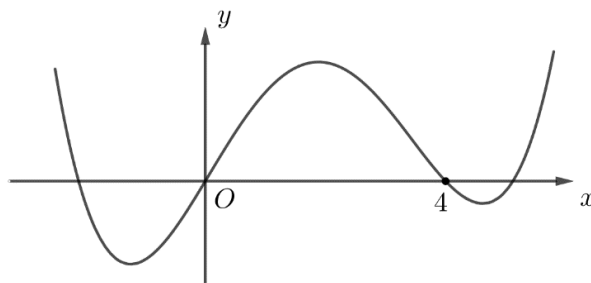


Dựa vào đồ thị suy ra:

- ✓ Phương trình (1) có hai nghiệm $x = 0$ (nghiệm kép) và $x = a$ ($a > 2$).
- ✓ Phương trình (2) có một nghiệm $x = b$ ($b > a$).

Vậy phương trình $g'(x) = 0$ có 4 nghiệm bội lẻ là $x = 0$, $x = 2$, $x = a$ và $x = b$. Suy ra hàm số $g(x) = f[f(x)]$ có 4 điểm cực trị.

Câu 46.10: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau



Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(-x^4 + 4x^2)$ là

A. 5.

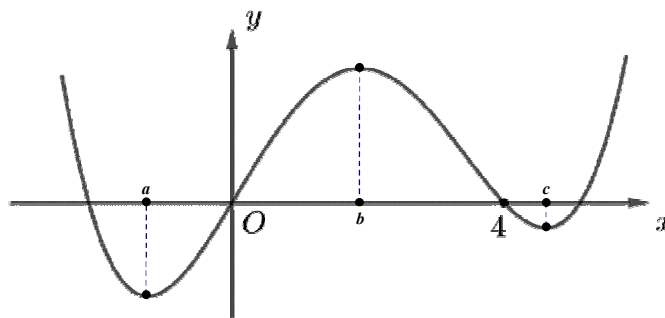
B. 3

C. 7.

D. 11.

Lời giải

Chọn B



Từ đồ thị, ta có bảng biến thiên của $y = f(x)$ như sau:

x	$-\infty$	a		b		c		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$							$+\infty$

$$g(x) = f(-x^4 + 4x^2) \Rightarrow g'(x) = (-x^4 + 4x^2)' f'(-x^4 + 4x^2) = (-4x^3 + 8x) f'(-x^4 + 4x^2)$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow (-4x^3 + 8x) f'(-x^4 + 4x^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -4x^3 + 8x = 0 \\ f'(-x^4 + 4x^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{2} \\ x = 0 \\ -x^4 + 4x^2 = a < 0 \quad (1) \\ -x^4 + 4x^2 = b \in (0; 4) \quad (2) \\ -x^4 + 4x^2 = c > 4 \quad (3) \end{cases}$$

$$\text{Xét hàm số } h(x) = -x^4 + 4x^2 \Rightarrow h'(x) = -4x^3 + 8x \Rightarrow h'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	$+\infty$
$h'(x)$	+	0	-	0	-
$h(x)$	$-\infty$	$\nearrow 4$	$\searrow 0$	$\nearrow 4$	$\searrow -\infty$

Từ bảng biến thiên, ta thấy

Đường thẳng $y = a < 0$ cắt đồ thị hàm số $y = h(x)$ tại 2 điểm

Đường thẳng $y = b \in (0; 4)$ cắt đồ thị hàm số $y = h(x)$ tại 4 điểm.

Đường thẳng $y = c > 4$ cắt đồ thị hàm số $y = h(x)$ tại 0 điểm.

Như vậy, phương trình $g'(x) = 0$ có tất cả 7 nghiệm đơn phân biệt.

Vậy hàm số $g(x) = f(x^3 + 3x^2)$ có 7 cực trị

Câu 46.11: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	$+$	0	$-$
y		$\nearrow 3$	$\searrow -1$	$\nearrow 2$	$\searrow -\infty$	

Tìm số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(3-x)$.

A. 2.

B. 3.

C. 5.

D. 6.

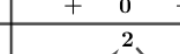
Lời giải

Chọn B

Ta có $g'(x) = -f'(3-x)$.

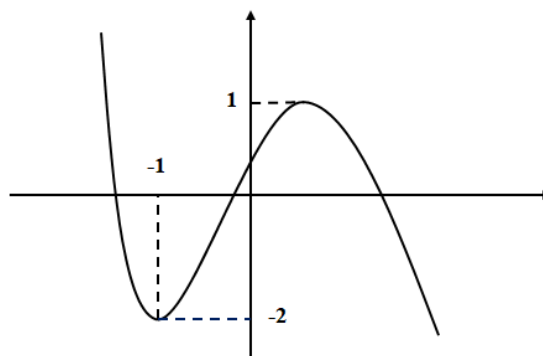
- $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(3-x) = 0 \xleftrightarrow{\text{theo BBT}} \begin{cases} 3-x=0 \\ 3-x=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=1 \end{cases}$.
- $g'(x)$ không xác định $\Leftrightarrow 3-x=1 \Leftrightarrow x=2$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$	
g'	+	0	-	+	0	-
g						

Vậy hàm số $g(x) = f(3-x)$ có 3 điểm cực trị.

Câu 46.12: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ sau. Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x) + 2x$ là:



A. 4.

B. 1.

C. 3.

D. 2.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Đặt } g(x) = f(x) + 2x \text{ suy ra } g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) + 2 = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = x_0 > -1 \end{cases}.$$

Dựa vào đồ thị ta có: Trên $(-\infty; -1)$ thì $f'(x) > -2 \Leftrightarrow f'(x) + 2 > 0$.

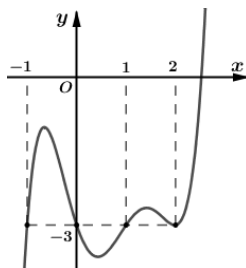
Trên $(-1; x_0)$ thì $f'(x) > -2 \Leftrightarrow f'(x) + 2 > 0$.

Trên $(x_0; +\infty)$ thì $f'(x) < -2 \Leftrightarrow f'(x) + 2 < 0$.

x	$-\infty$	-1		x_0	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$					

Vậy hàm số $g(x) = f(x) + 2x$ có 1 cực trị.

Câu 46.13: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới. Hỏi đồ thị hàm số $g(x) = f(x) + 3x$ có bao nhiêu điểm cực trị?



A. 2.

B. 3.

C. 4.

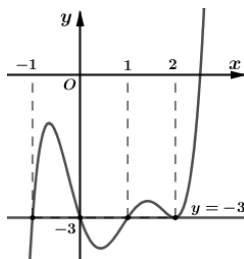
D. 7.

Lời giải

Chọn B

Ta có $g'(x) = f'(x) + 3$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -3$.

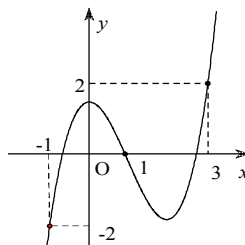
Suy ra số nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$ chính là số giao điểm giữa đồ thị của hàm số $f'(x)$ và đường thẳng $y = -3$.



Dựa vào đồ thị ta suy ra $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$. Ta thấy $x = -1, x = 0, x = 1$ là các nghiệm đơn

và $x = 2$ là nghiệm kép nên đồ thị hàm số $g(x) = f(x) + 3x$ có 3 điểm cực trị

Câu 46.14: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ.



Tìm số điểm cực trị của hàm số $g(x) = 2f(x) - x^2 + 2x + 2017$.

A. 2.

B. 3.

C. 4.

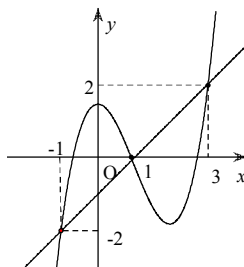
D. 7.

Lời giải

Chọn B

Ta có $g'(x) = 2f'(x) - 2x + 2 = 2[f'(x) - (x-1)]$.

Dựa vào hình vẽ ta thấy đường thẳng $y=x-1$ cắt đồ thị hàm số $y=f'(x)$ tại 3 điểm: $(-1; -2)$, $(1; 0)$, $(3; 2)$.

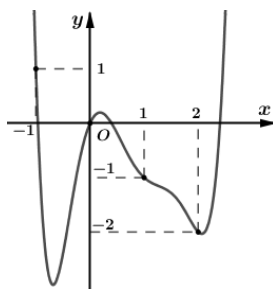


Dựa vào đồ thị ta có

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2[f'(x) - (x-1)] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \\ x = 3 \end{cases} \text{ đều là các nghiệm đơn}$$

Vậy hàm số $y=g(x)$ có 3 điểm cực trị.

Câu 46.15: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên dưới. Hàm số $g(x)=2f(x)+x^2$ đạt cực tiểu tại điểm

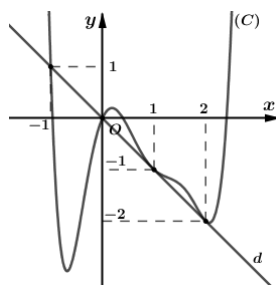
A. $x = -1$.B. $x = 0$.C. $x = 1$.D. $x = 2$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $g'(x) = 2f'(x) + 2x$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -x$.

Suy ra số nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$ chính là số giao điểm giữa đồ thị của hàm số $f'(x)$ và đường thẳng $y = -x$.



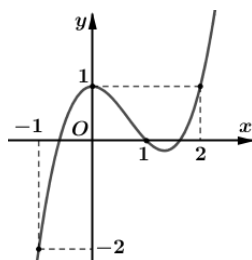
Dựa vào đồ thị ta suy ra $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1		0		1		2		$+\infty$
g'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$+$
g										

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $g(x)$ đạt cực tiểu tại $x = 0$.

Câu 46.16: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới.



Hàm số $g(x) = f(x) - \frac{x^3}{3} + x^2 - x + 2$ đạt cực đại tại.

A. $x = -1$.

B. $x = 0$.

C. $x = 1$.

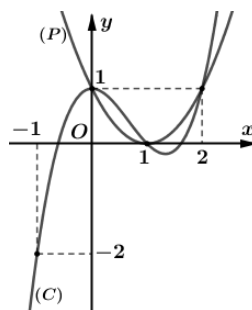
D. $x = 2$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $g'(x) = f'(x) - x^2 + 2x - 1$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = (x-1)^2$.

Suy ra số nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$ chính là số giao điểm giữa đồ thị của hàm số $f'(x)$ và parabol $(P): y = (x-1)^2$.



Dựa vào đồ thị ta suy ra $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$.

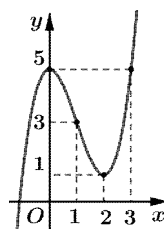
Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$		
g'	-	0	+	0	-	0	+
g							

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $g(x)$ đạt cực đại tại $x = 1$.

Câu 46.17: Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên.

Lời giải



Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = 3f(x) + x^3 - 15x + 1$ là

A. 2.

B. 1.

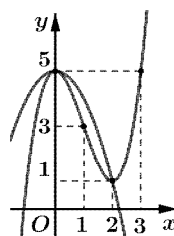
C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có $g'(x) = 3f'(x) + 3x^2 - 15$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 5 - x^2$.

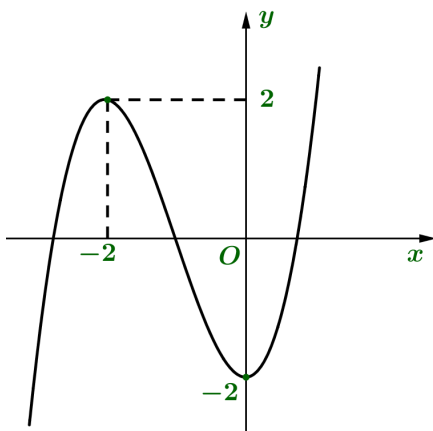


Đồ thị hàm số $f'(x)$ cắt đồ thị hàm số $y = 5 - x^2$ tại hai điểm $A(0;5)$, $B(2;1)$.

Trong đó $x = 0$ là nghiệm bội bậc 2; $x = 2$ là nghiệm đơn.

Vậy hàm số có một điểm cực trị

Câu 46.18: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên dưới. Hàm số $g(x) = f(-x^2 + 3x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?



A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. 6.

Lời giải

Chọn C

Từ đồ thị ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ như sau

x	$-\infty$	-2		0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$		$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	
	$-\infty$	2		-2	$+\infty$

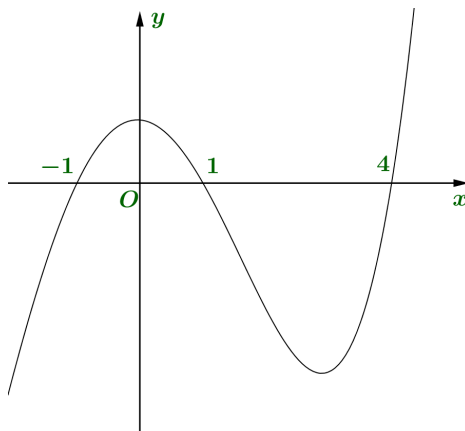
Ta có $g(x) = f(-x^2 + 3x) \Rightarrow g'(x) = (-2x + 3) \cdot f'(-x^2 + 3x)$

$$\text{Cho } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 3 = 0 \\ f'(-x^2 + 3x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ -x^2 + 3x = -2 \\ -x^2 + 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ x = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2} \\ x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$$

Như vậy phương trình $g'(x) = 0$ có tất cả 5 nghiệm đơn phân biệt.

Vậy hàm số $g(x) = f(-x^2 + 3x)$ có 5 cực trị.

Câu 46.19: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên dưới. Hàm số $y = f(x^2)$ có bao nhiêu điểm cực trị?



A. 3.

B. 2.

C. 5.

D. 4.

Lời giải

Chọn A

Gọi $x = a$, với $1 < a < 4$ là điểm cực tiểu của hàm số $y = f(x)$

Từ đồ thị ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ như sau

x	$-\infty$		0		a		$+\infty$
$f'(x)$	+		0	-	0	+	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
							$+\infty$
							$-\infty$

Ta có $y = f(x^2) \Rightarrow y' = 2x \cdot f'(x^2)$

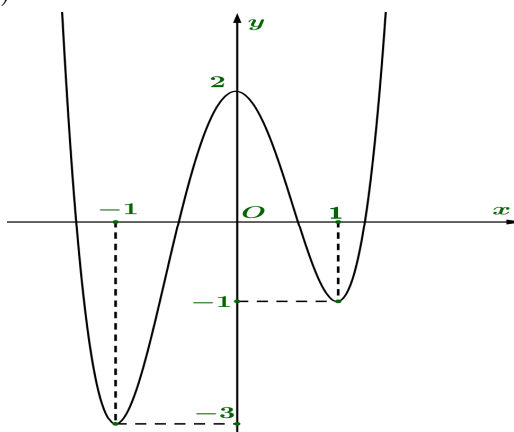
$$\text{Cho } y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ f'(x^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = 0 \\ x^2 = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{a} \end{cases}, \text{ với } 1 < a < 4$$

Bảng biến thiên của hàm số $y = f(x^2)$

x	$-\infty$		$-\sqrt{a}$		0		$\sqrt{a}$		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	0	+	
y	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số $y = f(x^2)$ có 3 cực trị.

Câu 46.20: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên dưới



Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x^2 + 2x)$ là

A. 3.

B. 9.

C. 5.

D. 7.

Lời giải

Chọn C

Từ đồ thị ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$		-3		2		-1		$+\infty$

Ta có $y = f(x^2 + 2x) \Rightarrow y' = (2x + 2) \cdot f'(x^2 + 2x)$

$$\text{Cho } y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2 = 0 \\ f'(x^2 + 2x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x^2 + 2x = -1 \\ x^2 + 2x = 0 \\ x^2 + 2x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -2 \\ x = 0 \\ x = -1 \pm \sqrt{2} \end{cases}$$

Bảng biến thiên của hàm số $y = f(x^2 + 2x)$

x	$-\infty$		$-1 - \sqrt{2}$		-2		-1		0		$-1 + \sqrt{2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$												$+\infty$

Vậy hàm số $y = f(x^2 + 2x)$ có 5 cực trị.

Câu 46.21: Cho hàm số $f(x)$, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-3	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	-3	3	-2	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $y = f(6-3x)$ là

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn C.

$$\text{Ta có } y' = -3.f'(6-3x). \text{ Cho } y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 6-3x = -3 \\ 6-3x = 1 \\ 6-3x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = \frac{5}{3} \\ x = 1 \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	1	$\frac{5}{3}$	3	$+\infty$			
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Nhận xét: y' đổi dấu 3 lần khi đi qua các nghiệm nên phương trình $y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt. Vậy hàm số $y = f(6-3x)$ có 3 cực trị.

Câu 46.22: Cho hàm số $f(x)$, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-5	-2	3	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	-5	3	-1	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x^2 - 5)$ là

A. 7.

B. 1.

C. 5.

D. 4.

Lời giải

Chọn A.

$$\text{Ta có } g'(x) = 2x.f'(x^2 - 5). \text{ Cho } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ f'(x^2 - 5) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 5 = a, a < -5 \\ x^2 - 5 = b, -5 < b < -2 \\ x^2 - 5 = c, -2 < c < 3 \\ x^2 - 5 = d, d > 3 \end{cases}$$

- Phương trình $x^2 = a + 5 < 0$, $a < -5$ nên phương trình vô nghiệm.
- Phương trình $x^2 = b + 5 > 0$, $-5 < b < -2$ nên phương trình 2 nghiệm phân biệt.

- Phương trình $x^2 = c + 5 > 0$, $-2 < c < 3$ nên phương trình 2 nghiệm phân biệt.
- Phương trình $x^2 = d + 5 > 0$, $d > 3$ nên phương trình 2 nghiệm phân biệt.

Nhận xét: 7 nghiệm trên khác nhau đôi một nên phương trình $g'(x) = 0$ có 7 nghiệm phân biệt.

Vậy hàm số $g(x) = f(x^2 - 5)$ có 7 cực trị.

Câu 46.23: Cho hàm số $f(x)$, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$
$f'(x)$		$\nearrow$ 4 $\searrow$	$\nearrow$	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f[(x+1)^2]$ là

- A.** 5. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $g(x) = f[(x+1)^2] = f(x^2 + 2x + 1) \Rightarrow g'(x) = (2x+2) \cdot f'(x^2 + 2x + 1)$.

$$\text{Cho } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+2=0 \\ f'(x^2+2x+1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x^2+2x+1=a, a<0 \\ x^2+2x+1=b, 0<b<3 \\ x^2+2x+1=c, c>3 \end{cases}$$

- $x^2 + 2x + 1 - a = 0$ có $\Delta = 4a < 0$, $a < 0$ nên phương trình vô nghiệm.
- $x^2 + 2x + 1 - b = 0$ có $\Delta = 4b > 0$, $0 < b < \frac{1}{2}$ nên phương trình có 2 nghiệm phân biệt.
- $x^2 + 2x + 1 - c = 0$ có $\Delta = 4c > 0$, $c > 3$ nên phương trình có 2 nghiệm phân biệt.

Nhận xét: 5 nghiệm trên khác nhau đôi một nên phương trình $g'(x) = 0$ có 5 nghiệm phân biệt.

Vậy hàm số $g(x) = f[(x+1)^2]$ có 5 cực trị.

Câu 46.24: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-3	3	$+\infty$
$f'(x)$		$\nearrow$ 4 $\searrow$	$\nearrow$	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f\left(\frac{x^2+1}{x}\right)$ là

- A.** 6. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $g'(x) = \frac{x^2-1}{x^2} \cdot f\left(\frac{x^2+1}{x}\right)$.

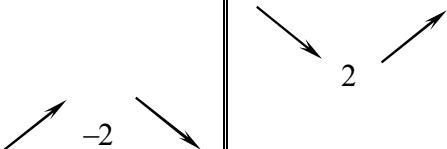
$$\text{Cho } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2-1}{x^2} = 0 \\ f\left(\frac{x^2+1}{x}\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-1=0 \\ \frac{x^2+1}{x} = a, \quad a < -2 \\ \frac{x^2+1}{x} = b, \quad -2 < a < 2 \\ \frac{x^2+1}{x} = c, \quad c > 2 \end{cases}$$

- $x^2-1=0$ có 2 nghiệm phân biệt $x = \pm 1$.

- Xét hàm số $h(x) = \frac{x^2+1}{x}$

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ta có $h'(x) = \frac{x^2-1}{x^2}$. Cho $h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$						

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy

- $h(x) = a$ có 2 nghiệm phân biệt, với $a < -2$
- $h(x) = b$ vô nghiệm, với $-2 < b < 2$
- $h(x) = c$ có 2 nghiệm phân biệt, với $c > 2$

Vậy hàm số $g(x) = f\left(\frac{x^2+1}{x}\right)$ có 6 điểm cực trị.

Câu 46.25: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$
$f'(x)$					

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ là

A. 8.

B. 7.

C. 1.

D. 3.

Lời giải

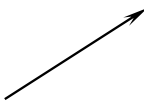
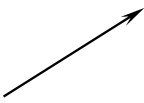
Chọn A

Ta có $g'(x) = \frac{-2}{(x-1)^2} \cdot f'\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$. Cho $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \frac{x+1}{x-1} = a, & a < -1 \\ \frac{x+1}{x-1} = b, & -1 < b < 0 \\ \frac{x+1}{x-1} = c, & 0 < c < 2 \\ \frac{x+1}{x-1} = d, & d > 2 \end{cases}$$

Xét hàm số $h(x) = \frac{x+1}{x-1}$

- Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Ta có $h'(x) = \frac{-2}{(x-1)^2} > 0, \forall x \in D$.
- Bảng biến thiên

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$+$
$f(x)$			

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy: Phương trình $h(x) = a$, $h(x) = b$, $h(x) = c$, $h(x) = d$ đều có 2 nghiệm phân biệt.

Vậy hàm số $g(x) = f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ có 8 cực trị

Câu 46.26: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	+	0	-	+
$f(x)$	$+\infty$	1	2	1	$+\infty$

Hàm số $g(x) = 3f(x) + 1$ đạt **cực tiểu** tại điểm nào sau đây?

A. $x = -1$.

B. $x = 1$.

C. $x = \pm 1$.

D. $x = 0$.

Lời giải

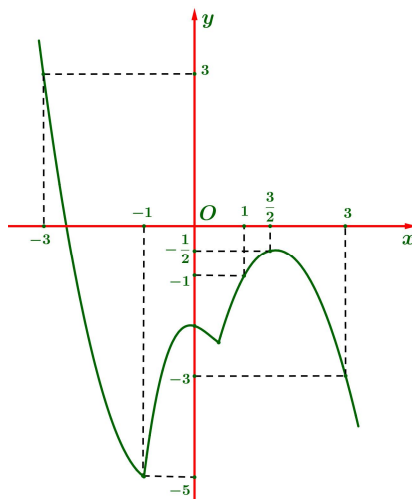
Chọn C

Ta có $g'(x) = 3f'(x)$

Do đó điểm cực tiểu của hàm số $g(x)$ trùng với điểm cực tiểu của hàm số $y = f(x)$.

Vậy điểm cực tiểu của hàm số là $x = \pm 1$.

Câu 46.27: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ



Hàm số $g(x) = f(x) + \frac{x^2}{2} + 2020$ đạt cực đại tại điểm nào sau đây?

A. $x = 3$.

B. $x = 1$.

C. $x = -3$.

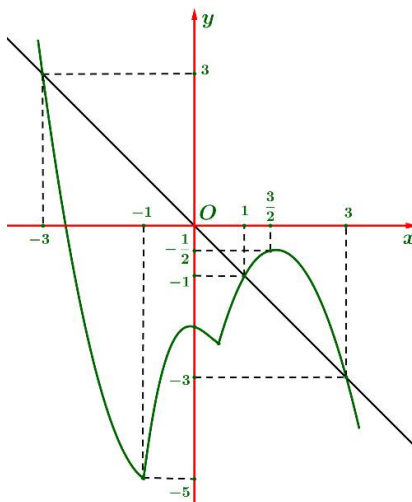
D. $x = \pm 3$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $g'(x) = f'(x) + x$. Cho $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -x$

Nhận thấy đường thẳng $y = -x$ cắt đồ thị hàm số $y = f'(x)$ lần lượt tại ba điểm $x = \pm 3; x = 1$.

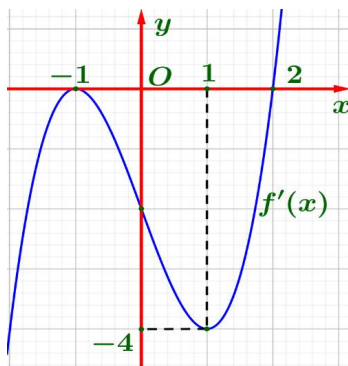


Ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x) = f(x) + \frac{x^2}{2} + 2020$

x	$-\infty$		-3		1		3		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	
	$-\infty$								$-\infty$

$$f'(t) > -t \Leftrightarrow \begin{cases} t < -3 \\ 1 < t < 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1-x < -3 \\ 1 < 1-x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 4 \\ -2 < x < 0 \end{cases}.$$

Câu 46.28: Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, đồ thị hình bên dưới là đồ thị của hàm số $y = f'(x)$. Xét hàm số $g(x) = f(x^2 - 2)$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?



A. Hàm số $g(x)$ đạt cực tiểu tại $x = \pm 2$.

B. Hàm số $g(x)$ đạt cực đại tại $x = 0$.

C. Hàm số $g(x)$ có 5 điểm cực trị

D. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.

Lời giải

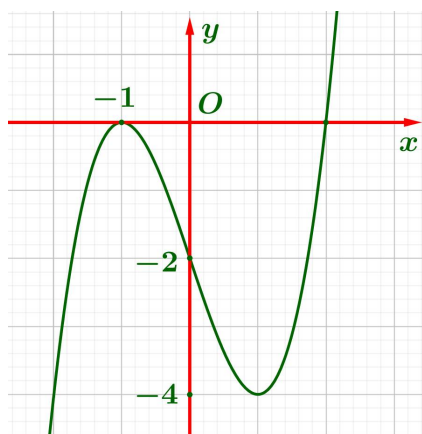
Chọn C

$$\text{Ta có: } g'(x) = 2x \cdot f'(x^2 - 2). \text{ Cho } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(x^2 - 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 2 = -1 \\ x^2 - 2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \\ x = \pm 2 \end{cases}$$

Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
$2x$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f'(2-x^2)$	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$+$

Câu 46.29: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $g(x) = f(x^2 - 2x - 1)$ đạt cực đại tại giá trị nào sau đây?

A. $x = 2$.B. $x = 0$.C. $x = -1$.D. $x = 1$.

Lời giải

Chọn D

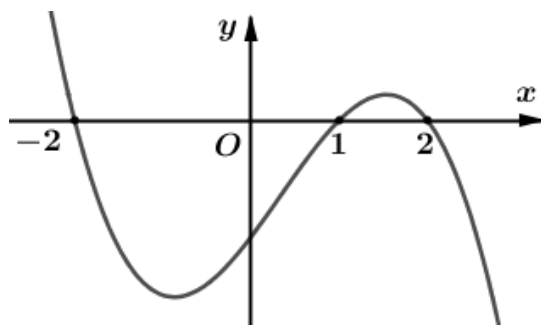
Ta có $g'(x) = (2x - 2) \cdot f'(x^2 - 2x - 1)$. Cho $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - 2x - 1 = -1 \\ x^2 - 2x - 1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \\ x = 2 \\ x = 3 \end{cases}$

Ta có bảng biến thiên

x	-1	0	1	2	3
$g'(x)$	-	0	+	0	+
$g(x)$					

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy hàm số đạt cực đại tại $x = 1$

Câu 46.30: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(2) = f(-2) = 0$ và đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ có dạng như hình bên dưới. Hàm số $y = f^2(x)$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?



- ### Lời giải

Chon D

Ta có bảng biến thiên

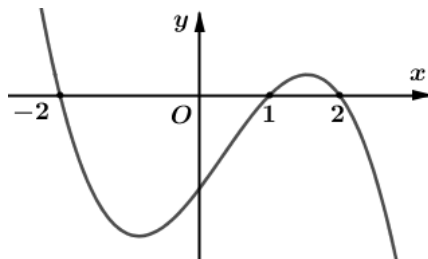
x	$-\infty$	-2	1	2	$+\infty$			
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$			0				0	

$$\text{Ta có } y = f^2(x) \Rightarrow y' = 2f(x).f'(x). \text{ Cho } y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ f'(x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 2 \\ x = 1; x = \pm 2 \end{cases}$$

Bảng xét dầu

x	$-\infty$	-2	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-\infty$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	0	$-\infty$	$-\infty$	0
$y = f^2(x)$	$-\infty$				$-\infty$

Câu 46.31: Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên dưới và $f(-2) = f(2) = 0$.



Hàm số $g(x) = [f(3-x)]^2$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $(-2; -1)$.

B. $(1; 2)$.

C. $(2; 5)$.

D. $(5; +\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$, suy ra bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ như sau

x	$-\infty$	-2		1		2	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
y							

Từ bảng biến thiên suy ra $f'(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Ta có $g'(x) = -2f'(3-x) \cdot f(3-x)$.

$$\text{Cho } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(3-x) = 0 \\ f(3-x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3-x = -2 \\ 3-x = 1 \\ 3-x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = 2 \\ x = 1 \end{cases}$$

Vì $f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f(3-x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Do đó $-2f(3-x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

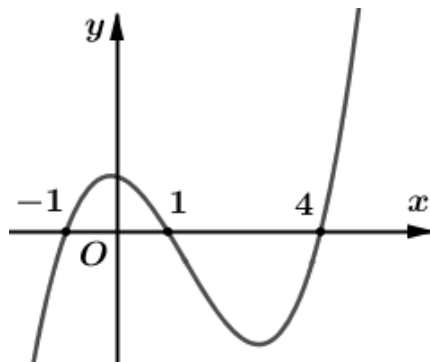
Bảng biến thiên

x	$-\infty$	1	2	5	$+\infty$		
$f'(3-x)$	$-$	0	$+$	0	$-\infty$	0	$+$
$-2f(3-x)$	$+$	0	$+$		$+$	0	$+$

$g'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
---------	---	---	---	---	---	---	---

Suy ra hàm số $g(x)$ nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 1)$, $(2; 5)$.

Câu 46.32: Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên dưới



Hàm số $g(x) = f(|3-x|)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau

A. $(-\infty; -1)$.

B. $(-1; 2)$.

C. $(2; 3)$.

D. $(4; 7)$.

Lời giải

Chọn B

Dựa vào đồ thị ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$.

x	$-\infty$		-1		1		4		$+\infty$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$		
$f(x)$	$+\infty$									$+\infty$

$$\text{Ta có } g(x) = f(|3-x|) = \begin{cases} f(3-x). & \text{Khi } x \leq 3 \\ f(x-3). & \text{Khi } x > 3 \end{cases}$$

- Với $x \leq 3$ khi đó $g'(x) = -f'(3-x)$

Hàm số $g(x)$ đồng biến $\Leftrightarrow g'(x) > 0$

$$\Leftrightarrow -f'(3-x) > 0 \Leftrightarrow f'(3-x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3-x < -1 \\ 1 < 3-x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 4 \\ -1 < x < 2 \end{cases}$$

Kết hợp điều kiện $x \leq 3$, ta được $-1 < x < 2$.

Vậy hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1; 2)$.

- Với $x > 3$ khi đó $g'(x) = f'(x-3)$

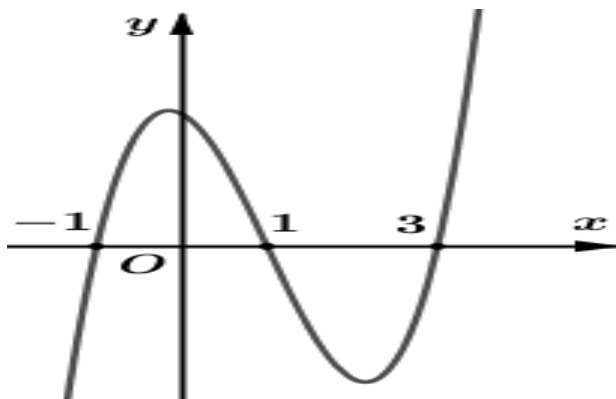
Hàm số $g(x)$ đồng biến $\Leftrightarrow g'(x) > 0$

$$\Leftrightarrow f'(x-3) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x-3 < 1 \\ x-3 > 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 < x < 4 \\ x > 7 \end{cases}$$

Kết hợp điều kiện $x > 3$, ta được $\begin{cases} 3 < x < 4 \\ x > 7 \end{cases}$.

Vậy hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(3; 4)$ và $(7; +\infty)$

Câu 46.33: Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên dưới



Hàm số $g(x) = f(\sqrt{x^2 + 4x + 3})$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 5.

B. 3.

C. 2.

D. 7.

Lời giải

Chọn A

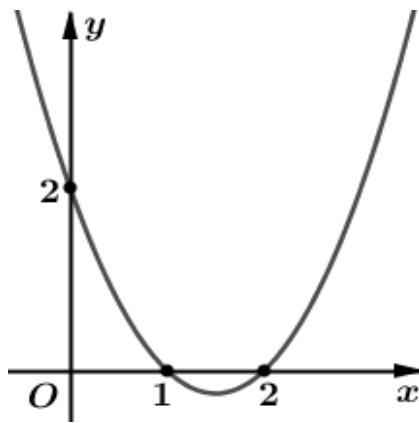
Dựa vào đồ thị ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$.

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$		
$f(x)$	$+\infty$									$+\infty$

$$\text{Ta có } g(x) = f(\sqrt{x^2 + 4x + 3}) \Rightarrow g'(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x^2 + 4x + 3}} \cdot f'(\sqrt{x^2 + 4x + 3}).$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ \sqrt{x^2+4x+3}=1 \\ \sqrt{x^2+4x+3}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ x^2+4x+2=0 \\ x^2+4x-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=-2\pm\sqrt{2} \\ x=-2\pm\sqrt{10} \end{cases}$$

Câu 46.34: Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên dưới



A. $(-\infty; -1)$. **B.** $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$. **C.** $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$. **D.** $(-1; +\infty)$.

Chọn A

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$		
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$						

Trang 691

$$\Rightarrow g'(x) = (x+1) \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+3}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}} \right) \cdot f'(\sqrt{x^2+2x+3} - \sqrt{x^2+2x+2}).$$

$$\text{Để thấy } \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+3}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}} < 0 \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

$$\text{Đặt } u = u(x) = \sqrt{x^2+2x+3} - \sqrt{x^2+2x+2}$$

$$\text{Để thấy } \sqrt{x^2+2x+3} - \sqrt{x^2+2x+2} > 0 \Leftrightarrow u(x) > 0 \quad (2)$$

$$\text{Mặt khác } \sqrt{x^2+2x+3} - \sqrt{x^2+2x+2} = \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2+2} + \sqrt{(x+1)^2+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}+1} < 1$$

$$\Leftrightarrow u(x) < 1 \quad (3)$$

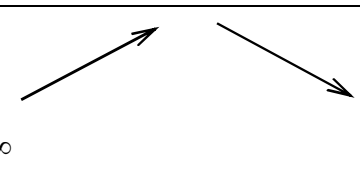
$$\text{Từ (2), (3)} \Rightarrow 0 < u(x) < 1$$

$$\text{Kết hợp đồ thị ta suy ra } f'(u) > 0, \text{ với } 0 < u < 1 \quad (4)$$

$$\text{Từ (1) và (4)} \Rightarrow g'(x) \text{ ngược dấu với dấu của nhị thức } h(x) = x+1$$

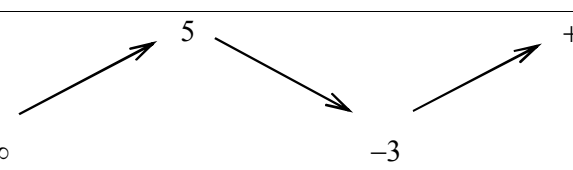
Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$h(x)$		$-$	$+$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	$-\infty$		$+\infty$



Câu 46.35: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	5	-3	$+\infty$	



Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $|f(1-3x)+1|=m$ có nhiều nghiệm nhất?

A. $m > 0$.B. $m < 2$.C. $0 < m < 2$.D. $m < 0$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Đặt } g(x) = f(1-3x)+1 \Rightarrow g'(x) = -3 \cdot f'(1-3x)$$

$$\text{Cho } g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(1-3x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1-3x = -1 \\ 1-3x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ x = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-\frac{2}{3}$		$\frac{2}{3}$	$+\infty$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	$+\infty$			6		$-\infty$
		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$
			-2			
$ g(x) $	$+\infty$		2		6	$+\infty$
	$\searrow$		$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$
		0		0		0

Để phương trình $|f(1-3x)+1|=m$ có nhiều nghiệm nhất $\Leftrightarrow$ đường thẳng $y=m$ cắt đồ thị

$y=|g(x)|$ tại nhiều điểm nhất $\Leftrightarrow 0 < m < 2$.

Câu 46.36: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$		$+\infty$		$+\infty$
	$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$
		$-\infty$		3	

Số nghiệm của phương trình $3|f(2x-1)|-10=0$ là

A. 2.

B. 1.

C. 4.

D. 3.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t = 2x - 1$, phương trình đã cho trở thành $|f(t)| = \frac{10}{3}$.

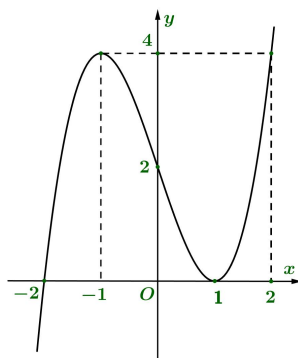
Với mỗi nghiệm của t thì có một nghiệm $x = \frac{t+1}{2}$ nên số nghiệm của phương trình $|f(t)| = \frac{10}{3}$ bằng số nghiệm của $3|f(2x-1)|-10=0$.

Bảng biến thiên của hàm số $y = |f(x)|$ là

x	$-\infty$	x_0	0	1	$+\infty$
$ f(x) $	$+\infty$		$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
				3	
		0			

Suy ra phương trình $|f(t)| = \frac{10}{3}$ có 4 nghiệm phân biệt nên phương trình $3|f(2x-1)|-10=0$ có 4 nghiệm phân biệt.

Câu 46.37: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Đồ thị của hàm số $g(x) = f^3(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?



A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 5.

Lời giải

Chọn B

Ta có $g(x) = f^3(x) \Rightarrow g'(x) = 3 \cdot f'(x) \cdot f^2(x)$

Vì $f^2(x) > 0$, với mọi $x \in \mathbb{R}$ nên $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

Từ đó suy ra $g(x) = f^3(x)$ có hai điểm.