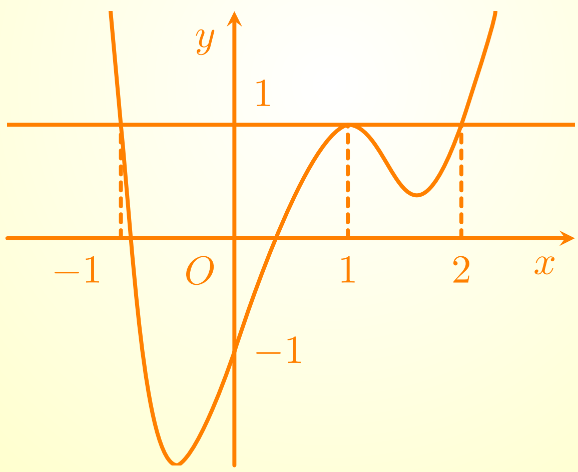
TRƯỜNG THPT NGUYỄN TẤT THÀNH – GV: LÊ QUANG XE – ĐT: 0967.003.131

TOÁN 12

Chuyên đề

HÀM SỐ



LƯU HÀNH NỘI BỘ

MỤC LỤC

BÀI 1. TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

A LÝ THUYẾT

1. Điều kiện để hàm số đơn điệu trên khoảng $\mathcal{K}$

Định nghĩa 1.1. Giả sử $\mathcal{K}$ là một khoảng, một đoạn hoặc một nửa khoảng và $y = f(x)$ là một hàm số xác định trên $\mathcal{K}$, ta nói
Hàm số $y = f(x)$ được gọi là **đồng biến** (tăng) trên $\mathcal{K}$ nếu

$$\forall x_1, x_2 \in \mathcal{K}, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Hàm số $y = f(x)$ được gọi là **nghịch biến** (giảm) trên $\mathcal{K}$ nếu

$$\forall x_1, x_2 \in \mathcal{K}, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Hàm số đồng biến hoặc nghịch biến trên $\mathcal{K}$ gọi chung là **đơn điệu** trên $\mathcal{K}$.

Nhận xét

- Nếu hàm số $f(x)$ và $g(x)$ cùng đồng biến (nghịch biến) trên $\mathscr{D}$ thì hàm số $f(x) + g(x)$ cũng đồng biến (nghịch biến) trên $\mathscr{D}$. Tính chất này có thể không đúng đối với hiệu $f(x) - g(x)$.
- Nếu hàm số $f(x)$ và $g(x)$ là các hàm số dương và cùng đồng biến (nghịch biến) trên $\mathscr{D}$ thì hàm số $f(x) \cdot g(x)$ cũng đồng biến (nghịch biến) trên $\mathscr{D}$. Tính chất này có thể không đúng khi các hàm số $f(x), g(x)$ không là các hàm số dương trên $\mathscr{D}$.
- Cho hàm số $u = u(x)$, xác định với $x \in (a; b)$ và $u(x) \in (c; d)$. Hàm số $f[u(x)]$ cũng xác định với $x \in (a; b)$. Ta có nhận xét sau
  - Giả sử $u = u(x)$ đồng biến với $x \in (a; b)$. Khi đó, hàm số $f[u(x)]$ đồng biến với $x \in (a; b) \Leftrightarrow f(u)$ đồng biến với $u \in (c; d)$.
  - Giả sử $u = u(x)$ nghịch biến với $x \in (a; b)$. Khi đó, hàm số $f[u(x)]$ nghịch biến với $x \in (a; b) \Leftrightarrow f(u)$ nghịch biến với $u \in (c; d)$.

Định lí 1.1. *Giả sử hàm số f có đạo hàm trên khoảng $\mathcal{K}$. Khi đó*

- *Nếu hàm số đồng biến trên khoảng $\mathcal{K}$ thì $f'(x) \geq 0, \forall x \in \mathcal{K}$.*
- *Nếu hàm số nghịch biến trên khoảng $\mathcal{K}$ thì $f'(x) \leq 0, \forall x \in \mathcal{K}$.*

Định lí 1.2. *Giả sử hàm số f có đạo hàm trên khoảng $\mathcal{K}$. Khi đó*

- *Nếu $f'(x) > 0, \forall x \in \mathcal{K}$ thì hàm số f đồng biến trên $\mathcal{K}$.*
- *Nếu $f'(x) < 0, \forall x \in \mathcal{K}$ thì hàm số f nghịch biến trên $\mathcal{K}$.*
- *Nếu $f'(x) = 0, \forall x \in \mathcal{K}$ thì hàm số f không đổi trên $\mathcal{K}$.*

2. Định lý về điều kiện đủ để hàm số đơn điệu

Định lí 1.3. *Giả sử hàm số f có đạo hàm trên khoảng $\mathcal{K}$. Khi đó*

- *Nếu $f'(x) \geq 0, \forall x \in \mathcal{K}$ và $f'(x) = 0$ chỉ tại hữu hạn điểm thuộc $\mathcal{K}$ thì hàm số f đồng biến trên $\mathcal{K}$.*
- *Nếu $f'(x) \leq 0, \forall x \in \mathcal{K}$ và $f'(x) = 0$ chỉ tại hữu hạn điểm thuộc $\mathcal{K}$ thì hàm số f nghịch biến trên $\mathcal{K}$.*

Một số bài toán

- **Bài toán 1.** Tìm tham số m để hàm số $y = f(x; m)$ đơn điệu trên khoảng $(\alpha; \beta)$.
  - **Bước 1:** Ghi điều kiện để $y = f(x; m)$ đơn điệu trên $(\alpha; \beta)$. Chẳng hạn
    - \+ Đề yêu cầu $y = f(x; m)$ đồng biến trên $(\alpha; \beta) \Rightarrow y' = f'(x; m) \geq 0$.
    - \+ Đề yêu cầu $y = f(x; m)$ nghịch biến trên $(\alpha; \beta) \Rightarrow y' = f'(x; m) \leq 0$.
  - **Bước 2:** Độc lập m ra khỏi biến số và đặt vế còn lại là $g(x)$, có hai trường hợp thường gặp
    - \+ $m \geq g(x), \forall x \in (\alpha; \beta) \Rightarrow m \geq \max\limits_{(\alpha;\beta)} g(x)$.
    - \+ $m \leq g(x), \forall x \in (\alpha; \beta) \Rightarrow m \leq \min\limits_{(\alpha;\beta)} g(x)$.
  - **Bước 3:** Khảo sát tính đơn điệu của hàm số $g(x)$ trên $(\alpha; \beta)$ (hoặc sử dụng Cauchy) để tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất. Từ đó suy ra m.
- **Bài toán 2.** Tìm tham số m để hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ đơn điệu trên khoảng $(\alpha; \beta)$.
  - Tìm tập xác định, chẳng hạn $x \neq -\dfrac{d}{c}$. Tính đạo hàm y'.
  - Hàm số đồng biến $\Rightarrow y' > 0$ (hàm số nghịch biến $\Rightarrow y' < 0$). Giải ra tìm được m (1).
  - Vì $x \neq -\dfrac{d}{c}$ và có $x \in (\alpha; \beta)$ nên $-\dfrac{d}{c} \notin (\alpha; \beta)$. Giải ra tìm được m (2).
  - Lấy giao của (1) và (2) được các giá trị m cần tìm.
- **Ghi nhớ** Nếu hàm số $f(t)$ đơn điệu một chiều trên miền $\mathscr{D}$ (*luôn đồng biến hoặc luôn nghịch biến*) thì phương trình $f(t) = 0$ có tối đa một nghiệm và $\forall u, v \in \mathscr{D}$ thì $f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v$.

B VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x-9)(x-4)^2$. Khi đó hàm số $y = f\left(x^2\right)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

Ⓐ $(3; +\infty)$. Ⓑ $(-3; 0)$. Ⓒ $(-\infty; -3)$. Ⓓ $(-2; 2)$.

Lời giải.

Ta có

$$y' = \left[f\left(x^2\right)\right]' = \left(x^2\right)' x^4 \left(x^2 - 9\right)\left(x^2 - 4\right)^2 = 2x^5(x-3)(x+3)(x-2)^2(x+2)^2.$$

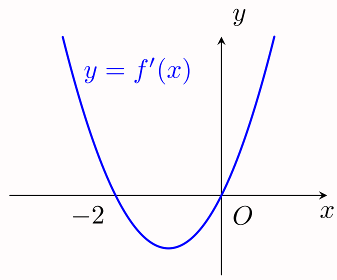
Cho $y' = 0 \Leftrightarrow x = -3$ hoặc $x = -2$ hoặc $x = 0$ hoặc $x = 2$ hoặc $x = 3$.
Ta có bảng xét dấu của y'

x	$-\infty$		-3		-2		0		2		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu, hàm số $y = f\left(x^2\right)$ nghịch biến trên $(-\infty; -3)$ và $(0; 3)$.
Chọn đáp án C □

Ví dụ 2.
Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị hàm $f'(x)$ như hình vẽ bên. Hỏi hàm số $y = f\left(x^2 - 1\right)$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây

A $(-1; 0)$. B $(0; 1)$. C $(-\infty; 0)$. D $(0; +\infty)$.



Lời giải.

Ta có $y' = 2x \cdot f'\left(x^2 - 1\right)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 2x \cdot f'\left(x^2 - 1\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 - 1 = -2 \\ x^2 - 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = -1 \\ x^2 = 1 \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -1 \\ x = 1. \end{array}\right.$$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y		↘		↗		↘		↗	

Nhìn bảng biến thiên hàm số $y = f\left(x^2 - 1\right)$ nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$.
Chọn đáp án B □

Ví dụ 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x + 2)\left(x^2 + mx + 5\right)$ với $\forall x \in \mathbb{R}$. Số giá trị nguyên âm của m để hàm số $g(x) = f\left(x^2 + x - 2\right)$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$ là

A 3. B 4. C 5. D 7.

Lời giải.

Ta có $g'(x) = (2x + 1) \cdot f'\left(x^2 + x - 2\right)$. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$
$\Leftrightarrow g'(x) \geq 0\ \forall x \in (1; +\infty) \Leftrightarrow f'\left(x^2 + x - 2\right) \geq 0\ \forall x \in (1; +\infty)$
$\Leftrightarrow \left(x^2 + x - 2\right)^2 \left(x^2 + x\right) \left(\left(x^2 + x - 2\right)^2 + m\left(x^2 + x - 2\right) + 5\right) \geq 0\ \forall x \in (1; +\infty)$
$\Leftrightarrow \left(x^2 + x - 2\right)^2 + m\left(x^2 + x - 2\right) + 5 \geq 0 \quad (1)\ \forall x \in (1; +\infty)$.
Đặt $t = x^2 + x - 2$, $x \in (1; +\infty) \Rightarrow t > 0$.
Khi đó (1) trở thành $t^2 + mt + 5 \geq 0\ \forall t \in (0; +\infty) \Leftrightarrow t + \dfrac{5}{t} \geq -m \quad (2)\ \forall t \in (0; +\infty)$.
Để (1) nghiệm đúng với mọi $x \in (1; +\infty) \Leftrightarrow$ (2) nghiệm đúng với mọi $t \in (0; +\infty)$.
Ta có $h(t) = t + \dfrac{5}{t} \geq 2\sqrt{5}$ với $\forall t \in (0; +\infty)$. Dấu bằng xảy ra khi $t = \dfrac{5}{t} \Leftrightarrow t = \sqrt{5}$.
Suy ra $\min\limits_{t \in (0; +\infty)} h(t) = 2\sqrt{5} \Rightarrow$ (2) nghiệm đúng $\forall t \in (0; +\infty) \Leftrightarrow -m \leq 2\sqrt{5} \Leftrightarrow m \geq -2\sqrt{5}$.
Vậy số giá trị nguyên âm của m là 4.
Chọn đáp án B □

Ví dụ 4. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$		-1		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Bất phương trình $f(x)<e^{x^2}+m$ đúng với mọi $x\in(-1;1)$ khi và chỉ khi

A $m\geq f(0)-2$. **B** $m>f(-1)-e$. **C** $m>f(0)-1$. **D** $m\geq f(-1)-e$.

Lời giải.

Ta có $f(x)<e^{x^2},\forall x\in(-1;1)\Leftrightarrow m>g(x)=f(x)-e^{x^2},\forall x\in(-1;1)$. (1)

Ta có $g'(x)=g'(x)-2x\cdot e^{x^2}$ có nghiệm $x=0\in(-1;1)$ và $\begin{cases}g'(x)>0,\forall x\in(-1;0)\\ g'(x)<0,\forall x\in(0;1).\end{cases}$

Bảng biến thiên

x	-1		0		1
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(0)-1$	$\searrow$	$-\infty$

Do đó $\max\limits_{(-1;1)} g(x)=g(0)=f(0)-1$.

Ta được $(1)\Leftrightarrow m>f(0)-1$.

Chọn đáp án C □

Ví dụ 5. Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-3		0		3		$+\infty$
y'	4	$\searrow$	1	$\nearrow$	3	$\searrow$	1	$\nearrow$	3

Bất phương trình $f(x)<3\mathrm{e}^{x+2}+m$ có nghiệm $x\in(-2;2)$ khi và chỉ khi

A $m\geq f(-2)-3$. **B** $m>f(2)-3\mathrm{e}^4$. **C** $m\geq f(2)-3\mathrm{e}^4$. **D** $m>f(-2)-3$.

Lời giải.

Ta có $f(x)<3\mathrm{e}^{x+2}+m\Leftrightarrow f(x)-3\mathrm{e}^{x+2}<m$.
Đặt $h(x)=f(x)-3\mathrm{e}^{x+2}\Rightarrow h'(x)=f'(x)-3\mathrm{e}^{x+2}$.
Vì $\forall x\in(-2;2)$, $f'(x)\leq 3$ và $x\in(-2;2)\Rightarrow x+2\in(0;4)\Rightarrow 3\mathrm{e}^{x+2}\in(3;3\mathrm{e}^4)$.
Nên $h'(x)=f'(x)-3\mathrm{e}^{x+2}<0,\forall x\in(-2;2)\Rightarrow f(2)-3\mathrm{e}^4<h(x)<f(-2)-3$.
Vậy bất phương trình $f(x)<3\mathrm{e}^{x+2}+m$ có nghiệm $x\in(-2;2)$ khi và chỉ khi $m>f(2)-3\mathrm{e}^4$.
Chọn đáp án B □

Ví dụ 6. Tổng các giá trị nguyên của tham số m trên khoảng $(-2020;2020)$ để hàm số $y=\dfrac{\sin x-3}{\sin x-m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$.

A -2039187. **B** 2022. **C** 2093193. **D** 2021.

Lời giải.

Điều kiện xác định: $\sin x \neq m$.

Ta có $y = \dfrac{\sin x - 3}{\sin x - m} \Rightarrow y' = \dfrac{\cos x(\sin x - m) - (\sin x - 3)\cos x}{(\sin x - m)^2} = \dfrac{\cos x(3 - m)}{(\sin x - m)^2}$.

Vì $x \in \left(0; \dfrac{\pi}{4}\right)$ nên $\cos x > 0$; $\sin x \in \left(0; \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

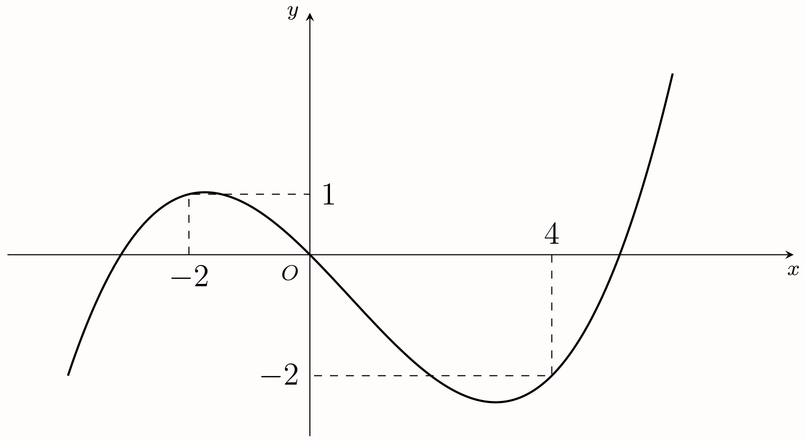
Suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $\left(0; \dfrac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - m > 0 \\ \left[\begin{array}{l} m \leq 0 \\ m \geq \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \leq 0 \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} \leq m < 3. \end{array}\right.$

Vì $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-2019; -2018; \ldots; -1; 0\} \cup \{1; 2\}$.

Vậy tổng các giá trị của tham số m là $S = \dfrac{-2019 + 0}{2} \cdot 2020 + 1 + 2 = -2039187$.

Chọn đáp án A □

Ví dụ 7. Cho hàm số $f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $g(x) = f(1 - 2x) + x^2 - x$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



A $\left(1; \dfrac{3}{2}\right)$. B $\left(0; \dfrac{1}{2}\right)$. C $(-2; -1)$. D $(2; 3)$.

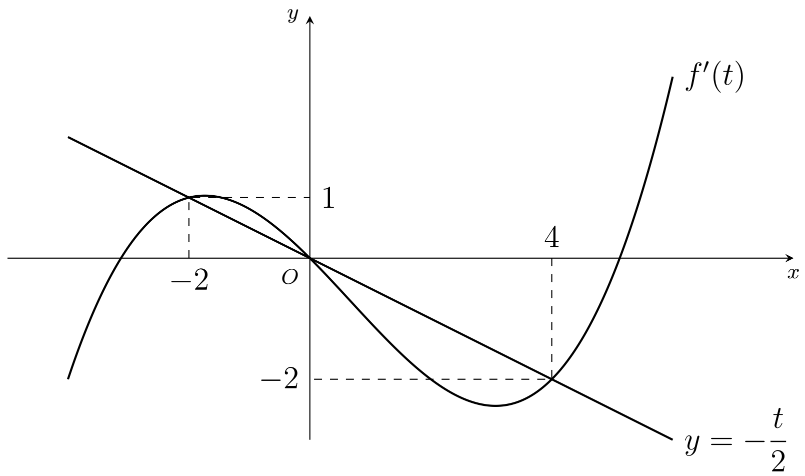
Lời giải.

Cách 1.

Ta có $g(x) = f(1 - 2x) + x^2 - x \Rightarrow g'(x) = -2f'(1 - 2x) + 2x - 1$.

Hàm số nghịch biến $\Leftrightarrow g'(x) < 0 \Leftrightarrow f'(1 - 2x) > -\dfrac{1 - 2x}{2}$.

Xét sự tương giao của đồ thị hàm số $y = f'(t)$ và $y = -\dfrac{t}{2}$.



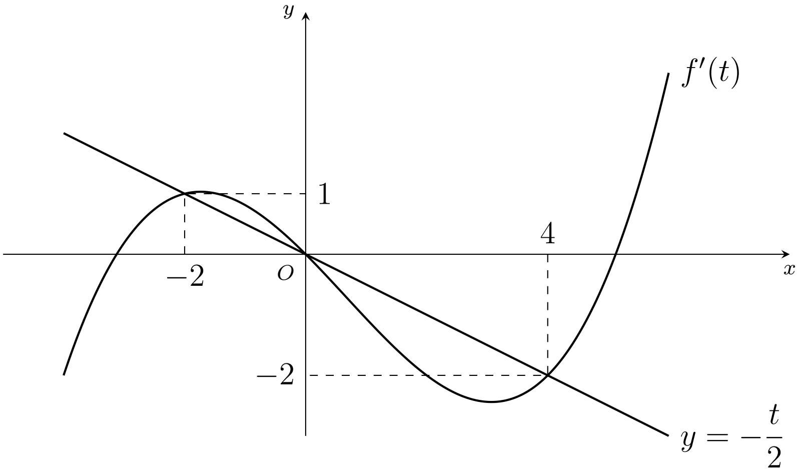
Dựa vào đồ thị ta có $f'(t) > -\frac{t}{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} -2 < t < 0 \\ t > 4. \end{array}\right.$

Khi đó $g'(x) < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2 < 1-2x < 0 \\ 1-2x > 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2} \\ x < -\frac{3}{2}. \end{array}\right.$

Cách 2.

Ta có $g(x) = f(1-2x) + x^2 - x \Rightarrow g'(x) = -2f'(1-2x) + 2x - 1$.

Xét $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(1-2x) = -\frac{1-2x}{2}$.



Xét sự tương giao của đồ thị hàm số $y = f'(t)$ và $y = -\frac{t}{2}$.

Từ đồ thị ta có $f'(t) = -\frac{t}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -2 \\ t = 0 \\ t = 4. \end{array}\right.$

Khi đó $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1-2x = -2 \\ 1-2x = 0 \\ 1-2x = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{3}{2} \\ x = \frac{1}{2} \\ x = -\frac{3}{2}. \end{array}\right.$

Ta có bảng xét dấu

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy hàm số nghịch biến trên các khoảng $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right)$ và $\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$.

Chọn đáp án A □

C MỘT SỐ DẠNG TOÁN CƠ BẢN

Dạng 1. Cơ bản về tính đơn điệu của hàm số

Câu 1. Hàm số nào dưới đây luôn đồng biến trên tập $\mathbb{R}$?

Ⓐ $y = x^2 + 2x + 1$. Ⓑ $y = x - \sin x$. Ⓒ $y = \dfrac{3x+2}{5x+7}$. Ⓓ $y = x^3 - 3x$.

Câu 2. Hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{5}{2}x^2 + 6x$ nghịch biến trên khoảng nào?

Ⓐ $(2;3)$. Ⓑ $(1;6)$. Ⓒ $(-6;-1)$. Ⓓ $(-3;-2)$.

Câu 3. Kết luận nào sau đây về tính đơn điệu của hàm số $y = \dfrac{3x-1}{x-2}$ là **đúng**?

Ⓐ Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$.
Ⓑ Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}\setminus\{2\}$.
Ⓒ Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$.
Ⓓ Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

Câu 4. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Mệnh đề nào dưới đây là **đúng**?

Ⓐ Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;2)$. Ⓑ Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$.
Ⓒ Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$. Ⓓ Hàm số nghịch biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

Câu 5. Hàm số nào sau đây đồng biến trên $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$?

Ⓐ $y = \dfrac{x-1}{x+2}$. Ⓑ $y = \dfrac{1}{x-2}$. Ⓒ $y = \dfrac{2x-5}{x-2}$. Ⓓ $y = \dfrac{x-1}{x-2}$.

Câu 6. Cho hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$. Mệnh đề nào dưới đây là **đúng**?

Ⓐ Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;3)$. Ⓑ Hàm số nghịch biến trên khoảng $(3;+\infty)$.
Ⓒ Hàm số đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$. Ⓓ Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;3)$.

Câu 7. Cho hàm số $y = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2} - 6x + \dfrac{3}{4}$. Mệnh đề nào dưới đây là **đúng**?

Ⓐ Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2;3)$. Ⓑ Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$.
Ⓒ Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2;3)$. Ⓓ Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2;+\infty)$.

Câu 8. Cho hàm số $y = \sqrt{x^2 - 1}$. Mệnh đề nào dưới đây là **đúng**?

Ⓐ Hàm số đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$. Ⓑ Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$.
Ⓒ Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$. Ⓓ Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

Câu 9. Hàm số $y = 2x^4 + 3$ đồng biến trên khoảng nào?

Ⓐ $\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right)$. Ⓑ $\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right)$. Ⓒ $(0;+\infty)$. Ⓓ $(-\infty;0)$.

Câu 10. Trong các hàm số sau đây, hàm số nào không nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

Ⓐ $y = -\dfrac{1}{1+x^2}$. Ⓑ $y = -x^3 - 3x$.
Ⓒ $y = -x^3 + 2x^2 - 7x$. Ⓓ $y = -4x + \cos x$.

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2 + 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

Ⓐ Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$. Ⓑ Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$.
Ⓒ Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$. Ⓓ Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

Câu 12. Trong các hàm số sau, hàm số nào vừa có khoảng đồng biến, vừa có khoảng nghịch biến trên tập xác định của nó. $(I)\colon y = \dfrac{2x+1}{x+1}$, $(II)\colon y = -x^4 + x^2 - 2$ và $(III)\colon y = x^3 + 3x - 4$.

(A) $(I); (III)$. (B) $(I); (II)$. (C) $(II); (III)$. (D) (II).

Câu 13. Cho hàm số $y = -\dfrac{x^3}{3} + x^2 - x + 1$. Mệnh đề nào dưới đây là **đúng**?

(A) Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
(B) Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.
(C) Hàm số đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$ và nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.
(D) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$ và đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.

Câu 14. Cho hàm số $y = \dfrac{x+1}{1-x}$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **đúng**?

(A) Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.
(B) Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.
(C) Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.
(D) Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.

Câu 15. Cho các hàm số $y = \dfrac{x+1}{x+2}$; $y = \tan x$; $y = x^3 + x^2 + 4x - 2022$. Số hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ là

(A) 0. (B) 3. (C) 1. (D) 2.

Câu 16. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = mx^2 - (m+6)x$ nghịch biến trên khoảng $(-1; +\infty)$.

(A) $-2 \le m \le 0$. (B) $-2 \le m < 0$. (C) $m \le -2$. (D) $m \ge -2$.

Câu 17. Cho hàm số $y = \dfrac{2x+1}{-x+1}$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

(A) Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
(B) Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
(C) Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.
(D) Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

Câu 18. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2 - 2x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số $y = -2f(x)$ đồng biến trên khoảng

(A) $(-2; 0)$. (B) $(0; 2)$. (C) $(2; +\infty)$. (D) $(-\infty; -2)$.

Câu 19. Cho hàm số $y = \dfrac{1}{4}x^4 - 2x^2 - 1$. Chọn khẳng định **đúng**.

(A) Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-2; 0)$ và $(2; +\infty)$.
(B) Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -2)$ và $(0; 2)$.
(C) Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-2; 0)$ và $(2; +\infty)$.
(D) Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -2)$ và $(2; +\infty)$.

Câu 20. Hàm số nào sau đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

(A) $y = x^4 - 2x^2 - 1$. (B) $y = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{2}x^2 + 3x + 1$.
(C) $y = \dfrac{x-1}{x+2}$. (D) $y = x^3 + 4x^2 + 3x + 1$.

Câu 21. Trong các hàm số sau, hàm số nào đồng biến trên $(1; +\infty)$?

(A) $y = x^3 + 3x$. (B) $y = \dfrac{x-1}{x^2+2}$. (C) $y = -x^3 - x + 1$. (D) $y = \dfrac{x-3}{x-2}$.

Câu 22. Hàm số $y=-x^4+4x^2+1$ nghịch biến trên mỗi khoảng nào sau đây?

Ⓐ $\left(\sqrt{2};+\infty\right)$.
Ⓑ $\left(-\sqrt{3};0\right)$; $\left(\sqrt{2};+\infty\right)$.
Ⓒ $\left(-\sqrt{2};0\right)$; $\left(\sqrt{2};+\infty\right)$.
Ⓓ $\left(-\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$.

Câu 23. Hàm số $y=x^3-3x^2$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

Ⓐ $(-1;1)$. Ⓑ $(-\infty;1)$. Ⓒ $(0;2)$. Ⓓ $(2;+\infty)$.

Câu 24. Hàm số nào sau đây đồng biến trên khoảng $(0;2)$?

Ⓐ $y=-x^3+3x^2$. Ⓑ $y=\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x}$. Ⓒ $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$. Ⓓ $y=\dfrac{x}{x-1}$.

Câu 25. Hàm số nào sau đây nghịch biến trên khoảng $(1;3)$

Ⓐ $y=\dfrac{1}{3}x^3-2x^2+3x+1$.
Ⓑ $y=\dfrac{x+1}{x+2}$.
Ⓒ $y=\dfrac{x^2-2x+1}{x-2}$.
Ⓓ $y=\sqrt{x^2+1}$.

Câu 26. Cho hàm số $y=\dfrac{2x+5}{x+1}$. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

Ⓐ Hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.
Ⓑ Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.
Ⓒ Hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.
Ⓓ Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.

Câu 27. Hàm số $y=x^4-2x^2+1$ đồng biến trên khoảng nào?

Ⓐ $\mathbb{R}$. Ⓑ $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$. Ⓒ $(-1;0)$. Ⓓ $(1;+\infty)$.

Câu 28. Hàm số nào sau đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

Ⓐ $y=\dfrac{x}{x+1}$. Ⓑ $y=x+1$. Ⓒ $y=x^4+1$. Ⓓ $y=x^2+1$.

Câu 29. Hàm số $y=x^4-2$ nghịch biến trên khoảng nào?

Ⓐ $\left(-\infty;\dfrac{1}{2}\right)$. Ⓑ $(-\infty;0)$. Ⓒ $\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$. Ⓓ $(0;+\infty)$.

Câu 30. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{3x+1}{-x+1}$. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào **đúng**?

Ⓐ $f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
Ⓑ Hàm số đồng biến trên từng khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.
Ⓒ $f(x)$ nghịch biến trên $(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$.
Ⓓ $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 31. Cho hàm số $y=x^3-2x^2+x+1$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

Ⓐ Hàm số nghịch biến trên các khoảng $\left(-\infty;\dfrac{1}{3}\right)\cup(1;+\infty)$.
Ⓑ Hàm số đồng biến trên $\left(-\infty;\dfrac{1}{3}\right)\cup(1;+\infty)$.
Ⓒ Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(\dfrac{1}{3};+\infty\right)$.
Ⓓ Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(\dfrac{1}{3};1\right)$.

Câu 32. Cho hàm $y=\sqrt{x^2-6x+5}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

Ⓐ Hàm số đồng biến trên khoảng $(5;+\infty)$.
Ⓑ Hàm số đồng biến trên khoảng $(3;+\infty)$.
Ⓒ Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$.
Ⓓ Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;3)$.

Câu 33. Hàm số $y=-x^4+2x^2+2$ nghịch biến trên

Ⓐ $(-1;0)$; $(1;+\infty)$. Ⓑ $(-1;1)$. Ⓒ $\mathbb{R}$. Ⓓ $(-\infty;-1)$; $(0;1)$.

Câu 34. Hàm số nào sau đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A $y = x^3 + 3x + 1$. B $y = x^3 - 3x + 1$. C $y = x^2 + 1$. D $y = -x\sqrt{2} + 1$.

Câu 35. Hàm số $y = \dfrac{x+2}{x-1}$ nghịch biến trên các khoảng

A $(-1; +\infty)$. B $(1; +\infty)$. C $(-\infty; 1); (1; +\infty)$. D $(3; +\infty)$.

Câu 36. Cho hàm số $y = \dfrac{x+3}{x-3}$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R} \setminus \{3\}$.

B Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \setminus \{3\}$.

C Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 3)$ và $(3; +\infty)$.

D Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 3)$ và $(3; +\infty)$.

Câu 37. Tìm tất cả các khoảng đồng biến của hàm số $y = \sqrt{9 - x^2}$.

A $(0; +\infty)$. B $(-\infty; 0)$. C $(-3; 0)$. D $(0; 3)$.

Câu 38. Trong các hàm số sau, hàm số nào nghịch biến trên tập xác định của nó?

A $y = x^4 + 2x^2 + 5$. B $y = -2x^3 - 3x + 5$. C $y = -x^4 - x^2$. D $y = \dfrac{x+1}{-x+3}$.

Câu 39. Hàm số nào sau đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A $y = x^4 + 2x^2 + 3$. B $y = \dfrac{x-1}{x+3}$.

C $y = -x^3 - x - 2$. D $y = x^3 + x^2 + 2x + 1$.

Câu 40. Trong các hàm số sau, hàm số nào đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A $y = x^3 - 3x^2 + 3x - 2$. B $y = \dfrac{x-1}{x+1}$.

C $y = x^4 + 2x^2 + 1$. D $y = -\dfrac{x^3}{3} + 3x + 2$.

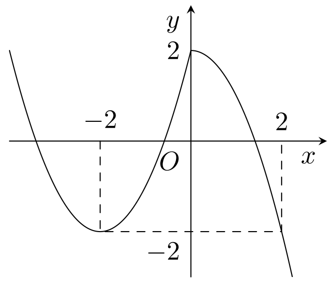
Câu 41. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x-9)(x-4)^2$. Khi đó hàm số $y = f\left(x^2\right)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A $(3; +\infty)$. B $(-3; 0)$. C $(-\infty; -3)$. D $(-2; 2)$.

Câu 42.

Cho $f(x)$ mà đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Hàm số $y = f(x-1) + x^2 - 2x$ đồng biến trên khoảng

A $(1; 2)$. B $(-1; 0)$. C $(0; 1)$. D $(-2; -1)$.



Câu 43. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2 - 2x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số $g(x) = f\left(2 - \sqrt{x^2+1}\right) - \sqrt{x^2+1} - 3$ đồng biến trên các khoảng nào dưới đây?

A $(-2; -1)$. B $(-1; 1)$. C $(1; 2)$. D $(2; 3)$.

Câu 44. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = x^2(x-2)\left(x^2 - 6x + m\right)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên m thuộc đoạn $[-2019; 2019]$ để hàm số $g(x) = f(1-x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$?

A 2012. B 2011. C 2009. D 2010.

Câu 45. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-1)^2(x-2)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số $g(x) = f\left(\dfrac{5x}{x^2+4}\right)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A $(-\infty; -2)$. B $(-2; 1)$. C $(0; 2)$. D $(2; 4)$.

Câu 46. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$		$-\frac{5}{2}$		-1		$\frac{1}{2}$		3		$+\infty$
$f'(x)$	0	+	0	−	0	−	0	+	0	−	

Xét hàm số $g(x) = f\left(\dfrac{x-1}{2}\right) - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{3}{2}x^2 - 2x + 3$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

(A) Hàm số $g(x)$ nghịch biến trong khoảng $(-1; 0)$.
(B) Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(0; 2)$.
(C) Hàm số $g(x)$ nghịch biến trong khoảng $(-4; -1)$.
(D) Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(2; 3)$.

Câu 47. Tìm tập hợp S tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - (m+1)x^2 + (m^2 + 2m)x - 3$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.

(A) $S = [-1; 0]$. (B) $S = \varnothing$. (C) $S = \{-1\}$. (D) $S = \{1\}$.

Câu 48. Tổng tất cả các giá trị thực của m để hàm số $y = \dfrac{1}{5}m^2x^5 - \dfrac{1}{3}mx^3 + 10x^2 - (m^2 - m - 20)x + 1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ bằng

(A) $\dfrac{5}{2}$. (B) -2. (C) $\dfrac{1}{2}$. (D) $\dfrac{3}{2}$.

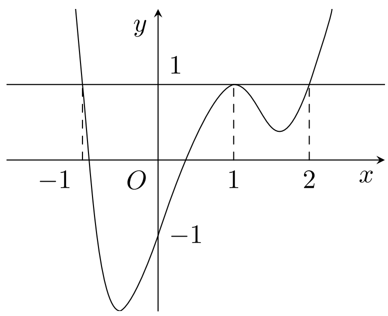
Câu 49. Cho hàm số $y = f(x)$ có $f'(x) = (x-2)(x+5)(x+1)$. Hàm số $y = f(x^2)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

(A) $(0; 1)$. (B) $(-1; 0)$. (C) $(-2; -1)$. (D) $(-2; 0)$.

Câu 50.

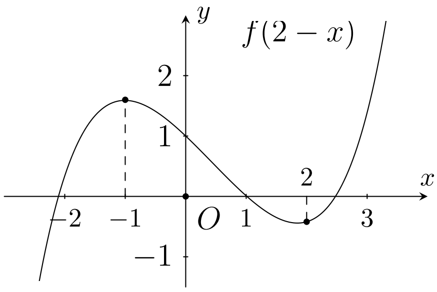
Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Đặt $g(x) = f(x) - x$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $g(1) < g(-1) < g(2)$. (B) $g(-1) < g(1) < g(2)$.
(C) $g(2) < g(1) < g(-1)$. (D) $g(2) < g(-1) < g(1)$.



Dạng 2. Tính đơn điệu của hàm hợp

Câu 51. Cho đồ thị hàm số $y = f(2-x)$ như hình vẽ bên. Hàm số $y = f\left(x^2-3\right)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



(A) $(0;1)$. (B) $(1;3)$. (C) $(-\infty;-1)$. (D) $(-1;0)$.

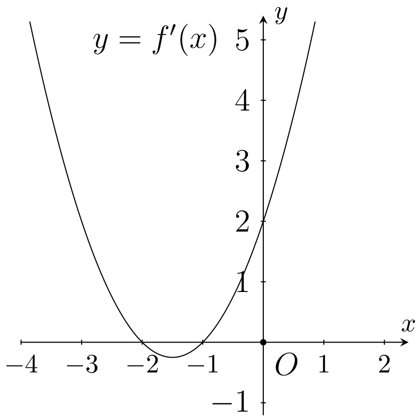
Câu 52. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-2		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số $y = f\left(x^2+2x\right)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

(A) $(-2;1)$. (B) $(-4;-3)$. (C) $(0;1)$. (D) $(-2;-1)$.

Câu 53. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số $y = g(x) = f\left(1+2x-x^2\right)+2020$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



(A) $(-1;0)$. (B) $(0;1)$. (C) $(2;3)$. (D) $(3;5)$.

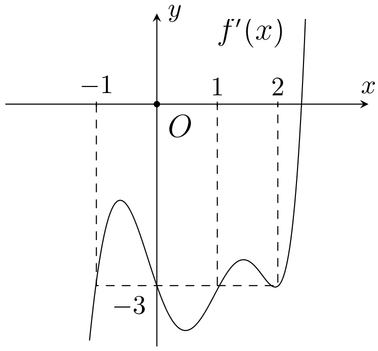
Câu 54. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x+2)^2(x-5)^3$. Hàm số $g(x) = f(10x-5)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

(A) $(-\infty;1)$. (B) $(1;2)$. (C) $(2;+\infty)$. (D) $(1;3)$.

Câu 55. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-1)^2(x-2)$ với mọi giá trị thực của x. Xét hàm số $g(x) = f\left(\dfrac{5x}{x^2+4}\right)$. Trong các khẳng định sau khẳng định nào đúng?

(A) Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;1)$.
(B) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;4)$.
(C) Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$.
(D) Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = 1$.

Câu 56. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số $y = g(x) = f\left(2x^2 - x\right) + 6x^2 - 3x$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



Ⓐ $(-\frac{1}{4}; 0)$. Ⓑ $(\frac{1}{4}; 1)$. Ⓒ $(0; 1)$. Ⓓ $(-\infty; 0)$.

Câu 57. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (3 - x)(10 - 3x)^2(x - 2)^2$ với mọi giá trị thực của x. Hàm số $g(x) = f(3 - x) + \frac{1}{6}\left(x^2 - 1\right)^3$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

Ⓐ $(-\infty; 0)$. Ⓑ $(0; 1)$. Ⓒ $(1; +\infty)$. Ⓓ $(-\infty; -\frac{1}{2})$.

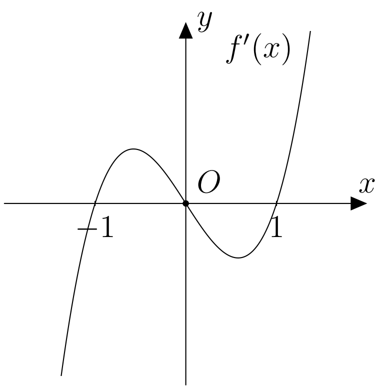
Câu 58. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		1		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số $y = (f(x))^3 - 3(f(x))^2$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

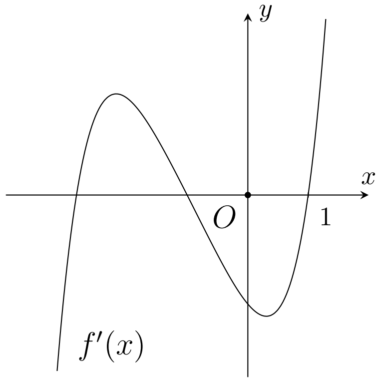
Ⓐ $(2; 3)$. Ⓑ $(1; 2)$. Ⓒ $(3; 4)$. Ⓓ $(-\infty; -1)$.

Câu 59. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $f'(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ $(a, b, c \in \mathbb{R})$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số $g(x) = f\left(f'(x)\right)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



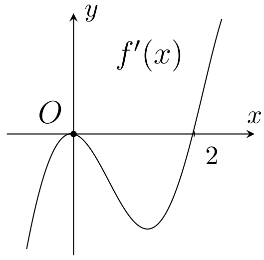
Ⓐ $(1; +\infty)$. Ⓑ $(-\infty; -2)$. Ⓒ $(-1; 0)$. Ⓓ $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

Câu 60. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc $[-2019; 2019]$ để hàm số $g(x) = f\left(2019\right)^x - mx + 2$ đồng biến trên $[0; 1]$?



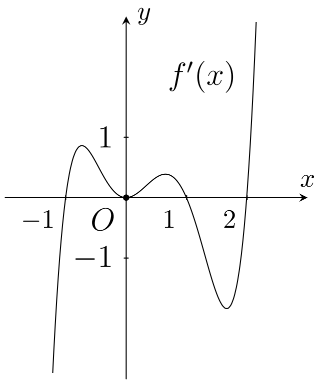
Ⓐ 2028. Ⓑ 2019. Ⓒ 2011. Ⓓ 2020.

Câu 61. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $g(x) = f\left(x^2 - x\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



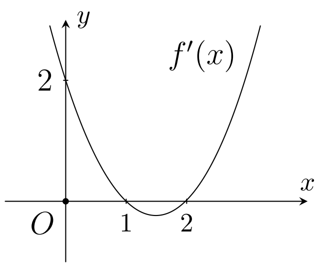
Ⓐ $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$. Ⓑ $(1; 2)$. Ⓒ $\left(-1; \frac{1}{2}\right)$. Ⓓ $(-\infty; -1)$.

Câu 62. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $g(x) = f\left(\sqrt{x^2+1}\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



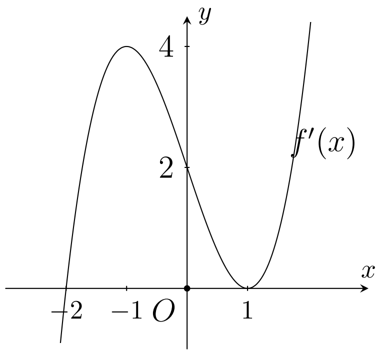
Ⓐ $\left(-\infty; -\sqrt{3}\right)$, $\left(0; \sqrt{3}\right)$. Ⓑ $\left(-\infty; -\sqrt{3}\right)$, $\left(\sqrt{3}; +\infty\right)$.
Ⓒ $\left(-\sqrt{3}; 0\right)$, $\left(\sqrt{3}; +\infty\right)$. Ⓓ $\left(-\infty; -\sqrt{3}\right)$, $(0; +\infty)$.

Câu 63. Cho hàm số $y = f(x)$. Biết hàm số $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số $g(x) = f\left(x - x^2\right)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



Ⓐ $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$. Ⓑ $\left(-\frac{3}{2}; +\infty\right)$. Ⓒ $\left(-\infty; \frac{3}{2}\right)$. Ⓓ $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Câu 64. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ ($y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$). Xét hàm số $g(x) = f\left(x^2 - 3\right)$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?



(A) Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(-1; 0)$.
(B) Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-\infty; -1)$.
(C) Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(1; 2)$.
(D) Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(2; +\infty)$.

Câu 65. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị nằm trên trục hoành và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Bảng xét dấu của biểu thức $f'(x)$ như bảng dưới đây.

x	$-\infty$		-2		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y = g(x) = \dfrac{f\left(x^2 - 2x\right)}{f\left(x^2 - 2x\right) + 1}$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

(A) $(-\infty; -1)$.
(B) $\left(-2; \dfrac{5}{2}\right)$.
(C) $(1; 3)$.
(D) $(2; +\infty)$.

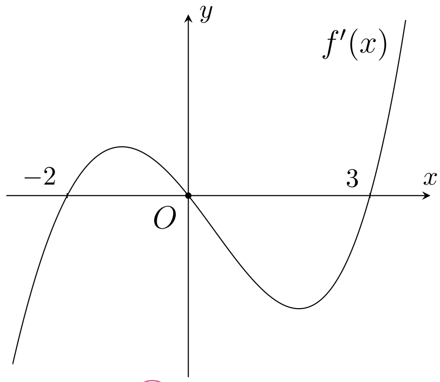
Câu 66. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		1		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số $y = \left(f(x)\right)^3 - 3\left(f(x)\right)^2$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

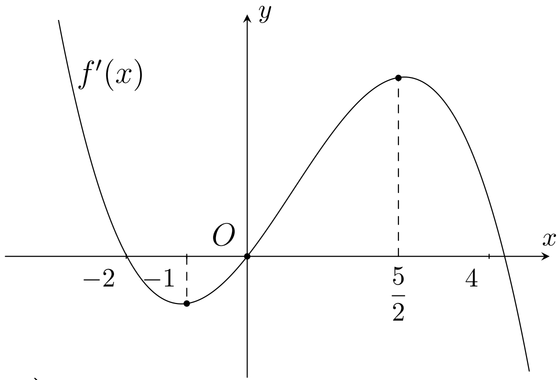
(A) $(1; 2)$.
(B) $(3; 4)$.
(C) $(-\infty; 1)$.
(D) $(2; 3)$.

Câu 67. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ bên. Hỏi hàm số $y = f\left(x^2 - 2x\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



(A) $(-1; 0)$.
(B) $(0; 1)$.
(C) $(1; 3)$.
(D) $(2; +\infty)$.

Câu 68. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm, liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số $y = [f(x)]^2$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



(A) $(-1; 1)$. (B) $\left(0; \dfrac{5}{2}\right)$. (C) $\left(\dfrac{5}{2}; 4\right)$. (D) $(-2; -1)$.

Câu 69. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Có bao nhiêu số nguyên $m < 2019$ để hàm số $g(x) = f\left(x^2 - 2x + m\right)$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$?

(A) 2016. (B) 2015. (C) 2017. (D) 2018.

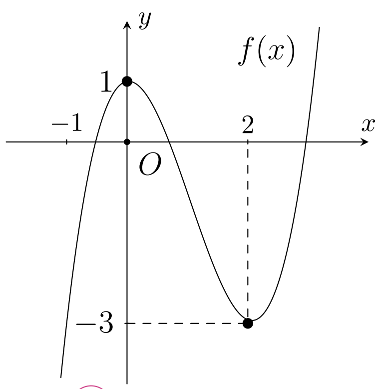
Câu 70. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$f(1)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số $g(x) = [f(3-x)]^2$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

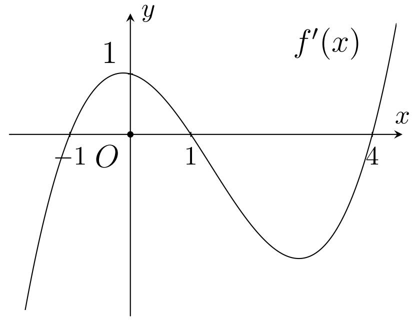
(A) $(-2; 5)$. (B) $(1; 2)$. (C) $(2; 5)$. (D) $(5; +\infty)$.

Câu 71. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số $y = |f(|x|)|$ đồng biến trong các khoảng nào dưới đây?



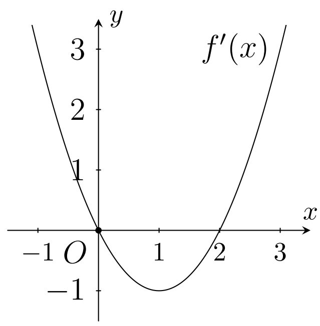
(A) $(0; 1)$. (B) $(-1; 1)$. (C) $(0; 2)$. (D) $(1; 2)$.

Câu 72. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Hàm số $g(x) = f(|3 - x|)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?



A $(-\infty; -1)$. B $(-1; 2)$. C $(2; 3)$. D $(4; 7)$.

Câu 73. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$, hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi hàm số $g(x) = f(|x| + 1)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

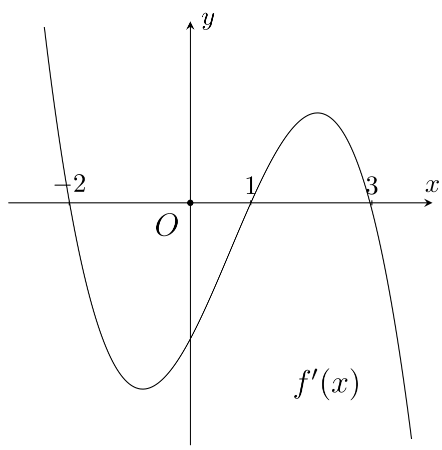


A $(1; +\infty)$. B $(-1; 0)$. C $(-1; 2)$. D $(-\infty; 1)$.

Câu 74. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m nhỏ hơn 10 để hàm số $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m|$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$?

A 4. B 6. C 3. D 5.

Câu 75. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Hàm số $g(x) = f(|4 - 2x|)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

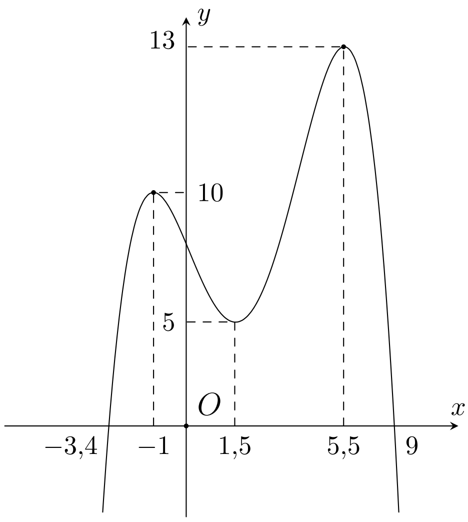


A $\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$. B $(-\infty; -2)$. C $\left(\frac{5}{2}; 7\right)$. D $\left(\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right)$.

Câu 76. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)^2(x^2 - 2x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Số giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x) = f(x^3 - 3x^2 + m)$ có 8 điểm cực trị là

A 2. B 3. C 1. D 4.

Câu 77. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên dưới và $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (-\infty; -3{,}4) \cup (9; +\infty)$. Đặt $g(x) = f(x) - mx + 5$. Có bao nhiêu giá trị dương của tham số m để hàm số $g(x)$ có **đúng** 2 điểm cực trị?



(A) 4. (B) 7. (C) 8. (D) 9.

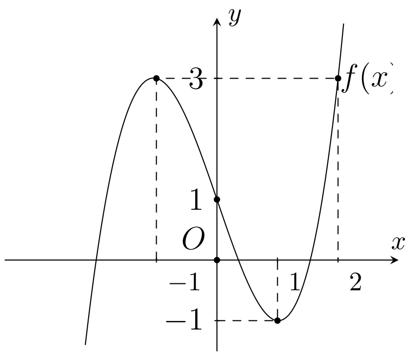
Câu 78. Cho hàm số đa thức bậc bốn $y = f(x)$, biết hàm số có ba điểm cực trị $x = -3, x = 3, x = 5$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho hàm số $g(x) = f\left(e^{x^3+3x^2} - m\right)$ có đúng 7 điểm cực trị.

(A) 3. (B) 4. (C) 5. (D) (6.

Câu 79. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x^2 - x)(x^2 - 4x + 3)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Tính tổng các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x) = f(x^2 + m)$ có 3 cực trị.

(A) 0. (B) 6. (C) 3. (D) 2.

Câu 80. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Xét hàm số $g(x) = f(2x^3 + x - 1) + m$. Tìm m để $\max\limits_{[0;1]} g(x) = -10$.



(A) 3. (B) −12. (C) −13. (D) 6.

Câu 81. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ là $f'(x) = (x-1)(x+3)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10; 20]$ để hàm số $y = f(x^2 + 3x - m)$ đồng biến trên khoảng $(0; 2)$?

(A) 18. (B) 17. (C) 16. (D) 20.

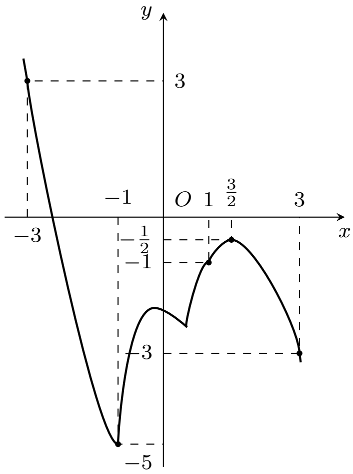
Câu 82. Cho các hàm số $f(x) = x^3 + 4x + m$ và $g(x) = (x^2 + 2018)(x^2 + 2019)^2(x^2 + 2020)^3$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-2020; 2020]$ để hàm số $g(f(x))$ đồng biến trên $(2; +\infty)$?

(A) 2005. (B) 2037. (C) 4016. (D) 4041.

Câu 83. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x+1)^2(x^2 + 2mx + 1)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên âm m để hàm số $g(x) = f(2x + 1)$ đồng biến trên khoảng $(3; 5)$?

(A) 3. (B) 2. (C) 4. (D) 6.

Câu 84. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên tập $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Xét hàm số $g(x) = f(x-2m) + \frac{1}{2}(2m-x)^2 + 2020$, với m là tham số thực. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của m để hàm số $y = g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(3;4)$. Số phần tử của S là

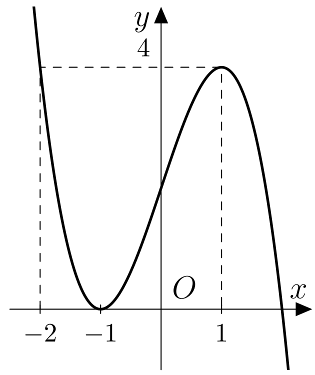


Ⓐ 4. Ⓑ 2. Ⓒ 3. Ⓓ 1.

Câu 85. Cho hàm số $f(x)$ liên trục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = x^2(x-2)\left(x^2 - 6x + m\right)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên m thuộc đoạn $[-2020; 2020]$ để hàm số $g(x) = f(1-x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$?

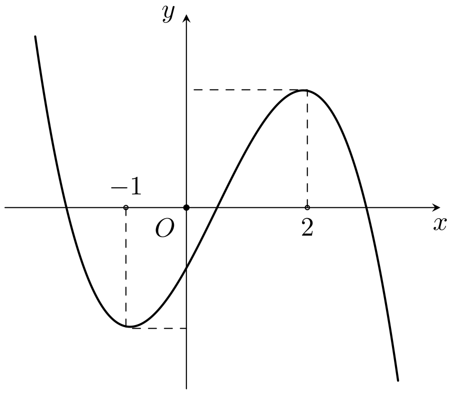
Ⓐ 2016. Ⓑ 2014. Ⓒ 2012. Ⓓ 2010.

Câu 86. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in (-2020; 2020)$ để hàm số $g(x) = f(2x-3) - \ln\left(1+x^2\right) - 2mx$ đồng biến trên khoảng $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$?



Ⓐ 2020. Ⓑ 2019. Ⓒ 2021. Ⓓ 2018.

Câu 87. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $g(x) = f\left(x^2 + x\right) - 4x^3 + 3x^2 + 6x + 2020$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?



Ⓐ $\left(-1; \frac{1}{2}\right)$. Ⓑ $(-2; 0)$. Ⓒ $(1; +\infty)$. Ⓓ $\left(-\frac{1}{2}; 1\right)$.

Câu 88. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$		-1		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Biết $f(x) > 2, \forall x \in \mathbb{R}$. Xét hàm số $g(x) = f(3 - 2f(x)) - x^3 + 3x^2 - 2020$. Khẳng định nào sau đây đúng?

Ⓐ Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2; -1)$.

Ⓑ Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$.

Ⓒ Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(3; 4)$.

Ⓓ Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(2; 3)$.

Câu 89. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = g(x) = f'(2x+3) + 2$ có đồ thị là một parabol với tọa độ đỉnh $I(2; -1)$ và đi qua điểm $A(1; 2)$. Hỏi hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

Ⓐ $(5; 9)$. Ⓑ $(1; 2)$. Ⓒ $(-\infty; 9)$. Ⓓ $(1; 3)$.

Câu 90. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp 3 liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn

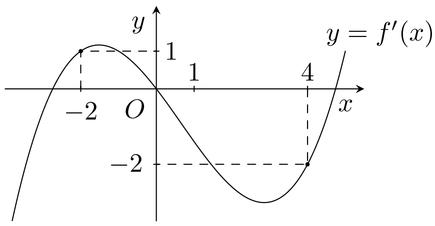
$$f(x) \cdot f''(x) = x(x-1)^2(x+4)^3,\ \forall x \in \mathbb{R} \text{ và } g(x) = [f'(x)]^2 - 2f(x) \cdot f''(x).$$

Hàm số $h(x) = g\left(x^2 - 2x\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

Ⓐ $(-\infty; 1)$. Ⓑ $(2; +\infty)$. Ⓒ $(0; 1)$. Ⓓ $(1; 2)$.

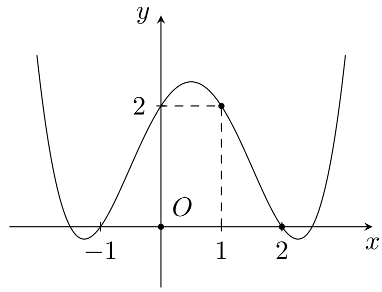
1. Bài tập áp dụng hàm hợp

Câu 91. Cho hàm số đa thức $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết $f(0) = 0$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình sau. Hàm số $g(x) = |4f(x) + x^2|$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $(4; +\infty)$. B. $(0; 4)$. C. $(-\infty; -2)$. D. $(-2; 0)$.

Câu 92. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Số tham số m nguyên thuộc đoạn $[-20; 20]$ để hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 2)$ biết $g(x) = 3f(-x^3 - 3x + m) + (x^3 + 3x - m)^2 (-2x^3 - 6x + 2m - 6)$.



A. 23. B. 21. C. 5. D. 17.

Câu 93. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-2021; 2021]$ để hàm số $g(x) = |x^3 - 3mx^2 - 3(m+2)x - m + 1|$ đồng biến trên khoảng $(0; 3)$?

A. 4041. B. 4042. C. 2021. D. 4039.

Câu 94. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$		1		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y = 3f(2x-1) - 4x^3 + 15x^2 - 18x + 1$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây

A. $(3; +\infty)$. B. $\left(1; \dfrac{3}{2}\right)$. C. $\left(\dfrac{5}{2}; 3\right)$. D. $\left(2; \dfrac{5}{2}\right)$.

Câu 95. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x+4)(x^2 + 2mx + 9)$ với $\forall x \in \mathbb{R}$. Số giá trị nguyên âm của m để hàm số $g(x) = f(x^2 + 3x - 4)$ đồng biến trên $(1; +\infty)$ là

A. 1. B. 3. C. 2. D. 4.

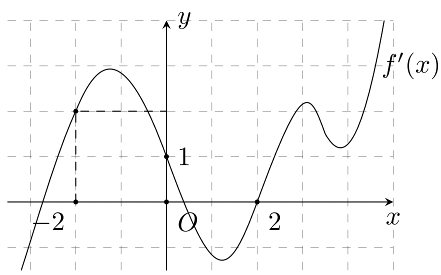
Câu 96. Cho hàm số $f(x) = -x^4 - (4 - m^2)x + 2020$ và $g(x) = -x^3 + 5x^2 - 2020x + 2021$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để $h(x) = g[f(x)]$ đồng biến trên $(2; +\infty)$.

A. 13. B. 12. C. 7. D. 6.

Câu 97. Cho hàm số $g(x) = f(1-x)$ có đạo hàm $g'(x) = (3-x)^{2021}(2+x)^{2020}[x^2 + (m-2)x - 3m + 6]$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên dương m để hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 98. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ được cho như hình bên dưới. Hỏi hàm số $g(x) = 4f(x) + x^2 - 4x + 2021$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

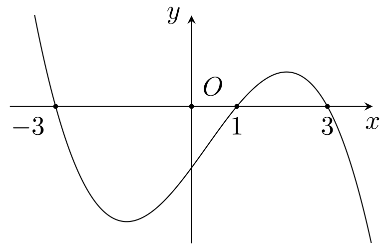


A. $(-\infty; -1)$. B. $(-2; 0)$.
C. $(0; 2)$. D. $(2; +\infty)$.

Câu 99. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$, biết rằng $f'(x+2) = x^2 - 3x + 2$. Hàm số $y = f(x^2 + 4x + 7)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

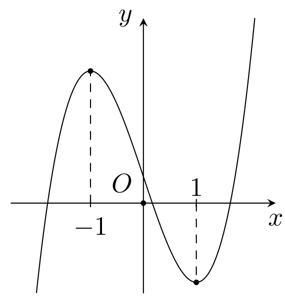
A. $(-2; -1)$. B. $(-3; -1)$. C. $(1; +\infty)$. D. $(-2; 0)$.

Câu 100. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và thoả $f(-3) = f(3) = \dfrac{1}{2}$. Biết rằng hàm số $y = f'(x)$ là một hàm số bậc ba có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi hàm số $g(x) = [f(3-x)]^2 - f(3-x)$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?



(A) $(-3; 1)$. (B) $(-\infty; -3)$. (C) $(0; 2)$. (D) $(2; 6)$.

Câu 101. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ. Biết rằng hàm số $f(x^3 - 3x - 1)$ nghịch biến trên các khoảng lớn nhất $(a; b)$; $(m; n)$; $(p; q)$. Giá trị của biểu thức $(a^2 + b^2 + m^2 + n^2 + p^2 + q^2)$ bằng



(A) 9. (B) 12. (C) 14. (D) 10.

Câu 102. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm $f'(x)$ như hình vẽ bên dưới. Hàm số $g(x) = f\left(4 - \sqrt{4 - x^2}\right)$ đồng biến trên

(A) $(0; 1)$. (B) $(1; 2)$. (C) $(-1; 0)$. (D) $(-3; -1)$.

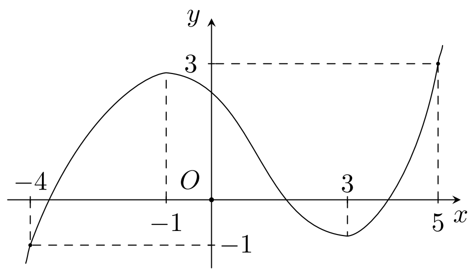
Câu 103. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm $f'(x)$ như hình vẽ bên dưới

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $g(x) = f\left(-1 + \sqrt{7 + 6x - x^2}\right)$ nghịch biến trên

(A) $(5; 6)$. (B) $(-1; 2)$. (C) $(2; 3)$. (D) $(3; 5)$.

Câu 104. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ bên. Hỏi hàm số $f(f(x))$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

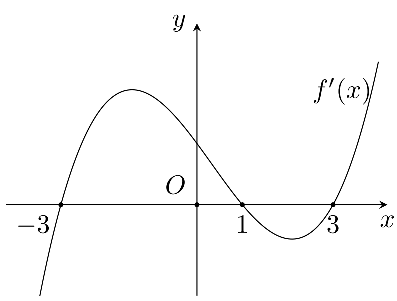


(A) $(0; 2)$. (B) $(-3; -1)$. (C) $(3; 5)$. (D) $(-5; -3)$.

Câu 105. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$ có biểu thức đạo hàm được cho bởi $f'(x) = x(x-2)(x+1)$. Hỏi tham số thực m thuộc khoảng nào dưới đây thì hàm số $g(x) = f(x^3 + m)$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$?

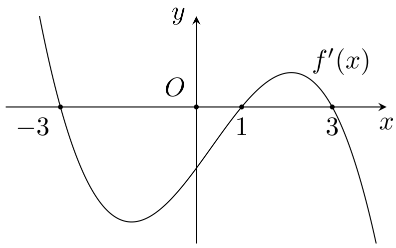
(A) $\left(0; \dfrac{1}{2}\right)$. (B) $(1; 4)$. (C) $\left(\dfrac{1}{2}; 1\right)$. (D) $(0; 1)$.

Câu 106. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m thuộc đoạn $[-20; 20]$ để hàm số $g(x) = f(x^2 - 2x - m)$ đồng biến trên khoảng $(1; 3)$?



(A) 19. (B) 23. (C) 18. (D) 17.

Câu 107. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-30; 30]$ để hàm số $g(x) = f\left(x^3 - 3x - m\right)$ đồng biến trên $[-2; -1]$.



Ⓐ 24. Ⓑ 25. Ⓒ 26. Ⓓ 31.

Câu 108. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-20; 20]$ để hàm số $y = \dfrac{\sqrt{x^2 - 2x + 2} + 1}{2m - 3 - \sqrt{x^2 - 2x + 2}}$ đồng biến trên $(-\infty; 1)$?

Ⓐ 21. Ⓑ 19. Ⓒ 22. Ⓓ 20.

Câu 109. Cho hai hàm số $f(x) = \dfrac{x + 4a}{x + b}$ và $g(x) = \dfrac{x + b}{x + a^2}$ cùng đồng biến trên từng khoảng xác định của nó. Gọi a_0 và b_0 lần lượt là những số nguyên dương nhỏ nhất của a và b thỏa mãn. Giá trị của biểu thức $T = a_0 + b_0$ tương ứng bằng

Ⓐ 25. Ⓑ 26. Ⓒ 27. Ⓓ 28.

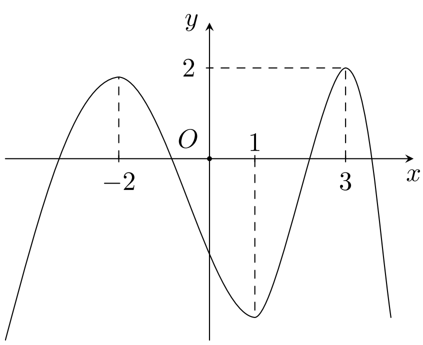
Câu 110. Cho hàm số $y = f(x) = (m-1)\,x^3 - 3\left(m^2 + m - 1\right)x^2 + 3\,(m-1)\,x - m - 1$ với m là tham số. Biết rằng với mọi tham số m thì hàm số luôn nghịch biến trên $(a; b)$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $(b - a)$ bằng

Ⓐ $4\sqrt{7}$. Ⓑ $2\sqrt{3}$. Ⓒ 4. Ⓓ $4\sqrt{6}$.

Câu 111. Cho hàm số $f(x) = 3m^2x^4 - 8mx^3 + 6x^2 + 12\,(2m-1)\,x + 1$ với m là tham số. Biết rằng với mọi tham số m thì hàm số luôn đồng biến trên $[a; b]$; với a, b là những số thực. Giá trị lớn nhất của biểu thức $(2b - a)$ bằng

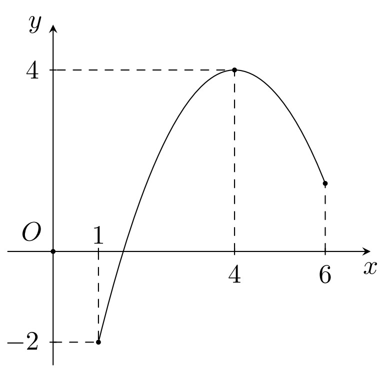
Ⓐ 2. Ⓑ $2\sqrt{2}$. Ⓒ $\sqrt{5}$. Ⓓ $\sqrt{6}$.

Câu 112. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị được cho như hình vẽ. Hỏi hàm số $y = \dfrac{1}{f(x) - 3}$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



Ⓐ $(-3; -2)$. Ⓑ $(-2; 1)$. Ⓒ $(-1; 2)$. Ⓓ $(3; +\infty)$.

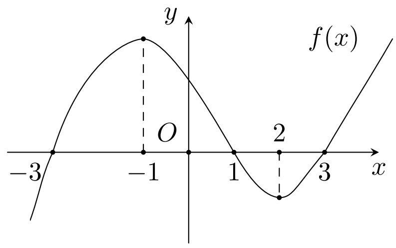
Câu 113. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-20; 2021)$ để hàm số $y = \dfrac{f(x) + 5}{f(x) + m}$ nghịch biến trên $(1; 4)$?



Ⓐ 19. Ⓑ 21. Ⓒ 20. Ⓓ 22.

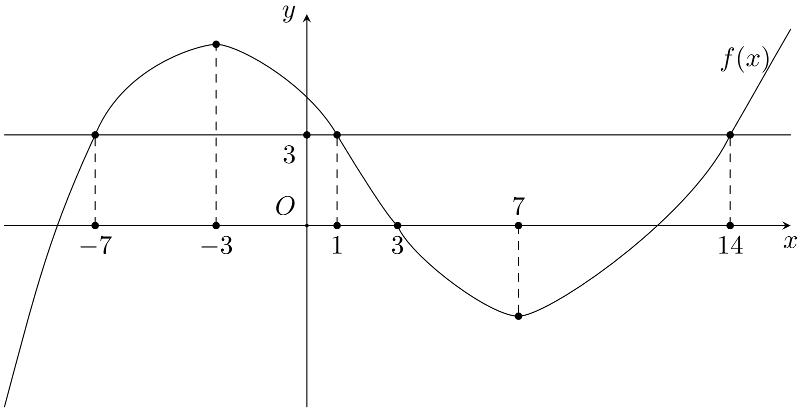
Câu 114. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị được cho như hình vẽ. Hỏi hàm số $y = (f(x))^2$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

Ⓐ $(1; 3)$. Ⓑ $(2; 3)$. Ⓒ $(2; +\infty)$. Ⓓ $(-3; -1)$.



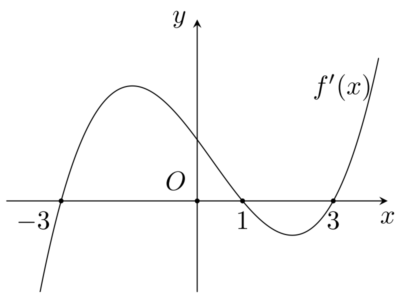
Câu 115. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị được cho như hình vẽ. Hỏi hàm số $g(x) = [f(x)]^2 - 6f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

Ⓐ $(-3; 2)$. Ⓑ $(7; 14)$. Ⓒ $(14; +\infty)$. Ⓓ $(1; 7)$.



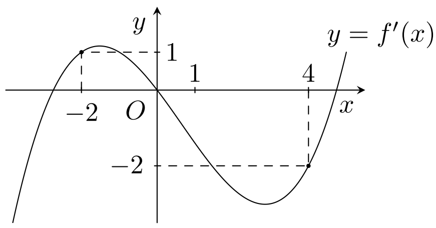
Câu 116. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-30; 30]$ để hàm số $g(x) = f\left(x^2 - 2x - m\right)$ nghịch biến trên$(-1; 2)$.

Ⓐ 0. Ⓑ 1. Ⓒ 28. Ⓓ 23.



Câu 117. Cho hàm số $f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $g(x) = f(1 - 2x) + x^2 - x$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây ?

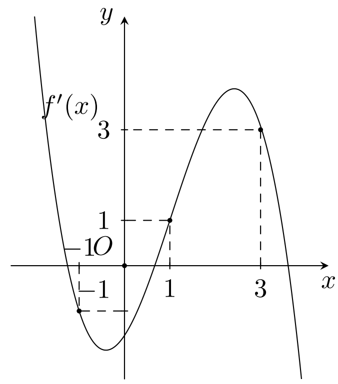
Ⓐ $\left(1; \frac{3}{2}\right)$. Ⓑ $\left(0; \frac{1}{2}\right)$. Ⓒ $(-2; -1)$. Ⓓ $(2; 3)$.



Câu 118. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-40; 40]$ để hàm số $g(x) = \left|x^2 - 4mx + m - 3\right|$ nghịch biến trên khoảng $(-2; -1)$.

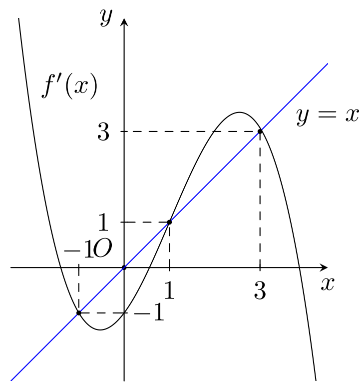
Ⓐ 79. Ⓑ 39. Ⓒ 80. Ⓓ 40.

Câu 119. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ cho như hình vẽ. Hàm số $g(x) = 2f(|x-1|) - x^2 + 2x + 2020$ đồng biến trên khoảng nào?



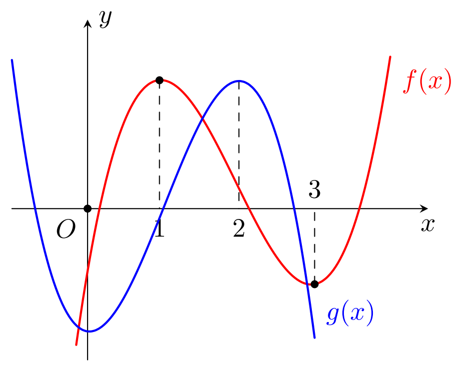
Ⓐ $(0;1)$. Ⓑ $(-3;1)$. Ⓒ $(1;3)$. Ⓓ $(-2;0)$.

Câu 120. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ cho như hình vẽ. Hàm số $g(x) = 2f(|x-1|) - x^2 + 2x + 2020$ đồng biến trên khoảng nào?



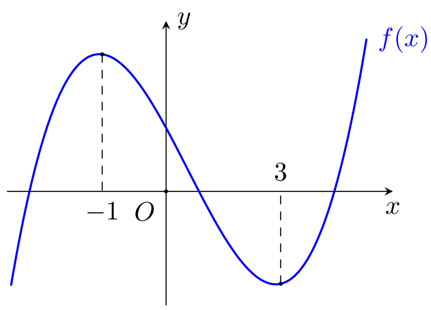
Ⓐ $(0;1)$. Ⓑ $(-3;1)$. Ⓒ $(1;3)$. Ⓓ $(-2;0)$.

Câu 121. Cho hàm số $f(x)$, $g(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Biết hai hàm số $y = f(2x-1)$, $y = g(ax+b)$ có cùng khoảng nghịch biến lớn nhất. Khi đó giá trị của biểu thức $(4a+b)$ bằng



Ⓐ 0. Ⓑ -2. Ⓒ -4. Ⓓ 3.

Câu 122. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số như hình vẽ. Khi đó hàm số $f(x^3 + 3x - 1)$ nghịch biến trên



Ⓐ $(1;2)$. Ⓑ $(0;1)$.

Ⓒ $\left(-2;-\dfrac{1}{2}\right)$. Ⓓ $\left(-\dfrac{1}{2};0\right)$.

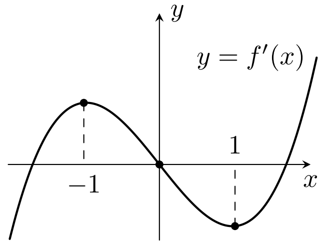
Câu 123. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị nằm trên trục hoành và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, bảng xét dấu của biểu thức $f'(x)$ như bảng dưới đây.

x	$-\infty$		-2		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y = g(x) = \dfrac{f(x^2-2x)}{f(x^2-2x)+1}$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây

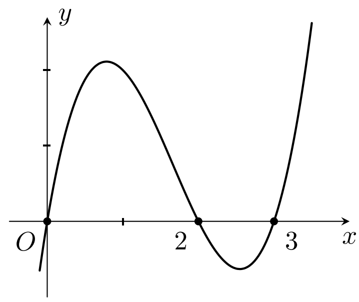
Ⓐ $(-\infty;1)$. Ⓑ $\left(-2;\dfrac{5}{2}\right)$. Ⓒ $(1;3)$. Ⓓ $(2;+\infty)$.

Câu 124. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $f(1)=1$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên. Có bao nhiêu số nguyên dương a để hàm số $y=|4f(\sin x)+\cos 2x-a|$ nghịch biến trên $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$?



Ⓐ 2. Ⓑ 3. Ⓒ Vô số. Ⓓ 5.

Câu 125. Giả sử $f(x)$ là đa thức bậc 4. Đồ thị của hàm số $y=f'(1-x)$ được cho như hình bên. Hỏi hàm số $g(x)=f\left(x^2-3\right)$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau



Ⓐ $(-2;1)$. Ⓑ $(-1;0)$. Ⓒ $(1;2)$. Ⓓ $(0;1)$.

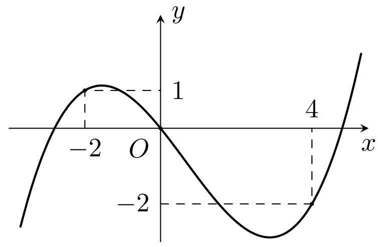
Câu 126. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$		-2		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thoả mãn $-10\le m\le 10$ và hàm số $y=f\left(x^2+2x+m\right)$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$?

Ⓐ 5. Ⓑ 4. Ⓒ 6. Ⓓ 1.

Câu 127. Cho hàm số $y=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$, $a\ne 0$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên thuộc khoảng $(-6;6)$ của tham số m để hàm số $g(x)=f(3-2x+m)+x^2-(m+3)x+2m^2$ nghịch biến trên $(0;1)$ .Khi đó, tổng giá trị các phần tử của S là



Ⓐ 12. Ⓑ 9. Ⓒ 6. Ⓓ 15.

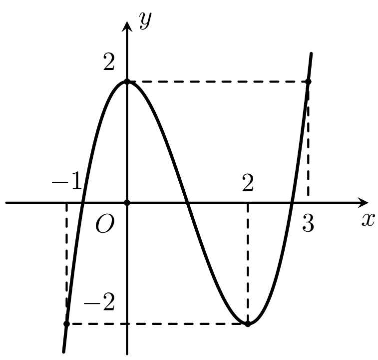
Câu 128. Có bao nhiêu giá trị thực của m để hàm số $y=mx^9+\left(m^2-3m+2\right)x^6+\left(2m^3-m^2-m\right)x^4+m$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

Ⓐ Vô số. Ⓑ 1. Ⓒ 2. Ⓓ 3.

Câu 129. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{2}{5}m^2x^5-\dfrac{8}{3}mx^3-\left(m^2-m-20\right)x+1$ (m là tham số). Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$?

Ⓐ 7. Ⓑ 9. Ⓒ 8. Ⓓ 10.

Câu 130. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $y=f'(x)$ như hình vẽ bên. Đặt $g(x)=f(x-m)-\dfrac{1}{2}(x-m-1)^2+2019$, với m là tham số thực. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của m để hàm số $y=g(x)$ đồng biến trên khoảng $(5;6)$. Tổng tất cả các phần tử trong S bằng

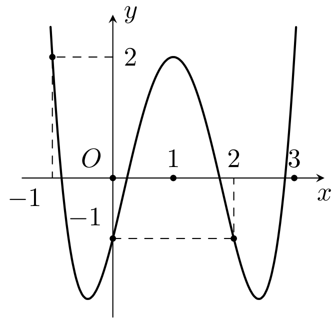


Ⓐ 4. Ⓑ 11. Ⓒ 14. Ⓓ 20.

Câu 131. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $f(x) = 2(m+1)x^3 + 3\left(m^2 - 5m - 4\right)x^2 - 6\left(3m^2 - 6m - 19\right)x - 32\sqrt{(x+1)^3} + 1$ đồng biến trên khoảng $(-1; +\infty)$. Số phần tử của tập hợp S là

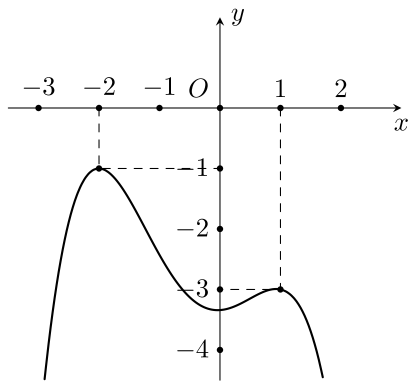
A 3. **B** 0. **C** 1. **D** 2.

Câu 132. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'\left(x^2 - 2x\right)$ như hình vẽ bên. Hỏi hàm số $y = f\left(x^2 - 1\right) + \dfrac{2}{3}x^3 + 1$ đồng biến trên khoảng nào?



A $(-3; -2)$. **B** $(1; 2)$. **C** $(-2; -1)$. **D** $(-1; 0)$.

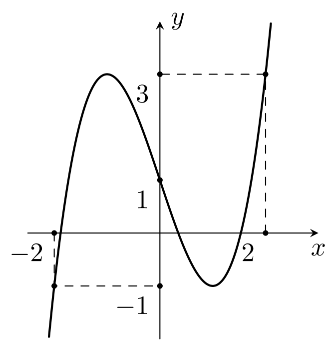
Câu 133. Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm đa thức có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $g(x) = f(3x+1) - 3\left(2x^3 + 2x^2 - 3x + 5\right)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



A $(-\infty; -2)$, $(1; +\infty)$. **B** $(-3; 0)$.

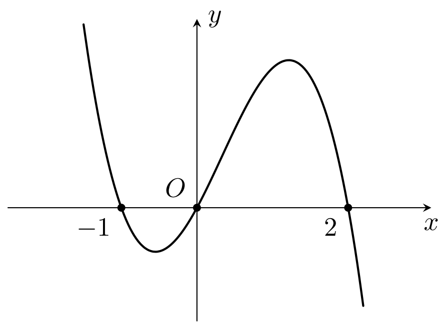
C $(-\infty; -1)$. **D** $(-1; 2)$.

Câu 134. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(2x+1)$ như hình vẽ. Hàm số $g(x) = f(x) - \dfrac{1}{4}x^2 - \dfrac{1}{2}x$. Đồng biến trên khoảng nào sau đây



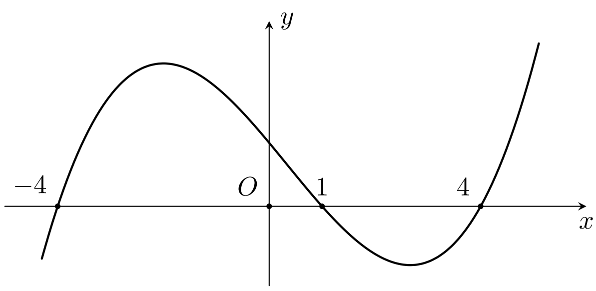
A $(-\infty; -3)$. **B** $(-3; 0)$. **C** $(1; 4)$. **D** $(3; +\infty)$.

Câu 135. Cho hàm số bậc bốn $f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(3 - 2x)$ được cho như hình bên. Hàm số $y = f\left(x^2 + 1\right)$ nghịch biến trên khoảng nào



A $(-\infty; 0)$. **B** $(0; 1)$. **C** $(2; +\infty)$. **D** $(-1; 0)$.

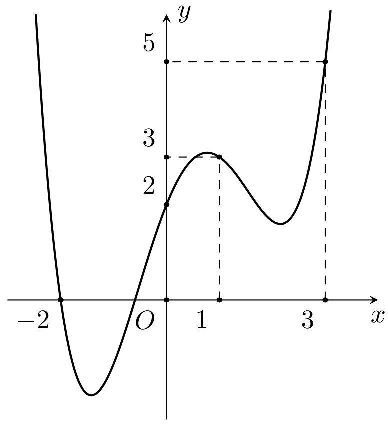
Câu 136. Cho hàm số $y = f(x), y = g(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, trong đó hàm số $g(x) = (f(2-x))'$ là hàm số bậc ba có đồ thị như hình vẽ như hình bên. Hàm số $y = f\left(x^2 + 2\right) - x^3 + 2x^2 - x + 2021$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?



A $(-\infty; -1)$. **B** $(0; 1)$.

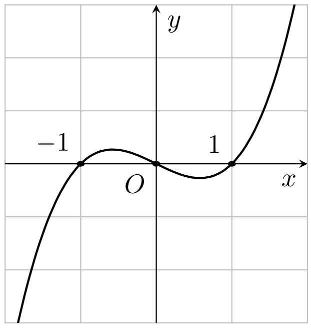
C $(1; 2)$. **D** $(2; +\infty)$.

Câu 137. Cho hai hàm số $f(x)$, $g(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị $y = f'\left(x^2+4x\right)$ như hình vẽ. Hàm số $g(x) = f\left(x^2-4\right) - \dfrac{2}{3}x^3 + 2021$ nghịch biến trên khoảng nào



Ⓐ $(0;3)$. Ⓑ $(3;5)$. Ⓒ $(2;3)$. Ⓓ $(4;6)$.

Câu 138. Cho hàm số $f(x)$ và $g(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, trong đó $g(x) = \left[f\left(x^2-4\right)\right]'$ là hàm bậc ba có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để hàm số $h(x) = f\left(x^2+x+m\right)$ đồng biến trên $(0;1)$?



Ⓐ 0. Ⓑ 1. Ⓒ 2. Ⓓ 3.

Câu 139. Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm đa thức và hàm số $y = f\left(x^2-1\right)$ có bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số $g(x) = f\left(2x^3-x\right)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

Ⓐ $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{6}};\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)$. Ⓑ $\left(-\infty;-\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)$. Ⓒ $\left(\dfrac{1}{\sqrt{6}};1\right)$. Ⓓ $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{6}};+\infty\right)$.

Câu 140. Cho hàm số $y = f\left(x^2-2\right)$ là hàm số bậc 4 có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$f(-1)$	$\searrow$	$f(-2)$	$\nearrow$	$f(-1)$	$\searrow$	$-\infty$

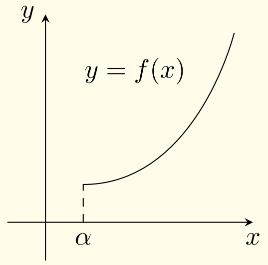
Hàm số $g(x) = f\left(x^3-3x+3\right)$ đồng biến trong khoảng nào sau đây?

Ⓐ $(-\infty;-2)$. Ⓑ $(-2;1)$. Ⓒ $(1;2)$. Ⓓ $(-1;+\infty)$.

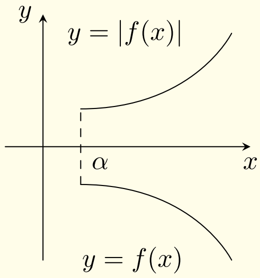
Dạng 3. Tính đơn điệu của hàm giá trị tuyệt đối

Hàm số $y = |f(x)|$ đồng biến trên đoạn $[a; +\infty)$ khi và chỉ khi

a) $\begin{cases} y'(\alpha) \geq 0, \forall x \in [\alpha; +\infty) \\ y(\alpha) \geq 0 \end{cases}$

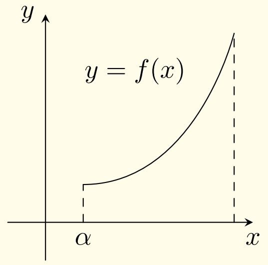


b) $\begin{cases} y'(\alpha) \leq 0, \forall x \in [\alpha; +\infty) \\ y(\alpha) \leq 0 \end{cases}$

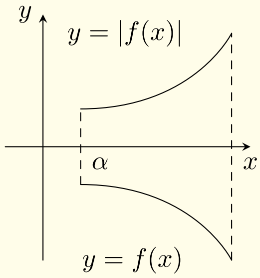


Hàm số $y = |f(x)|$ đồng biến trên $(\alpha; \beta)$ khi và chỉ khi

a) $\begin{cases} y'(\alpha) \geq 0, \forall x \in (\alpha; \beta) \\ y(\alpha) \geq 0 \end{cases}$



b) $\begin{cases} y'(\alpha) \leq 0, \forall x \in (\alpha; \beta) \\ y(\alpha) \leq 0 \end{cases}$



Các dạng đồng biến $y = |f(x)|$ trên $(-\infty; a], [\alpha; \beta]$ ta thực hiện tương tự.
Hàm số hỏi nghịch biến làm ngược lại.

Câu 1. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = |x^5 - 5x^2 + 5(m-1)x - 8|$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$?

(A) 2. (B) 0. (C) 4. (D) 1.

Câu 2. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = |2x^3 - mx + 1|$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$?

(A) 2. (B) 6. (C) 3. (D) 4.

Câu 3. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m nhỏ hơn 10 để hàm số $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m|$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$?

(A) 6. (B) 4. (C) 3. (D) 5.

Câu 4. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = |x^4 + 2x^3 + mx + 2|$ đồng biến trên khoảng $(-1; +\infty)$?

(A) $m \geq 1$. (B) $m \in \varnothing$. (C) $0 \leq m \leq 1$. (D) $m \leq 0$.

Câu 5. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10; 10]$ để hàm số $y = |-x^3 + 3(m+1)x^2 - 3m(m+2)x + m^2(m+3)|$ đồng biến trên khoảng $(0; 1)$?

(A) 21. (B) 10. (C) 8. (D) 2.

Câu 6. Có bao nhiêu số nguyên m thuộc khoảng $(-4; 4)$ để hàm số $y = \left|\dfrac{1}{3}x^3 - x^2 + mx + 1\right|$ đồng biến trên $(1; +\infty)$?

(A) 5. (B) 4. (C) 3. (D) 6.

Câu 7. Tổng tất cả các giá trị nguyên thuộc $[-5;5]$ của m để hàm số $g(x)=\left|\dfrac{1}{3}x^3+(m-1)x^2+(2m-3)x-\dfrac{2}{3}\right|$ đồng biến trên $(1;5)$ là

(A) 1. (B) -1. (C) 0. (D) 2.

Câu 8. Cho hàm số $y=|x^3-3(m+2)x^2+3m(m+4)x|$. Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc đoạn $[-2019;2019]$ của tham số thực m để hàm số đồng biến trên khoảng $(0;4)$?

(A) 4033. (B) 4032. (C) 2018. (D) 2016.

Câu 9. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của $m<5$ để hàm số $y=\left|\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{2}x^2+x+m\right|$ đồng biến trên $(0,+\infty)$?

(A) 2. (B) 4. (C) 6. (D) 8.

Câu 10. Có bao nhiêu số nguyên dương m để hàm số $y=|x^5-mx+4|$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$?

(A) 4. (B) 5. (C) 6. (D) 7.

Câu 11. Có bao nhiêu số nguyên m thuộc khoảng $(-10;10)$ để hàm số $y=|2x^3-2mx+3|$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$?

(A) 12. (B) 8. (C) 11. (D) 7.

Câu 12. Cho hàm số $y=|x^5-mx+1|$. Gọi S là tập tất cả các số nguyên dương m sao cho hàm số đồng biến trên $[1;+\infty)$. Tính tổng tất cả các phần tử của S.

(A) 15. (B) 14. (C) 12. (D) 13.

Câu 13. Cho hàm số $f(x)=|x^2-2mx+m+2|$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-9;9]$ để hàm số đồng biến trên khoảng $(0;2)$?

(A) 3. (B) 2. (C) 16. (D) 9.

Câu 14. Cho hàm số $f(x)=\left|-\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{2}(2m+3)x^2-(m^2+3m)x+\dfrac{2}{3}\right|$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-9;9]$ để hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;2)$?

(A) 3. (B) 2. (C) 16. (D) 9.

Câu 15. Có bao nhiêu giá trị nguyên $m\in(-20;20)$ để hàm số $y=|3x^4-4x^3-12x^2+m|$ nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

(A) 4. (B) 30. (C) 8. (D) 15.

Câu 16. Có bao nhiêu giá trị nguyên không âm m để hàm số $y=|x^4-mx^2+9|$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

(A) 3. (B) 6. (C) 7. (D) 4.

Câu 17. Cho hàm số $y=\left|\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{2}(m+3)x^2+(2m+3)x-1\right|$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên dương m để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(4;+\infty)$. Chọn mệnh đề sai?

(A) S có 4 phần tử.
(B) Tổng các giá trị của m thuộc S bằng 6.
(C) Tích các giá trị của m thuộc S bằng 0.
(D) Giá trị m lớn nhất thuộc S bằng 4.

Câu 18. Cho hàm số $f(x)=|x^3-(2m-5)x+2018|$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-2019;2019]$ để hàm số đồng biến trên khoảng $(1;3)$?

(A) 3032. (B) 4039. (C) 0. (D) 2021.

Câu 19. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y=g(x)=|x^3-3(m+1)x^2+3m(m+2)x|$ đồng biến trên nửa đoạn $[0;+\infty)$ biết rằng $-2021\le m\le 2021$?

(A) 2020. (B) 2021. (C) 2022. (D) 2019.

Câu 20. Gọi $S=[a\,;+\infty)$ là tập tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=\left|x^3-3x^2+mx+3m+1\right|$ đồng biến trên khoảng $(-2\,;+\infty)$. Khi đó a bằng

(A) -3. (B) 19. (C) 3. (D) -2.

Câu 21. Tính tổng S tất cả các giá trị nguyên của tham số m trong đoạn $[-10;10]$ để hàm số $y=\left|\dfrac{mx+3}{x+m+2}\right|$ đồng biến trên $(1;+\infty)$.

(A) $S=55$. (B) $S=54$. (C) $S=3$. (D) $S=5$.

Câu 22. Tìm m để hàm số $y=\left|\dfrac{x-2m+1}{x+m}\right|$ đồng biến trên $(1;+\infty)$.

(A) $\dfrac{1}{3}<m\le 1$. (B) $m\in[-1;1]\setminus\left\{\dfrac{1}{3}\right\}$. (C) $-1\le m<\dfrac{1}{3}$. (D) $\dfrac{1}{3}<m\le 1$.

Câu 23. Có bao nhiêu số nguyên của tham số m để hàm số $y=\left|\dfrac{x^2-2x+2m+2}{x-1}\right|$ đồng biến trên $[3;+\infty)$?

(A) 4. (B) 5. (C) vô số. (D) 6.

Câu 24. Tìm tất cả các giá thực của tham số m để hàm số $y=\left|x-\dfrac{2}{x}+m\right|$ đồng biến trên $[1;+\infty)$.

(A) $m\le -1$. (B) $-1\le m\le 1$. (C) $m\ge 1$. (D) $m>0$.

Câu 25. Biết rằng tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho hàm số $y=\left|x+1+\dfrac{m^2-2m-1}{x+1}\right|$ đồng biến trên $(2;+\infty)$ là $[a;b]$. Tính $a\cdot b$.

(A) -10. (B) -9. (C) 2. (D) -7.

Câu 26. Tìm tất cả các giá trị thực của m sao cho hàm số $y=\left|\dfrac{x+m}{x+1}\right|$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$

(A) $m<-1$. (B) $m>1$. (C) $-1\le m\le 1$. (D) $-1\le m<1$.

Câu 27. Tính tổng tất cả các giá trị nguyên dương của m để hàm số $y=\left|\dfrac{x^3-2mx+2}{x-1}\right|$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$

(A) 3. (B) 4. (C) 2. (D) 5.

Câu 28. Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y=\left|\dfrac{x-m}{x+m+3}\right|$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$?

(A) 4. (B) 2. (C) 3. (D) 1.

Câu 29. Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của m để hàm số $y=\left|x+5+\dfrac{1-m}{x-2}\right|$ đồng biến trên $[5;+\infty)$?

(A) 11. (B) 10. (C) 8. (D) 9.

Câu 30. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\left|\dfrac{x^2+x+2m-3}{x-1}\right|$ đồng biến trên khoảng $(3;+\infty)$?

(A) 7. (B) 5. (C) 4. (D) Vô số.

Câu 31. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=\left|\dfrac{x-m+1}{x+m}\right|$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

(A) $m\le\dfrac{1}{2}$ hoặc $m\ge 2$. (B) $\dfrac{1}{2}<m<2$.

(C) $\frac{1}{2} < m \le 2$.
(D) $\frac{1}{2} \le m \le 2$.

Câu 32. Cho hàm số $y = \left|\sqrt{2-x} + \sqrt{x+2} + \frac{m}{2}x - 1\right|$. Có bao nhiêu giá trị m nguyên để hàm số nghịch biến trên $(0;1)$

(A) 4. (B) 2. (C) 3. (D) 5.

Câu 33. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in (-5;5)$ để hàm số $y = \left|\sqrt{x^2-3} - 2x - 3m\right|$ nghịch biến trên $(2;3)$?

(A) 2. (B) 3. (C) 5. (D) 9.

Câu 34. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [0;10]$ để hàm số $y = \left|x + m\sqrt{x^2-2x+3}\right|$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$?

(A) 11. (B) 10. (C) 12. (D) 9.

Câu 35. Cho hàm số $f(x) = \left|\sqrt{x^2+2x+2} - x + m\right|$, trong đó m là tham số thực. S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m trên đoạn $[-2019;2019]$ để hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1;+\infty)$. Số phần tử của tập S là

(A) 2018. (B) 2017. (C) 2019. (D) 4039.

Câu 36. Cho hàm số $f(x) = \left|\sqrt{x^2+2x+2} - x + m\right|$, trong đó m là tham số thực. S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m trên đoạn $[-2019;2019]$ để hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1;+\infty)$. Số phần tử của tập S là

(A) 2018. (B) 2017. (C) 2019. (D) 4039.

Câu 37. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \left|4\sqrt{x^2+2x+3} + 5x - m^2 + 5\right|$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$?

(A) 9. (B) 6. (C) 11. (D) 8.

Câu 38. Cho hàm số $y = f(x) = \left|\sqrt{x^2+3} + 2x + m^2 - 5m\right|$. Hỏi m thuộc khoảng nào trong các khoảng sau để hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(1;+\infty)$.

(A) $(-\infty;0]$. (B) $91;4$. (C) $(-\infty;2)$. (D) $[3;+\infty)$.

Câu 39. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m nhỏ hơn 10 để hàm số $y = \left|\sqrt{-x^2+6x} + m\right|$ đồng biến trên khoảng $(0;3)$?

(A) 6. (B) 4. (C) 3. (D) 10.

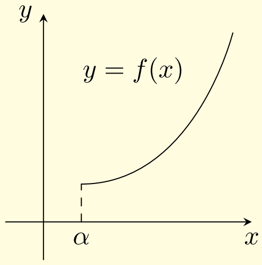
Câu 40. Tổng các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \left|x^3 - 3x^2 - 9x - 5 + \frac{m}{2}\right|$ có 5 điểm cực trị là

(A) 2016. (B) 1952. (C) -2016. (D) -496.

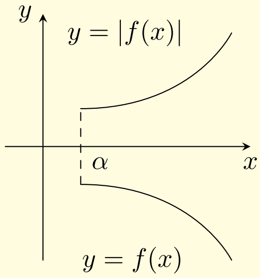
Một số lưu ý

Hàm số $y = |f(x)|$ đồng biến trên đoạn $[a;+\infty)$ khi và chỉ khi

a) $\begin{cases} y'(\alpha) \geq 0, \forall x \in [\alpha; +\infty) \\ y(\alpha) \geq 0 \end{cases}$

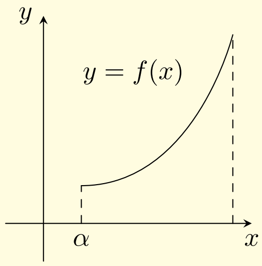


b) $\begin{cases} y'(\alpha) \leq 0, \forall x \in [\alpha; +\infty) \\ y(\alpha) \leq 0 \end{cases}$

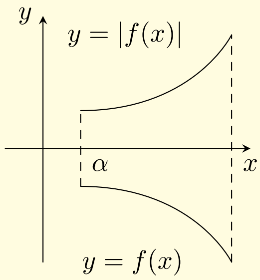


Hàm số $y = |f(x)|$ đồng biến trên $(\alpha; \beta)$ khi và chỉ khi

a) $\begin{cases} y'(\alpha) \geq 0, \forall x \in (\alpha; \beta) \\ y(\alpha) \geq 0 \end{cases}$



b) $\begin{cases} y'(\alpha) \leq 0, \forall x \in (\alpha; \beta) \\ y(\alpha) \leq 0 \end{cases}$



Các dạng đồng biến $y = |f(x)|$ trên $(-\infty; a]$, $[\alpha; \beta]$ ta thực hiện tương tự.
Hàm số hỏi nghịch biến làm ngược lại.

Câu 1. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = |x^5 - 5x^2 + 5(m-1)x - 8|$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$?

Ⓐ 2. Ⓑ 0. Ⓒ 4. Ⓓ 1.

Câu 2. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = |2x^3 - mx + 1|$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$?

Ⓐ 2. Ⓑ 6. Ⓒ 3. Ⓓ 4.

Câu 3. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m nhỏ hơn 10 để hàm số $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m|$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$?

Ⓐ 6. Ⓑ 4. Ⓒ 3. Ⓓ 5.

Câu 4. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = |x^4 + 2x^3 + mx + 2|$ đồng biến trên khoảng $(-1; +\infty)$?

Ⓐ $m \geq 1$. Ⓑ $m \in \varnothing$. Ⓒ $0 \leq m \leq 1$. Ⓓ $m \leq 0$.

Câu 5. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham m thuộc đoạn $[-10; 10]$ để hàm số $y = |-x^3 + 3(m+1)x^2 - 3m(m+2)x + m^2(m+3)|$ đồng biến trên khoảng $(0; 1)$?

Ⓐ 21. Ⓑ 10. Ⓒ 8. Ⓓ 2.

Câu 6. Có bao nhiêu số nguyên m thuộc khoảng $(-4; 4)$ để hàm số $y = \left|\dfrac{1}{3}x^3 - x^2 + mx + 1\right|$ đồng biến trên $(1; +\infty)$?

Ⓐ 5. Ⓑ 4. Ⓒ 3. Ⓓ 6.

Câu 7. Tổng tất cả các giá trị nguyên thuộc $[-5; 5]$ của m để hàm số $g(x) = \left|\dfrac{1}{3}x^3 + (m-1)x^2 + (2m-3)x - \dfrac{2}{3}\right|$ đồng biến trên $(1; 5)$ là

(A) 1. (B) -1. (C) 0. (D) 2.

Câu 8. Cho hàm số $y = |x^3 - 3(m+2)x^2 + 3m(m+4)x|$. Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc đoạn $[-2019; 2019]$ của tham số thực m để hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 4)$?

(A) 4033. (B) 4032. (C) 2018. (D) 2016.

Câu 9. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của $m < 5$ để hàm số $y = \left|\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + m\right|$ đồng biến trên $(0, +\infty)$?

(A) 2. (B) 4. (C) 6. (D) 8.

Câu 10. Có bao nhiêu số nguyên dương m để hàm số $y = |x^5 - mx + 4|$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$?

(A) 4. (B) 5. (C) 6. (D) 7.

Câu 11. Có bao nhiêu số nguyên m thuộc khoảng $(-10; 10)$ để hàm số $y = |2x^3 - 2mx + 3|$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$?

(A) 12. (B) 8. (C) 11. (D) 7.

Câu 12. Cho hàm số $y = |x^5 - mx + 1|$. Gọi S là tập tất cả các số nguyên dương m sao cho hàm số đồng biến trên $[1; +\infty)$. Tính tổng tất cả các phần tử của S.

(A) 15. (B) 14. (C) 12. (D) 13.

Câu 13. Cho hàm số $f(x) = |x^2 - 2mx + m + 2|$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-9; 9]$ để hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 2)$?

(A) 3. (B) 2. (C) 16. (D) 9.

Câu 14. Cho hàm số $f(x) = \left|-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}(2m+3)x^2 - (m^2+3m)x + \frac{2}{3}\right|$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-9; 9]$ để hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$?

(A) 3. (B) 2. (C) 16. (D) 9.

Câu 15. Có bao nhiêu giá trị nguyên $m \in (-20; 20)$ để hàm số $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m|$ nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

(A) 4. (B) 30. (C) 8. (D) 15.

Câu 16. Có bao nhiêu giá trị nguyên không âm m để hàm số $y = |x^4 - mx^2 + 9|$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

(A) 3. (B) 6. (C) 7. (D) 4.

Câu 17. Cho hàm số $y = \left|\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(m+3)x^2 + (2m+3)x - 1\right|$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên dương m để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(4; +\infty)$. Chọn mệnh đề sai?

(A) S có 4 phần tử. (B) Tổng các giá trị của m thuộc S bằng 6.
(C) Tích các giá trị của m thuộc S bằng 0. (D) Giá trị m lớn nhất thuộc S bằng 4.

Câu 18. Cho hàm số $f(x) = |x^3 - (2m-5)x + 2018|$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-2019; 2019]$ để hàm số đồng biến trên khoảng $(1; 3)$?

(A) 3032. (B) 4039. (C) 0. (D) 2021.

Câu 19. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y = g(x) = |x^3 - 3(m+1)x^2 + 3m(m+2)x|$ đồng biến trên nửa đoạn $[0; +\infty)$ biết rằng $-2021 \leq m \leq 2021$?

(A) 2020. (B) 2021. (C) 2022. (D) 2019.

Câu 20. Gọi $S = [a\,; +\infty)$ là tập tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = |x^3 - 3x^2 + mx + 3m + 1|$ đồng biến trên khoảng $(-2\,; +\infty)$. Khi đó a bằng

(A) -3. (B) 19. (C) 3. (D) -2.

Câu 21. Tính tổng S tất cả các giá trị nguyên của tham số m trong đoạn $[-10;10]$ để hàm số $y=\left|\dfrac{mx+3}{x+m+2}\right|$ đồng biến trên $(1;+\infty)$.

Ⓐ $S=55$. Ⓑ $S=54$. Ⓒ $S=3$. Ⓓ $S=5$.

Câu 22. Tìm m để hàm số $y=\left|\dfrac{x-2m+1}{x+m}\right|$ đồng biến trên $(1;+\infty)$.

Ⓐ $\dfrac{1}{3}<m\le 1$. Ⓑ $m\in[-1;1]\setminus\left\{\dfrac{1}{3}\right\}$. Ⓒ $-1\le m<\dfrac{1}{3}$. Ⓓ $\dfrac{1}{3}<m\le 1$.

Câu 23. Có bao nhiêu số nguyên của tham số m để hàm số $y=\left|\dfrac{x^2-2x+2m+2}{x-1}\right|$đồng biến trên $[3;+\infty)$?

Ⓐ 4. Ⓑ 5. Ⓒ vô số. Ⓓ 6.

Câu 24. Tìm tất cả các giá thực của tham số m để hàm số $y=\left|x-\dfrac{2}{x}+m\right|$ đồng biến trên $[1;+\infty)$.

Ⓐ $m\le -1$. Ⓑ $-1\le m\le 1$. Ⓒ $m\ge 1$. Ⓓ $m>0$.

Câu 25. Biết rằng tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho hàm số $y=\left|x+1+\dfrac{m^2-2m-1}{x+1}\right|$ đồng biến trên $(2;+\infty)$ là $[a;b]$. Tính $a\cdot b$.

Ⓐ -10. Ⓑ -9. Ⓒ 2. Ⓓ -7.

Câu 26. Tìm tất cả các giá trị thực của m sao cho hàm số $y=\left|\dfrac{x+m}{x+1}\right|$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$

Ⓐ $m<-1$. Ⓑ $m>1$. Ⓒ $-1\le m\le 1$. Ⓓ $-1\le m<1$.

Câu 27. Tính tổng tất cả các giá trị nguyên dương của m để hàm số $y=\left|\dfrac{x^3-2mx+2}{x-1}\right|$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$

Ⓐ 3. Ⓑ 4. Ⓒ 2. Ⓓ 5.

Câu 28. Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y=\left|\dfrac{x-m}{x+m+3}\right|$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$?

Ⓐ 4. Ⓑ 2. Ⓒ 3. Ⓓ 1.

Câu 29. Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của m để hàm số $y=\left|x+5+\dfrac{1-m}{x-2}\right|$ đồng biến trên $[5;+\infty)$?

Ⓐ 11. Ⓑ 10. Ⓒ 8. Ⓓ 9.

Câu 30. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\left|\dfrac{x^2+x+2m-3}{x-1}\right|$ đồng biến trên khoảng $(3;+\infty)$?

Ⓐ 7. Ⓑ 5. Ⓒ 4. Ⓓ Vô số.

Câu 31. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=\left|\dfrac{x-m+1}{x+m}\right|$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

Ⓐ $m\le\dfrac{1}{2}$ hoặc $m\ge 2$. Ⓑ $\dfrac{1}{2}<m<2$.

Ⓒ $\dfrac{1}{2}<m\le 2$. Ⓓ $\dfrac{1}{2}\le m\le 2$.

Câu 32. Cho hàm số $y=\left|\sqrt{2-x}+\sqrt{x+2}+\dfrac{m}{2}x-1\right|$. Có bao nhiêu giá trị m nguyên để hàm số nghịch biến trên $(0;1)$

Ⓐ 4. Ⓑ 2. Ⓒ 3. Ⓓ 5.

Câu 33. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in(-5;5)$ để hàm số $y=\left|\sqrt{x^2-3}-2x-3m\right|$ nghịch biến trên $(2;3)$?

Ⓐ 2. Ⓑ 3. Ⓒ 5. Ⓓ 9.

Câu 34. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[0;10]$ để hàm số $y=\left|x+m\sqrt{x^2-2x+3}\right|$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$?

Ⓐ 11. Ⓑ 10. Ⓒ 12. Ⓓ 9.

Câu 35. Cho hàm số $f(x)=\left|\sqrt{x^2+2x+2}-x+m\right|$, trong đó m là tham số thực. S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m trên đoạn $[-2019;2019]$ để hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1;+\infty)$. Số phần tử của tập S là

Ⓐ 2018. Ⓑ 2017. Ⓒ 2019. Ⓓ 4039.

Câu 36. Cho hàm số $f(x)=\left|\sqrt{x^2+2x+2}-x+m\right|$, trong đó m là tham số thực. S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m trên đoạn $[-2019;2019]$ để hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1;+\infty)$. Số phần tử của tập S là

Ⓐ 2018. Ⓑ 2017. Ⓒ 2019. Ⓓ 4039.

Câu 37. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\left|4\sqrt{x^2+2x+3}+5x-m^2+5\right|$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$?

Ⓐ 9. Ⓑ 6. Ⓒ 11. Ⓓ 8.

Câu 38. Cho hàm số $y=f(x)=\left|\sqrt{x^2+3}+2x+m^2-5m\right|$. Hỏi m thuộc khoảng nào trong các khoảng sau để hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(1;+\infty)$.

Ⓐ $(-\infty;0]$. Ⓑ $91;4$. Ⓒ $(-\infty;2)$. Ⓓ $[3;+\infty)$.

Câu 39. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m nhỏ hơn 10 để hàm số $y=\left|\sqrt{-x^2+6x}+m\right|$ đồng biến trên khoảng $(0;3)$?

Ⓐ 6. Ⓑ 4. Ⓒ 3. Ⓓ 10.

Câu 40. Tổng các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\left|x^3-3x^2-9x-5+\dfrac{m}{2}\right|$ có 5 điểm cực trị là

Ⓐ 2016. Ⓑ 1952. Ⓒ -2016. Ⓓ -496.

Câu 41. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y=\left|8^{\tan x}+3\cdot 2^{\tan x}-m+2\right|$ đồng biến trên $\left[-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Ⓐ $m\le\dfrac{29}{8}$. Ⓑ $m>\dfrac{29}{8}$. Ⓒ $m<\dfrac{29}{8}$. Ⓓ $m\ge\dfrac{29}{8}$.

Câu 42. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc khoảng $(-100;100)$ của tham số m để hàm số $y=\left|\ln 3x-4x^2+m\right|$ đồng biến trên đoạn $[1;e^2]$.

Ⓐ 101. Ⓑ 102. Ⓒ 103. Ⓓ 100.

Câu 43. Có bao nhiêu số nguyên $m<200$ để hàm số $y=\left|\ln(mx)-x+2\right|$ nghịch biến trên $(1;4)$?

Ⓐ 2018. Ⓑ 2019. Ⓒ 1. Ⓓ Vô số.

Câu 44. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc $(-2020;2020)$ để hàm số $y=\left|\ln\left(x^2-2x+m\right)-2mx^2-1\right|$ luôn đồng biến trên $(0;10)$.

Ⓐ 4038. Ⓑ 2020. Ⓒ 2017. Ⓓ 2018.

Câu 45. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m trong đoạn $[-3;3]$ để tham số $y=|\ln(x^3+mx+2)|$ đồng biến trên nửa khoảng $[1;3)$

Ⓐ 7. Ⓑ 4. Ⓒ 6. Ⓓ 5.

Câu 46. Cho hàm số $y=|\ln(x^2-mx-m)-1|$. Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc khoảng $(-10;10)$ của tham số m để hàm số đồng biến trên $\left(-\frac{1}{2};1\right)$?

Ⓐ 10. Ⓑ 6. Ⓒ 9. Ⓓ 5.

Câu 47. Tổng giá trị của tham số m nguyên thuộc $[-5;5]$ sao cho hàm số $y=|\ln(x^3-3x+m)+1|$ nghịch biến trên $[0;1]$ bằng

Ⓐ 10. Ⓑ 11. Ⓒ 12. Ⓓ 13.

Câu 48. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-10;10]$ để hàm số $y=|\log_3(x^2-x^2-mx+1)|$ đồng biến trên $[1;+\infty)$.

Ⓐ 50. Ⓑ 100. Ⓒ 52. Ⓓ 105.

Câu 49. Tổng các giá trị nguyên của m trên $[-10;10]$ để hàm số $y=g(x)=|\ln(x^2+x+m)+x|$ đồng biến trên $(-1;3)$ là

Ⓐ 50. Ⓑ 100. Ⓒ 52. Ⓓ 105.

Câu 50. Gọi S là tập hợp chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số $m\in[-2021;2021]$ để phương trình $\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x+2}+\frac{x+3}{x+4}-|x+3|+x-m=0$ có đúng 3 nghiệm thực x. Số phần tử của tập S là:

Ⓐ 2018. Ⓑ 2021. Ⓒ 2019. Ⓓ 2022.

Câu 51. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m\in[-2020;2020]$ để hàm số $y=\left|\sqrt{x^2+1}-mx-1\right|$ đồng biến trên khoảng $(1;2)$?

Ⓐ 4042. Ⓑ 4039. Ⓒ 4040. Ⓓ 4041.

Câu 52. Có bao nhiêu giá trị m nguyên để hàm số $y=f(x)=|x^3-3x^2+3(m^2+5)x+(12-3m^2)\cos x|$ đồng biến trên $(0;\pi)$?

Ⓐ 3. Ⓑ 5. Ⓒ 4. Ⓓ Vô số.

Câu 53. Các giá trị của tham số m để hàm số $y=|\sin x-\cos x+m|$ đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right)$ là

Ⓐ $m>\sqrt{2}$. Ⓑ $m\ge\sqrt{2}$. Ⓒ $m>1$. Ⓓ $m\ge 1$.

Câu 54. Cho hàm số $y=\left|\sin^3 x-m\cdot\sin x+1\right|$. Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên m sao cho hàm số đồng biến trên $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. Tính số phần tử của S.

Ⓐ 1. Ⓑ 2. Ⓒ 3. Ⓓ 0.

Câu 55. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc $[-5;\ 5]$ để hàm số $y=|\cos^3 x-3m^2\cos x|$ nghịch biến trên $\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$?

Ⓐ 1. Ⓑ 11. Ⓒ 5. Ⓓ 6.

Câu 56. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để $y=|9^x+3^x-m+1|$ đồng biến trên đoạn $[0;1]$?

Ⓐ 1. Ⓑ 4. Ⓒ 3. Ⓓ 6.

Câu 57. Có bao nhiêu giá trị m nguyên dương và nhỏ hơn 2020 để hàm số $y=|4^x-m\cdot 2^{x+1}+m+2|$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$?

Ⓐ 2018. Ⓑ 2019. Ⓒ 2. Ⓓ 3.

Câu 58. Cho hàm số $y = \left|e^{\frac{2x+2}{x-1}} + 3e^{\frac{x+1}{x-1}} - 2m + 5\right|$ (1). Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(2;4)$?

A. 234.
B. Vô số.
C. 40.
D. Không tồn tại m.

Câu 59. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương $m \in (-2019; 2020)$, để hàm số $y = \left|e^{-x^2} - e^{x^2} - m\right|$ nghịch biến trên $(1; e)$?

A. 401.
B. 0.
C. 2019.
D. 2016.

Câu 60. Giá trị lớn nhất của m để hàm số $y = |e^x + e^{2x} - m|$ đồng biến trên $(1;2)$ là

A. e.
B. $e + e^2$.
C. e^2.
D. 2.

BÀI 2. CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

A LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa

Định nghĩa 2.1. Giả sử hàm số f xác định trên tập K và $x_0 \in K$. Ta nói:

- x_0 là **điểm cực tiểu** của hàm số f nếu tồn tại một khoảng $(a;b)$ chứa x_0 sao cho $(a;b) \subset K$ và $f(x) > f(x_0), \forall x \in (a;b) \setminus \{x_0\}$. Khi đó $f(x_0)$ được gọi là **giá trị cực tiểu** của hàm số f.
- x_0 là **điểm cực đại** của hàm số f nếu tồn tại một khoảng $(a;b)$ chứa x_0 sao cho $(a;b) \subset K$và $f(x) < f(x_0), \forall x \in (a;b) \setminus \{x_0\}$. Khi đó $f(x_0)$ được gọi là **giá trị cực đại** của hàm số f.
- Điểm cực đại và điểm cực tiểu gọi chung là **điểm cực trị**.
- Giá trị cực đại và giá trị cực tiểu gọi chung là **cực trị**.
- Điểm cực đại và điểm cực tiểu được gọi chung là **điểm cực trị của hàm số** và điểm cực trị phải là một điểm trong tập hợp K.
- Giá trị cực đại và giá trị cực tiểu được gọi chung là **giá trị cực trị (hay cực trị)** của hàm số.
- Nếu x_0 là điểm cực trị của hàm số thì điểm $(x_0; f(x_0))$ được gọi là **điểm cực trị của đồ thị** hàm số f.

2. Quy tắc tìm cực trị

Quy tắc 1

- **Bước 1:** Tìm tập xác định. Tìm $f'(x)$.
- **Bước 2:** Tìm các điểm x_i $(i = 1; 2; \ldots)$ mà tại đó đạo hàm của hàm số bằng 0 hoặc hàm số liên tục nhưng không có đạo hàm.
- **Bước 3:** Lập bảng biến thiên hoặc bảng xét dấu $f'(x)$. Nếu $f'(x)$ đổi dấu khi đi qua x_i thì hàm số đạt cực trị tại x_i.

Định lí 2.1. *Giả sử $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai trong khoảng $(x_0 - h; x_0 + h)$ với $h > 0$. Khi đó:*

- *Nếu $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) < 0$ thì hàm số f đạt cực đại tại x_0.*
- *Nếu $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) > 0$ thì hàm số f đạt cực tiểu tại x_0.*

Quy tắc hai

- **Bước 1:** Tìm tập xác định. Tìm $f'(x)$.
- **Bước 2:** Tìm các nghiệm x_i $(i = 1; 2; \ldots)$ của phương trình $f'(x) = 0$.
- **Bước 3:** Tính $f''(x)$ và tính $f''(x_i)$.
  - Nếu $f''(x_i) < 0$ thì hàm số f đạt cực đại tại điểm x_i.
  - Nếu $f''(x_i) > 0$ thì hàm số f đạt cực tiểu tại điểm x_i.

B VÍ DỤ

Ví dụ 1. Hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3+x^2-3x+1$ đạt cực tiểu tại điểm

Ⓐ $x=-1$. Ⓑ $x=1$. Ⓒ $x=-3$. Ⓓ $x=3$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

$y'=x^2+2x-3$; $y'=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\x=-3\end{array}\right.$.

$y''=2x+2$; $y''(-3)=-4<0$; $y''(1)=4>0$.

Suy ra hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x=1$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Ví dụ 2. Cho hàm số $y=x^3-3(m+1)x^2+3(7m-3)x$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số không có cực trị. Số phần tử của S là

Ⓐ 2. Ⓑ 4. Ⓒ 0. Ⓓ vô số.

Lời giải.

$y'=3x^2-6(m+1)x+3(7m-3)$.

Ta có: $y'=0\Leftrightarrow x^2-2(m+1)x+7m-3=0$ (2).

Hàm số đã cho không có cực trị khi và chỉ khi phương trình $y'=0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép

$$\Delta'_{(2)}\le 0\Leftrightarrow (m+1)^2-1\cdot(7m-3)\le 0\Leftrightarrow m^2-5m+4\le 0\Leftrightarrow 1\le m\le 4.$$

Do $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{1;2;3;4\}$. Vậy tập có 4 phần tử.

Chọn đáp án Ⓑ □

Ví dụ 3. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x^2-1)(x-4)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hàm số $g(x)=f(3-x)$ có bao nhiêu điểm cực đại?

Ⓐ 0. Ⓑ 1. Ⓒ 2. Ⓓ 3.

Lời giải.

Từ giả thiết, ta có bảng biến thiên của hàm số $f(x)$

x	$-\infty$		-1		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Ta có $g(x)=f(3-x)\Rightarrow g'(x)=-f'(3-x)$.

Từ bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ ta có

$$g'(x)\ge 0\Leftrightarrow f'(3-x)\le 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3-x\le -1\\1\le 3-x\le 4\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\ge 4\\-1\le x\le 2\end{array}\right..$$

Như thế ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x)$

x	$-\infty$		-1		2		4		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Từ bảng biến thiên, ta nhận thấy hàm số $g(x)$ có một điểm cực đại.
Chọn đáp án B

Ví dụ 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-1 ‖ 1	$\nearrow$	3	$\searrow$	2

Số điểm cực trị của hàm số $y = |f(x)|$ là
A 7. **B** 5. **C** 6. **D** 8.

Lời giải.

Gọi đồ thị của hàm số $y = f(x)$ là (C).
Đặt $g(x) = |f(x)|$ và gọi (C') là đồ thị của hàm số $y = g(x)$. Đồ thị (C') được suy ra từ đồ thị (C) như sau:

- Giữ nguyên phần đồ thị của (C) phía trên Ox ta được phần I.
- Với phần đồ thị của (C) phía dưới Ox ta lấy đối xứng qua Ox, ta được phần II.
- Hợp của phần I và phần II ta được (C').

Từ cách suy ra đồ thị của (C') từ (C), kết hợp với bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ ta có bảng biến thiên của hàm số $y = g(x) = |f(x)|$ như sau:

x	$-\infty$		a		-1		b		0		c		1		$+\infty$
$y = \|f(x)\|$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	1 ‖ 1	$\searrow$	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	2

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số $y = |f(x)|$ có 5 điểm cực trị.
Chọn đáp án B

Ví dụ 5. Cho hàm số $y = \dfrac{x^5}{5} - (2m-1)x^4 - \dfrac{m}{3}x^3 + 2019$. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$?

A Vô số. **B** 1. **C** 2. **D** 0.

Lời giải.

Ta có $y' = x^4 - 4(2m-1)x^3 - mx^2 = x^2\left[x^2 - 4(2m-1)x - m\right]$.
Dễ thấy $x = 0$ là một nghiệm của $y' = 0$.
Do đó hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$ khi và chỉ khi y' đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua nghiệm $x = 0$.
Ta thấy dấu của y' là dấu của hàm số $g(x) = x^2 - 4(2m-1)x - m$.
Hàm số $g(x)$ đổi dấu khi đi qua giá trị $x = 0$ khi $x = 0$ là nghiệm của $g(x)$. Khi đó $g(0) = 0 \Leftrightarrow m = 0$.
Thử lại, với $m = 0$ thì $g(x) = x^2 + 4x$ đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua giá trị $x = 0$.
Vậy có 1 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án B □

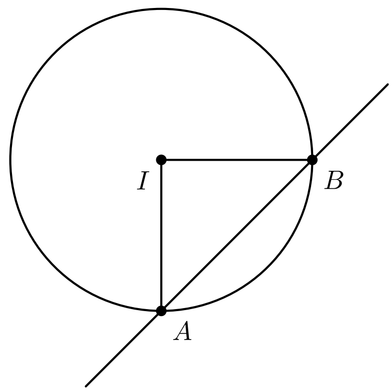
Ví dụ 6. Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng đi qua điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx + 2$ cắt đường tròn tâm $I(1;1)$, bán kính $R = 1$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho diện tích tam giác IAB đạt giá trị lớn nhất?

A $m = \dfrac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$. **B** $m = \dfrac{2 \pm \sqrt{3}}{2}$. **C** $m = \dfrac{2 \pm \sqrt{5}}{2}$. **D** $m = \dfrac{2 \pm \sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

Ta có $y = x^3 - 3mx + 2 \Rightarrow y' = 3x^2 - 3m$.
Hàm số $y = x^3 - 3mx + 2$ có 2 điểm cực trị khi $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m > 0$ (1).
Ta có $y = \dfrac{1}{3}x \cdot y' - 2mx + 2$.
Suy ra phương trình đường thẳng Δ đi qua hai điểm cực đại và cực tiểu là

$$y = -2mx + 2 \Leftrightarrow 2mx + y - 2 = 0.$$



Đường thẳng Δ cắt đường tròn tâm $I(1;1)$, bán kính $R = 1$ tại hai điểm phân biệt A, B khi

$$d(I;\Delta) < R \Leftrightarrow \frac{|2m-1|}{\sqrt{4m^2+1}} < 1 \Leftrightarrow |2m-1| < \sqrt{4m^2+1} \Leftrightarrow -4m < 0 \quad (*)$$

Do $m > 0$ nên $(*)$ luôn đúng. Ta có $S_{\triangle IAB} = \dfrac{1}{2} \cdot IA \cdot IB \cdot \sin\widehat{AIB} = \dfrac{1}{2} \cdot \sin\widehat{AIB} \le \dfrac{1}{2}$.
Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \sin\widehat{AIB} = 1 \Leftrightarrow \widehat{AIB} = 90^\circ$.
Khi đó tam giác IAB vuông cân tại I có $IA = 1$ nên

$$d(I;\Delta) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{|2m-1|}{\sqrt{4m^2+1}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow 4m^2 - 8m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{2} \text{ thỏa mãn điều kiện (1).}$$

Vậy diện tích tam giác IAB đạt giá trị lớn nhất khi $m = \dfrac{2 \pm \sqrt{3}}{2}$.

Chọn đáp án (B) □

Ví dụ 7. Tìm tất cả giá trị của tham số m để hàm số $y = x^4 + 2(m-2)x^2 + 3m - 2$ có ba điểm cực trị.

(A) $m \in (2; +\infty)$. (B) $m \in (-2; 2)$. (C) $m \in (-\infty; 2)$. (D) $m \in (0; 2)$.

Lời giải.

Ta có $y' = 4x^3 + 4(m-2)x = 4x(x^2 + m - 2)$.

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = 2 - m \quad (1) \end{array}\right.$.

Để hàm số có ba điểm cực trị thì phương trình $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt.

Suy ra phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác $0 \Leftrightarrow 2 - m > 0 \Leftrightarrow m < 2$.

Chọn đáp án (C) □

Ví dụ 8. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+1)^2(x^2 - 4x)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x) = f(2x^2 - 12x + m)$ có đúng 5 điểm cực trị?

(A) 18. (B) 17. (C) 16. (D) 19.

Lời giải.

Ta có: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2(x^2 - 4x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 4 \end{array}\right.$, trong đó $x = -1$ là nghiệm kép.

$g(x) = f(2x^2 - 12x + m) \Rightarrow g'(x) = (4x - 12)f'(2x^2 - 12x + m)$.

Xét $g'(x) = 0 \ (*) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ 2x^2 - 12x + m = -1 \\ 2x^2 - 12x + m = 0 \\ 2x^2 - 12x + m = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ 2x^2 - 12x + m = -1\,(l) \\ 2x^2 - 12x = -m \ (1) \\ 2x^2 - 12x = 4 - m \ (2) \end{array}\right.$.

(Điểm cực trị của hàm số $g(x)$ là nghiệm bội lẻ của $(*)$ nên ta loại phương trình $2x^2 - 12x + m = -1$).

Xét hàm số $y = 2x^2 - 12x$ có đồ thị (C) có $y' = 4x - 12$.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-18	$\nearrow$	$+\infty$

Để $g(x)$ có đúng 5 điểm cực trị thì mỗi phương trình (1); (2) đều có hai nghiệm phân biệt khác 3. Do đó, mỗi đường thẳng $y = 4 - m$ và $y = -m$ phải cắt đồ thị (C) tại 2 điểm phân biệt có hoành độ khác 3.

Nhận xét: đường thẳng $y = 4 - m$ luôn nằm trên đường thẳng $y = -m$.

Ta có $-18 < -m \Leftrightarrow m < 18$. Vậy có 17 giá trị m nguyên dương.

Chọn đáp án (B) □

Ví dụ 9. Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - (2m-1)x^2 + (8-m)x + 2$ với $m \in \mathbb{R}$. Tập hợp tất cả các giá trị của m để hàm số $y = f(|x|)$ có 5 cực trị là khoảng $(a; b)$. Tích $a \cdot b$ bằng

(A) 12. (B) 16. (C) 10. (D) 14.

Lời giải.

Ta có $y' = x^2 - 2(2m-1)x + 8 - m$.
Vì $f(|x|)$ là hàm chẵn (do $f(|-x|) = f(|x|)$), nên đồ thị hàm $f(|x|)$ đối xứng qua trục Oy.
Do đó, khi hàm $f(x)$ có hai cực trị dương thì hàm $f(|x|)$ sẽ có thêm hai cực trị đối xứng qua trục Oy và một cực trị còn lại chính là giao điểm của đồ thị hàm $f(|x|)$ và trục Oy.
Yêu cầu bài toán tương đương với phương trình $y' = 0$ có 2 nghiệm dương phân biệt.
Điều kiện tương đương với

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2 - 3m - 7 > 0 \\ 2m - 1 > 0 \\ 8 - m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{aligned} & m < -1 \\ & m > \dfrac{7}{4} \end{aligned}\right. \\ m > \dfrac{1}{2} \\ m < 8 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \left(\dfrac{7}{4}; 8\right).$$

Vậy $a = \dfrac{7}{4}$, $b = 8$ và $a \cdot b = 14$.
Chọn đáp án (D) □

C MỘT SỐ DẠNG TOÁN CƠ BẢN

Dạng 1. Cơ bản về cực trị của hàm số

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ là $f'(x) = (x-2018)(x-2019)(x-2020)^4$. Hàm số đã cho có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2. B. 1. C. 4. D. 3.

Câu 2. Hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x + 1$ đạt cực tiểu tại điểm

A. $x = -1$. B. $x = 1$. C. $x = -3$. D. $x = 3$.

Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)^2(x-3)^3(2x+3)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Số cực trị của hàm số đã cho là

A. 1. B. 2. C. 0. D. $x = 3$.

Câu 4. Cho hàm số $f(x)$ có $f'(x) = x^2(x-1)(x+2)^5$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 1. B. 2. C. 3. D. $x = 4$.

Câu 5. Hàm số $y = 2x^3 - x^2 + 5$ có điểm cực đại là

A. $x = \dfrac{1}{3}$. B. $x = 0$. C. $M(0;5)$. D. $y = 5$.

Câu 6. Cho hàm số $f(x)$ có $f'(x) = x(x-1)(x+2)^2$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 2. B. 3. C. 4. D. 1.

Câu 7. Hàm số $y = \dfrac{2x-5}{x+1}$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3. B. 0. C. 2. D. 1.

Câu 8. Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ có hai điểm cực trị A và B. Điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng AB?

A. $M(0;1)$. B. $Q(-1;10)$. C. $P(1;0)$. D. $N(1;-10)$.

Câu 9. Số nào sau đây là điểm cực đại của hàm số $y = x^4 - 2x^3 + x^2 + 2$.

A. $\dfrac{1}{2}$. B. 1. C. 0. D. 2.

Câu 10. Cho $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-2)(x-3)^2$. Khi đó số cực trị của hàm số $y = f(2x+1)$ là

A. 0. B. 2. C. 1. D. 3.

Câu 11. Cho $y = x^4 - 2x^2 + 1$. Xét các mệnh đề sau đây

1) Hàm số có ba điểm cực trị.

2) Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-1;0)$; $(1;+\infty)$.

3) Hàm số có một điểm cực trị.

4) Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$; $(0;1)$.

Có bao nhiêu mệnh đề đúng trong bốn mệnh đề trên?

A. 2. B. 1. C. 4. D. 3.

Câu 12. Hàm số $f(x) = \mathrm{C}_{2019}^0 + \mathrm{C}_{2019}^1 \cdot x + \mathrm{C}_{2019}^2 \cdot x^2 + \cdots + \mathrm{C}_{2019}^{2019} \cdot x^{2019}$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 0. B. 2018. C. 1. D. 2019.

Câu 13. Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 2$. Tọa độ điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là

Ⓐ $A(-2; 0)$. Ⓑ $B(-1; 4)$. Ⓒ $C(0; 1)$. Ⓓ $D(1; 0)$.

Câu 14. Cho hàm số $f(x) = 1 + \mathrm{C}_{10}^{1} \cdot x + \mathrm{C}_{10}^{2} \cdot x^2 + \cdots + \mathrm{C}_{10}^{10} \cdot x^{10}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho bằng

Ⓐ 10. Ⓑ 0. Ⓒ 9. Ⓓ 1.

Câu 15. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x-1)(x-2)(3^x - 1)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho bằng

Ⓐ 2. Ⓑ 1. Ⓒ 3. Ⓓ 4.

Câu 16. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x^2 - 9)(x^2 - 3x)^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Gọi T là giá trị cực đại của hàm số đã cho. Chọn khẳng định đúng.

Ⓐ $T = f(0)$. Ⓑ $T = f(9)$. Ⓒ $T = f(-3)$. Ⓓ $T = f(3)$.

Câu 17. Cho A, B, C là các điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 4$. Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC bằng

Ⓐ $\sqrt{2} + 1$. Ⓑ $\sqrt{2}$. Ⓒ $\sqrt{2} - 1$. Ⓓ 1.

Câu 18. Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 1$ có đồ thị (C). Biết rằng đồ thị (C) có ba điểm cực trị tạo thành ba đỉnh của một tam giác, gọi là $\triangle ABC$. Tính diện tích $\triangle ABC$

Ⓐ $S = 2$. Ⓑ $S = 1$. Ⓒ $S = \dfrac{1}{2}$. Ⓓ $S = 4$.

Câu 19. Cho hàm số $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 3(7m-3)x$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số không có cực trị. Số phần tử của S là

Ⓐ 2. Ⓑ 4. Ⓒ 0. Ⓓ Vô số.

Câu 20. Cho hàm số $y = f(x)$ có đúng ba điểm cực trị là -2; 1; 0 và có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Khi đó hàm số $y = f(x^2 - 2x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

Ⓐ 6. Ⓑ 4. Ⓒ 5. Ⓓ 3.

Câu 21. Cho hàm số$f(x) = x^2(x-1)\mathrm{e}^{3x}$ có một nguyên hàm là hàm số $F(x)$. Số điểm cực trị của hàm số $F(x)$ là

Ⓐ 1. Ⓑ 2. Ⓒ 3. Ⓓ 0.

Câu 22. Số điểm cực trị của hàm số $y = \left|\sin x - \dfrac{x}{4}\right|$, với mọi $x \in (-\pi; \pi)$ là

Ⓐ 2. Ⓑ 4. Ⓒ 3. Ⓓ 5.

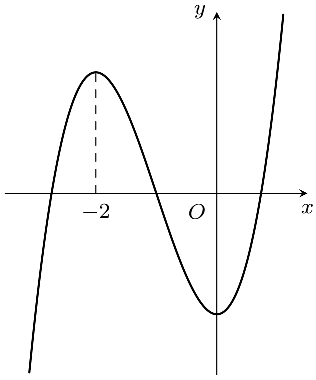
Câu 23. Biết phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ $(a \neq 0)$ có đúng hai nghiệm thực. Hỏi đồ thị hàm số $y = |ax^3 + bx^2 + cx + d|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

Ⓐ 4. Ⓑ 5. Ⓒ 2. Ⓓ 3.

Câu 24. Số điểm cực trị của hàm số $f(x) = \displaystyle\int\limits_{2x}^{x^2} \dfrac{2t\,\mathrm{d}t}{1+t^2}$ là

Ⓐ 0. Ⓑ 1. Ⓒ 2. Ⓓ 3.

Câu 25. Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ.



Số điểm cực trị của hàm số $y = f(-2x^2 + 4x)$ là

A 3. **B** 4. **C** 2. **D** 5.

Câu 26. Biết rằng đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x - \frac{1}{x}$ có ba điểm cực trị thuộc một đường tròn (C). Bán kính của (C) gần đúng với giá trị nào dưới đây?

A 12,4. **B** 6,4. **C** $4,4$. **D** 27.

Câu 27. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (3 - x)(x^2 - 1) + 2x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Hỏi hàm số $y = f'(x) - x^2 - 1$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

A 2. **B** 3. **C** 4. **D** 1.

Câu 28.

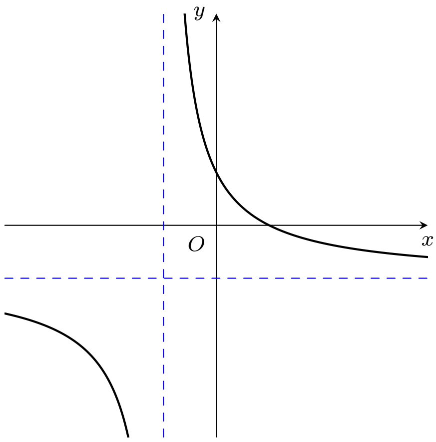
Cho hàm số $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ có đồ thị như hình vẽ. Chọn mệnh đề **đúng** trong các mệnh đề sau:

A Hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có hai điểm cực trị trái dấu.

B Đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ cắt trục tung tại điểm có tung độ dương.

C Đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có hai điểm cực trị nằm bên phải trục tung.

D Tâm đối xứng của đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ nằm bên trái trục tung.



Câu 29. Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ với $a > 0$, $c > 2018$ và $a + b + c < 2018$. Số điểm cực trị của hàm số $y = |f(x) - 2018|$ là

A 1. **B** 3. **C** 5. **D** 7.

Câu 30. Hàm số $f(x) = \left|\frac{x}{x^2 + 1} - m\right|$ có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị?

A 2. **B** 3. **C** 5. **D** 4.

Câu 31. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x^2 - 1)(x - 4)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số $g(x) = f(3 - x)$ có bao nhiêu điểm cực đại?

A 0. **B** 1. **C** 2. **D** 3.

Câu 32. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và bảng xét dấu đạo hàm

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số $y = 3f(-x^4 + 4x^2 - 6) + 2x^6 - 3x^4 - 12x^2$ có tất cả bao nhiêu điểm cực tiểu?

A 3. **B** 0. **C** 1. **D** 2.

Dạng 2. Cực trị của hàm tổng và hàm hợp

Câu 33. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

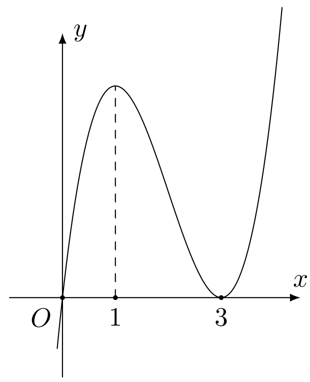
Hàm số $g(x) = f\left(x^2 - 2x + 1 - |x-1|\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A 8. **B** 7. **C** 9. **D** 10.

Câu 34.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ biết $f(1) > 1$ và có đồ thị như hình bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in (-2020; 2021)$ để hàm số $g(x) = \left|f^3(x) + \dfrac{3}{2}f^2(x) + m\right|$ có tất cả 9 điểm cực trị.

A 1. **B** 2. **C** 0. **D** 4.



Câu 35. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		1		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số $y = 2\left[f(x)\right]^3 - 9\left[f(x)\right]^2 + 12f(x) + 2021$ có bao nhiêu điểm cực đại?

A 5. **B** 10. **C** 7. **D** 9.

Câu 36. Cho hàm số bậc bốn $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Số điểm cực tiểu của hàm số $g(x) = \left[f(x-1)\right]^2 + 2021$ là

A 5. **B** 4. **C** 3. **D** 7.

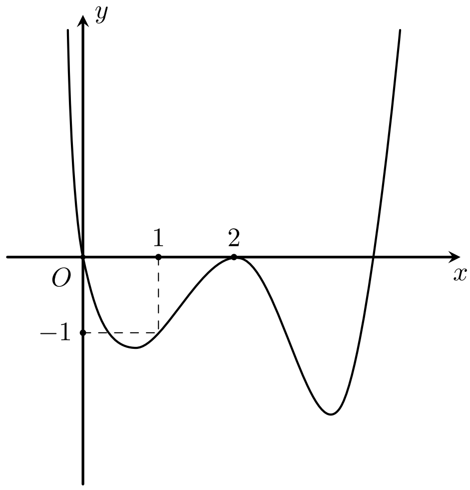
Câu 37. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \left\{\pm\sqrt{3}\right\}$, thỏa mãn $1 - x^3 = 2x^2 f(x) + xf^2(x) - f'(x)$ và $f(1) = 0$. Hàm số $g(x) = \left[f(2x-1)\right]^2$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

A 0. **B** 1. **C** 2. **D** 3.

Câu 38.

Cho hàm số bậc năm $y = f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ bên. Tìm tất cả các giá trị của m để số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x^2 - 3x + m)$ là 5.

(A) $(2; +\infty)$.
(B) $\left(-\infty; \frac{17}{4}\right)$.
(C) $\left(-\infty; \frac{9}{4}\right)$.
(D) $\left(\frac{9}{4}; \frac{17}{4}\right)$.

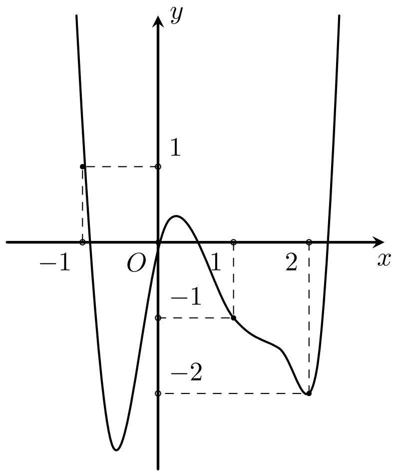


Câu 39. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = (x-12)^{2020}(x^2 - 2x)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in (-2020; 2020)$ để hàm số $y = f(x^2 - 2020x + 2021m)$ có 3 điểm cực trị dương.

(A) 4038.
(B) 2021.
(C) 2020.
(D) 2019.

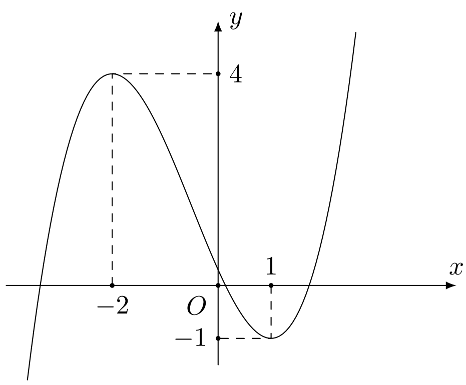
Câu 40.
Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số $y = |g(x)| = |2f(x+2) + (x+1)(x+3) + \log_2 2021|$ là

(A) 2.
(B) 1.
(C) 3.
(D) 4.



Câu 41.
Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Có bao nhiêu giá trị m nguyên để hàm số $y = f(|f^2(x) - 2f(x) - m|)$ có 17 cực trị.

(A) 4.
(B) 0.
(C) 2.
(D) 6.



Câu 42. Cho $f(x)$ là hàm số bậc bốn thỏa mãn $f(0) = 0$. Hàm số $f'(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-2	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$ ↘	3 ↗	$\frac{13}{4}$ ↘	$-\infty$

Hàm số $g(x) = |f(x^3) + 6x|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

(A) 2.
(B) 4.
(C) 5.
(D) 3.

Câu 43. Cho $f(x)$ là hàm số bậc bốn thỏa mãn $f(0) = 0$. Hàm số $f'(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$\frac{7}{6}$	$\searrow$	$-\infty$

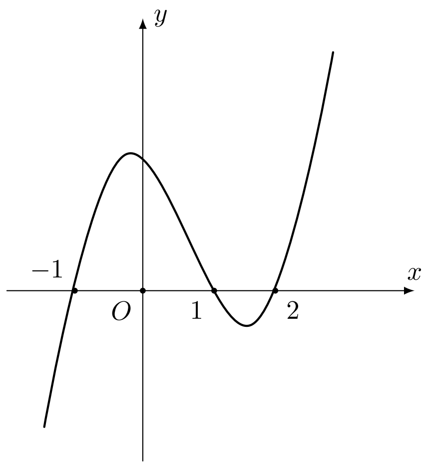
Tìm m nguyên để hàm số $g(x) = \left|f(x^3) + 3m^2x + m - 1\right|$ có nhiều điểm cực trị nhất có thể. Thì giá trị m nhỏ nhất thỏa mãn thuộc khoảng nào dưới đây?

(A) $(-2; 0)$. (B) $(-1; 1)$. (C) $\left(1; \frac{3}{2}\right)$. (D) $\left(\frac{3}{2}; 3\right)$.

Câu 44.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Hàm số $g(x) = (|x| + |x^2 - 1|)$ có bao nhiêu điểm cực đại?

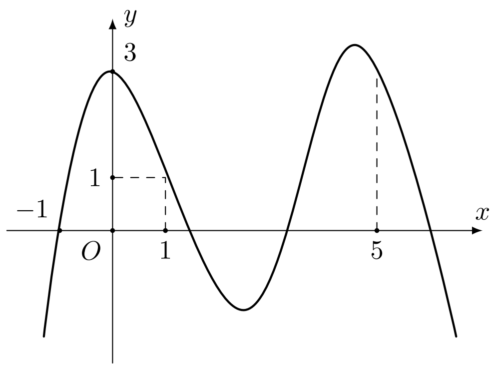
(A) 3. (B) 4. (C) 5. (D) 7.



Câu 45.

Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = 8f(x^3 - 3x + 3) - (2x^6 - 12x^4 + 16x^3 + 18x^2 - 48x + 1)$ là

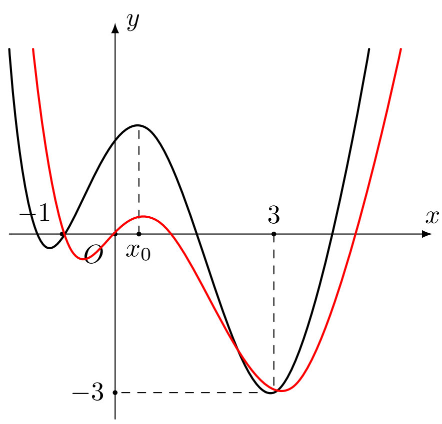
(A) 5. (B) 3. (C) 7. (D) 9.



Câu 46.

Cho hai hàm số bậc bốn $y = f(x)$ và $y = g(x)$ có các đồ thị như hình bên. Số điểm cực trị của hàm số $h(x) = f^2(x) + g^2(x) - 2f(x)g(x)$ là

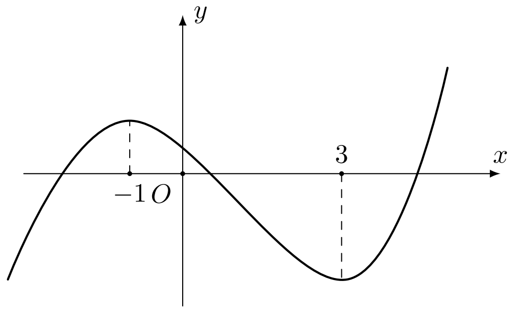
(A) 5. (B) 4. (C) 6. (D) 3.



Câu 47.

Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=f\left((x-1)^2+m\right)$ có 3 điểm cực trị. Tổng các phần tử của S là

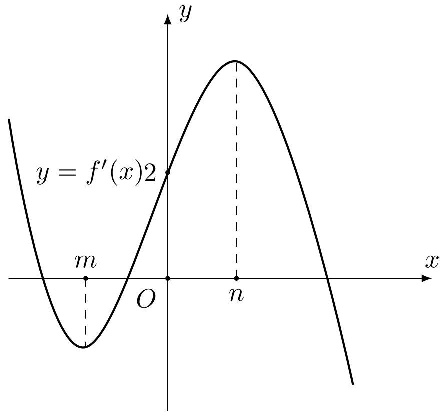
Ⓐ 2. Ⓑ 4. Ⓒ 8. Ⓓ 10.



Câu 48.

Cho hàm số $y=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$, $(a\neq 0)$ có đồ thị của đạo hàm $f'(x)$ như hình vẽ bên. Biết rằng $e>n$. Số điểm cực trị của hàm số $y=f'\left(f(x)-2x\right)$ là

Ⓐ 7. Ⓑ 10. Ⓒ 14. Ⓓ 6.



Câu 49. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	5	$\searrow$	$-\infty$

Số điểm cực đại của hàm số $g(x)=\left[f\left(2x^2+x\right)\right]^2$ là

Ⓐ 3. Ⓑ 4. Ⓒ 2. Ⓓ 1.

Câu 50. Cho hàm số bậc bốn trùng phương $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

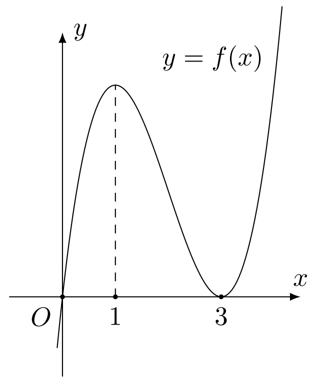
Số điểm cực trị của hàm số $y=\dfrac{1}{x^4}\left[f(x)-1\right]^4$ là

Ⓐ 6. Ⓑ 7. Ⓒ 5. Ⓓ 4.

Câu 51.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $h(x) = \left|f^2(x) + f(x) + m\right|$ có đúng 3 cực trị.

Ⓐ $m \geq \dfrac{1}{4}$. Ⓑ $m \leq 1$. Ⓒ $m < 1$. Ⓓ $m > \dfrac{1}{4}$.



Câu 52. Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

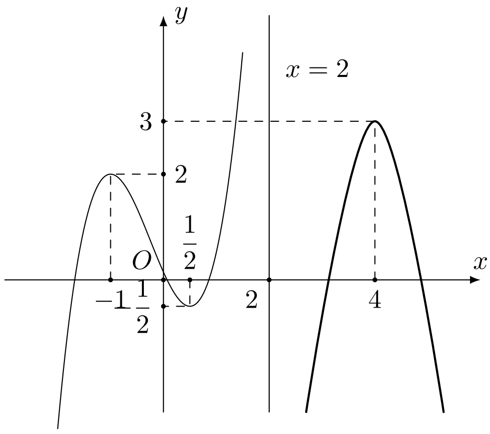
Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = \dfrac{(x-2)^4}{\left[f(x+1)\right]^3}$ là

Ⓐ 7. Ⓑ 4. Ⓒ 5. Ⓓ 6.

Câu 53.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên các khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$ có đồ thị như hình vẽ. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(|2x - 1| + 2)$ là

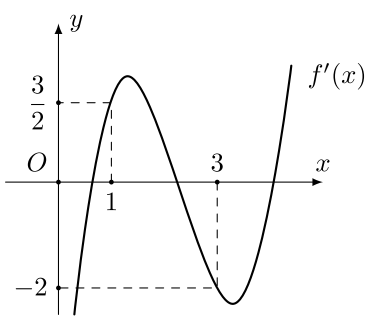
Ⓐ 5. Ⓑ 4. Ⓒ 2. Ⓓ 3.



Câu 54.

Cho hàm đa thức bậc bốn $y = f(x)$, hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực tiểu của hàm số $g(x) = f(x^4) - 2x^3 + 1$ là

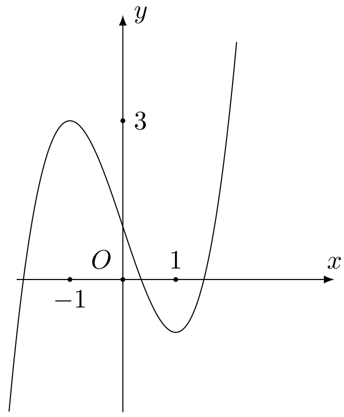
Ⓐ 3. Ⓑ 6. Ⓒ 4. Ⓓ 5.



Câu 55.

Cho hàm bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số $y = [xf(x-1)]^2$ là

Ⓐ 9. Ⓑ 7. Ⓒ 6. Ⓓ 5.



Câu 56. Cho bảng biến thiên của hàm số $f(2x-1)$ như hình vẽ bên dưới.

x	$-\infty$		-1		2		3		$+\infty$
y	$-\infty$	↗	7	↘	-1	↗	0	↘	$-\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $f\left(4-3\sqrt{4x-x^2}\right)$ tương ứng là

Ⓐ 3. Ⓑ 5. Ⓒ 4. Ⓓ 7.

Câu 57. Cho bảng biến thiên của hàm số $f(3-2x)$ như hình vẽ bên dưới.

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
y	$+\infty$	↘	-1	↗	3	↘	-2	↗	$+\infty$

Hỏi hàm số $f(x^2-2x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

Ⓐ $(-2;0)$. Ⓑ $(1;2)$. Ⓒ $(2;+\infty)$. Ⓓ $(-\infty;-2)$.

Câu 58. Cho hàm số $f(x)$ liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$. Biết rằng hàm số $f(x)$ có 2 điểm cực trị là $x = a$; $x = 8 - a$. Bên dưới cho bảng biến thiên của hàm số $f(x^2-2x+3)$. Số điểm cực trị của hàm số $f(x^2-3x^2+1)$ là

x	$-\infty$		x_0		1		$5+2x_0$		$+\infty$
y	$-\infty$	↗	4	↘	-1	↗	4	↘	$-\infty$

Ⓐ 3. Ⓑ 4. Ⓒ 8. Ⓓ 6.

Câu 59. Cho bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ như hình vẽ.

x	$-\infty$		-2		0		4		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	-1	↗	0	↘	$-\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = x^4 \cdot [f(x)]^2$ là

Ⓐ 9. Ⓑ 6. Ⓒ 5. Ⓓ 7.

Câu 60. Cho bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ như hình vẽ.

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	-4	↗	2	↘	$-\infty$

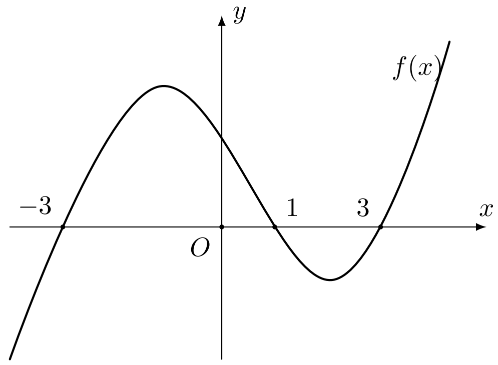
Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = x^2 \cdot [f(x+2)]^6$ là

Ⓐ 5. Ⓑ 12. Ⓒ 7. Ⓓ 9.

Câu 61.

Cho đồ thị hàm đa thức $y = f(x)$ như hình vẽ. Hỏi hàm số $g(x) = f(x) \cdot f(2x+1)$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?

Ⓐ 5. Ⓑ 6. Ⓒ 7. Ⓓ 9.



Câu 62. Cho bảng biến thiên của hàm đa thức $f(x)$ như hình vẽ.

x	$-\infty$		-2		-1		1		2		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	↗	3	↘	-2	↗	0	↘	-2	↗	$+\infty$

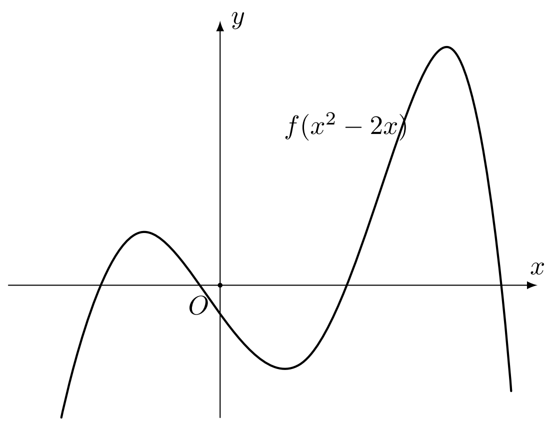
Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = (x-2)^3 [f(x-1)]^2$ là

Ⓐ 8. Ⓑ 5. Ⓒ 7. Ⓓ 6.

Câu 63.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết đồ thị hàm số $y = f(x^2 - x)$ như hình vẽ. Hỏi hàm số $y = f(x^2 - 2mx - |x-m| + m^2)$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị.

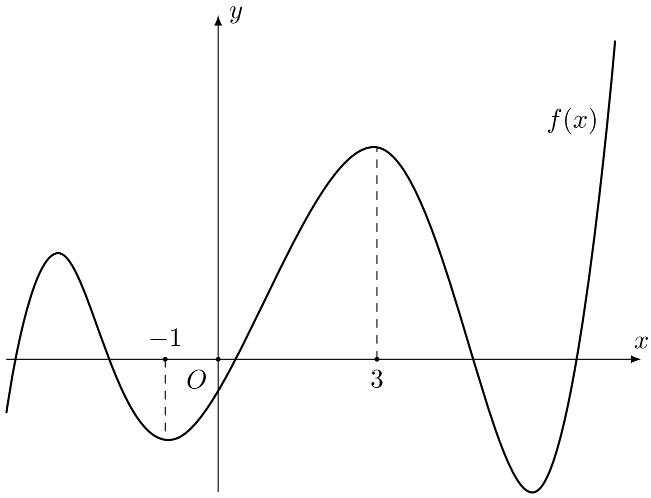
Ⓐ 7. Ⓑ 3. Ⓒ 5. Ⓓ 9.



Câu 64.

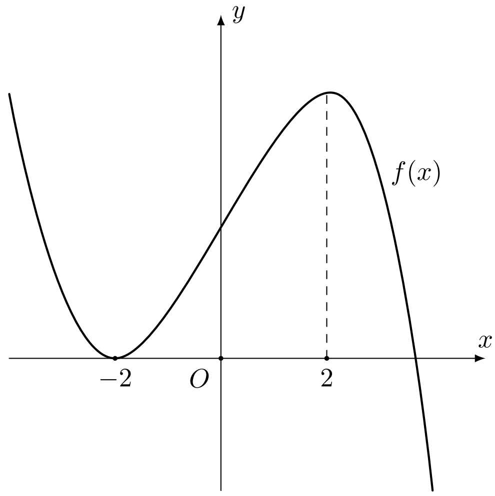
Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết đồ thị hàm số $f(x)$ được cho như hình vẽ. Gọi S là tập các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = f(-|x + 2021m| - 2m + 1)$ có đúng 5 điểm cực trị. Số phần tử của S là

Ⓐ 5. Ⓑ 2. Ⓒ 1. Ⓓ 3.



Câu 65.
Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ. Hỏi có bao nhiêu giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = f(x^3 - mx^2 - 5x + 4m)$ có 6 điểm cực trị?

Ⓐ 1. Ⓑ 2. Ⓒ 4. Ⓓ 5.



Câu 66. Cho bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ như hình vẽ bên dưới.

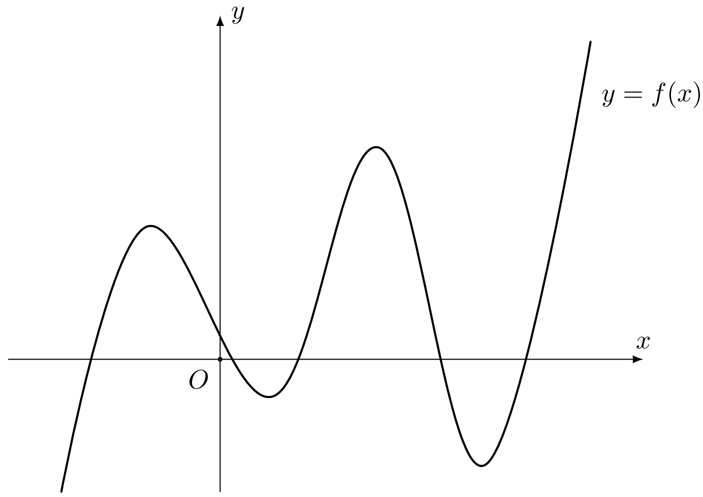
x	$-\infty$				$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	-5 ↗	2 ↘	-2 ↗	$+\infty$

Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = [f(x) - m]^3 - 3f(x)$ có đúng 9 điểm cực trị?

Ⓐ 4. Ⓑ 5. Ⓒ 6. Ⓓ 3.

Câu 67.
Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục xác định trên $\mathbb{R}$, có đồ thị hàm số như hình vẽ bên. Gọi S là tập hợp chứa các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = (f(x))^3 - m(f(x))^2 - (2m - 3)f(x) + 2021$ có đúng 4 điểm cực trị. Số phần tử của tập S là

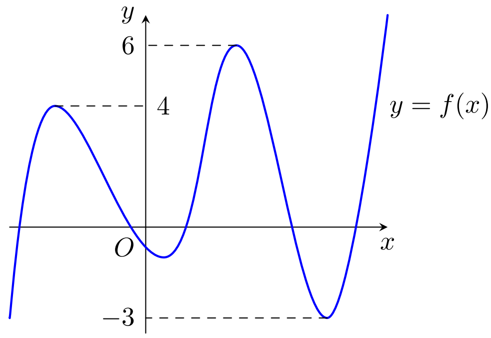
Ⓐ 11. Ⓑ 8. Ⓒ 10. Ⓓ 9.



Câu 68.

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$, đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ. Gọi S là tập các giá trị nguyên của tham số $m \in [-20; 20]$ để hàm số $y = f^2(x) - 2(m+2)f(x) - 3m + 12$ có đúng 5 điểm cực trị. Số phần tử của tập S là

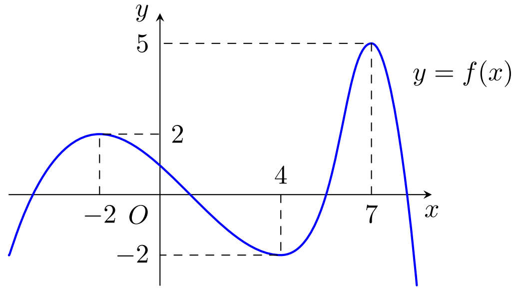
Ⓐ 35. Ⓑ 32. Ⓒ 33. Ⓓ 34.



Câu 69.

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$, đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ dưới. Gọi S là tập các giá trị nguyên của tham số $m \in [-20; 20]$ để hàm số $y = (f(x) + m)^2$ có đúng 5 điểm cực trị. Số phần tử của tập S là

Ⓐ 20. Ⓑ 22. Ⓒ 21. Ⓓ 19.



Câu 70. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên của hàm số như hình vẽ. Hàm số $y = [f(x)]^3 + 6[f(x)]^2 + 2021$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

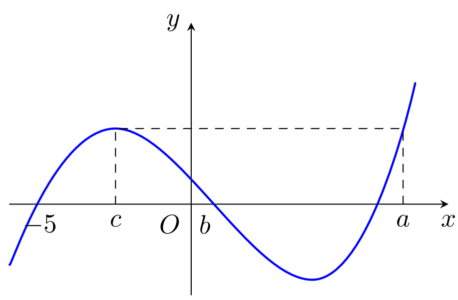
x	$-\infty$		-2		0		3		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Ⓐ 3. Ⓑ 5. Ⓒ 6. Ⓓ 7.

Câu 71.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ dưới đây. Biết rằng $f(10) = 30f(-6) = 30f(5) = 30$. Hỏi hàm số $y = f(f(x) - 3x + 9)$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?

Ⓐ 7. Ⓑ 3. Ⓒ 5. Ⓓ 9.



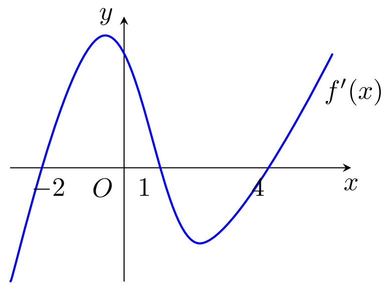
Câu 72. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau. Hỏi hàm số $y = f(x^3 - 3x^2 + 1)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

x	$-\infty$		-3		0		1		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-6	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$-\infty$

A 7. **B** 3. **C** 5. **D** 9.

Câu 73.
Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ dưới đây. Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $f\left(2^{x^3-3x+2} + m\right)$ có đúng 9 điểm cực trị. Số phần tử của tập S là

A 8. **B** 6. **C** 4. **D** 10.



Câu 74. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục và xác định trên toàn $\mathbb{R}$. Biết rằng biểu thức đạo hàm $f'(x) = \left(x^2 - 5x + 1 - \dfrac{m}{4}\right)\left(x^2 - 4x + \dfrac{m}{4} + 8\right)$. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $f\left(|x|\right)$ có 5 điểm cực trị. Số phần tử của tập S là

A 31. **B** 35. **C** 33. **D** 37.

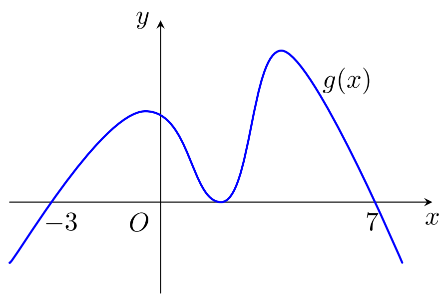
Câu 75. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá tị nguyên của tham số m để hàm số $g(x) = f^3(x) - 3mf(x) + 11 - 2m$ có đúng 9 điểm cực trị?

x	$-\infty$		-3		0		1		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	-3	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

A 3. **B** 5. **C** 8. **D** 9.

Câu 76.
Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Đặt $f(x) = \displaystyle\int_{2018}^{x^2-2x} g(t)\,\mathrm{d}t$. Số điểm cực trị của hàm số $f(x)$ tương ứng là

A 1. **B** 2. **C** 3. **D** 5.



Câu 77. Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x + 1$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-60; 60]$ để phương trình $f\left(x^2 - 2mx + 1\right)$ có đúng 3 điểm cực trị?

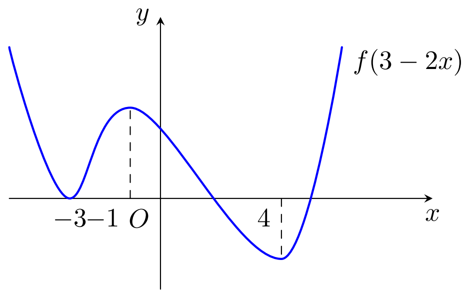
A 2. **B** 3. **C** 4. **D** 1.

Câu 78. Cho hàm số $f(x) = \left|x^3 - 3mx^2 + 3\left(2m - 1\right)x - m\right|$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-2022; 2022]$ để hàm số $f(x)$ có đúng 5 điểm cực trị nằm về phía bên phải của trục tung Oy?

(A) 2019. (B) 2020. (C) 2021. (D) 2022.

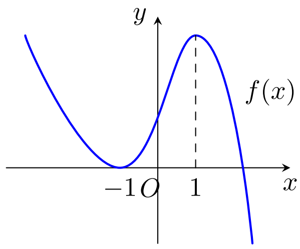
Câu 79.
Cho hàm số $y = f(3-2x)$ như hình vẽ. Biết rằng tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x^2 - 2m|x|)$ có đúng 7 điểm cực trị là $(a;b]$. Giá trị của biểu thức $P = 2(a^2+b^2)$ là

(A) 5. (B) 10. (C) 15. (D) 20.



Câu 80.
Cho hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x^3 - mx^2 - 2x + m)$ có đúng 6 điểm cực trị?

(A) 3. (B) 1. (C) 4. (D) 2.



Câu 81. Cho hàm số bậc ba có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây

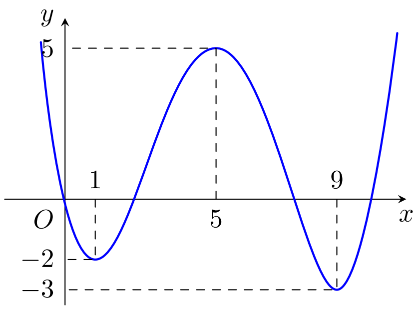
x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	4	↗	-1	↘	$-\infty$

Số giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = f(x^3 - 3|x^2-1| + m)$ có 10 điểm cực trị?

(A) 2. (B) 3. (C) 0. (D) 1.

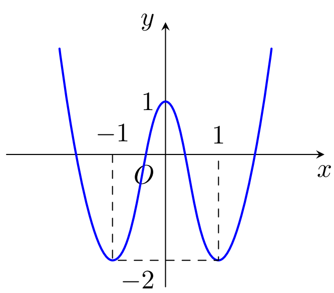
Câu 82.
Cho hàm số bậc bốn có đồ thị như hình vẽ. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x) = f(|f^2(x) - 2f(x) - m|)$ có 51 điểm cực trị?

(A) 2. (B) 3. (C) 0. (D) 1.



Câu 83.
Cho hàm số bậc bốn có đồ thị như hình vẽ. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = x^2[f(x^2-1)]^3$ là

(A) 5. (B) 7. (C) 9. (D) 1.



Câu 84. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

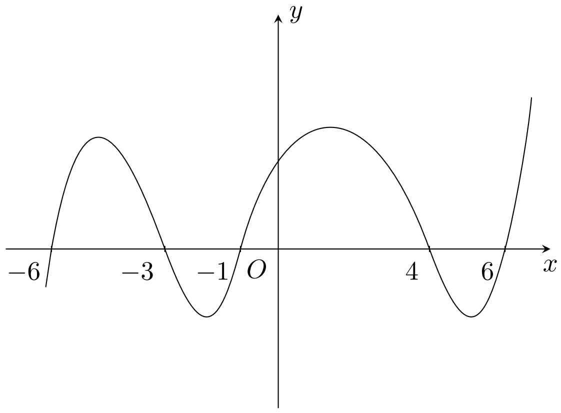
x	$-\infty$		-3		-1		1		2		3		$+\infty$
$u'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$u(x)$	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$	0	$\nearrow$		$\searrow$	-3	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Số điểm cực đại của hàm số $g(x) = \left|f\left(\left|x^2 - 8x + 7\right| + x^2 - 3\right)\right|$ là

A 6. **B** 7. **C** 8. **D** 9.

Dạng 3. Bài toán truy tìm hàm ngược

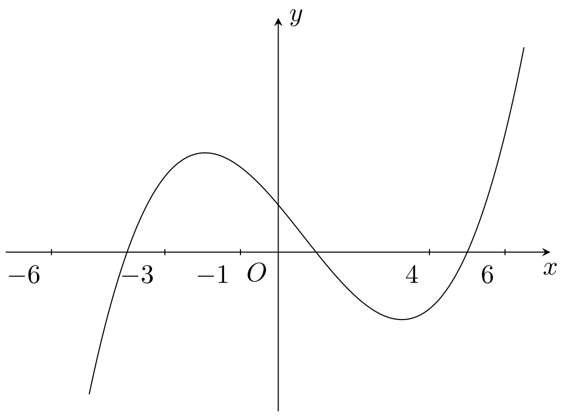
Câu 85. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(3-x)$ như hình vẽ



Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x^2 - 2x + 3)$ là

A 3. **B** 7. **C** 6. **D** 5.

Câu 86. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(1+2x)$ như hình vẽ



Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in [-2021; 2021]$ để hàm số $y = f\left(-|x|^2 + 2|x| - 2020 + m\right)$ có 7 điểm cực trị

A Không có giá trị nào. **B** 5.
C 6. **D** 7.

Câu 87. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $g(x) = f(3-x)$ có bảng biến thiên như bên dưới

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số $h(x) = f(x^2 + 1)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A 1. **B** 2. **C** 3. **D** 4.

Câu 88. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $g(x) = f(-x^3 - x)$ có bảng biến thiên như sau

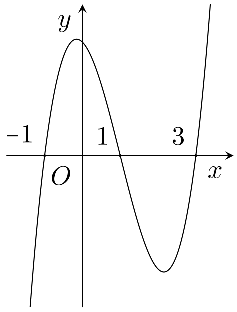
x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$g(0)$	$\nearrow$	$g(1)$	$\searrow$	$-\infty$

Hỏi hàm số $h(x) = f(2x^2 - x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

Ⓐ 1. Ⓑ 2. Ⓒ 3. Ⓓ 4.

Câu 89.
Cho hàm đa thức bậc ba $y = f'(x^3 + 6)$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi hàm số $g(x) = f(x^2 + 4x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

Ⓐ 1. Ⓑ 2. Ⓒ 3. Ⓓ 7.



Câu 90. Cho hàm số $y = f(2x^2 - 4x + 3)$ có đạo hàm và liên tục trên $\mathbb{R}$ có bảng biến thiên như hình sau

x	$-\infty$		-5		1		6		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Hỏi hàm số $g(x) = f(x^3 + 3x^2)$ có ít nhất bao nhiêu điểm cực trị?

Ⓐ 4. Ⓑ 5. Ⓒ 6. Ⓓ 8.

Câu 91. Cho hàm đa thức $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có bảng xét dấu của như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x+1)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Số điểm cực đại của hàm số $y = f(x^2 + |x| + 1)$ là

Ⓐ 3. Ⓑ 2. Ⓒ 4. Ⓓ 1.

Câu 92. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y = f(3 - 4x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

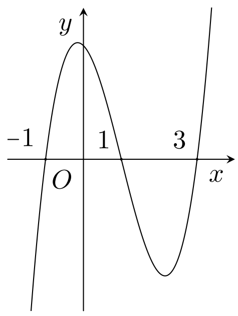
Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x^2 - 2x - 10)$ là

A 6. **B** 5. **C** 4. **D** 3.

Câu 93.

Biết đồ thị của hàm $y = f'(1 - 4x)$ như hình vẽ. Số các giá trị nguyên của $m \in [-2021; 2021]$ để số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x^2 + 4x - 3m - 2)$ nhiều nhất là

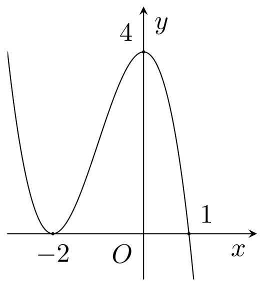
A 4040. **B** 2024. **C** 4002. **D** 2020.



Câu 94.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(3 - 2x)$ như hình vẽ. Hỏi hàm số $g(x) = f(|x^2 - 3|)$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

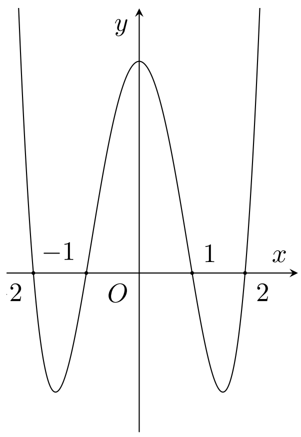
A 4. **B** 1. **C** 3. **D** 5.



Câu 95.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Hàm số $g(x) = f'(1-x^2)$ là hàm số bậc bốn có đồ thị như hình vẽ. Hỏi hàm số $y = f(x^2 - 2|x|)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

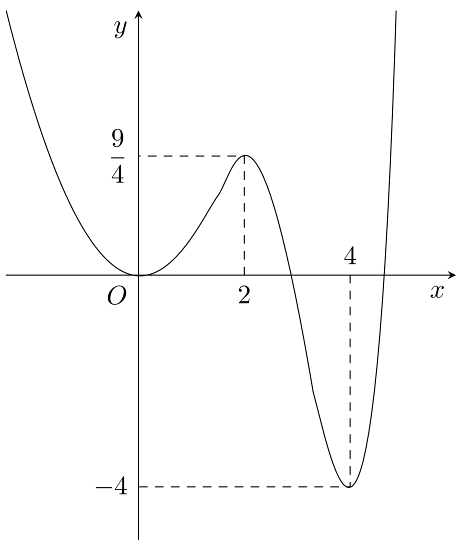
A 3. **B** 5 . **C** 7. **D** 9.



Câu 96.

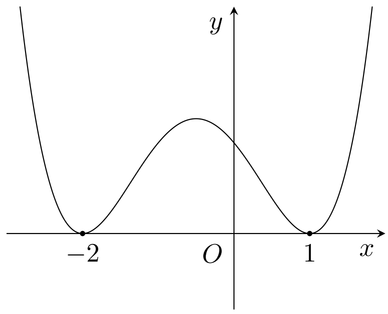
Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $y = f(5 - 2x)$ như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m thuộc khoảng $(-9; 9)$ thoả mãn $2m \in \mathbb{Z}$ và hàm số $y = \left|2f\left(4x^3 + 1\right) + m - \dfrac{1}{2}\right|$ có 5 điểm cực trị?

A 26. **B** 25. **C** 24. **D** 27.



Câu 97.

Giả sử $f(x)$ là một đa thức bậc bốn. Đồ thị hàm số $y = f(1-x)$ được cho như hình vẽ. Hỏi hàm số $g(x) = f(x^2+2)$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?



Ⓐ 3. Ⓑ 0. Ⓒ 1. Ⓓ 2.

Câu 98. Cho hàm số $y = f(x^2 - 2x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ sau

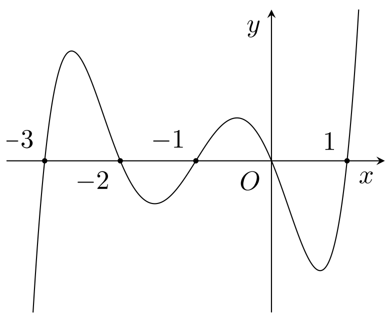
x	$-\infty$	-3	1	5	$+\infty$
$f(x^2-2x)$	$+\infty$ ↘	-1 ↗	4 ↘	-1 ↗	$+\infty$

Biết hàm số $f(x)$ có đúng hai điểm cực trị là $x = -2$ và $x = a$. Hỏi hàm số $f(x^2 - 4x + 4)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

Ⓐ 5. Ⓑ 4. Ⓒ 1. Ⓓ 3.

Câu 99.

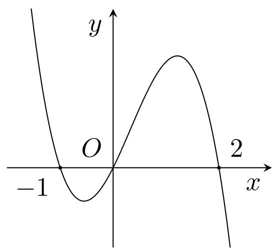
Cho hàm đa thức $y = [f(x^2+2x)]'$ có đồ thị như hình vẽ. Tổng giá trị nguyên của $m \in [-10; 10]$ để hàm số $g(x) = f(|x-2|+m)$ có 5 cực trị là



Ⓐ -52. Ⓑ 55. Ⓒ -55. Ⓓ 56.

Câu 100.

Cho hàm số $y = f'(x^3 - x^2 - 2x + 3)$ là hàm số bậc 3 có đồ thị là đường cong như hình vẽ. Biết $f(0) > 0, f(-1) < 0$, hỏi hàm số $g(x) = |f(x^4 - 2x^2)|$ có mấy điểm cực tiểu?



Ⓐ 3. Ⓑ 2. Ⓒ 5. Ⓓ 6.

Câu 101. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $f'(x)$ có bảng biến thiên như sau

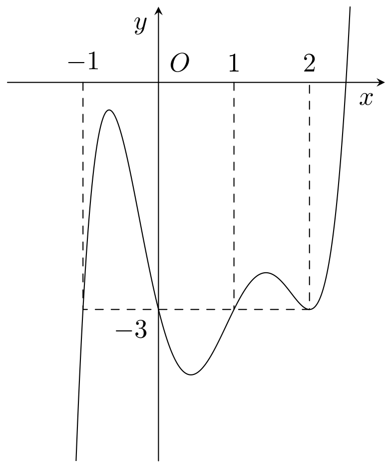
x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	-3 ↗	2 ↘	-1 ↗	$+\infty$

Hỏi hàm số $g(x) = f(|e^{2x} - 2x - 2|)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

Ⓐ 9. Ⓑ 11. Ⓒ 5. Ⓓ 7.

Câu 102.

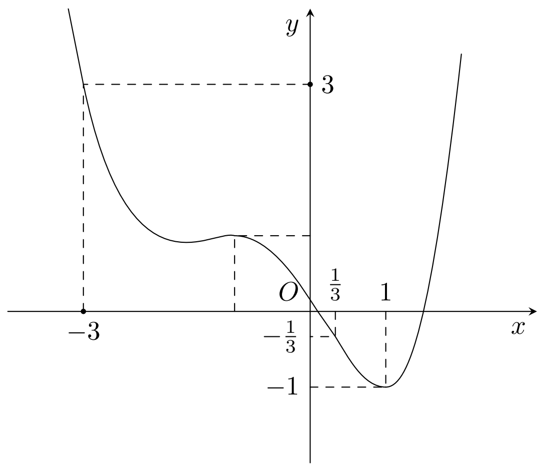
Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(0) < 0$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ cho bởi hình vẽ. Hỏi hàm số $g(x) = |f(|x|) + 3|x||$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?



Ⓐ 2. Ⓑ 3. Ⓒ 4. Ⓓ 5.

Câu 103.

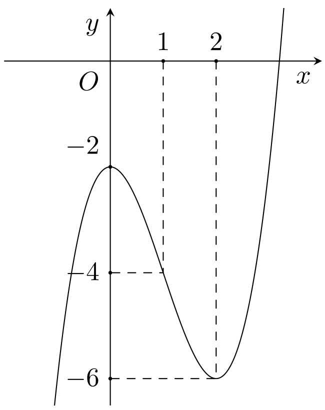
Cho hàm số $y = f(x)$, biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi hàm số $g(x) = 2f\left(\dfrac{5\sin x - 1}{2}\right) + \dfrac{(5\sin x - 1)^2}{4} + 3$ có bao nhiêu điểm cực trị trên khoảng $(0; 2\pi)$?



Ⓐ 9. Ⓑ 7. Ⓒ 6. Ⓓ 8.

Câu 104.

Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-20; 20]$ để hàm số $g(x) = |f(1-|x|) + m|$ có 5 điểm cực trị?



Ⓐ 14. Ⓑ 15. Ⓒ 16. Ⓓ 17.

Dạng 4. Cực trị hàm số chứa dấu giá trị tuyệt đối

1. Một số kiến thức cần nắm

Kiến thức cơ bản

1.1. Cách vẽ đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ được vẽ bằng cách

- Giữ nguyên phần đồ thị của hàm số $y = f(x)$ nằm phía trên trục hoành.
- Lấy đối xứng phần đồ thị của hàm số $y = f(x)$ nằm phía dưới trục hoành qua trục hoành đồng thời xóa phần phía dưới trục hoành.

Nhận xét. Số cực trị của hàm số $y = |f(x)|$ bằng tổng số cực trị hàm số $y = f(x)$ và số điểm cắt của $y = f(x)$ và trục Ox (không tính điểm tiếp xúc).

1.2. Cách vẽ đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ được vẽ bằng cách

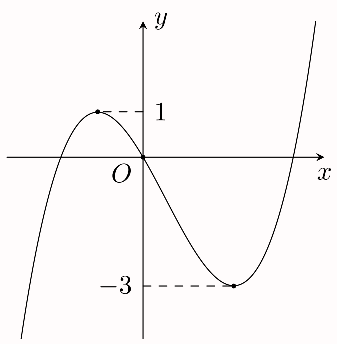
- Giữ nguyên phần đồ thị (C_1) của hàm số $y = f(x)$ ứng với $x \geq 0$.
- Với $x < 0$ được vẽ bằng cách lấy đối xứng phần đồ thị (C_1) qua trục tung.

Nhận xét. Giả sử (C_1) có số điểm cực trị là α.

- Nếu (C_1) cắt trục tung thì số điểm cực trị của $y = f(|x|)$ là $2\alpha + 1$ (một điểm cực trị là $x = 0$).
- Nếu (C_1) không cắt trục tung thì số điểm cực trị của $y = f(|x|)$ là 2α.

2. Ví dụ mẫu

Ví dụ 10. Cho hàm số bậc ba có đồ thị $y = f(x)$ như hình vẽ dưới đây. Tất cả các số thực của tham số m để hàm số $y = |f(x) + m|$ có 5 điểm cực trị là



A $\left[\begin{array}{l} m \leq -1 \\ m \geq 3 \end{array}\right.$. **B** $-1 < m < 3$. **C** $\left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m = 3 \end{array}\right.$. **D** $1 < m < 3$.

Lời giải.

Yêu cầu bài toán tương đương với $f(x) + m = 0 \Leftrightarrow -m = f(x)$ có tổng số nghiệm đơn và bội lẻ bằng 3

$$\Leftrightarrow -3 < -m < 1 \Leftrightarrow -1 < m < 3.$$

Chọn đáp án (B) □

Ví dụ 11. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = |x|^3 - (2m+1)x^2 + 3m|x| - 5$ có 5 điểm cực trị.

(A) $\left(-\infty; \frac{1}{4}\right) \cup (1; +\infty)$.
(B) $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right) \cup (1; +\infty)$.
(C) $(1; +\infty)$.
(D) $\left(0; \frac{1}{4}\right) \cup (1; +\infty)$.

Lời giải.

Yêu cầu bài toán tương đương với hàm số $y = x^3 - (2m+1)x^2 + 3mx - 5$ có hai điểm cực trị dương, tức là phương trình $y' = f'(x) = 3x^2 - 2(2m+1)x + 3m = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \triangle' = (2m+1)^2 - 9m > 0 \\ S = \dfrac{2(2m+1)}{3} > 0 \\ P = \dfrac{3m}{3} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 1 \\ 0 < m < \dfrac{1}{4}. \end{array}\right.$$

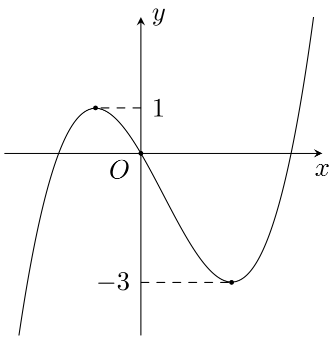
Chọn đáp án (D) □

3. Bài tập rèn luyện

Câu 105. Cho $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-1)^2(x^2-4)$ số điểm cực trị của hàm số $y = f(|x|)$ là

(A) 5. (B) 3. (C) 2. (D) 4.

Câu 106. Cho hàm bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số có ba điểm cực trị.



(A) $m \le -1$ hoặc $m \ge 3$.
(B) $m \le -3$ hoặc $m \ge 1$.
(C) $m = -1$ hoặc $m = 3$.
(D) $-1 \le m \le 3$.

Câu 107. Có tất cả bao nhiêu số nguyên m thuộc đoạn $[-2017; 2017]$ để hàm số $y = |x^3 - 3x^2 + m|$ có ba điểm cực trị?

(A) 4032. (B) 4034. (C) 4030. (D) 4028.

Câu 108. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = |x^4 - mx^2 + m|$ có 7 cực trị.

(A) $(4; +\infty)$. (B) $(0; 1)$. (C) $(0; 4)$. (D) $(1; +\infty)$.

Câu 109. Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ thỏa mãn $a > 0$, $d > 2018$, $a + b + c + d - 2018 < 0$. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = |f(x) - 2018|$.

(A) 3. (B) 5. (C) 2. (D) 1.

Câu 110. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m|$ có 7 điểm cực trị?

(A) 3. (B) 5. (C) 6. (D) 4.

Câu 111. Cho hàm số đa thức bậc bốn $y = f(x)$ có ba điểm cực trị $x = -1$; $x = 0$; $x = 2$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = f(|x + m|)$ có 7 điểm cực trị?

Ⓐ $m < -1$. Ⓑ $m < 0$. Ⓒ $-1 < m < 2$. Ⓓ $m < 2$.

Câu 112. Cho hàm số $y = |x|^3 - mx + 5$. Gọi a là số điểm cực trị của hàm số đã cho. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

Ⓐ $a = 0$. Ⓑ $a \leq 1$. Ⓒ $1 < a \leq 3$. Ⓓ $a > 3$.

Câu 113. Cho hàm số $f(x) = x^3 - (2m-1)x^2 + (2-m)x + 2$. Tìm tập hợp các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = f(|x|)$ có 5 điểm cực trị.

Ⓐ $-\dfrac{5}{4} < m < 2$. Ⓑ $\dfrac{5}{4} < m < 2$. Ⓒ $\dfrac{1}{2} < m < 2$. Ⓓ $-2 < m < \dfrac{5}{4}$.

Câu 114. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = |x|^3 - (2m+1)x^2 + 3m|x| - 5$ có 3 điểm cực trị.

Ⓐ $(-\infty; 0)$. Ⓑ $(1; +\infty)$. Ⓒ $(-\infty; 0]$. Ⓓ $\left[0; \dfrac{1}{4}\right)$.

Câu 115. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $f(|x|)$ bằng

Ⓐ 5. Ⓑ 2. Ⓒ 3. Ⓓ 4.

Câu 116. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{1}{4}x^4 - mx^3 + \dfrac{3}{2}(m^2-1)x^2 + (1-m^2)x + 2019$ với m là tham số thực. Biết rằng hàm số $y = f(|x|)$ có số điểm cực trị lớn hơn 5 khi $a < m^2 < b + 2\sqrt{c}$ $(a, b, c \in \mathbb{R})$. Giá trị $T = a + b + c$ bằng

Ⓐ 6. Ⓑ 8. Ⓒ 7. Ⓓ 5.

Câu 117. Có bao nhiêu số nguyên $m \in [-10; 10]$ để hàm số $y = |mx^3 - 3mx^2 + (3m-2)x + 2 - m|$ có 5 điểm cực trị?

Ⓐ 7. Ⓑ 10. Ⓒ 9. Ⓓ 11.

Câu 118. Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-20	$\nearrow$	0	$\searrow$	-20	$\nearrow$	$+\infty$

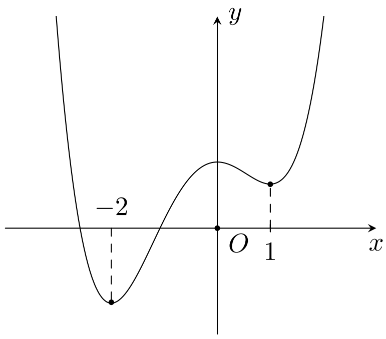
Có bao nhiêu số nguyên dương m để hàm số $y = |f(x) + m|$ có 7 điểm cực trị?

Ⓐ 0. Ⓑ 21. Ⓒ 18. Ⓓ 19.

Câu 119. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x^3 - 2x^2)(x^3 - 2x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số $y = |f(1 - 2018x)|$ có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị?

Ⓐ 9. Ⓑ 2022. Ⓒ 11. Ⓓ 2018.

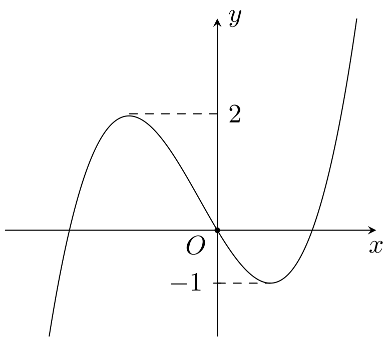
Câu 120. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Các điểm $x = -2\,; x = 0\,; x = 1$ là các điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$.



Hàm số $y = f\left(|x+1| - 3\right)$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?

A 5. B 4. C 7. D 9.

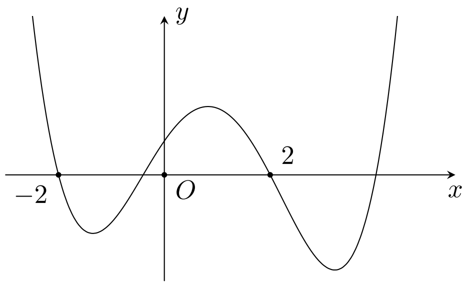
Câu 121. Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Số giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = |2f\left(x\right) - 3m|$ có 5 điểm cực trị là

A 2. B 3. C 0. D 1.

Câu 122. Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ có đồ thị đạo hàm $y = f'\left(x\right)$ như hình vẽ dưới đây.



Hàm số $y = \left|f\left(x^3 - 3x\right) + 2\right|$ có tối đa bao nhiêu điểm cực trị?

A 16. B 17. C 19. D 18.

Câu 123. Biết phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, $(a \neq 0)$ có đúng hai nghiệm thực. Hàm số $y = \left|ax^3 + bx^2 + cx + d\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A 3. B 5. C 4. D 2.

Câu 124. Có bao nhiêu số nguyên $m \in (-20\,; 20)$ để hàm số $y = |x^2 - 2x + m| + 2x + 1$ có ba điểm cực trị?

A 17. B 16. C 19. D 18.

Câu 125. Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y = \left|x^3 + (2m-1)x^2 + (2m^2 - 2m - 9)\,x - 2m^2 + 9\right|$ có 5 điểm cực trị?

A 7. B 5. C 6. D 4.

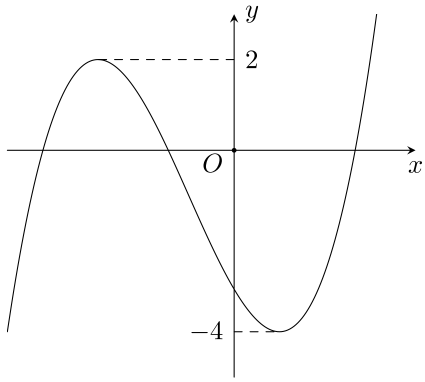
Câu 126. Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y = |x|^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 4)|x| + 1$ có 3 điểm cực trị?

Ⓐ 3. Ⓑ 5. Ⓒ 6. Ⓓ 4.

Câu 127. Có bao nhiêu số nguyên $m \in (-10; 10)$ để hàm số $y = |x|^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 4)|x| + 1$ có 5 điểm cực trị?

Ⓐ 3. Ⓑ 6. Ⓒ 8. Ⓓ 7.

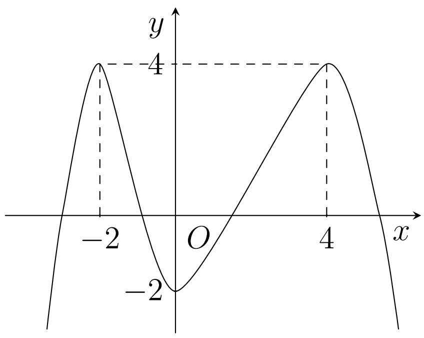
Câu 128. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-2021; 2012]$ để hàm số $y = |f^2(x) - 2f(x) + m + 4|$ có đúng 5 điểm cực trị?

Ⓐ 2104. Ⓑ 2016. Ⓒ 2105. Ⓓ 2017.

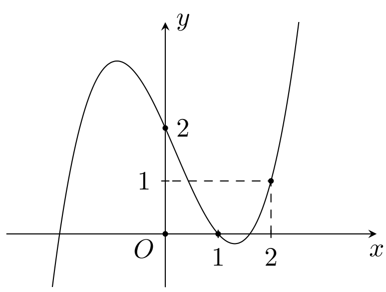
Câu 129. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = |4f^2(x) + 8f(x) + m - 1|$ có đúng 15 điểm cực trị?

Ⓐ 2. Ⓑ 3. Ⓒ 0. Ⓓ 1.

Câu 130. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ



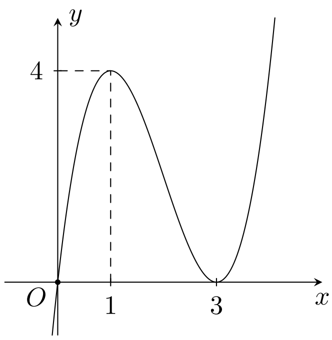
Hàm số $y = |4f(x) - 2x^3 + 7x^2 - 8x + 1|$ có tối đa bao nhiêu điểm cực trị?

Ⓐ 5. Ⓑ 6. Ⓒ 7. Ⓓ 8.

Câu 131. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)^3(x^2 + (4m-5)x + m^2 - 7m + 6), \forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y = f(|x|)$ có đúng 5 điểm cực trị?

Ⓐ 4. Ⓑ 2. Ⓒ 5. Ⓓ 3.

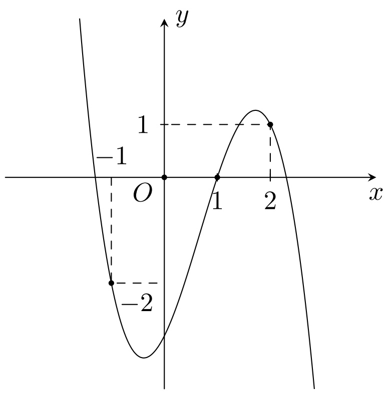
Câu 132. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ



Số điểm cực trị của hàm số $y = \left|(f(x))^2 + f(x) - 2\right|$ là

A 6. **B** 9. **C** 5. **D** 7.

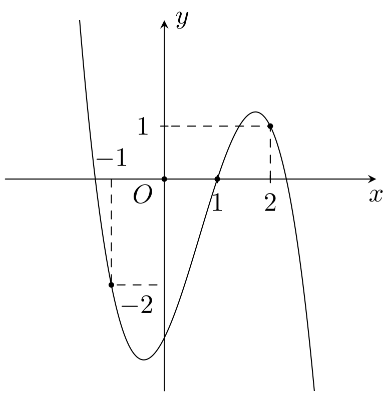
Câu 133. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị đạo hàm $y = f'(x)$ như hình vẽ



Hỏi hàm số $y = |2f(x) - x^2 + 2x + 3|$ có tối đa bao nhiêu điểm cực trị?

A 2. **B** 3. **C** 5. **D** 7.

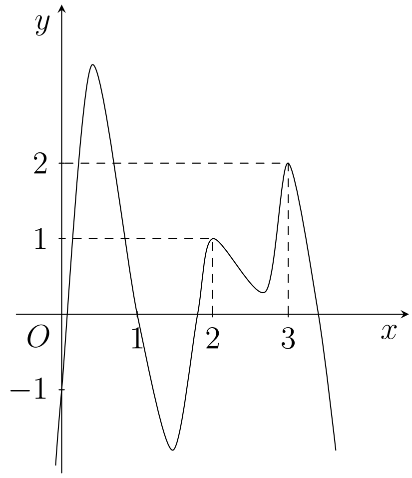
Câu 134. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị đạo hàm $y = f'(x)$ như hình vẽ



Hỏi hàm số $y = |2f(x^2 - 2x) - x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 4x + 2021|$ có tối đa bao nhiêu điểm cực trị?

A 9. **B** 11. **C** 10. **D** 12.

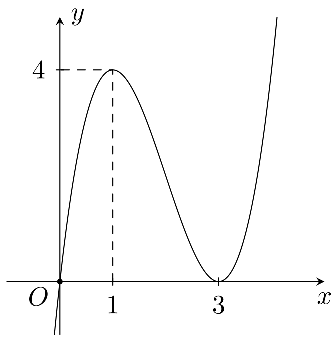
Câu 135. Cho $f(x)$ là một hàm đa thức và có đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ



Hàm số $y = \left|2f(x) - (x-1)^2\right|$ có tối đa bao nhiêu điểm cực trị?

Ⓐ 9. Ⓑ 7. Ⓒ 3. Ⓓ 5.

Câu 136. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ



Khi hàm số $y = \left|(f(x))^2 + f(x) + m\right|$ có số điểm cực trị là ít nhất. Giá trị nhỏ nhất của tham số m thuộc khoảng nào dưới đây?

Ⓐ $(0;1)$. Ⓑ $(-\infty;-1)$. Ⓒ $(-1;0)$. Ⓓ $(1;+\infty)$.

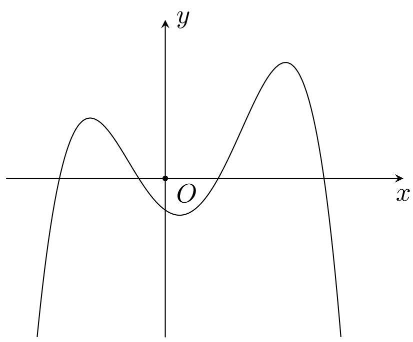
Câu 137. Cho hàm số $y = f(x) = x^2 - 2mx + 4m|x-m| + 2$. Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số $m \in (-21;21)$ để hàm số $y = f(x)$ có ba điểm cực trị. Số phần tử của S là

Ⓐ 20. Ⓑ 16. Ⓒ 18. Ⓓ 19.

Câu 138. Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 3mx^2 + 6mx + m - 1$. Số giá trị nguyên của tham số $m \in [-2021;2021]$ để hàm số $y = f(|x + 2019m - 2020|)$ có đúng 5 điểm cực trị bằng

Ⓐ 2016. Ⓑ 2018. Ⓒ 2019. Ⓓ 2017.

Câu 139. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết đồ thị hàm số $y = f(x^2 - x)$ được cho như hình vẽ



Hỏi hàm số $y = f(x^2 - 2mx - |x-m| + m^2)$ có tất cả bao nhiêu cực trị?

Ⓐ 2. Ⓑ 3. Ⓒ 5. Ⓓ 1.

Câu 140. Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		-2		-1		3		5		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$		-2		1		0		3		$-\infty$

Xét hàm số $g\left(x\right) = f\left(\left|x - 4\right|\right) + 2018^{2019}$. Số điểm cực trị của hàm số $g\left(x\right)$ là

A 5. B 1. C 9. D 2.

Câu 141. Cho hàm số $f\left(x\right) = \left|\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} + m\right|$. Hàm số có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị?

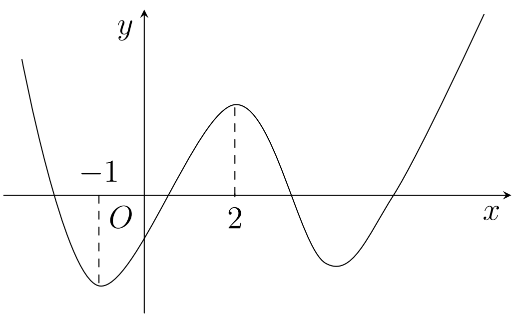
A 2. B 3. C 5. D 4.

Câu 142. Cho hàm số $f\left(x\right) = x^3 + ax^2 + bx + c$, với a, b, c là các số thực thỏa mãn $\begin{cases} a+b+c < -1 \\ 4a - 2b + c > 8 \\ c < 0 \end{cases}$.

Hàm số $y = \left|f\left(\left|x\right|\right)\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A 7. B 9. C 11. D 5.

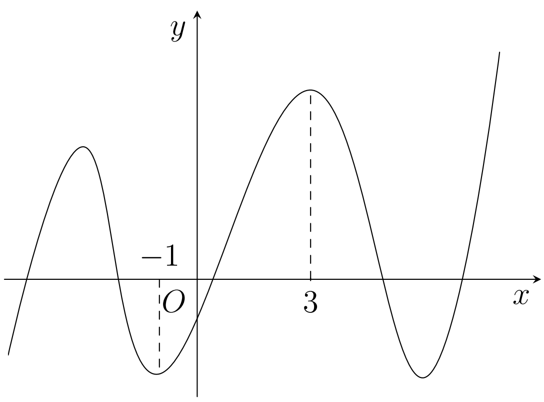
Câu 143. Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết đồ thị hàm số $y = f\left(x^2 - 4x\right)$ được cho như hình vẽ



Hỏi hàm số $y = f\left(x^2 - 2\left|x\right| + 12\right)$ có tất cả bao nhiêu cực trị?

A 7. B 3. C 5. D 1.

Câu 144. Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết đồ thị hàm số $y = f\left(x\right)$ được cho như hình vẽ



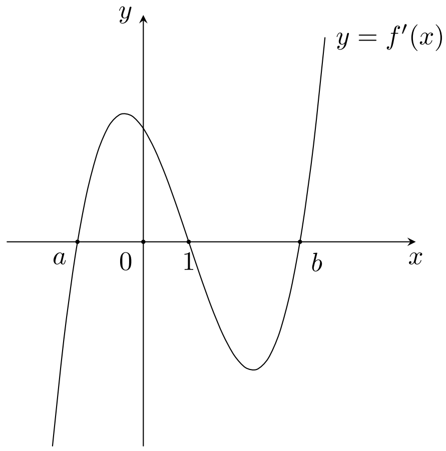
Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số $m \in [-21; 21]$ để hàm số $y = \left(-\left|x + 2021m\right| - 2m + 1\right)$ có đúng 5 điểm cực trị. Số phần tử của tập S là

A 2. B 3. C 0. D 1.

Câu 145.

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị đạo hàm $y = f'(x)$ như hình vẽ. Gọi tập S là tập chứa tất cả các giá trị nguyên $m \in [-21; 21]$ để hàm số $f\left(|x^2 + 2mx - 1|\right)$ có đúng 7 điểm cực trị. Số phần tử của S là

Ⓐ 1. Ⓑ 0. Ⓒ 2. Ⓓ 3.



Câu 146. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị đạo hàm $y = f'(x) = x(x-1)$. Số điểm cực trị của hàm số $y = f\left(|2x+1| - 1\right)$ là

Ⓐ 4. Ⓑ 5. Ⓒ 3. Ⓓ 1.

Câu 147. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$ và có biểu thức đạo hàm $y = f'(x) = x(x-2)$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = f\left(|2x+m| - m\right)$ có đúng 3 điểm cực trị?

Ⓐ 3. Ⓑ 1. Ⓒ 2. Ⓓ 0.

Câu 148. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$ và có biểu thức đạo hàm $y = f'(x) = x(x-m)(x-6+m)$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-30; 30]$ để hàm số $y = f\left(|3x-2| + 1\right)$ có đúng 5 điểm cực trị?

Ⓐ 1. Ⓑ 3. Ⓒ 4. Ⓓ 2.

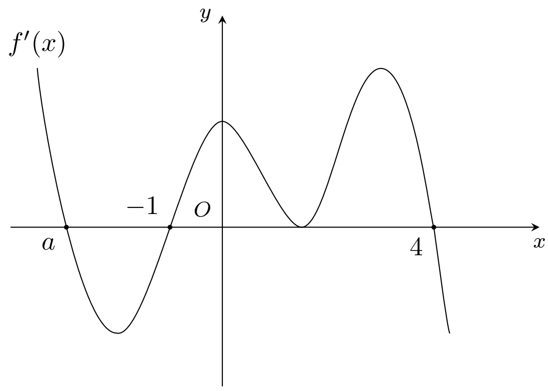
Câu 149. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có biểu thức đạo hàm $f'(x) = x\left(x^2 - 2mx + 12 + m\right.$ với m là tham số. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-30; 30]$ để hàm số $f\left(|2x - m^2| + m\right)$ có đúng 5 điểm cực trị?

Ⓐ 27. Ⓑ 26. Ⓒ 25. Ⓓ 29.

Câu 150.

Cho đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-30; 30]$ để hàm số $f\left(|x^3 - 3m^2x|\right)$ có đúng 11 điểm cực trị?

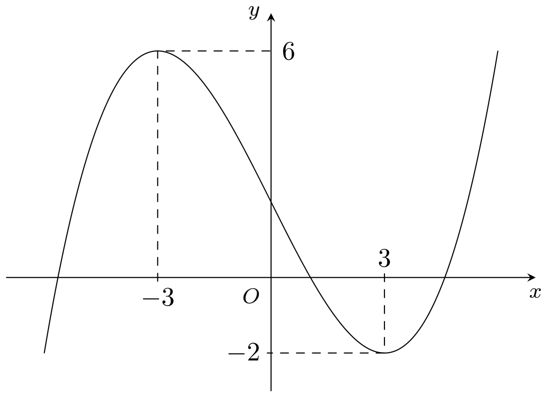
Ⓐ 29. Ⓑ 23. Ⓒ 21. Ⓓ 22.



Câu 151.

Cho hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x) = f(|f(x) - m|)$ có đúng 11 điểm cực trị?

Ⓐ 3. Ⓑ 4. Ⓒ 1. Ⓓ 0.



Câu 152. Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} x^2 - 2(m-4)x - 1 & \text{nếu } x \le 1 \text{ hoặc } x \ge 3 \\ 4x^2 - 2(m-a)x + b & \text{nếu } 1 < x < 3, \end{cases}$ với a và b là những số thực xác định và hàm số liên tục trên toàn $\mathbb{R}$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số có đúng 3 điểm cực trị?

Ⓐ 2. Ⓑ 1. Ⓒ 3. Ⓓ 4.

Câu 153. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} mx + n \text{ nếu } x < -1 \\ x^2 + nx + m - 9 \text{ nếu } x \ge -1 \end{cases}$, với hai tham số thực m và n. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-30; 30]$ để hàm số $f(x)$ có đúng 2 điểm cực trị?

Ⓐ 6. Ⓑ 36. Ⓒ 11. Ⓓ 5.

Câu 154. Cho hàm số $f(x)$ có biểu thức đạo hàm $f'(x) = 2x^2 - 3x + 1$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-30; 30]$ để hàm số $f(|x^2 - 4x + 3| + mx)$ có 9 điểm cực trị?

Ⓐ 3. Ⓑ 1. Ⓒ 2. Ⓓ 31.

Câu 155. Cho hàm số $y = |x - 1| + |x + 1| + |x - 2| - 2x + 1$. Hàm số đạt cực tiểu tại

Ⓐ $x = 2$. Ⓑ $x = 1$. Ⓒ $x = -1$. Ⓓ $x = 0$.

Câu 156. Cho hàm số $y = |x - 1| + |x - 2| + |x - 3| + |x - 4| + |x - 5| - m^2x + 1$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số có cực trị?

Ⓐ 4. Ⓑ 1. Ⓒ 3. Ⓓ 5.

Câu 157. Cho hàm số $f(x) = |x + 1| + 3|x - 2| + 5|x - 3| + mx$, với m là tham số. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số có cực trị?

Ⓐ 17. Ⓑ 15. Ⓒ 16. Ⓓ Vô số.

Câu 158. Cho hàm số $f(x) = |x - 1| + |x - 2| + |x - 3| + \cdots + |x - n|$ với n là số nguyên dương không lớn hơn 2021. HỎi có tất cả bao nhiêu giá trị của tham số n để hàm số có cực trị?

Ⓐ 1010. Ⓑ 1011. Ⓒ 1009. Ⓓ 2020.

Câu 159. Số điểm cực trị của hàm số $f(x) = |x^2 - 4x + 3| + |x + 1|$ là

Ⓐ 0. Ⓑ 3. Ⓒ 2. Ⓓ 1.

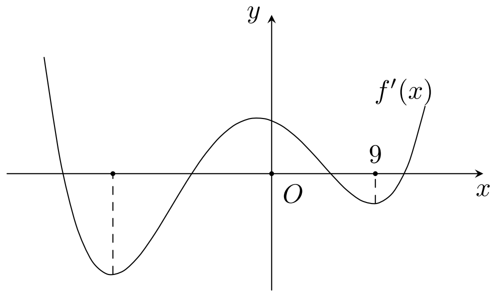
Câu 160. Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = f(x) = |x^2 - 2mx + 1| + 4x$ có điểm cực đại với giá trị cực đại tương ứng nằm trong khoảng $(3; 4)$ và đồng thời thỏa mãn $10m$ là số nguyên. Số phần tử của tập S là

Ⓐ 5. Ⓑ 4. Ⓒ 2. Ⓓ 3.

Câu 161.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị đạo hàm $y = f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $y = f\left(6|x| - x^2\right)$ có số điểm cực trị là

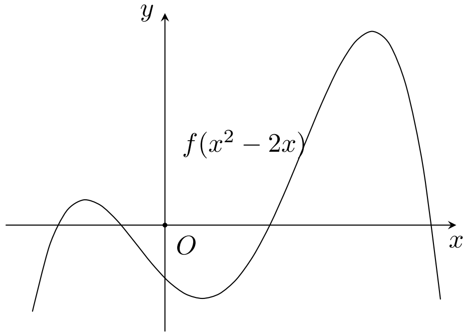
A 9. **B** 7. **C** 13. **D** 11.



Câu 162.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết đồ thị hàm số $y = f\left(x^2 - x\right)$ như hình vẽ. Hỏi hàm số $y = f\left(x^2 - 2mx - |x - m| + m^2\right)$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?

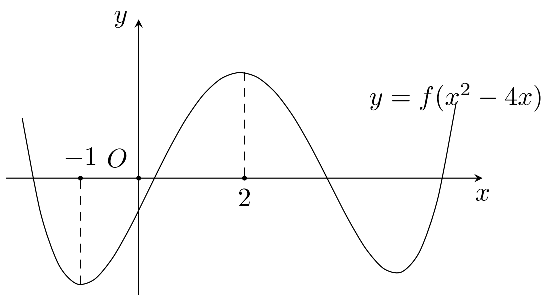
A 7. **B** 3. **C** 5. **D** 9.



Câu 163.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết đồ thị hàm số $y = f(x^2 - 4x)$ được cho như hình vẽ. Hỏi hàm số $y = f\left(x^2 - 8|x| + 12\right)$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?

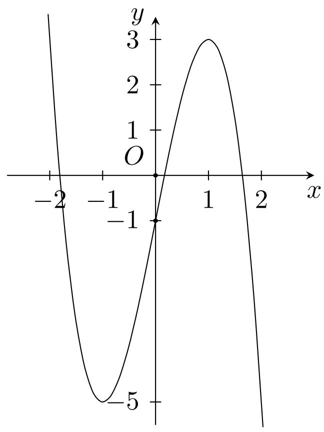
A 3. **B** 5. **C** 9. **D** 7.



Câu 164.

Cho hàm số $f(x)$ liên tục, xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị đạo hàm $y = f'(x)$ như hình vẽ. Hỏi hàm số $f\left(|x| + |x - 1|\right)$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?

A 1. **B** 2. **C** 3. **D** 4.



Dạng 5. Cực trị tại một điểm cho trước

Định lí 2.2. *Giả sử hàm $f(x)$ có đạo hàm liên tục đến cấp n tại $x=a$.*
Các đạo hàm $f'(a)=f''(a)=\ldots=f^{(n-1)}(a)=0$, $f^{(n)}(a)\neq 0$ thì:

- *Nếu n chẵn và $f^{(n)}(a)<0$ thì $f(x)$ đạt cực đại tại a.*
- *Nếu n chẵn và $f^{(n)}(a)>0$ thì $f(x)$ đạt cực tiểu tại a.*
- *Nếu n lẻ thì $f(x)$ không đạt cực trị tại a.*
- *Đặc biệt, khi $n=2$ thì có định lý trong SGK Toán 12.*

3.1. Câu hỏi trắc nghiệm

Câu 165. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	||	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2 || $+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số $y=|f(x)|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

(A) 4. (B) 3. (C) 2. (D) 5.

Câu 166. Tập hợp các số thực m để hàm số $y=x^3+(m+4)x^2+(5m+2)x+m+6$ đạt cực tiểu tại $x=-2$ là

(A) $\varnothing$. (B) $\mathbb{R}$. (C) $\{2\}$. (D) $\{-2\}$.

Câu 167. Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $y=x^3-3x^2+mx$ đạt cực đại tại $x=0$

(A) $m=1$. (B) $m=2$. (C) $m=-2$. (D) $m=0$.

Câu 168. Tìm tập tất cả các giá trị của m để hàm số $y=x^3+(3m-1)x^2+m^2x-3$ đạt cực tiểu tại $x=-1$.

(A) $\{5;1\}$. (B) $\{5\}$. (C) $\varnothing$. (D) $\{1\}$.

Câu 169. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-mx^2+(m^2-m+1)x+1$ đạt cực đại tại điểm $x=1$?

(A) $m=2$ hoặc $m=-1$. (B) $m=2$ hoặc $m=1$.
(C) $m=1$. (D) $m=2$.

Câu 170. Tìm m để hàm số $y=x^3-2mx^2+mx+1$ đạt cực tiểu tại $x=1$.

(A) Không tồn tại m. (B) $m=\pm1$. (C) $m=1$. (D) $m\in\{1;2\}$.

Câu 171. Cho hàm số $f(x)$ với bảng biến thiên dưới đây

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	3	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Hỏi hàm số $y = |f(|x|)|$ có bao nhiêu cực trị?

Ⓐ 3. Ⓑ 1. Ⓒ 7. Ⓓ 5.

Câu 172. Tìm m để hàm số $y = mx^4 + (m^2 - 1)x + 1$ đạt cực đại tại $x = 0$.

Ⓐ $m = 0$. Ⓑ $m = -1$. Ⓒ $m = 1$. Ⓓ $-1 < m < 1$.

Câu 173. Cho hàm số $f(x)$ với bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

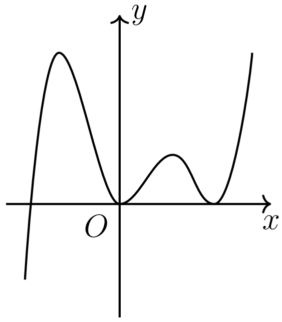
Giá trị cực đại của hàm số bằng?

Ⓐ -2. Ⓑ -1. Ⓒ 2. Ⓓ 3.

Câu 174.

Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ là

Ⓐ 3. Ⓑ 4. Ⓒ 1. Ⓓ 2.



Câu 175. Tập hợp các số thực m để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + (m+2)x - m$ đạt cực tiểu tại $x = 1$ là

Ⓐ $\{1\}$. Ⓑ $\{-1\}$. Ⓒ $\varnothing$. Ⓓ $\mathbb{R}$.

Câu 176. Tìm các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 4)x + 3$ đạt cực đại tại $x = 3$

Ⓐ $m = 1, m = 5$. Ⓑ $m = 5$. Ⓒ $m = 1$. Ⓓ $m = -1$.

Câu 177. Tìm m hàm số $y = x^3 + mx^2 - 3(m+1)x + 2m$ đạt cực trị tại điểm $x = -1$

Ⓐ $m = -1$. Ⓑ $m = 2$. Ⓒ $m = 0$. Ⓓ $m = 1$.

Câu 178. Tìm m để hàm số $y = mx^3 - (m^2 + 1)x^2 + 2x - 3$ đạt cực tiểu tại $x = 1$.

Ⓐ $\dfrac{3}{2}$. Ⓑ $-\dfrac{3}{2}$. Ⓒ 0. Ⓓ -1.

Câu 179. Tìm tất cả tham số thực m để hàm số $y = (m-1)x^4 - (m^2-2)x^2 + 2019$ đạt cực tiểu tại $x = -1$.

(A) $m = 0$. (B) $m = -2$. (C) $m = 1$. (D) $m = 2$.

Câu 180. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^9 + (m-2)x^7 - (m^2-4)x^6 + 7$ đạt cực tiểu tại $x = 0$?

(A) 3. (B) 4. (C) Vô số. (D) 5.

Câu 181. Cho hàm số $y = \dfrac{x^5}{5} - (2m-1)x^4 - \dfrac{m}{3}x^3 + 2019$. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$?

(A) Vô số. (B) 1. (C) 2. (D) 0.

Câu 182. Cho hàm số $y = f(x)$ là một hàm đa thức có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f\left(x^2 - |x|\right)$ là

(A) 5. (B) 3. (C) 7. (D) 1.

Câu 183. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc khoảng $(-2019; 2019)$ để hàm số $y = \dfrac{m-1}{5}x^5 + \dfrac{m+2}{4}x^4 + m + 5$ đạt cực đại tại $x = 0$?

(A) 110. (B) 2016. (C) 100. (D) 10.

Câu 184. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^8 + (m-2)x^5 + (m^2-4)x^4 + 1$ đạt cực tiểu tại điểm $x = 0$.

(A) 3. (B) 5. (C) 4. (D) Vô số.

Câu 185. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^{2018} + (m-5)x^5 + (25-m^2)x^4 + 1$ đạt cực đại tại điểm $x = 0$.

(A) 4. (B) 5. (C) 9. (D) 10.

Câu 186. Có bao nhiêu cặp số nguyên (a, b) thỏa mãn $a, b \in (-20, 20)$ để hàm số $y = x^8 + ax^7 + bx^6 + 1$ đạt cực tiểu tại điểm $x = 0$?

(A) 722. (B) 742. (C) 703. (D) 685.

Câu 187. Có bao nhiêu nguyên của tham số m để hàm số $y = x^8 + (m-3)x^5 - (m^2-9)x^4 + 1$ đạt cực tiểu tại điểm $x = 0$?

(A) 7. (B) Vô số. (C) 6. (D) 4.

Câu 188. Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y = x^6 - mx^5 + (10m - m^2)x^4 + 1$ đạt cực tiểu tại điểm $x = 0$?

(A) 9. (B) 10. (C) 11. (D) 8.

Câu 189. Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y = x^6 + (m-1)x^4 + (m^2-4)x^3 + 1$ đạt cực tiểu tại điểm $x = 0$?

(A) 4. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

Câu 190. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^8 + (m-4)x^5 - (m^2-16)x^4 + 1$ đạt cực tiểu tại điểm $x = 0$?

(A) 7. (B) Vô số. (C) 6. (D) 8.

Câu 191. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $|f(x+h) - f(x-h)| \leq h^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall h > 0$. Đặt $g(x) = [x + f'(x)]^{2019} + [x + f'(x)]^{29-m} - (m^4 - 29m^2 + 100)\sin^2 x - 1$, m là tham số nguyên và $m < 27$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m sao cho hàm số $g(x)$ đạt cực tiểu tại $x = 0$. Tính tổng bình phương các phần tử của S.

A 108. **B** 58. **C** 100. **D** 50.

Câu 192. Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y = x^9 + (m-2)x^7 - (m^2-4)x^6 + 7$ đạt cực tiểu tại điểm $x = 0$?

A 3. **B** Vô số. **C** 4. **D** 5.

Câu 193. Cho hàm số $y = x^5 - mx^4 + (m^3 - 3m^2 - 4m + 12)x^3 + 1$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số đã cho đạt cực đại tại $x = 0$?

A 1. **B** 3. **C** 2. **D** 4.

3.2. Bài tập áp dụng

Câu 194. Cho hàm số $y = 2x^3 + 3(m-1)x^2 + 6(m-2)x - 1$ với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số có điểm cực đại và điểm cực tiểu nằm trong khoảng $(-2;3)$

(A) $m \in (-1;4) \setminus \{3\}$. (B) $m \in (3;4)$. (C) $m \in (1;3)$. (D) $m \in (-1;4)$.

Câu 195. Với m là một tham số thực sao cho đồ thị hàm số $y = x^4 + 2mx^2 + 1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $m \geq 2$. (B) $0 \leq m < 2$. (C) $-2 \leq m < 0$. (D) $m < -2$.

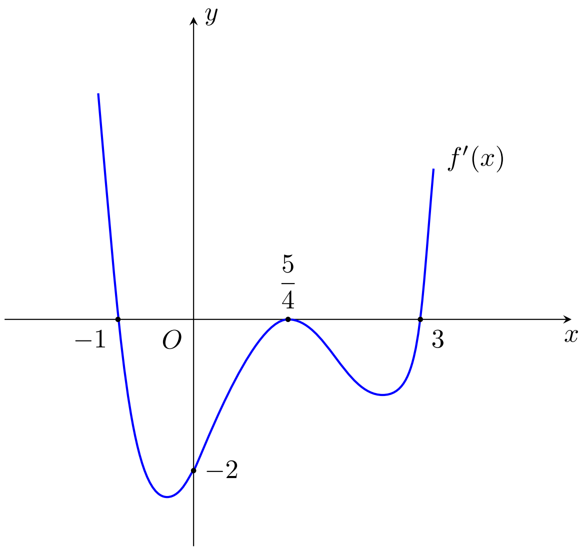
Câu 196. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = -\dfrac{x^3}{3} + mx^2 - 2mx + 1$ có hai điểm cực trị.

(A) $0 < m < 2$. (B) $m > 2$. (C) $m > 0$. (D) $\left[\begin{array}{l} m > 2 \\ m < 0 \end{array}\right.$.

Câu 197. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+1)(x^2-1)^3(x+2)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

(A) 3. (B) 2. (C) 1. (D) 5.

Câu 198. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số $f(x)$ là



(A) 3. (B) 4. (C) 2. (D) 1.

Câu 199. Tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^4 + (m-2019)x^2 + 2018$ có ba điểm cực trị là

(A) $m < 2019$. (B) $m \leq 2019$. (C) $m < 2018$. (D) $m \leq 1009$.

Câu 200. Tìm tập hợp các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 + (m^2-4)x^2 + 1 - m$ có một điểm cực trị

(A) $(-2;2)$. (B) $(-\infty;-2) \cup (2;+\infty)$.

(C) $[-2;2]$. (D) $(-\infty;-2] \cup [2;+\infty)$.

Câu 201. Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m$. Tất cả các giá trị thực của m để hàm số có 3 cực trị là

(A) $m > 0$. (B) $m \geq 0$. (C) $m < 0$. (D) $m \leq 0$.

Câu 202. Số giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = mx^4 - (m-3)x^2 + m^2$ không có điểm cực đại là

(A) 2. (B) Vô số. (C) 0. (D) 4.

Câu 203. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = m^2x^4 - (m^2 - 2019m)x^2 - 1$ có đúng một điểm cực trị.

(A) 2019. (B) 2020. (C) 2018. (D) 2017.

Câu 204. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = \sin x - \cos^2 x$ trên $[0; 2\pi]$.

(A) 4. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

Câu 205. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số $y = mx^3 - 2mx^2 + (m-2)x + 1$ không có cực trị.

(A) $m \in (-\infty; -6) \cup (0; +\infty)$.
(B) $m \in (-6; 0)$.
(C) $m \in [-6; 0)$.
(D) $m \in [-6; 0]$.

Câu 206. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + (m+3)x^2 + 4(m+3)x + m^3 - m$ đạt cực trị tại x_1, x_2 thỏa mãn $-1 < x_1 < x_2$.

(A) $-3 < m < 1$. (B) $-\frac{7}{2} < m < -3$. (C) $\left[\begin{array}{l} m < -3 \\ m > 1 \end{array}\right.$. (D) $-\frac{7}{2} < m < -2$.

Câu 207. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 + 3mx^2 + 3(m^2-1)x + m^3$ có hai điểm cực trị nằm về hai phía trục hoành là (a, b). Khi đó giá trị của $a + 2b$ bằng

(A) $\frac{3}{2}$. (B) $\frac{4}{3}$. (C) 1. (D) $\frac{2}{3}$.

Câu 208. Tìm tất cả giá trị của tham số m để hàm số $y = x^4 + 2(m-2)x^2 + 3m - 2$ có ba điểm cực trị.

(A) $m \in (2; +\infty)$. (B) $m \in (-2; 2)$. (C) $m \in (-\infty; 2)$. (D) $m \in (0; 2)$.

Câu 209. Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 1 \quad (1)$. Tổng lập phương các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số (1) có ba điểm cực trị và đường tròn đi qua 3 điểm này có bán kính $R = 1$ bằng

(A) $\frac{5-\sqrt{5}}{2}$. (B) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. (C) $2+\sqrt{5}$. (D) $-1+\sqrt{5}$.

Câu 210. Tìm số thực k để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2kx^2 + k$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác nhận điểm $G\left(0; \frac{1}{3}\right)$ làm trọng tâm.

(A) $k = -1$; $k = \frac{1}{2}$. (B) $k = 1$; $k = \frac{1}{3}$. (C) $k = 1$; $k = \frac{1}{2}$. (D) $k = \frac{1}{3}$; $k = \frac{1}{2}$.

Câu 211. Cho hàm số $y = x^4 - 2(m^2 - m + 1)x^2 + m - 1$. Tìm m để hàm số có ba điểm cực trị và khoảng các giữa hai điểm cực tiểu là nhỏ nhất.

(A) $m \geq 1$. (B) $m \leq 1$. (C) $m = 1$. (D) $m = \frac{1}{2}$.

Câu 212. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + m$ nhỏ hơn hoặc bằng $\sqrt{5}$.

(A) 5. (B) 2. (C) 11. (D) 4.

Câu 213. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số$y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+2)x$ có cực trị và giá trị của hàm số tại các điểm cực đại, điểm cực tiểu nhận giá trị dương.

(A) $m > 2$.
(B) $m \in \left(2; \frac{2+2\sqrt{7}}{3}\right)$.
(C) $\frac{2-2\sqrt{7}}{3} < m < -1$.
(D) $m < -1$.

Cách 1.

Ta có $y' = x^2 - 2mx + m + 2$; $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + m + 2 = 0. \qquad (1)$

Hàm số có hai điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt. Hay

$$\Delta' > 0 \Leftrightarrow m^2 - m - 2 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > 2. \end{array}\right. \qquad (*)$$

Phương trình đường thẳng đi qua điểm CĐ, CT của hàm số là $y=\left(-\frac{2}{3}m^2+\frac{2}{3}m+\frac{4}{3}\right)x+\frac{1}{3}m(m+2)$.
Gọi $A(x_1;y_1), B(x_2;y_2)$ là hai điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số, khi đó để hàm số có giá trị cực đại, và giá trị cực tiểu dương thì $y_1+y_2>0$ và đồ thị hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m+2)x$ cắt trục hoành tại 1 điểm duy nhất.
Theo định lý vi-et ta có $x_1+x_2=2m$
Nên

$$\begin{aligned} y_1+y_2>0 &\Leftrightarrow \left(-\frac{2}{3}m^2+\frac{2}{3}m+\frac{4}{3}\right)(x_1+x_2)+\frac{2}{3}m(m+2)>0\\ &\Leftrightarrow \left(-\frac{2}{3}m^2+\frac{2}{3}m+\frac{4}{3}\right))(2m)+\frac{2}{3}m(m+2)>0\\ &\Leftrightarrow \Leftrightarrow 2m(-2m^2+3m+6)>0\\ &\Leftrightarrow m\in\left(-\infty;\frac{3-\sqrt{57}}{4}\right)\cup\left(0;\frac{3+\sqrt{57}}{4}\right). \qquad (**)\end{aligned}$$

Đồ thị hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m+2)x$ cắt trục hoành tại 1 điểm duy nhất $\Leftrightarrow$ phương trình $y=0$ có 1 nghiệm đơn duy nhất, khi đó $\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m+2)x=0$ (2) có 1 nghiệm đơn duy nhất.
Ta có $\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m+2)x=0\Leftrightarrow x(x^2-3mx+3m+6)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2-3mx+3m+6=0.\end{array}\right.$ (3)
Phương trình (1) có 1 nghiệm đơn duy nhất khi và chỉ khi phương trình (3) vô nghiệm, khi đó điều kiện là

$$\Delta=9m^2-12m-24<0\Leftrightarrow\frac{2-2\sqrt{7}}{3}<m<\frac{2+2\sqrt{7}}{3}. \qquad (***)$$

Kết hợp $(*),(**),(***)$ ta được tập các giá trị của m thỏa mãn là $2<m<\frac{2+2\sqrt{7}}{3}$.
Cách 2.
Ta có $y'=x^2-2mx+m+2$; $y'=0\Leftrightarrow x^2-2mx+m+2=0$ (1)
Hàm số có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt, khi đó

$$\Delta'>0\Leftrightarrow m^2-m-2>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m<-1\\m>2.\end{array}\right. \qquad (*)$$

Hàm số có giá trị cực đại, cực tiểu dương thì đồ thị hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m+2)x$ cắt trục hoành tại 1 điểm duy nhất và giá trị của hàm số tại điểm uốn luôn dương.
Đồ thị hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m+2)x$ cắt trục hoành tại 1 điểm duy nhất thì phương trình $y=0$ có nghiệm duy nhất, khi đó $\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m+2)x=0$ (2) có 1 nghiệm đơn duy nhất.
Ta có $\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m+2)x=0\Leftrightarrow x(x^2-3mx+3m+6)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2-3mx+3m+6=0.\end{array}\right.$ (3)
Để phương trình (1) có nghiệm đơn duy nhất thì phương trình (3) vô nghiệm, khi đó điều kiện

$$\Delta=9m^2-12m-24<0\Leftrightarrow\frac{2-2\sqrt{7}}{3}<m<\frac{2+2\sqrt{7}}{3}. \qquad (**)$$

Giá trị của hàm số tại điểm uốn luôn dương

$$y'=x^2-2mx+m+2, y''=2x-2m\ y''=0\Leftrightarrow 2x-2m=0\Leftrightarrow x=m.$$

Ta có

$$\begin{aligned} y(m)>0 &\Leftrightarrow \frac{m^3}{3}-m^3+m(m+2)>0\\ &\Leftrightarrow m\left(-2m^2+3m+6\right)>0\\ &\Leftrightarrow m\in\left(-\infty;\frac{3-\sqrt{57}}{4}\right)\cup\left(0;\frac{3+\sqrt{57}}{4}\right). \qquad (***)\end{aligned}$$

Kết hợp $(*), (**), (***)$ ta được tập các giá trị của m thỏa mãn là $2<m<\dfrac{2+2\sqrt{7}}{3}$.

Câu 214. Cho hàm số $y=x^4-2mx^2+3m-2$. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị đều nằm trên các trục tọa độ?

A. 2. B. 0. C. 3. D. 1.

Câu 215. Biết $m=m_0$; $m_0\in\mathbb{R}$ là giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^4+2mx^2+1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $m_0\in(0;3]$. B. $m_0\in[-5;3)$. C. $m_0\in(-3;0]$. D. $m_0\in(3;7)$.

Câu 216. Cho hàm số $y=x^4-2(m^2+m+1)x^2+m$ có đồ thị (C). Tìm m để đồ thị hàm số (C) có 3 điểm cực trị và khoảng cách giữa hai điểm cực tiểu nhỏ nhất.

A. $m=\dfrac{1}{2}$. B. $m=-\dfrac{1}{2}$. C. $m=\sqrt{3}$. D. $m=0$.

Câu 217. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hàm số $y=x^3-3(m+1)x^2+12mx+2019$ có 2 điểm cực trị x_1, x_2 thỏa mãn $x_1+x_2+2x_1x_2=-8$.

A. $m=-1$. B. $m=2$. C. $m=1$. D. $m=-2$.

Câu 218. Gọi x_1, x_2 là hai điểm cực trị của hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{2}mx^2-4x-10$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $S=(x_1^2-1)(x_2^2-1)$.

A. 9. B. 4. C. 0. D. 8.

Câu 219. Cho hàm số $y=x^3-3mx^2+3(m^2-1)x-m^3$ với m là tham số, gọi (C) là đồ thị của hàm số đã cho. Biết rằng khi m thay đổi, điểm cực đại của đồ thị (C) luôn nằm trên một đường thẳng cố định. Xác định hệ số góc k của đường thẳng d.

A. $k=-3$. B. $k=\dfrac{1}{3}$. C. $k=3$. D. $k=\dfrac{-1}{3}$.

Câu 220. Cho hàm số $y=x^3-(2m+1)x^2+(m+1)x+m-1$. Có bao nhiêu giá trị của số tự nhiên $m<20$ để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm về hai phía trục hoành?

A. 18. B. 19. C. 21. D. 20.

Câu 221. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-3mx^2+3m^2$ có hai điểm cực trị là A, B mà $\triangle OAB$ có diện tích bằng 24.

A. $m=2$. B. $m=1$. C. $m=\pm2$. D. $m=\pm1$.

Câu 222. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-(m+1)x^2+(m^2-2)x-m^2+3$ có hai điểm cực trị và hai điểm cực trị đó nằm về cùng một phía đối với trục hoành?

A. 4. B. 1. C. 3. D. 2.

Câu 223. Cho hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-2mx^2+(m-1)x+2m^2+1$ (m là tham số). Xác định khoảng cách lớn nhất từ gốc tọa độ $O(0;0)$ đến đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số trên.

A. $\dfrac{2}{9}$. B. $\sqrt{3}$. C. $2\sqrt{3}$. D. $\dfrac{\sqrt{10}}{3}$.

Câu 224. Các giá trị của m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{3}|x|^3-mx^2+(m+6)|x|+2019$ có 5 điểm cực trị

A. $m<-2$. B. $-2<m<0$. C. $0<m<3$. D. $m>3$.

Câu 225. Cho hàm số $y = |\sin(2x) + x|$. Hỏi hàm số có bao nhiêu điểm cực trị trong $(-\pi; \pi)$?

Ⓐ 5. Ⓑ 3. Ⓒ 4. Ⓓ 7.

Câu 226. Cho hàm số $y = x^3 + 2.(m-2)x^2 - 5x + 1$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số có hai điểm cực trị x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$ thỏa mãn $|x_1| - |x_2| = -2$.

Ⓐ $\dfrac{7}{2}$. Ⓑ -1. Ⓒ $\dfrac{1}{2}$. Ⓓ 5.

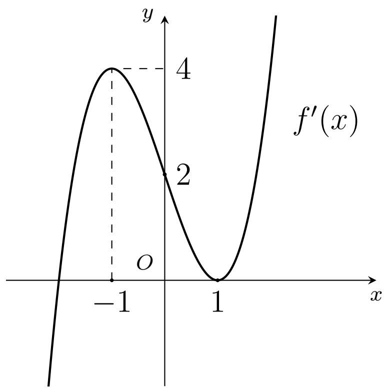
Câu 227. Xét các hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x^2 - x) \cdot (x^3 - 3x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hỏi hàm số $y = |f(1 - 2019x)|$ có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị?

Ⓐ 9. Ⓑ 7. Ⓒ 8. Ⓓ 6.

Câu 228. Cho hàm số $y = -x^3 + 3mx^2 - 3m - 1$ với m là tham số thực. Giá trị của m thuộc tập hợp nào để đồ thị hàm số đã cho có hai điểm cực trị đối xứng với nhau qua đường thẳng $d\colon x + 8y - 74 = 0$.

Ⓐ $m \in (-1; 1]$. Ⓑ $m \in (-3; -1]$. Ⓒ $m \in (3; 5]$. Ⓓ $m \in (1; 3]$.

Câu 229. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ sau:



Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x - 2018) - 2019x + 1$ là:

Ⓐ 2. Ⓑ 1. Ⓒ 3. Ⓓ 4.

Câu 230. Cho hàm số $y = x^3 - 6mx + 4$ có đồ thị (C_m). Gọi m_0 là giá trị của m để đường thẳng đi qua điểm cực đại, điểm cực tiểu của (C_m) cắt đường tròn tâm $I(1; 0)$, bán kính $\sqrt{2}$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác IAB có diện tích lớn nhất. Chọn khẳng định đúng.

Ⓐ $m_0 \in (3; 4)$. Ⓑ $m_0 \in (1; 2)$. Ⓒ $m_0 \in (0; 1)$. Ⓓ $m_0 \in (2; 3)$.

Câu 231. Biết hai hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + 2x - 1$ và $g(x) = -x^3 + bx^2 - 3x + 1$ có chung ít nhất một điểm cực trị. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |a| + |b|$.

Ⓐ $\sqrt{30}$. Ⓑ $2\sqrt{6}$. Ⓒ $3 + \sqrt{6}$. Ⓓ $3\sqrt{3}$.

Câu 232. Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng đi qua điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx + 2$ cắt đường tròn tâm $I(1; 1)$, bán kính $R = 1$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho diện tích tam giác IAB đạt giá trị lớn nhất?

Ⓐ $m = \dfrac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$. Ⓑ $m = \dfrac{2 \pm \sqrt{3}}{2}$. Ⓒ $m = \dfrac{2 \pm \sqrt{5}}{2}$. Ⓓ $m = \dfrac{2 \pm \sqrt{3}}{3}$.

Câu 233. Tìm các giá trị của m để đường thẳng đi qua điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx + 2$ cắt đường tròn $(C)\colon (x-1)^2 + y^2 = 2$ có tâm I tại hai điểm phân biệt A, B sao cho diện tích tam giác IAB đạt giá trị lớn nhất.

Ⓐ $m = \dfrac{3}{8}$. Ⓑ $\left[\begin{array}{l} m = \dfrac{1 + \sqrt{3}}{2} \\ m = \dfrac{1 - \sqrt{3}}{2} \end{array}\right.$. Ⓒ $m = \dfrac{8}{3}$. Ⓓ $\left[\begin{array}{l} m = \dfrac{3}{2} \\ m = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$.

Câu 234. Cho hàm số $y=\dfrac{1}{3}(m-1)x^3-(m-1)x^2+2mx+m+3$, với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương nhỏ hơn 2019 của tham số m để hàm số trên không có cực trị?

(A) 2018. (B) 2019. (C) 1. (D) 3.

Câu 235. Biết m_0 là giá trị của tham số m để hàm số $y=x^3-3x^2+mx-1$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 sao cho $x_1^2+x_2^2-x_1x_2=13$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) $m_0\in(-1;7)$. (B) $m_0\in(7;10)$. (C) $m_0\in(-7;-1)$. (D) $m_0\in(-15;-7)$.

Câu 236. Cho hàm số $y=x^3+(1-2m)x^2+(2-m)x+m+2$. Tìm các giá trị của m để đồ thị hàm số có điểm cực đại, điểm cực tiểu, đồng thời hoành độ của điểm cực tiểu nhỏ hơn 1.

(A) $\dfrac{5}{4}\le m\le\dfrac{7}{5}$. (B) $\left[\begin{array}{l}m<\dfrac{5}{4}\\ m>\dfrac{7}{5}\end{array}\right.$. (C) $\left[\begin{array}{l}m<-1\\ \dfrac{5}{4}<m<\dfrac{7}{5}\end{array}\right.$. (D) $\left[\begin{array}{l}m\le\dfrac{5}{4}\\ m\ge\dfrac{7}{5}\end{array}\right.$.

Câu 237. Cho hàm số $y=x^3-3mx+m-1$ có đồ thị (C) , với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị (C) có hai điểm cực trị là A, B cùng với điểm $C(0;-1)$ tạo thành một tam giác có diện tích nhỏ hơn 10 ?

(A) 7. (B) 9. (C) 12. (D) 4.

Câu 238. Đồ thị hàm số $y=2x^3-3(2m+1)x^2+6m(m+1)x+1$ có hai điểm cực trị A và B. Điểm $M(2m^3;m)$ tạo với hai điểm A và B một tam giác có diện tích nhỏ nhất. Khi đó giá trị tham số m thuộc khoảng nào dưới đây?

(A) $(-7;-3)$. (B) $(-3;3)$. (C) $(3;7)$. (D) $(7;13)$.

Câu 239. Cho hàm số $y=x^3+2x^2+(m-3)x+m$ (m là tham số), có đồ thị (C_m). Tìm tất cả các giá trị thực của m để (C_m) có hai điểm cực trị và điểm $M(9;-5)$ nằm trên đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của (C_m).

(A) $m=-5$. (B) $m=3$. (C) $m=2$. (D) $m=-1$.

Câu 240. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $(d)\colon y=(3m+1)x+3+m$ vuông góc với đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2-1$.

(A) $m=\dfrac{1}{6}$. (B) $m=-\dfrac{1}{3}$. (C) $m=\dfrac{1}{3}$. (D) $m=-\dfrac{1}{6}$.

Câu 241. Cho hàm số $y=(m+1)x^4-2x^2+1$. Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số đã cho có ba điểm cực trị đều nhỏ hơn 1.

(A) $-1<m<0$. (B) $m>-1$. (C) $0<m<1$. (D) $m>0$.

Câu 242. Cho hàm số $y=(m-2)x^4+(m-1)x^2-3$. Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số đã cho có đúng một điểm cực trị.

(A) $m\in[2;+\infty)$. (B) $m\in(-\infty;1]\cup(2;+\infty)$.

(C) $m\in(-\infty;1]$. (D) $m\in(-\infty;1]\cup[2;+\infty)$.

Câu 243. Tìm tập hợp các giá trị của tham số m để hoành độ các điểm cực đại và cực tiểu của đồ thị hàm số $y=x^4-2(m+1)x^2+1$ đều thuộc khoảng $(-1;1)$.

(A) $(-1;1)$. (B) $\left(-\dfrac{4}{5};0\right)$. (C) $(-2;0)$. (D) $(-1;0)$.

Câu 244. Tìm tập hợp các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^4-2(m^2-m+1)x^2+m-1$ có 3 điểm cực trị, đồng thời hoành độ hai điểm cực tiểu x_1; x_2 thỏa điều kiện $|x_1-x_2|\le 2$.

(A) $\left(0;\dfrac{\sqrt{13}+1}{2}\right]$. (B) $\left[\dfrac{1-\sqrt{13}}{2};\dfrac{\sqrt{13}+1}{2}\right]$.

(C) $(0;1]$. (D) $[0;1]$.

Câu 245. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^4-2m^2x^2+2m$ có ba điểm cực trị A, B, C sao cho O, A, B, C là bốn đỉnh của một hình thoi.

(A) $m=-1$. (B) $m=1$. (C) $m=2$. (D) $m=3$.

Câu 246. Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 - 2m^2 + m^4$ có đồ thị (C). Biết đồ thị (C) có ba điểm cực trị A, B, C và $ABDC$ là hình thoi trong đó $D(0;3)$, A thuộc trục tung. Khi đó m thuộc khoảng nào?

A. $m \in \left(\dfrac{9}{5};2\right)$.
B. $m \in \left(-1;\dfrac{1}{2}\right)$.
C. $m \in (2;3)$.
D. $m \in \left(\dfrac{1}{2};\dfrac{9}{5}\right)$.

Câu 247. Gọi S là tập hợp các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2 + mx + m^2}{x - 1}$ có hai điểm cực trị A, B. Khi $\widehat{AOB} = 90^\circ$ thì tổng bình phương tất cả các phần tử của S bằng:

A. $\dfrac{1}{16}$.
B. 8.
C. $\dfrac{1}{8}$.
D. 16.

Câu 248. Cho hàm số $f(x) = x^4 - (2m+1)x^3 + (m+4)x^2 + (5m-6)x + 2m - 12$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-10;10]$ để hàm số $y = |f(x)|$ có số điểm cực trị nhiều nhất?

A. 15.
B. 16.
C. 13.
D. 14.

BÀI 3. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT - GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

A LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa

Định nghĩa 3.1. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập $\mathscr{D}$.

- Số M gọi là **giá trị lớn nhất** của hàm số $y = f(x)$ trên D nếu: $\begin{cases} f(x) \leq M, \forall x \in \mathscr{D} \\ \exists x_0 \in \mathscr{D}, f(x_0) = M. \end{cases}$
- Kí hiệu: $M = \max\limits_{x \in \mathscr{D}} f(x)$.
- Số m gọi là **giá trị nhỏ nhất** của hàm số $y = f(x)$ trên D nếu: $\begin{cases} f(x) \geq m, \forall x \in \mathscr{D} \\ \exists x_0 \in \mathscr{D}, f(x_0) = m. \end{cases}$
- Kí hiệu: $m = \min\limits_{x \in \mathscr{D}} f(x)$.

2. Phương pháp tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất

Tìm GTLN, GTNN Khảo sát trực tiếp

- **Bước 1:** Tính $f'(x)$ và tìm các điểm $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathscr{D}$ mà tại đó $f'(x) = 0$ hoặc hàm số không có đạo hàm.
- **Bước 2:** Lập bảng biến thiên và từ đó suy ra giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số

Tìm GTLN, GTNN của hàm số trên một đoạn

- **Bước 1:**
  Hàm số đã cho $y = f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[a; b]$.
  Tìm các điểm $x_1, x_2, \ldots, x_n$ trên khoảng $(a; b)$, tại đó $f'(x) = 0$ hoặc $f'(x)$ không xác định.
- **Bước 2:** Tính $f(a), f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), f(b)$.
- **Bước 3:** Khi đó:
  $\max\limits_{[a,b]} f(x) = \max\left\{f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), f(a), f(b)\right\}$.
  $\min\limits_{[a,b]} f(x) = \min\left\{f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), f(a), f(b)\right\}$.

Tìm GTLN, GTNN của hàm số trên một khoảng

- **Bước 1:** Tính đạo hàm $f'(x)$.
- **Bước 2:** Tìm tất cả các nghiệm $x_i \in (a; b)$ của phương trình $f'(x) = 0$ và tất cả các điểm $\alpha_i \in (a; b)$ làm cho $f'(x)$ không xác định.
- **Bước 3:** Tính $A = \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$, $B = \lim\limits_{x \to b^-} f(x), f(x_i), f(\alpha_i)$.
- **Bước 4:** So sánh các giá trị tính được và kết luận $M = \max\limits_{(a;b)} f(x), m = \min\limits_{(a;b)} f(x)$.

Nếu giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) là A hoặc B thì ta kết luận không có giá trị lớn nhất (nhỏ nhất).

Nếu $y = f(x)$ đồng biến trên $[a; b]$ thì $\begin{cases} \min\limits_{[a;b]} f(x) = f(a) \\ \max\limits_{[a;b]} f(x) = f(b). \end{cases}$

Nếu $y = f(x)$ nghịch biến trên $[a; b]$ thì $\begin{cases} \min\limits_{[a;b]} f(x) = f(b) \\ \max\limits_{[a;b]} f(x) = f(a). \end{cases}$

Hàm số liên tục trên một khoảng **có thể** không có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên khoảng đó.

Bất đẳng thức trị tuyệt đối

- Cho hai số thực a, b khi đó ta có: $|a| + |b| \geq |a + b| \geq |a| - |b|$.
- Dấu "=" vế trái xảy ra khi a, b cùng dấu. Dấu "=" vế phải xảy ra khi a, b trái dấu.
- Tính chất của hàm trị tuyệt đối: $\max\{|a|, |b|\} = \dfrac{|a - b| + |a + b|}{2}$.

Phương pháp tìm GTLN, GTNN của hàm số chứa dấu giá trị tuyệt đối

- **Bước 1:** Xét hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[a; b]$.
  Tính đạo hàm $y' = f'(x)$.
  Giải phương trình $f'(x) = 0$ và tìm các nghiệm a_i thuộc $[a; b]$
- **Bước 2:** Giải phương trình $f(x) = 0$ và tìm các nghiệm b_j thuộc $[a; b]$.
- **Bước 3:** Tính các giá trị $|f(a)|; |f(b)|; |f(a_i)|; |f(b_j)|$. So sánh và kết luận.

B VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho hàm số $f(x) = m\sqrt{x - 1}$ (m là tham số thực khác 0). Gọi m_1, m_2 là hai giá trị của m thỏa mãn $\min\limits_{[2;5]} f(x) + \max\limits_{[2;5]} f(x) = m^2 - 10$. Giá trị $m_1 + m_2$ bằng

A 3. **B** 5. **C** 10. **D** 2.

Lời giải.

Với mọi $x \in [2; 5]$ có $f'(x) = \dfrac{m}{2\sqrt{x - 1}}$. Ta thấy dấu của $f'(x)$ phụ thuộc vào dấu của m.

$\forall m \neq 0$ thì $f(x)$ đơn điệu trên $[2; 5] \Rightarrow \min\limits_{[2;5]} f(x) + \max\limits_{[2;5]} f(x) = f(2) + f(5) = m + 2m$.

Từ giả thiết ta được $m^2 - 10 = m + 2m \Leftrightarrow m^2 - 3m - 10 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 5 \\ m = -2 \end{array}\right.$. Vậy $m_1 + m_2 = 3$.

Chọn đáp án A □

Ví dụ 2. Cho hàm số $y = (x^3 - 3x + m + 1)^2$. Tổng tất cả các giá trị của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1; 1]$ bằng 1 là

A -2. **B** 4. **C** -4. **D** 0 .

Lời giải.

Đặt $y=f(x)=\left(x^3-3x+m+1\right)^2$ là hàm số xác định và liên tục trên đoạn $[-1;1]$.

Ta có $y'=f'(x)=2\left(x^3-3x+m+1\right)\left(3x^2-3\right); f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm 1 \\ m=-x^3+3x-1=g(x). \end{array}\right.$

Ta khảo sát hàm số $g(x)$ trên đoạn $[-1;1]$.. Bảng biến thiên cua $g(x)$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

Nếu $m\in[-3;1]$ thì luôn tồn tại $x_0\in[-1;1]$ sao cho $m=g(x_0)$ hay $f(x_0)=0$. Suy ra $\min\limits_{[-1;1]} y=0$, tức là không tồn tại m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Nếu $m\notin[-3;1]$ thì $f'(x)=0\Leftrightarrow x=\pm1\in[-1;1]$.

Ta có: $\min_{[-1;1]} f(x)=\min\{f(1);f(-1)\}=\min\left\{(m-1)^2;(m+3)^2\right\}$.

Trường hợp 1: $m>1$ tức là $m+3>m-1>0 \Rightarrow \min\limits_{[-1;1]} f(x)=(m-1)^2=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=2\ (TM) \\ m=0\ (KTM). \end{array}\right.$

Trường hợp 2: $m<-3$ tức là $m-1<m+3<0 \Rightarrow \min_{[-1;1]} f(x)=(m+3)^2=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-4\ (TM) \\ m=-2\ (KTM). \end{array}\right.$

Vậy có hai giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán: $m=2; m=-4$, từ đó tổng tât cả các giá trị của m là -2.

Chọn đáp án (A) □

Ví dụ 3. Biết rằng giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=mx+\dfrac{36}{x+1}$ trên đoạn $[0;3]$ bằng 20 (với m là tham số). Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

(A) $0<m\le 2$. (B) $4<m\le 8$. (C) $2<m\le 4$. (D) $m>8$.

Lời giải.

Ta có: $\min\limits_{[0;3]} y=20 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} mx+\dfrac{36}{x+1}\ge 20, \forall x\in[0;3] \\ \exists x_0\in[0;3]: mx_0+\dfrac{36}{x_0+1}=20 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} m\ge \dfrac{20x-16}{x(x+1)}, \forall x\in(0;3] \\ \exists x_0\in(0;3]: m=\dfrac{20x_0-16}{x_0(x_0+1)} \end{array}\right.$ $(*)$.

(vì $y(0)=36>20$).

Xét hàm số $g(x)=\dfrac{20x-16}{x(x+1)}$ trên $(0;3]$.

Ta có: $g'(x)=\dfrac{-20x^2+32x+16}{[x(x+1)]^2}; g'(x)=0\Rightarrow -20x^2+32x+16=0\Rightarrow \left[\begin{array}{ll} x=2 & (tm) \\ x=-\dfrac{2}{5}(l). \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	0		2		3
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	$\dfrac{11}{3}$

Do đó, từ $(*)$ suy ra $m=-4$. Vậy $2<m\leq 4$.
Chọn đáp án (C) □

Ví dụ 4. Cho hàm số $y=f(x)=x^6+ax^2+bx+2a+b$ với a,b là các số thực. Biết hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_0=1$. Giá trị nhỏ nhất có thể của $f(3)$ bằng bao nhiêu?

(A) 128. (B) 243. (C) 81. (D) 696 .

Lời giải.

Ta có $f'(x)=6x^5+2ax+b$. Do hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_0=1$ nên $f'(1)=0\Rightarrow b=-2a-6$.
Do hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_0=1$ nên $f(x)\geq f(1),\forall x\in\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
& f(x)\geq f(1),\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow x^6+ax^2+bx+2a+b\geq 1+3a+2b,\forall x\in\mathbb{R}\\
\Leftrightarrow\ & x^6+ax^2+(-2a-6)x+2a-2a-6\geq 1+3a+2b,\forall x\in\mathbb{R}(\text{do} b=-2a-6)\\
\Leftrightarrow\ & a\left(x^2-2x+1\right)\geq -x^6+6x-5,\forall x\in\mathbb{R}\\
\Leftrightarrow\ & a(x-1)^2\geq (x-1)^2\left(-x^4-2x^3-3x^2-4x-5\right),\forall x\in\mathbb{R}(*)
\end{aligned}$$

Mà $\max\left(-x^4-2x^3-3x^2-4x-5\right)=-3\Leftrightarrow x=-1$ nên $(^*)$ xảy ra khi $a\geq -3$.
$f(3)=3a+705\Rightarrow \min f(3)=696$.
Chọn đáp án (D) □

Ví dụ 5. Cho $y=f(x)=|x^2-5x+4|+mx$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ lớn hơn 1. Tính số phần tử của S.

(A) 7. (B) 8. (C) 6. (D) 5.

Lời giải.

Vì $\min\limits_{\mathbb{R}} f(x)>1$ nên $f(x)=|x^2-5x+4|+mx>1$ với $\forall x\in\mathbb{R}$.
Với $x\in[4;+\infty)$, ta có $f(x)=mx+x^2-5x+4>1\Leftrightarrow m>-x-\dfrac{3}{x}+5,\forall x\geq 4$.
Đặt $g(x)=-x-\dfrac{3}{x}+5,\forall x\geq 4$.. Ta có $g'(x)=-1+\dfrac{3}{x^2}<0,\forall x\in[4;+\infty),\ g(4)=\dfrac{1}{4}$.
Do đó $g(x)\leq g(4)=\dfrac{1}{4}$. Vì $m>g(x)\forall x\in[4;+\infty)\Leftrightarrow m>g(4)\Leftrightarrow m>\dfrac{1}{4}$. (1)
Tương tự, với $x\in[1;4)$. Ta có $f(x)=-x^2+5x-4+mx>1\ \forall x\in[1;4)\Leftrightarrow m>1$. (2)
Với $x\in(0;1)$. Ta có $f(x)=x^2-5x+4+mx>1\ \forall x\in(0;1)\Leftrightarrow m>-x-\dfrac{3}{x}+5\Leftrightarrow m\geq 1$. (3)
Với $x\in(-\infty;0)$. Ta có $f(x)=x^2-5x+4+mx>1\ \forall x\in(-\infty;0)$
$\Leftrightarrow m<-x-\dfrac{3}{x}+5\quad \forall x\in(-\infty;0)\Leftrightarrow m<5+2\sqrt{3}$. (4)
Với $x=0$ luôn đúng.
Từ (1), (2), (3) và (4) ta có $1<m<5+2\sqrt{3}$.
Vậy $S=\{2;3;4;5;6;7;8\}$ là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m thỏa mãn.
Chọn đáp án (A) □

Ví dụ 6. Tìm tất cả các giá trị thực của m để giá trị lớn nhất của hàm số $y=\dfrac{4^{\sin x}+m\cdot 6^{\sin x}}{9^{\sin x}+4^{1+\sin x}}$ không nhỏ hơn $\dfrac{1}{3}$.

(A) $m>\dfrac{2}{3}$. (B) $m\geq\dfrac{2}{3}$. (C) $m\geq\dfrac{13}{18}$. (D) $\dfrac{2}{3}\leq m\leq\dfrac{13}{18}$.

Lời giải.

Ta có: $y=\dfrac{4^{\sin x}+m\cdot 6^{\sin x}}{9^{\sin x}+4^{1+\sin x}}=\dfrac{1+m\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^{\sin x}}{\left(\dfrac{3}{2}\right)^{2\sin x}+4}$.

Đặt $t=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{\sin x}$ với $t\in\left[\dfrac{2}{3};\dfrac{3}{2}\right]$ khi đó $y=f(t)=\dfrac{mt+1}{t^2+4}$.

Yêu cầu bài toán tương đương với:

Tồn tại $\max f(t)$ (điều này luôn đúng) và $f(t)\geq\dfrac{1}{3}$ có nghiệm $t\in\left[\dfrac{2}{3};\dfrac{3}{2}\right]$.

Xét $f(t)\geq\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow mt+1\geq\dfrac{1}{3}t^2+\dfrac{4}{3}\Leftrightarrow 3m\geq\dfrac{t^2+1}{t}$ (1).

Đặt $g(t)=\dfrac{t^2+1}{t}$, $g'(t)=1-\dfrac{1}{t^2}=0\Leftrightarrow t=1$.

Bảng biến thiên của hàm $g(t)$:

x	$\frac{2}{3}$		1		$\frac{3}{2}$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	$g(1)$	$\nearrow$	

Yêu cầu bài toán tương đương (1) có nghiệm hay $3m\geq g(t)$ có nghiệm $t\in\left[\dfrac{2}{3};\dfrac{3}{2}\right]$

$\Leftrightarrow 3m\geq g(1)\Leftrightarrow 3m\geq 2\Leftrightarrow m\geq\dfrac{2}{3}$.

Chọn đáp án B □

Ví dụ 7. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ liên tục trên tập số thực và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	2	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Biết rằng $f(-1)=\dfrac{10}{3}$, $f(2)=6$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)=f'(x)-3f(x)$ trên đoạn $[-1;2]$ bằng

A. $\dfrac{10}{3}$.
B. $\dfrac{820}{27}$.
C. $\dfrac{730}{27}$.
D. 198 .

Lời giải.

Xét hàm số $g(x)=f^3(x)-3f(x)$ trên đoạn $[-1;2]$.

$g'(x)=3\left[f^2(x)-1\right]\cdot f'(x)$, $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'(x)=0\ (1)\\ f^2(x)=1\ (2).\end{array}\right.$

Từ bảng biến thiên, ta có: (1) $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\in[-1;2]\\ x=2\in[-1;2].\end{array}\right.$

Và $f'(x)\geq 0,\forall x\in[-1;2]$ nên $f(x)$ đồng biến trên $[-1;2]\Rightarrow f(x)\geq f(-1)=\dfrac{10}{3}$

$\Rightarrow f(x) > 1 \Rightarrow f^2(x) > 1, \forall x \in [-1;2]$ nên (2) vô nghiệm.
Do đó, $g'(x) = 0$ chỉ có 2 nghiệm là $x = -1$ và $x = 2$.

Ta có $g(-1) = f^3(-1) - 3f(-1) = \left(\dfrac{10}{3}\right)^3 - 3\left(\dfrac{10}{3}\right) = \dfrac{730}{27}$.

$g(2) = f^3(2) - 3f(2) = (6)^3 - 3(6) = 198$. Vậy $\min\limits_{[-1;2]} g(x) = g(-1) = \dfrac{730}{27}$.

Chọn đáp án C □

Ví dụ 8. Cho hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[1;2]$. Biết rằng hàm số $y = f(x)$ và thỏa mãn $(f(x) - x)f(x) = x^6 + 3x^4 + 2x^2, \forall x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $3M - m$ bằng

A 4. **B** -28. **C** -3. **D** 33 .

Lời giải.

Ta có: $(f(x) - x)f(x) = x^6 + 3x^4 + 2x^2 \Leftrightarrow f^2(x) - xf(x) = x^6 + 3x^4 + 2x^2$.
$\Leftrightarrow 4f^2(x) - 4xf(x) = 4x^6 + 12x^4 + 8x^2 \Leftrightarrow 4f^2(x) - 4xf(x) + x^2 = 4x^6 + 12x^4 + 9x^2$

$\Leftrightarrow [2f(x) - x]^2 = \left(2x^3 + 3x\right)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2f(x) - x = 2x^3 + 3x \\ 2f(x) - x = -2x^3 - 3x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = x^3 + 2 \\ xf(x) = -x^3 - x. \end{array}\right.$

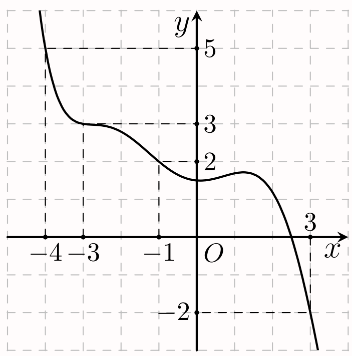
Với $f(x) = x^3 + 2x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2 > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$ nên $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.
Với $f'(x) = -x^3 - x \Rightarrow f'(x) = -3x^2 - 1 < 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$ nên $f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
Suy ra: $f(x) = -x^3 - x$. Vì $f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ nên $M = \max\limits_{[1;2]} f(x) = f(1) = -2$ và

$m = \min\limits_{[1;2]} f(x) = f(2) = -10$. Từ đây, ta suy ra: $3M - m = 3.(-2) + 10 = 4$.

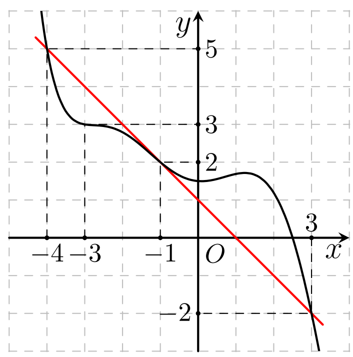
Chọn đáp án A □

Ví dụ 9.
Cho hàm số $f(x)$. Biết hàm số $f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Trên đoạn $[-4;3]$, hàm số $g(x) = 2f(x) + (1 - x)^2$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm

A $x = -3$. **B** $x = -4$. **C** $x = 3$. **D** $x = -1$.



Lời giải.



Ta có: $g'(x) = 2f'(x) + (2x - 2) = 0$

$\Leftrightarrow 2\left[f'(x) - (1 - x)\right] = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 1 - x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -4 \\ x = -1 \\ x = 3. \end{array}\right.$ Bảng biến thiên

x	-4		-1		3
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$g(-4)$	$\searrow$	$g(-1)$	$\nearrow$	$g(3)$

Vậy trên đoạn $[-4;3]$, hàm số $g(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm $x = -1$.

Chọn đáp án D □

C MỘT SỐ DẠNG TOÁN CƠ BẢN

Dạng 1. Cơ bản về Max - Min của hàm số

Câu 1. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sqrt{-x^2 + 4x}$ trên khoảng $(0; 3)$ là

Ⓐ 4. Ⓑ 2. Ⓒ 0. Ⓓ -2.

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Khẳng định nào sau đây là đúng?

Ⓐ Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 2 và giá trị nhỏ nhất bằng 1.

Ⓑ Hàm số có đúng một cực trị.

Ⓒ Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$ và đạt cực tiểu tại $x = 3$.

Ⓓ Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 3.

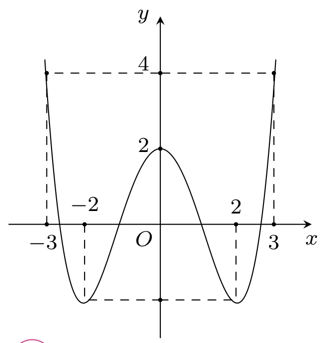
Lời giải.

Từ bảng biến thiên, hàm số đạt cực đại tại $x = 1$ và đạt cực tiểu tại $x = 3$. □

Câu 3.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên dưới.

Giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-2; 3]$ bằng



Ⓐ 3. Ⓑ 4. Ⓒ 5. Ⓓ 2.

Câu 4. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = (x+1)(x+2)(x+3)(x+4) + 2019$ là

Ⓐ 2017. Ⓑ 2020. Ⓒ 2018. Ⓓ 2019.

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ và có bảng biến thiên trên $[-5; 7)$ như sau:

x	$-\infty$	-5		1		7	$+\infty$
y'			$-$	0	$+$		
y		6	$\searrow$	2	$\nearrow$	9	

Mệnh đề nào sau đây đúng?

Ⓐ $\min\limits_{[-5;7)} f(x) = 2$ và hàm số không đạt giá trị lớn nhất trên $[-5; 7)$.

Ⓑ $\max\limits_{[-5;7)} f(x) = 6$ và $\min\limits_{[-5;7)} f(x) = 2$.

Ⓒ $\max\limits_{[-5;7)} f(x) = 9$ và $\min\limits_{[-5;7)} f(x) = 2$.

Ⓓ $\max\limits_{[-5;7)} f(x) = 9$ và $\min\limits_{[-5;7)} f(x) = 6$.

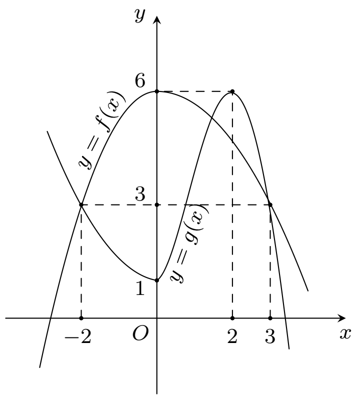
Câu 6. Gọi m là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x + \dfrac{4}{x}$ trên khoảng $(0; +\infty)$. Tìm m

Ⓐ $m = 4$. Ⓑ $m = 2$. Ⓒ $m = 1$. Ⓓ $m = 3$.

Câu 7.

Cho hàm số $y = f(x)$ và hàm số $y = g(x)$ có đạo hàm xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\dfrac{f(x)}{g(x)} = m$ có nghiệm thuộc $[-2; 3]$?

Ⓐ 4. Ⓑ 5. Ⓒ 7. Ⓓ 6.



Câu 8. Cho hàm số có bảng biến thiên như hình dưới đây. Khẳng định nào sau đây là đúng?

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\dfrac{1}{6}$	$\nearrow$	$+\infty$

Ⓐ Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên tập số thực bằng $-\dfrac{1}{6}$.

Ⓑ Giá trị cực đại của hàm số bằng 0.

Ⓒ Giá trị lớn nhất của hàm số trên tập số thực bằng 0.

Ⓓ Giá trị cực tiểu của hàm số bằng 0.

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ sao cho $\max\limits_{[-1;2]} f(x) = 3$. Xét $g(x) = f(3x-1) + m$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để $\max\limits_{[0;1]} g(x) = -10$.

Ⓐ 13. Ⓑ -7. Ⓒ -13. Ⓓ -1.

Câu 10. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = 3\sin x - 4\sin^3 x$ trên khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$ bằng

Ⓐ 1. Ⓑ 3. Ⓒ -1. Ⓓ 7.

Câu 11. Cho hàm số $y = \dfrac{\sin x + 1}{\sin^2 x + \sin x + 1}$. Gọi M là giá trị lớn nhất và m là giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho. Chọn mệnh đề đúng.

Ⓐ $M = \dfrac{3}{2}m$. Ⓑ $M = m + \dfrac{3}{2}$. Ⓒ $M = m + \dfrac{2}{3}$. Ⓓ $M = m + 1$.

Câu 12. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \dfrac{2}{x^2} - \dfrac{1}{2x-2}$ trên khoảng $(0; 1)$.

Ⓐ $\min\limits_{(0;1)} f(x) = \dfrac{54 + 25\sqrt{5}}{20}$. Ⓑ $\min\limits_{(0;1)} f(x) = \dfrac{11 + 5\sqrt{5}}{4}$.

(C) $\min\limits_{(0;1)} f(x) = \dfrac{10+5\sqrt{5}}{4}$.

(D) $\min\limits_{(0;1)} f(x) = \dfrac{56+25\sqrt{5}}{20}$.

Câu 13. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x-2}$ trên tập $D = (-\infty; -1] \cup \left[1; \dfrac{3}{2}\right]$. Tính giá trị của $m \cdot M$.

(A) $T = \dfrac{3}{2}$.
(B) $T = 0$.
(C) $T = -\dfrac{3}{2}$.
(D) $T = \dfrac{1}{9}$.

Câu 14. Cho hàm số $y = x^3 - \dfrac{3}{2}x^2 + 1$. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số trên khoảng $\left(-25; \dfrac{11}{10}\right)$. Tìm M.

(A) $M = 1$.
(B) $M = \dfrac{129}{250}$.
(C) $M = 0$.
(D) $M = \dfrac{1}{2}$.

Câu 15. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = -x^3 + 3x + 1$ trên khoảng $(0; +\infty)$ bằng

(A) 3.
(B) 1.
(C) -1.
(D) 5.

Câu 16. Trên khoảng $(0; +\infty)$ thì hàm số $y = -x^3 + 3x + 1$

(A) Có giá trị lớn là $\max y = -1$.
(B) Có giá trị nhỏ nhất là $\min y = -1$.
(C) Có giá trị lớn nhất là $\max y = 3$.
(D) Có giá trị nhỏ nhất là $\min y = 3$.

Câu 17. Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 5$. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) Hàm số không có giá trị nhỏ nhất, không có giá trị lớn nhất.
(B) Hàm số có giá trị nhỏ nhất, có giá trị lớn nhất.
(C) Hàm số có giá trị nhỏ nhất, không có giá trị lớn nhất.
(D) Hàm số không có giá trị nhỏ nhất, có giá trị lớn nhất.

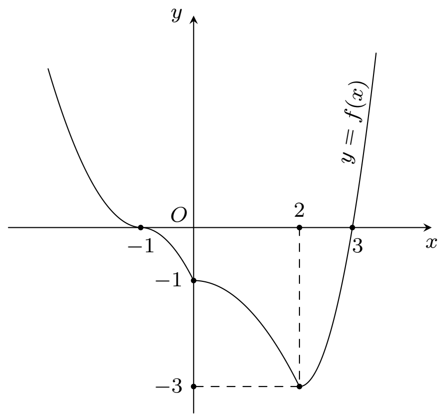
Câu 18. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên $\mathbb{R}$. Biết $f'(0) = 3$, $f'(2) = -2018$ và bảng xét dấu của $f''(x)$ như sau

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y = f(x + 2017) + 2018x$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm x_0 thuộc khoảng nào sau đây?

(A) $(-\infty; -2017)$.
(B) $(2017; +\infty)$.
(C) $(0; 2)$.
(D) $(-2017; 0)$.

Câu 19. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình. Bất phương trình $2f(x) + x^3 > 2m + 3x^2$ nghiệm đúng với mọi $x \in (-1; 3)$ khi và chỉ khi



(A) $m < -10$.
(B) $m < -5$.
(C) $m < -3$.
(D) $m < -2$.

Câu 20. Có bao nhiêu số thực m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = |x^2 - 4x + m + 3| - 4x$ bằng -5?

(A) 2.
(B) 3.
(C) 0.
(D) 1.

Dạng 2. Min, max của hàm đa thức và BPT

Câu 21. Cho hàm số $f(x) = x^{20-m} - x^7 + 2$, với m là tham số nguyên dương. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số có giá trị nhỏ nhất trên $\mathbb{R}$?

A. 6. B. 25. C. 7. D. 10.

Câu 22. Cho hàm số $f(x) = x^{30-m} - x^6 + 1$, với m là tham số nguyên dương. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số có giá trị lớn nhất trên $\mathbb{R}$?

A. 6. B. 8. C. 7. D. 3.

Câu 23. Cho hàm số $f(x) = (m^2 - 3m)\,x^{11} - mx^6 + x^3 - 3$, với m là tham số. Hỏi có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để hàm số có giá trị lớn nhất trên $\mathbb{R}$?

A. 0. B. 2. C. Vô số. D. 1.

Câu 24. Cho hàm số $f(x) = (m^3 - m)\,x^{13} - mx^6 + x^4 + 1$, với m là tham số. Hỏi có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x)$ có giá trị nhỏ nhất trên $\mathbb{R}$?

A. 1. B. 0. C. 2. D. 3.

Câu 25. Cho hàm số $f(x) = x^4 + x^3 - (m-1)x^2 + 2mx + 1$. Để hàm số $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_0 = 0$ thì giá trị của tham số m nằm trong khoảng nào dưới đây ?

A. $(-3;-1)$. B. $(1;3)$. C. $(3;4)$. D. $(-1;1)$.

Câu 26. Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số $m \in [-21;21]$ để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^4 - 2mx^3 + 4mx^2 - (2m+2)x - 2021$ đạt tại $x_0 = 2$. Số phần tử của tập S là

A. 1. B. 0. C. 2. D. 12.

Câu 27. Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $f(x) = -x^4 - 2mx^3 + 3mx^2 - 2mx - 2021$ đạt giá trị lớn nhất tại $x_0 = 1$. Số phần tử của tập S là

A. 3. B. 2. C. 1. D. 0.

Câu 28. Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số $m \in [-21;21]$ để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^6 + (m-2)x^5 + (m^2-11)x^4 + 2021$ đạt tại $x_0 = 0$. Số phần tử của tập S là

A. 34. B. 42. C. 35. D. 37.

Câu 29. Cho hàm số $f(x) = (x-1)(x-2)\,(x^2 - ax + b) + 2021$. Biết hàm số đạt giá trị nhỏ nhất bằng 2021. Giá trị của biểu thức $S = 4a + b$ tương ứng bằng

A. 5. B. 0. C. 10. D. 14.

Câu 30. Cho hàm số $f(x) = x^6 + ax^2 + bx + 2a + b$, với a, b là hai số thực. Biết hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_0 = 1$. Giá trị nhỏ nhất có thể của $f(3)$ bằng bao nhiêu ?

A. 128. B. 243. C. 81. D. 696.

Câu 31. Cho hàm số $f(x) = x^4 + x^3 + ax^2 + bx + b - 1$. Biết rằng hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_0 = 1$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $a \in [-20;20]$ thỏa mãn bài toán?

A. 30. B. 23. C. 22. D. 24.

Câu 32. Cho hàm số $f(x) = (m+n-2)x^7 + x^4 + (m+2n-1)x^3 + x^2 + (2n-1)x + 2$. Với m và n là hai tham số thực. Biết rằng hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_0 = 2$. Giá trị của biểu thức $T = 16m + 2n$ bằng

A. 22. B. 38. C. 46. D. 79.

Câu 33. Cho hàm số $f(x) = x^4 + ax^3 + 2bx^2 + 2cx + 2b$ với a, b, c là những tham số thực. Biết hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_1 = 1$ và $x_2 = 2$. Giá trị của biểu thức $T = a + 2b$ bằng

A. 7. B. 8. C. 3. D. 9.

Câu 34. Cho hàm số $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1$ với a, b, c là những tham số thực. Biết hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_1 = 0$ và $x_2 = 1$. Giá trị của biểu thức $T = a + 2b + c$ bằng

A. 1. B. 0. C. 2. D. -3.

Câu 35. Cho hàm số $f(x) = x^6 - ax^5 + 2bx^4 + 1$ với a, b là hai tham số thực. Biết hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_1 = 0$ và $x_2 = 1$. Giá trị của biểu thức $T = 3a + 4b$ bằng

Ⓐ 7. Ⓑ 8. Ⓒ 5. Ⓓ 0.

Câu 36. Cho hàm số $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx - 1$ với a, b, c là những tham số thực. Biết hàm số đạt giá trị nhỏ nhất bằng b. Giá trị của biểu thức $T = a + 3b + c$ bằng

Ⓐ 3. Ⓑ 5. Ⓒ -6. Ⓓ -1.

Câu 37. Cho hàm số $f(x) = x^8 + ax^5 + bx^4 + cx + 2021$ với a, b là hai tham số thực. Biết hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_0 = 0$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = a + b$ bằng

Ⓐ -1. Ⓑ 1. Ⓒ -2. Ⓓ 3.

Câu 38. Cho hàm số $f(x) = x^6 + ax^5 + bx^4 + 1$ với a, b là hai tham số thực. Biết hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_0 = 0$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = 2a - b$ bằng

Ⓐ 4. Ⓑ 8. Ⓒ 16. Ⓓ -2.

Câu 39. Cho hàm số $f(x) = x^4 - 4x^3 + (m+1)x^2 - mx + 1$ với m là tham số thực. Biết rằng $\alpha = \min f(x)$. Giá trị lớn nhất của α bằng

Ⓐ 1. Ⓑ -1. Ⓒ -2. Ⓓ 0.

Câu 40. Cho hàm số $f(x) = x^4 + x^3 - mx^2 + 2mx + 3m$ với m là tham số thực. Biết rằng $\alpha = \min f(x)$. Khi α đạt giá trị lớn nhất thì $x = x_0$ và $m = m_0$. Giá trị của biểu thức $(x_0 + m_0)$ bằng

Ⓐ 0. Ⓑ $\dfrac{1}{2}$. Ⓒ -1. Ⓓ $-\dfrac{3}{4}$.

Câu 41. Cho hàm số $f(x) = -x^4 + 2x^3 + mx^2 - (m+2)x$ với m là tham số thực. Biết rằng $\beta = \max f(x)$. Khi đó β đạt giá trị nhỏ nhất bằng

Ⓐ 0. Ⓑ 2. Ⓒ 1. Ⓓ -1.

Câu 42. Cho hàm số $f(x) = x^6 - 6a^5x - 5b$ với a và b là hai số thực không âm. Biết hàm số đạt giá trị nhỏ nhất bằng -5. Giá trị lớn nhất của biểu thức ab tương ứng bằng

Ⓐ 1. Ⓑ $\dfrac{6}{7}$. Ⓒ $\dfrac{2}{7\sqrt{6}}$. Ⓓ $\dfrac{6}{7\sqrt[6]{7}}$.

Câu 43. Cho hai số thực x, y thỏa mãn $x^2 + 4y^2 = 4$. Gọi giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \dfrac{x^2 + 2xy + 1}{2y^2 + 2}$ lần lượt là M và m. Giá trị của biểu thức $T = 4M - 4m$ bằng

Ⓐ $\sqrt{113}$. Ⓑ 36. Ⓒ 12. Ⓓ 64.

Câu 44. Biết rằng để giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x^3 - mx + 1$ trên đoạn $[1; 2]$ bằng 4 thì giá trị thực của tham số $m = \dfrac{a}{b}$, trong đó a, b là những số nguyên dương và phân số $m = \dfrac{a}{b}$ tối giản. Giá trị của biểu thức $T = a + b$ bằng

Ⓐ 7. Ⓑ 8. Ⓒ 9. Ⓓ 5.

Câu 45. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số $m \in [-50; 50]$ để giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x^4 - mx$ trên đoạn $[-1; 3]$ nhỏ hơn hoặc bằng 60

Ⓐ 53. Ⓑ 44. Ⓒ 58. Ⓓ 8.

Câu 46. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số $m \in [-50; 50]$ để giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 3mx$ trên đoạn $[1; 3]$ lớn hơn hoặc bằng 40

Ⓐ 52. Ⓑ 51. Ⓒ 49. Ⓓ 50.

Câu 47. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x^3 + mx^2$ trên đoạn $[1; 2]$ nằm trong $(6; 20)$?

Ⓐ 1. Ⓑ 2. Ⓒ 4. Ⓓ 3.

Câu 48. Để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^3 - mx^2$ trên đoạn $[1; 2]$ bằng 1 thì giá trị thực của tham số m bằng ?

Ⓐ -1. Ⓑ 1. Ⓒ -2. Ⓓ 0.

Câu 49. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-30; 30]$ để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \dfrac{x\sqrt{x} - mx}{x+1}$ trên đoạn $[1; 4]$ lớn hơn hoặc bằng 2

Ⓐ 3. Ⓑ 27. Ⓒ 28. Ⓓ 33.

Câu 50. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-30; 30]$ để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \dfrac{x^2 + mx + 1}{x+1}$ trên đoạn $[1; 2]$ nhỏ hơn hoặc bằng 3

Ⓐ 35. Ⓑ 26. Ⓒ 11. Ⓓ 31.

Câu 51. Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số $m \in (-44; 44)$ để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^3 + mx - 1$ trên đoạn $[0; 3]$ nằm trong $[-2; 0]$. Số phần tử của tập S là

Ⓐ 41. Ⓑ 45. Ⓒ 72. Ⓓ 5.

Câu 52. Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị thực của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \dfrac{x^2 + 2mx}{x^2 + x + 1}$ bằng $-\dfrac{1}{2}$. Tổng bình phương tất cả các phần tử của tập S bằng

Ⓐ $\dfrac{13}{8}$. Ⓑ 1. Ⓒ $\dfrac{11}{4}$. Ⓓ $\dfrac{5}{2}$.

Câu 53. Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số $m \in [-30; 30]$ để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \dfrac{x^2 + m}{x^2 + 2x + 2}$ lớn hơn $-\dfrac{1}{3}$. Số phần tử của tập S bằng

Ⓐ 31. Ⓑ 32. Ⓒ 11. Ⓓ 2.

Câu 54. Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \dfrac{x^2 - 2mx + 4}{x^2 + 2x + 3}$ nhỏ hơn $\dfrac{1}{3}$. Số phần tử của tập S bằng

Ⓐ 2. Ⓑ 3. Ⓒ 59. Ⓓ 58.

Câu 55. Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị thực của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \dfrac{x^2 - mx + 3}{x^2 + 2x + 2}$ bằng 2. Tổng bình phương các phần tử của tập S bằng

Ⓐ 32. Ⓑ 36. Ⓒ 40. Ⓓ 48.

Câu 56. Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \dfrac{x^2 - mx + 2}{x^2 + x + 1}$ nhỏ hơn 4. Số phần tử của tập S bằng

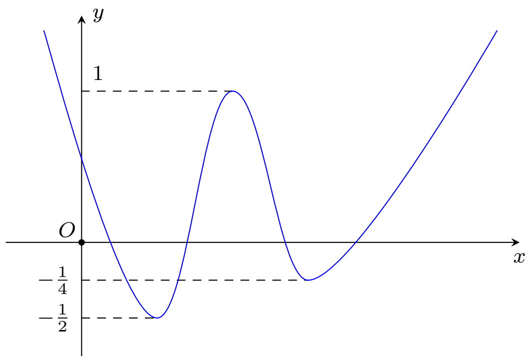
Ⓐ 2. Ⓑ 10. Ⓒ 8. Ⓓ 9.

Câu 57. Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số $m \in [-30; 30]$ để giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \dfrac{2x^2 - mx + 3}{x^2 - 2x + 2}$ lớn hơn 6. Số phần tử của tập S bằng

Ⓐ 17. Ⓑ 16. Ⓒ 43. Ⓓ 35.

Dạng 3. Min, max của hàm hợp

Câu 1.
Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ sau. Cho $a = |f(x) - |f(x)||$, $b = -a^2 + a + \dfrac{3}{4}$ và $S = \dfrac{3}{8}\sqrt[3]{(b+1)^2\left[1 + b^2(2-b)^2\right]} - \dfrac{2}{1 + b\sqrt{2-b}}$. Có giá trị lớn nhất của S bằng $\dfrac{m}{n}$ và $k = \dfrac{(m+n)^2}{|mn|}$. Khẳng định đúng là



Ⓐ $k = 1$. Ⓑ $k = \dfrac{49}{6}$. Ⓒ $k = \dfrac{25}{4}$. Ⓓ $k = \dfrac{9}{4}$.

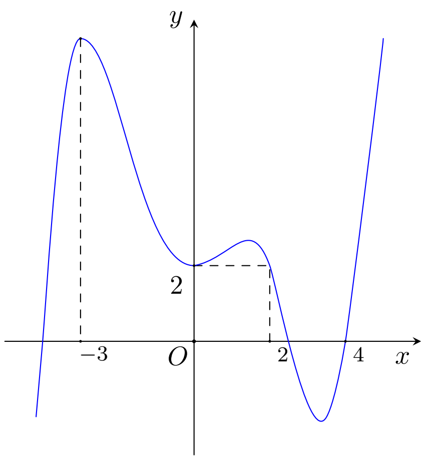
Câu 2. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = |x^3 - 3x + m|$ trên đoạn $[0;3]$ bằng 16. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

Ⓐ -16. Ⓑ 16. Ⓒ -12. Ⓓ -2.

Câu 3. Cho hàm số $f(x) = (x-1)^2(x+m^2) - \dfrac{3}{2}m$ (m là số thực). Gọi tổng các giá trị của m sao cho $\max\limits_{[1;2]}|f(x)| + \min\limits_{[1;2]}|f(x)| = \dfrac{9}{4}$ là $S = \dfrac{1}{2}(\sqrt{a} - \sqrt{b})$ (với $a, b \in \mathbb{R}$). Giá trị $\dfrac{b}{a}$ bằng

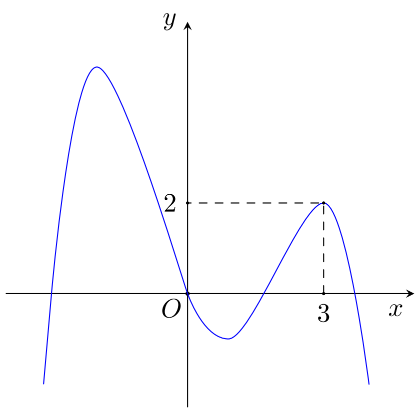
Ⓐ $\dfrac{5}{18}$. Ⓑ $\dfrac{9}{5}$. Ⓒ $\dfrac{36}{5}$. Ⓓ $\dfrac{18}{5}$.

Câu 4.
Cho hàm số $f(x)$, đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ là đường cong trong hình bên. Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f(2x) - 4x$ trên đoạn $\left[-\dfrac{3}{2}; 2\right]$ bằng



Ⓐ $f(0)$. Ⓑ $f(-3) + 6$. Ⓒ $f(2) - 4$. Ⓓ $f(4) - 8$.

Câu 5.
Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx$, $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$, biết đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ. Gọi S là tập hợp các giá trị của x sao cho hàm số $g(x) = \dfrac{2f(x) - 2}{f^2(x) - 2f(x) + 2}$ đạt giá trị lớn nhất hoặc đạt giá trị nhỏ nhất. Số phần tử của tập S là



Ⓐ 3. Ⓑ 4. Ⓒ 5. Ⓓ 7.

Câu 6. Cho hàm số $f(x) = \left|\dfrac{x+m}{x+1}\right|$. Số giá trị của m thỏa mãn $\max\limits_{[1;2]} f(x) + \min\limits_{[1;2]} f(x) = \dfrac{16}{3}$ là

Ⓐ 3. Ⓑ 0. Ⓒ 1. Ⓓ 2.

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-4;4]$ và có bảng biến thiên như hình vẽ bên dưới.

x	-4	-3	-2	1	2	3	4
$f(x)$	0	-2	5	-6	4	-5	3

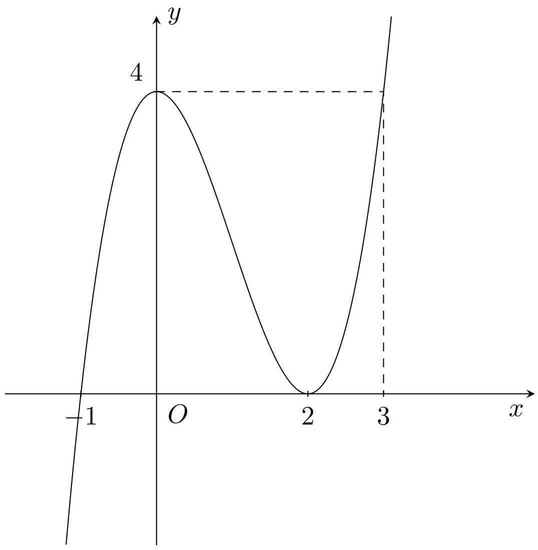
Có tất cả bao nhiêu giá trị thực của tham số m thuộc đoạn $[-4;4]$ để hàm số $g(x) = |f(x^3+2x)+3f(m)|$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $[-1;1]$ bằng 8?

Ⓐ 12. Ⓑ 11. Ⓒ 9. Ⓓ 10.

Câu 8. Cho hàm số $f(x) = 8x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ thỏa mãn $|f(x)| \leq 1, \forall x \in [-1;1]$. Tính $S = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$.

Ⓐ 60. Ⓑ 75. Ⓒ 70. Ⓓ 65.

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ và hàm số $g(x) = \dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{2-x}+|4x-2|+|6-4x|}{|2x-1|+|2x-3|}$. Đặt $h(x) = f(g(x)) - f(3-2x+x^2) + f\left(2-\sqrt{4-m^2}\right)$. Gọi M là giá trị lớn nhất của $h(x)$. Giá trị lớn nhất của M thuộc khoảng nào sau đây?



Ⓐ $(0;2)$. Ⓑ $(2;4)$. Ⓒ $(4;5)$. Ⓓ $(5;10)$.

Câu 10. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{2x^4 - mx - 4}{x+2}$ với m là tham số .Tìm tham số m để $\min\limits_{[-1;1]} |f(x)| > \dfrac{3}{4}$.

Ⓐ $m > \dfrac{1}{4}$. Ⓑ $m < \dfrac{1}{5}$. Ⓒ $m \in \mathbb{R}$. Ⓓ $\dfrac{1}{4} < m < \dfrac{5}{4}$.

Câu 11. Cho các số thực x, y thỏa mãn $x - 3\sqrt{x+1} = 3\sqrt{y+2} - y$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + y$ là

Ⓐ $\min P = \dfrac{9+3\sqrt{21}}{2}$. Ⓑ $\min P = 9 + 3\sqrt{15}$. Ⓒ $\min P = -63$. Ⓓ $\min P = -91$.

Câu 12. Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x$ và $g(x) = |f(2-\cos x) + m|$ (m là tham số thực), gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho $3\max\limits_{\mathbb{R}} g(x) + \min\limits_{\mathbb{R}} g(x) = 10$. Tổng giá trị tất cả các phần tử của S bằng

Ⓐ -16. Ⓑ 12. Ⓒ -32. Ⓓ -28.

Câu 13. Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{ax+b}{2x^2+2}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $f(x)$. Có bao nhiêu cặp số (a, b) với $a, b \in \mathbb{Z}$ sao cho $M^2+m^2 \leq 5$?

(A) 51. (B) 89. (C) 198. (D) 102.

Câu 14. Cho hàm số $y=\left|\dfrac{1}{3}x^3-(m+2)x^2+\left(3-3m^2\right)x+1\right|$. Tìm $m \in \left(-\dfrac{2}{3}; 0\right)$ để giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1; 1]$ bằng 4.

(A) $m=\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$. (B) $m=\dfrac{1-\sqrt{3}}{4}$. (C) $m=\dfrac{1-\sqrt{2}}{4}$. (D) $m=\dfrac{1-\sqrt{5}}{6}$.

Câu 15. Tìm số giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|3x^4-4x^3-6mx^2+12mx+m\right|$ trên đoạn $[1; 2]$ bằng 18.

(A) 0. (B) 3. (C) 1. (D) 2.

Câu 16. Cho hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $[f(x)-x]\cdot f(x)=x^6+3x^4+2x^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[1; 2]$. Giá trị của $3M-m$ bằng

(A) 33. (B) -3. (C) 4. (D) -28.

Câu 17. Có bao nhiêu số thực m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left|x^2-2x+m\right|+4x$ bằng -1.

(A) 0. (B) 3. (C) 2. (D) 1.

Câu 18. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\left|x^3-12x+m\right|$ trên $[1; 3]$ không vượt quá 20?

(A) 33. (B) 34. (C) 35. (D) 36.

Câu 19. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\left|x^2+ax+b\right|$ trên đoạn $[-1; 3]$. Giá trị của biểu thức $a+2b$ khi M nhỏ nhất là

(A) 3. (B) -4. (C) 2. (D) 4.

Lời giải.

M là giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\left|x^2+ax+b\right|$ trên đoạn $[-1; 3]$

$\Rightarrow \begin{cases} M \geq f(-1) \\ M \geq f(3) \\ 2M \geq 2f(1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M \geq |1-a+b| \\ M \geq |9+3a+b| \\ 2M \geq 2|1+a+b| \end{cases}$

$\Rightarrow 4M \geq |1-a+b|+|9+3a+b|+2|-1-a-b| \geq |1-a+b+9+3a+b-2-2a-2b|$

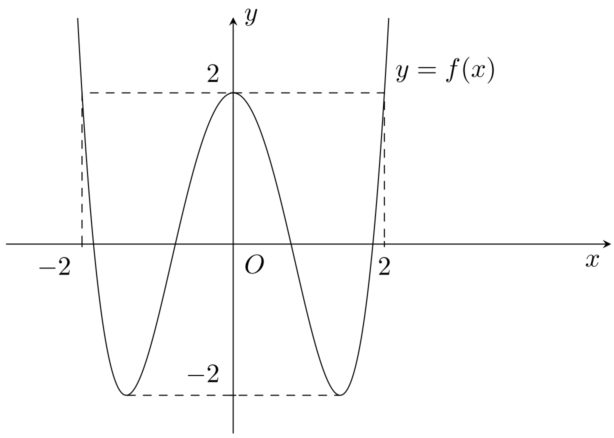
$\Rightarrow 4M \geq 8 \Rightarrow M \geq 2 \Rightarrow M_{\min}=2$.

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} -a+b+1=2 \\ 3a+b+9=2 \\ -1-a-b=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=-1. \end{cases}$

Thử lại thấy thỏa $M=2$ là giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-1; 3]$.

Vậy $a+2b=-4$. □

Câu 20. Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[0; 20]$ sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)=||2f(x)+m+4|-f(x)-3|$ trên đoạn $[-2; 2]$ không bé hơn 1?



Ⓐ 18. Ⓑ 19. Ⓒ 20. Ⓓ 21.

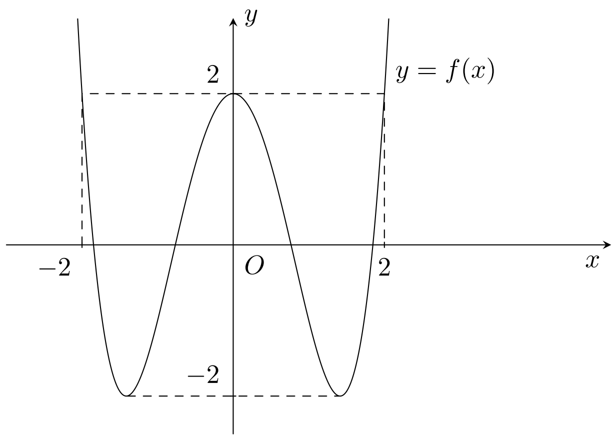
Câu 21. Tìm tất cả các giá trị của a để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 4ax + |x^2 - 4x + 3|$ lớn hơn 2?

Ⓐ $a > \frac{1}{2}$. Ⓑ $a < -1$. Ⓒ $\frac{1}{2} < a < \frac{3}{2}$. Ⓓ $a < 0$.

Câu 22. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $f(x) = \left|\dfrac{2mx - 2\sqrt{4x+8}}{x+2}\right|$ có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-1; 1]$ là a thỏa mãn $0 < a < 1$?

Ⓐ 3. Ⓑ 4. Ⓒ 5. Ⓓ 2.

Câu 23. Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[1; 20]$ sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = |2f(x) + m + 4| + |f(x) + 3m - 2|$ trên đoạn $[-2; 2]$ không bé hơn 2. Tổng tất cả các phần tử của S bằng



Ⓐ 207. Ⓑ 209. Ⓒ 210. Ⓓ 212.

Câu 24. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = |x^2 - 5x + 4| + mx$ lớn hơn 1. Số phần tử của S là

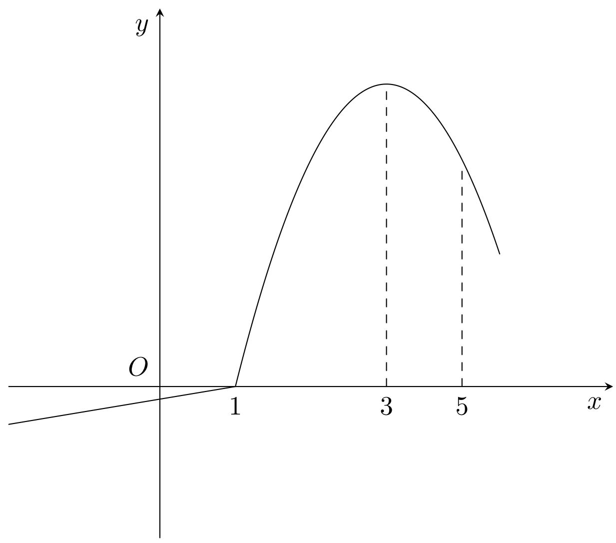
Ⓐ 7. Ⓑ 6. Ⓒ 8. Ⓓ 3.

Câu 25. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ và $f''(x) < 0, \forall x \in (0; +\infty)$. Biết a, x thay đổi trên đoạn $[0; 2]$ và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = \dfrac{\left[(f'(x))^2 + 1\right]\left[2f'(0) + (a-x)f'(a) + 6\right]}{\left[f\left(2 - \sqrt{4-2x}\right) + f(x)\right]^2\left[f\left(2 - \sqrt{4-2x}\right) + f(a)\right]}$ bằng $\dfrac{m}{n}$ (phân số tối giản, $m, n \in \mathbb{Z}_+$). Tổng $m + n$ thuộc khoảng nào dưới đây?

x	$-\infty$		-3		0		2		$+\infty$
$f(x)$		↘		↗	2	↗	4	↘	

Ⓐ $(20; 25)$. Ⓑ $(95; 145)$. Ⓒ $(45; 75)$. Ⓓ $(75; 95)$.

Câu 26. Cho đồ thị hàm số $f(x) = f'(x)$ như hình vẽ. Biết rằng $f(0) - f(3) = f(5) - f(1)$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[0; 5]$. Đáp án đúng là

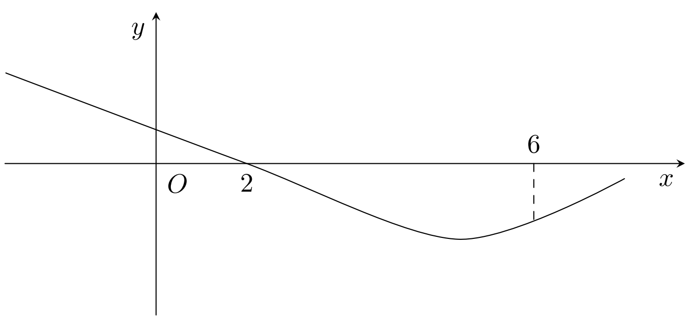


Ⓐ $M = f(5); m = f(1)$. Ⓑ $M = f(0); m = f(1)$.
Ⓒ $M = f(3); m = f(0)$. Ⓓ $M = f(1); m = f(5)$.

Câu 27. Đặt $M = max\left|\sqrt{4x - x^2} - mx\right|$. Giá trị nhỏ nhất của M là

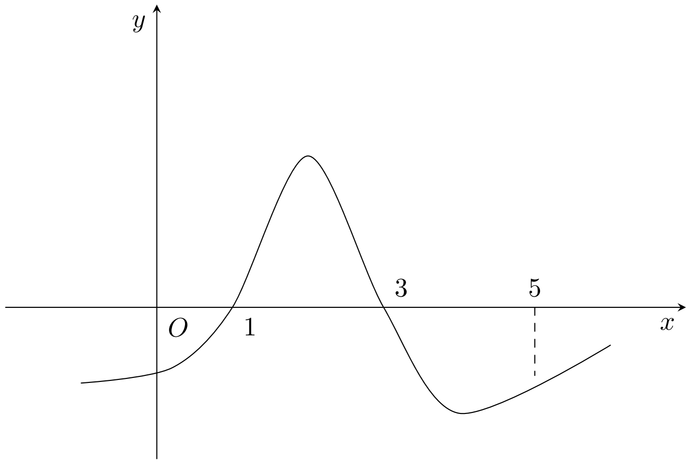
Ⓐ 1. Ⓑ $\sqrt{2}$. Ⓒ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Ⓓ 2.

Câu 28. Cho đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Biết rằng $2f(6) = f(0) + f(2)$ Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[0; 6]$. Đáp án đúng là



Ⓐ $M = f(6); m = f(0)$. Ⓑ $M = f(2); m = f(6)$.
Ⓒ $M = f(2); m = f(0)$. Ⓓ $M = f(6); m = f(0)$.

Câu 29. Cho đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Biết rằng $f(0)+f(2) = f(1)+f(3)$ và $f(0)+f(1) = f(3) + f(5)$ Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[0; 5]$. Đáp án đúng là



(A) $M = f(3); m = f(1)$.
(B) $M = f(0); m = f(1)$.
(C) $M = f(0); m = f(5)$.
(D) $M = f(3); m = f(5)$.

Câu 30. Cho hàm số $y = f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên $\mathbb{R}$ tương ứng là m. Khi đó giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = 3f(x) + x^2 - 2x$ thỏa mãn điều kiện nào dưới đây?

(A) $\min g(x) \geq 3m$.
(B) $\min g(x) = 3m - 2$.
(C) $\min g(x) \leq 3m - 2$.
(D) $\min g(x) \geq 3m - 1$.

.

Câu 31. Cho hàm số $y = f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên $\mathbb{R}$ tương ứng là 3 và giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = 4f(x) + x^2 - 4x$ tương ứng bằng 8. Kết luận nào dưới đây luôn đúng?

(A) $f(2) = 3$.
(B) $f(2) > 3$.
(C) $f(3) < 3$.
(D) $f(3) \geq 4$.

Câu 32. Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$, có giá trị lớn nhất lần lượt là 3 và 6. Khi đó giá trị lớn nhất của hàm số $y = 3f(x) + 2g(x)$ luôn thỏa mãn điều kiện nào dưới đây?

(A) $\max(3f(x) + 2g(x)) \leq 21$.
(B) $\max(3f(x) + 2g(x)) \geq 24$.
(C) $\max(3f(x) + 2g(x)) \leq 30$.
(D) $\max(3f(x) + 2g(x)) \geq 21$.

Câu 33. Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$, có giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ là 6 và giá trị nhỏ nhất $y = g(x)$ là 3. Khi đó giá trị lớn nhất của hàm số $y = 2f(x) - 3g(x) + 2$ luôn thỏa mãn điều kiện nào dưới đây?

(A) $\max(2f(x) - 3g(x) + 2) \geq 5$.
(B) $\max(2f(x) - 3g(x) + 2) \leq 3$.
(C) $\max(2f(x) - 3g(x) + 2) \leq 5$.
(D) $\max(2f(x) - 3g(x) + 2) \geq 2$.

Câu 34. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có giá trị lớn nhất là 2. Biết hàm số $y = 2f(x) - x^2 + 6x$ có giá trị lớn nhất bằng 8. Chọn đáp án đúng trong các đáp án sau.

(A) $f(0) \leq 4$.
(B) $f(3) \leq -1$.
(C) $f(2) \geq 0$.
(D) $f(2) \leq -2$.

Câu 35. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$, có $\min f(x) = 4$. Khi đó kết luận đúng về nghiệm của bất phương trình $f(x) > 4$ sẽ là

(A) luôn có nghiệm.
(B) luôn vô nghiệm.
(C) có thể có nghiệm có thể vô nghiệm.
(D) luôn có đúng một nghiệm duy nhất.

Câu 36. Cho hàm số $y = f(x) = x^4 - 2ax + 6a - 3$ có giá trị nhỏ nhất bằng m. Nhận xét nào trong các đáp án dưới đây luôn đúng?

(A) $m \geq -3$.
(B) $m < -3$.
(C) $m \leq 78$.
(D) $m \leq 3$.

Câu 37. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có giá trị lớn nhất và nhỏ bằng M và m. Biết rằng $f(a) + 2f(b) = 18$, trong đó a và b là hai số thực dương. Nhận xét nào trong các đáp án dưới đây là luôn đúng?

(A) $m \leq 3$.
(B) $M \geq 9$.
(C) $m \leq 5$.
(D) $M \geq 6$.

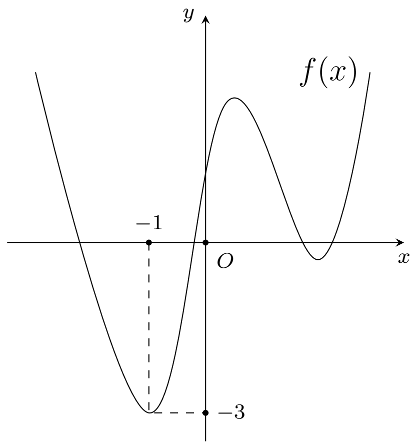
Câu 38. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất lần lượt là M và m . Biết rằng $f(a) + 2f(b) = 12$, trong đó a và b là hai số thực dương. Khi đó giá trị biểu thức $(M - 2)(m - 5)$ có thể bằng

Ⓐ -1. Ⓑ -3. Ⓒ 0. Ⓓ 10.

Câu 39. Cho hàm số $f(x) = x^4 - 2ax + 4a - 7$, có giá trị nhỏ nhất là m. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương mà m có thể nhận?

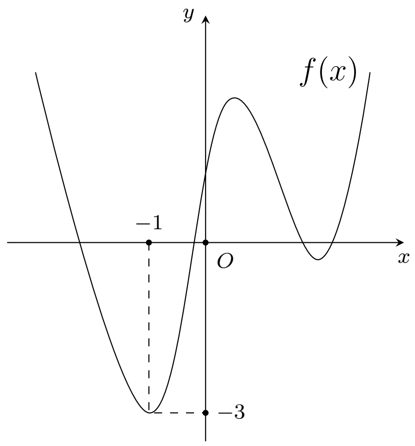
Ⓐ 11. Ⓑ 8. Ⓒ 9. Ⓓ 10.

Câu 40. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ. Biết rằng m là tham số thực, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) + x^2 - 2mx + m^2 + 1$ tương ứng bằng



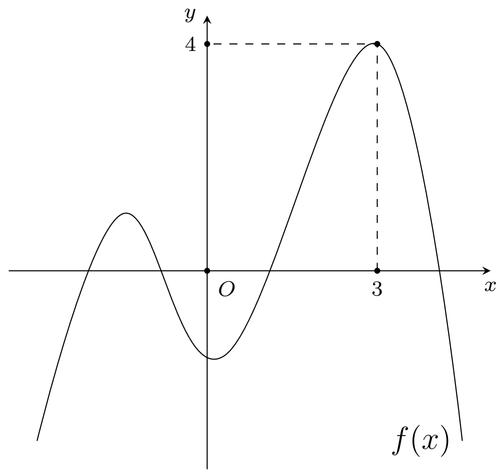
Ⓐ 1. Ⓑ 3. Ⓒ -1. Ⓓ -2.

Câu 41. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ. Biết rằng m là tham số thực, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(2x + 3) + x^2 - 4mx + 4m^2 - 1$ bằng -4 thì tham số m bằng



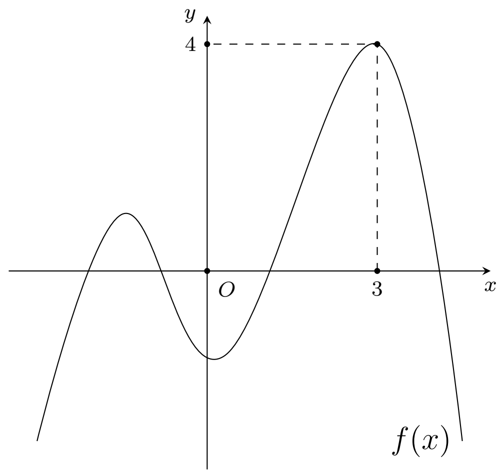
Ⓐ -1. Ⓑ 0. Ⓒ $-\dfrac{1}{2}$. Ⓓ 2.

Câu 42. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ. Biết rằng m là tham số thực. Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $f(3x - m) + 2f\left(x^2 - 2x\right)$ đạt giá trị lớn nhất. Tổng các giá trị của tất cả các phần tử thuộc tập S bằng



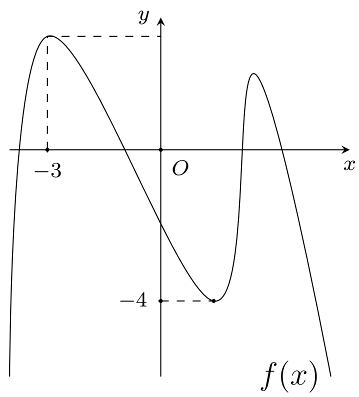
(A) 6. (B) 3. (C) 0. (D) -2.

Câu 43. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Biết rằng m, n là hai số thực. Để hàm số $3f(3x - m) + f(x + n) - x^2 + 4x$ đạt giá trị lớn nhất thì $(2m - n)$ bằng



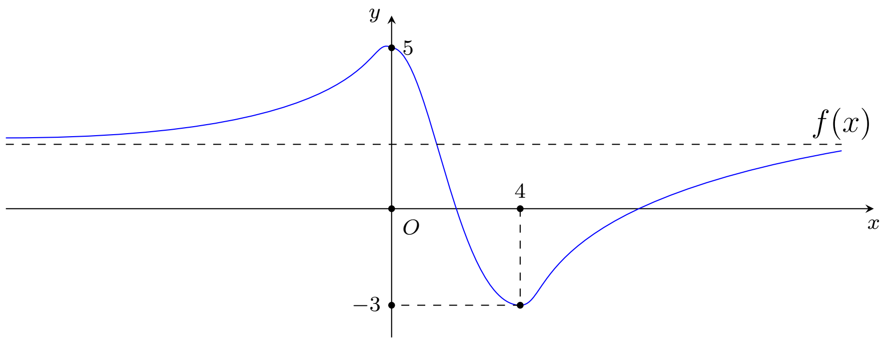
(A) 3. (B) 0. (C) 5. (D) 1.

Câu 44. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị thực của tham số m để hàm số $g(x) = x^2 - 2m^2x + m^4 - f(f(x))$ đạt giá trị nhỏ nhất?



(A) 6. (B) 4. (C) 3. (D) 8.

Câu 45. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Biết rằng m, n là hai số thực. Để hàm số $2f(2x - m) - f(3x + n) + x^2 - 2x$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $T = 2m + 3n$ bằng



Ⓐ -11. Ⓑ -7. Ⓒ -13. Ⓓ 5.

Câu 46. Cho hàm số $f(x) = x^2 - 2mx$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-30; 30]$ để hàm số $f(x)$ tồn tại giá trị nhỏ nhất trên $(-1; 3)$?

Ⓐ 3. Ⓑ 2. Ⓒ 5. Ⓓ 4.

Câu 47. Cho hàm số $f(x) = -x^2 + 2(2m-1)x$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-30; 30]$ để hàm số $f(x)$ tồn tại giá trị nhỏ nhất trên $(-3; 11]$?

Ⓐ 6. Ⓑ 37. Ⓒ 4. Ⓓ 5.

Câu 48. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-30; 30]$ để hàm số $f(x)$ tồn tại giá trị nhỏ nhất nhất trên $(1; 3)$?

Ⓐ 8. Ⓑ 9. Ⓒ 7. Ⓓ 11.

Câu 49. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-30; 30]$ để hàm số $f(x)$ tồn tại giá trị nhỏ nhất trên $(-2; 3)$?

Ⓐ 30. Ⓑ 18. Ⓒ 32. Ⓓ 1.

Dạng 4. Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số chứa dấu giá trị tuyệt đối

Câu 1. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=|x^2+4x-5|$ trên đoạn $[-3;0]$. Khi đó tổng $M+m$ là

Ⓐ 5. Ⓑ 9. Ⓒ 14. Ⓓ 8.

Câu 2. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=|x^3-3x^2-7|$ trên đoạn $[0;4]$ là

Ⓐ 0. Ⓑ 11. Ⓒ 9. Ⓓ 7.

Câu 3. Cho hàm số $y=|x^4-16x^2-7|$, gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[0;4]$. Tính giá trị biểu thức $M-2m$.

Ⓐ 14. Ⓑ 57. Ⓒ 64. Ⓓ 60.

Câu 4. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=\left|\dfrac{2x-1}{x+2}\right|$ trên đoạn $[-1;1]$. Giá trị của biểu thức $2M-3m$ là

Ⓐ 1. Ⓑ $\dfrac{1}{3}$. Ⓒ 0. Ⓓ 6.

Câu 5. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left|\dfrac{x^2-3x+3}{x-1}\right|$ trên đoạn $\left[-2;\dfrac{1}{2}\right]$. Giá trị của biểu thức $3M+m$ bằng

Ⓐ $\dfrac{27}{2}$. Ⓑ 10. Ⓒ $-\dfrac{40}{3}$. Ⓓ 16.

Câu 6. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=|\mathrm{e}^{3x}-4\mathrm{e}^{2x}+4\mathrm{e}^{x}-10|$ trên đoạn $[0;\ln 4]$.

Ⓐ 9. Ⓑ 6. Ⓒ 10. Ⓓ 5.

Câu 7. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=\left|\ln^2 x-2\ln x-3\right|$ trên đoạn $[1;\mathrm{e}^2]$. Giá trị $M+m$ bằng

Ⓐ 4. Ⓑ 7. Ⓒ 5. Ⓓ 3.

Câu 8. Giả sử M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=|\cos 2x+2\sin x-3|$ trên $\left[0;\dfrac{3\pi}{2}\right]$. Tính $M-4m$.

Ⓐ 6. Ⓑ 0. Ⓒ -2. Ⓓ 3.

Câu 9. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left|x^2-1+\sqrt{3-x^2}\right|$. Khi đó $M+m=\dfrac{a}{4}+b\sqrt{c}$ với a, b, c nguyên. Tính $T=a+bc$.

Ⓐ 7. Ⓑ 9. Ⓒ 12. Ⓓ 8.

Câu 10. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=|x-1|+x^2-5x+3$ trên đoạn $[-2;4]$. Tính giá trị biểu thức $T=M+m$.

Ⓐ $T=18$. Ⓑ $T=19$. Ⓒ $T=20$. Ⓓ $T=2$.

Câu 11. Tích giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y=|x^2-4x+3|+x^2-1$ trên $[-4;2]$ bằng

Ⓐ -200. Ⓑ 200. Ⓒ 50. Ⓓ 0.

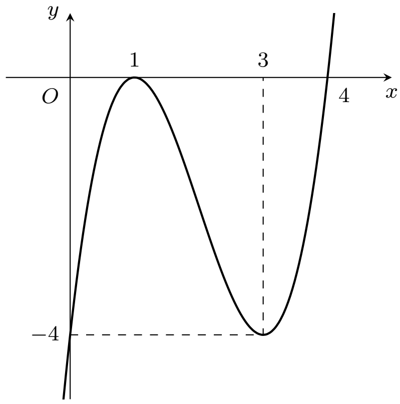
Câu 12. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=|x^2-3x+2|+|x+3|$ là 2^a. Tìm a.

Ⓐ 0. Ⓑ 2. Ⓒ 3. Ⓓ 1.

Câu 13. Cho hàm số $y=||3x-1|-1|+|x^2-2|$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $\left[0;\dfrac{3}{2}\right]$. Giả sử $\dfrac{M}{m}=\dfrac{a}{b}$ ($\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản), biểu thức $T=a+b$ có giá trị bằng

Ⓐ 37. Ⓑ 40. Ⓒ 13. Ⓓ 20.

Câu 14. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị (C) như hình vẽ sau



Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = |f(x)|$ trên đoạn $[0; 4]$. Khi đó biểu thức $M + 2m$ có giá trị

Ⓐ 4. Ⓑ 1. Ⓒ 8. Ⓓ 0.

Câu 15. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = |f(|x| + 1) - 1|$ trên đoạn $[-2; 2]$.

Ⓐ 2. Ⓑ 1. Ⓒ 3. Ⓓ 4.

Câu 16. Có tất cả bao nhiêu giá trị của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = |x^2 - 2x + m|$ trên $[-1; 2]$ bằng 5.

Ⓐ 3. Ⓑ 1. Ⓒ 2. Ⓓ 4.

Câu 17. Tính tích tất cả các số thực m để hàm số $y = \left|\dfrac{4}{3}x^3 - 6x^2 + 8x + m\right|$ có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0; 3]$ bằng 18 là.

Ⓐ 432. Ⓑ -216. Ⓒ -432. Ⓓ 288.

Câu 18. Cho hàm số $f(x) = |x^4 - 2x^2 + m - 1|$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[0; 2]$ bằng 18. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

Ⓐ -5. Ⓑ 4. Ⓒ -14. Ⓓ -10.

Câu 19. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{2x - m}{1 - x}$. Gọi S là tập hợp tất các giá trị của m để $\min\limits_{[-2;0]} |f(x)| = 2$. Tổng các phần tử của tập S là

Ⓐ 2. Ⓑ -8. Ⓒ -5. Ⓓ 3.

Câu 20. Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{x^2}{x - 1} + m$ (m là tham số thực). Gọi S là tập hợp các giá trị của m sao cho $\min\limits_{[2;3]} |f(x)| = 5$. Số phần tử của S là

Ⓐ 3. Ⓑ 2. Ⓒ 1. Ⓓ 4.

Câu 21. Cho hàm số $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình vẽ. Tính tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = |f(x) + m|$ trên đoạn $[0; 4]$ bằng 9.

Ⓐ -10. Ⓑ -6. Ⓒ 4. Ⓓ 8.

Câu 22. Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = |f(\sin x + 1) + m|$ bằng 4. Tổng các phần tử của S bằng

(A) 4. (B) 2. (C) 0. (D) 6.

Câu 23. Biết đồ thị hàm số $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ có đúng ba điểm chung với trục hoành và $f(1) = -1$; $f'(1) = 0$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m để bất phương trình $|f(x) - m| \leq 12$ nghiệm đúng $\forall x \in [0; 2]$. Số phần tử của S là

(A) 10. (B) 16. (C) 11. (D) 0.

Câu 24. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{x + 2020}{x - m}$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị của tham số m sao cho $\max\limits_{[0;2019]} |f(x)| = 2020$.

(A) 2. (B) 1. (C) 3. (D) 4.

Câu 25. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \left|\dfrac{x^2 + 2mx + 4m}{x + 2}\right|$ trên đoạn $[-1; 1]$ bằng 3. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

(A) 1. (B) $-\dfrac{1}{2}$. (C) $\dfrac{1}{2}$. (D) $-\dfrac{3}{2}$.

Câu 26. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $f\left(x\right) = \left|\dfrac{x^2 + 2mx + 4m}{x + 2}\right|$ trên đoạn $[-1; 1]$ bằng 3. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

(A) 1. (B) $-\dfrac{1}{2}$. (C) $\dfrac{1}{2}$. (D) $-\dfrac{3}{2}$.

Câu 27. Tính tổng tất cả các giá trị nguyên lớn hơn 6 của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = |x^2 - (m + 1)x + m|$ trên $[2; m - 1]$nhỏ hơn 2020.

(A) 2043210. (B) 2034201. (C) 3421020. (D) 3412020.

Câu 28. Cho hàm số $y = \left|x^3 - \dfrac{9}{2}x^2 + 6x - 3 + m\right|$. Tổng các giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10; 10]$ để giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[0; 3]$ không bé hơn 5.

(A) 1. (B) -1. (C) 0. (D) -7.

Câu 29. Cho hàm số $y = \left|\dfrac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2 + m\right|$. Tính tổng tất cả các số nguyên m để $\max\limits_{[-1;2]} y \leq 11$.

(A) -19. (B) -37. (C) -30. (D) -11.

Câu 30. Có bao nhiêu số nguyên m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = |-4\cos^2 x + 2\sin x + m + 4|$ trên đoạn $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$ nhỏ hơn hoặc bằng 4?

(A) 12. (B) 14. (C) 13. (D) 15.

Câu 31. Cho hàm số $f\left(x\right) = |x^2 - 2mx + 3|$. Có bao nhiêu giá trị m nguyên để giá trị lớn nhất của $f\left(x\right)$ trên đoạn $[1; 2]$ không lớn hơn 3?

(A) 2. (B) 3. (C) 1. (D) 4.

Câu 32. Cho hàm số $y = |x^3 - 3x^2 - 9x + m|$ (với m là tham số thực). Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của tham số m để $\max\limits_{[-2;3]} y < 50$. Tổng các phần tử của M là

(A) 0. (B) 737. (C) 759. (D) -215.

Câu 33. Cho hàm số $y = |x^4 - 2x^3 + x^2 + a|$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số a để $\max\limits_{[-1;2]} y \leq 100$.

(A) 197. (B) 196. (C) 200. (D) 201.

Câu 34. Cho hàm số $y = |\sin x + \cos x + m|$, có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số có giá trị lớn nhất bé hơn 2.

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

Câu 35. Gọi M là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = |x^2 + 2x + m|$ trên đoạn $[-2; 1]$. Với $m \in [-3; 3]$, giá trị lớn nhất của M bằng

Ⓐ 1. Ⓑ 2. Ⓒ 3. Ⓓ 4.

Câu 36. Cho hàm số $f(x) = |x^4 - 4x^3 + 4x^2 + m|$. Khi m thuộc $[-3; 3]$ thì giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[0; 2]$ đạt giá trị lớn nhất bằng

Ⓐ 4. Ⓑ 3. Ⓒ 2. Ⓓ 1.

Câu 37. Cho hàm số $y = |x^2 - 4x + 2m - 3|$ với m là tham số thực. Biết rằng giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[1; 3]$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng a khi $m = b$. Tính $P = 2b - a$.

Ⓐ $\dfrac{1}{2}$. Ⓑ $\dfrac{13}{4}$. Ⓒ $\dfrac{-9}{4}$. Ⓓ 6.

Câu 38. Cho hàm số $y = |x^3 + x^2 + (m^2 + 1)x + 27|$. Gọi S là tập tất cả các giá trị của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-3; -1]$ có giá trị nhỏ nhất. Khi đó tích các phần tử của S là

Ⓐ 4. Ⓑ -4. Ⓒ 8. Ⓓ -8.

Câu 39. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left|\dfrac{1}{4}x^4 - \dfrac{19}{2}x^2 + 30x + m\right.$ trên đoạn $[0; 2]$ đạt giá trị nhỏ nhất?

Ⓐ 2. Ⓑ 3. Ⓒ 0. Ⓓ 1.

Câu 40. Gọi S là tập hợp các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^2 - 2x + m|$ trên đoạn $[0; 2]$ bằng 3. Số phần tử của S là

Ⓐ 2. Ⓑ 1. Ⓒ 0. Ⓓ 4.

Câu 41. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = |x^3 - mx^2 - 9x + 9m|$ trên đoạn $[-2; 2]$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Ⓐ 3. Ⓑ 5. Ⓒ 4. Ⓓ 6.

Câu 42. Có bao nhiêu số nguyên m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x) = |-x^4 + 8x^2 + m|$ trên đoạn$[-1; 3]$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Ⓐ 23. Ⓑ 24. Ⓒ 25. Ⓓ 26.

Câu 43. Cho hàm số$y = |x^4 - 2x^3 + x^2 + a|$. Có bao nhiêu số thực a để $\min\limits_{[-1;2]} y + \max\limits_{[-1;2]} y = 10$

Ⓐ 1. Ⓑ 5. Ⓒ 3. Ⓓ 2.

Câu 44. Cho hàm số $y = \left|\dfrac{x^2 + ax - 4}{x}\right|$ (a là tham số). Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[1; 4]$. Có bao nhiêu giá trị thực của a để $M + 2m = 7$?

Ⓐ 1. Ⓑ 2. Ⓒ 3. Ⓓ 4.

Câu 45. Cho hàm số $f(x) = x^4 - 2x^3 + m$ (m là tham số thực). Tìm tổng tất cả các giá trị của m sao cho $\max\limits_{[0;1]} |f(x)| + 2\min\limits_{[0;1]} |f(x)| = 10$.

Ⓐ 4. Ⓑ -3. Ⓒ 1. Ⓓ 2.

Câu 46. Cho hàm số$f(x) = |x^3 - 3x^2 + m|$. Tìm tất cả các giá trị của m thỏa mãn $3\max\limits_{[1;3]} f(x) - 2\min\limits_{[1;3]} f(x) = 17$.

Ⓐ $m \in \{9; -5; 29\}$. Ⓑ $m \in \left\{9; -5; \dfrac{-5}{3}\right\}$. Ⓒ $m \in \{9; -5\}$. Ⓓ $m \in \{9; -5; 5\}$.

Câu 47. Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x + m$. Tích tất cả các giá trị của tham số m để $\min\limits_{[0;2]} |f(x)| + \max\limits_{[0;2]} |f(x)| = 6$ là

Ⓐ -16. Ⓑ -9. Ⓒ 16. Ⓓ 144.

Câu 48. Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x + m$. Tích tất cả các giá trị của tham số m để $\min\limits_{[0;2]} |f(x)| + \max\limits_{[0;2]} |f(x)| = 6$ là

Ⓐ -16. Ⓑ -9. Ⓒ 16. Ⓓ 144.

Câu 49. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{x+m}{x+2}$ với m là tham số thực. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho

$$2\max_{[0;1]} |f(x)| + 3\min_{[0;1]} |f(x)| = 6.$$

Số phần tử của S là

Ⓐ 6. Ⓑ 2. Ⓒ 1. Ⓓ 4.

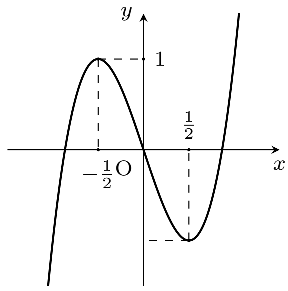
Câu 50. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên trên đoạn $[-4; 4]$ như sau

x	-4		-3		-1		0		2		4
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	-4	$\nearrow$	4	$\searrow$	2	$\nearrow$	3	$\searrow$	-3	$\nearrow$	1

Có bao nhiêu giá trị của tham số $m \in [-4; 4]$ để giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f\left(|x^3| + 3|x|\right) + f(m)$ trên đoạn $[-1; 1]$ bằng $\dfrac{11}{2}$.

Ⓐ 2. Ⓑ 3. Ⓒ 4. Ⓓ 5.

Câu 51. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Đặt

$$g(x) = |f(x)| - \sqrt{1 - 2|x|} + f\left(\frac{\sqrt{1+2m} - \sqrt{1-2m}}{2\sqrt{2}}\right).$$

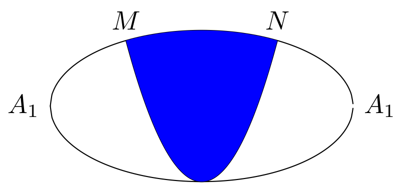
Với giá trị nào của m thì giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)$ là 0?

Ⓐ $-\dfrac{1}{2}$. Ⓑ 0.

Ⓒ $\dfrac{1}{2}$. Ⓓ Không tồn tại.

Dạng 5. Ứng dụng của Max - Min

Câu 1.
Một biển quảng cáo có dạng hình elip với bốn đỉnh A_1, A_2, B_1, B_2 như hình vẽ bên. Người ta chia elip bởi parabol có đỉnh B_1, trục đối xứng B_1B_2 và đi qua các điểm M, N. Sau đó sơn phần tô đậm với giá 200.000 đồng/m^2 và trang trí đèn led phần còn lại với giá 500.000 đồng/m^2. Hỏi kinh phí sử dụng gần nhất với giá trị nào dưới đây? Biết rằng $A_1A_2 = 4$m, $B_1A_2 = 2$m, $MN = 2$m.



Ⓐ 2.341.000 đồng. Ⓑ 2.057.000 đồng. Ⓒ 2.760.000 đồng. Ⓓ 1.664.000 đồng.

Câu 2. Một chất điểm chuyển động thẳng với quãng đường biến thiên theo thời gian bởi quy luật $s(t) = t^3 - 4t^2 + 12$, trong đó t là khoảng thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động. Vận tốc của chất điểm đó đạt giá trị bé nhất khi t bằng bao nhiêu?

Ⓐ 2. Ⓑ $\dfrac{8}{3}$. Ⓒ 0. Ⓓ $\dfrac{4}{3}$.

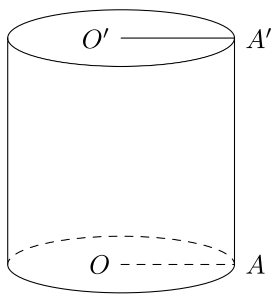
Câu 3. Tính diện tích lớn nhất của hình chữ nhật $ABCD$ nội tiếp trong nửa đường tròn có bán kính 10 cm .

Ⓐ 160 cm^2. Ⓑ 100 cm^2. Ⓒ 80 cm^2. Ⓓ 200 cm^2.

Câu 4. Người ta muốn xây một cái bể hình hộp đứng có thể tích $V = 18\text{m}^3$, biết đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp 3 lần chiều rộng và bể không có nắp. Hỏi cần xây bể có chiều cao h bằng bao nhiêu mét để nguyên vật liệu xây dựng là ít nhất?

Ⓐ 2 m. Ⓑ $\dfrac{5}{2}$ m. Ⓒ 1 m. Ⓓ $\dfrac{3}{2}$ m.

Câu 5. Một cốc hình trụ có bán kính đáy là 2 cm , chiều cao 20 cm . Trong cốc đang có một ít nước, khoảng cách giữa đáy cốc và mặt nước là 12 cm. Một con quạ muốn uống được nước trong cốc thì mặt nước phải cách miệng cốc không quá 6 cm. Con quạ thông minh mổ những viên đá hình cầu có bán kính $0,6$ cm thả vào cốc để mực nước dâng lên. Để uống được nước thì con quạ cần thả vào cốc ít nhất bao nhiêu viên đá?



Ⓐ 30. Ⓑ 27. Ⓒ 28. Ⓓ 29.

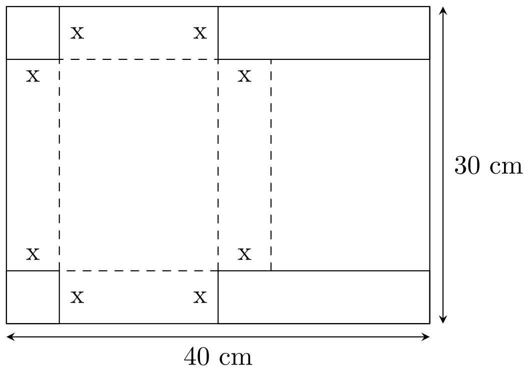
Câu 6. Một sợi dây có chiều dài 28m được cắt thành hai đoạn để làm thành một hình vuông và một hình tròn. Tính chiều dài của đoạn dây làm thành hình vuông được cắt ra sao cho tổng diện tích của hình vuông và hình tròn là nhỏ nhất?

Ⓐ $\dfrac{56}{4+\pi}$. Ⓑ $\dfrac{112}{4+\pi}$. Ⓒ $\dfrac{84}{4+\pi}$. Ⓓ $\dfrac{92}{4+\pi}$.

Câu 7. Để chuẩn bị cho đợt phát hành sách giáo khoa mới, một nhà xuất bản yêu cầu xưởng in phải đảm bảo các yêu cầu sau: Mỗi cuốn sách giáo khoa cần một trang chữ có diện tích là 384 cm^2, lề trên và lề dưới là 3 cm, lề trái và lề phải là 2 cm. Muốn chi phí sản xuất là thấp nhất thì xưởng in phải in trang sách có kích thước tối ưu nhất, với yêu cầu chất lượng giấy và mực in vẫn đảm bảo. Tìm chu vi của trang sách.

Ⓐ 82 cm. Ⓑ 100 cm. Ⓒ 90 cm. Ⓓ 84 cm.

Câu 8. Với tấm nhôm hình chữ nhật có kích thước 30 cm, 40 cm. Người ta phân chia tấm nhôm như hình vẽ và cắt bỏ một phần để được gấp lên một cái hộp có nắp. Tìm x để thể tích hộp lớn nhất.



Ⓐ $\dfrac{35+5\sqrt{13}}{3}$ cm. Ⓑ $\dfrac{35-4\sqrt{13}}{3}$ cm. Ⓒ $\dfrac{35-5\sqrt{13}}{3}$ cm. Ⓓ $\dfrac{35+4\sqrt{13}}{3}$ cm.

Câu 9. Ông A dự định sử dụng hết $6,5\ \text{m}^2$ kính để làm một bể cá bằng kính có dạng khối hình hộp chữ nhật chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng. Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu?

Ⓐ $2,26\ \text{m}^3$. Ⓑ $1,01\ \text{m}^3$. Ⓒ $1,33\ \text{m}^3$. Ⓓ $1,50\ \text{m}^3$.

Câu 10. Một vật chuyển động theo quy luật $s=-\dfrac{1}{3}t^3+6t^2$ với t là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 9 giây, kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

Ⓐ 243. Ⓑ 144. Ⓒ 27. Ⓓ 36.

Câu 11. Một bác nông dân cần xây dựng một hố ga không có nắp dạng hình hộp chữ nhật có thể tích $3200 >^3$, tỉ số giữa chiều của của hố và chiều rọng của đáy bằng 2. Hãy xác định diện tích của đáy hố ga để khi cây tiết kiệm nguyên vật liệu nhất?

Ⓐ $1200\,\text{cm}^2$. Ⓑ $120\,\text{cm}^2$. Ⓒ $160\,\text{cm}^2$. Ⓓ $1600\,\text{cm}^2$.

Câu 12. Ông An có một khu đất hình elip với độ dài trục lớn 10 m và độ dài trục bé 8 m. Ông An muốn chia khu đất thành hai phần, phần thứ nhất là một hình chữ nhật nội tiếp elip dùng để xây bể cá cảnh và phần còn lại dùng để trồng hoa. Biết chi phí xây bể cá là 1000000 đồng trên $1m^2$ và chi phí trồng hoa là 1200000 đồng trên $1m^2$. Hỏi ông An có thể thiết kế xây dựng như trên với tổng chi phí thấp nhất gần nhất với số nào sau đây?

Ⓐ 67398224 đồng. Ⓑ 67593346 đồng. Ⓒ 63389223 đồng. Ⓓ 67398228 đồng.

Câu 13. Một cái hồ rộng có hình chữ nhật. Tại một góc nhỏ của hồ người ta đóng một cái cọc ở vị trí K cách bờ AB là 1 m và cách bờ AC là $8\,\text{m}$, rồi dùng một cây sào ngăn một góc nhỏ của hồ để thả bèo. Tính chiều dài ngắn nhất của cây sào để cây sào có thể chạm vào 2 bờ AB , AC và cây cọc K .

Ⓐ $\dfrac{5\sqrt{65}}{4}$ m. Ⓑ $5\sqrt{5}$ m. Ⓒ $9\sqrt{2}$ m. Ⓓ $\dfrac{5\sqrt{71}}{4}$ m.

Câu 14. Một mảnh đất hình chữ nhật $ABCD$ có chiều dài $AB=25\,\text{m}$, chiều rộng $AD=20\,\text{m}$ được chia thành hai phần bằng nhau bởi vạch chắn MN (M, N lần lượt là trung điểm BC và AD). Một đội xây dựng làm một con đường đi từ A đến C qua vạch chắn MN , biết khi làm đường trên miền $ABMN$ mỗi giờ làm được $15\,\text{m}$ và khi làm trong miền $CDNM$ mỗi giờ làm được $30\,\text{m}$. Tính thời gian ngắn nhất mà đội xây dựng làm được con đường đi từ A đến C .

Ⓐ $\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$. Ⓑ $\dfrac{10+2\sqrt{725}}{30}$. Ⓒ $\dfrac{20+\sqrt{725}}{30}$. Ⓓ 5.

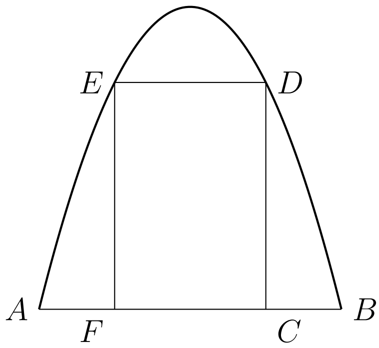
Câu 15. Để thiết kế một chiếc bể cá không có nắp đậy hình hộp chữ nhật có chiều cao 60 cm, thể tích là 96.000 cm^3, người thợ dùng loại kính để sử dụng làm mặt bên có giá thành là 70.000đồng/m^2 và loại kính để làm mặt đáy có giá thành là 100.000 đồng/m^2. Chi phí thấp nhất để làm bể cá là

(A) 283.000 đổng. (B) 382.000 đồng. (C) 83.200 đồng. (D) 832.000 đồng.

Câu 16. Một cái hộp có dạng hình hộp chữ nhật có thể tích bằng 48 và chiều dài gấp đôi chiều rộng. Chất liệu làm đáy và 4 mặt bên của hộp có giá thành gấp ba lần giá thành của chất liệu làm nắp hộp. Gọi h là chiều cao của hộp để giá thành của hộp là thấp nhất. Biết $h = \frac{m}{n}$ với m, n là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau. Tổng $m + n$ là

(A) 12. (B) 13. (C) 11. (D) 10.

Câu 17. Một chiếc cổng có hình dạng là một Parabol (P) có kích thước như hình vẽ, biết chiều cao cổng bằng 4 m, $AB = 4$ m. Người ta thiết kế cửa đi là một hình chữ nhật $CDEF$, phần còn lại dùng để trang trí. Biết chi phí để trang trí phần tô đậm là 1.000.000 đồng/ m^2 . Hỏi số tiền ít nhất dùng để trang trí phần tô đậm gần với số tiền nào dưới đây?



(A) 4.450.000 đồng. (B) 4.605.000 đồng. (C) 4.505.000 đồng. (D) 4.509.000 đồng.

Câu 18. Một cái hộp có dạng hình hộp chữ nhật có thể tích bằng 48 và chiều dài gấp đôi chiều rộng. Chất liệu làm đáy và 4 mặt bên của hộp có giá thành gấp ba lần giá thành của chất liệu làm nắp hộp. Gọi h là chiều cao của hộp để giá thành của hộp là thấp nhất. Biết $h = \frac{m}{n}$ với m , n là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau. Tổng $m + n$ là

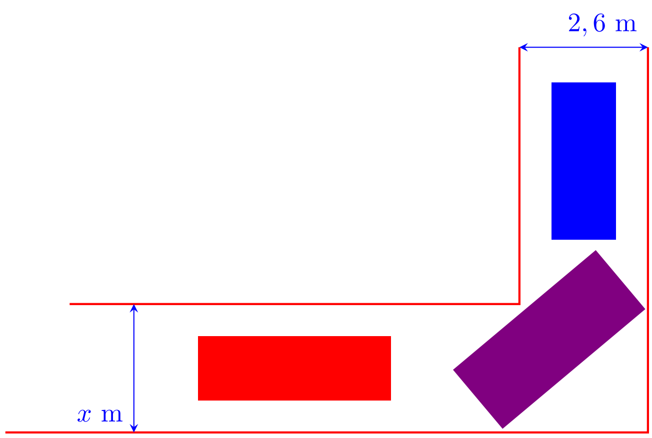
(A) 12. (B) 13. (C) 11. (D) 10.

Câu 19. Một trang trại rau sạch mỗi ngày thu hoạch được một tấn rau. Mỗi ngày, nếu bán rau với giá 30.000 đồng/kg thì hết rau sạch, nếu giá bán rau tăng 1000 đồng/kg thì số rau thừa tăng thêm 20 kg. Số rau thừa này được thu mua làm thức ăn chăn nuôi với giá 2000 đồng/kg. Hỏi tiền bán rau nhiều nhất trang trại có thể thu được mỗi ngày là bao nhiêu?

(A) 32.400.000 đồng. (B) 34.400.000 đồng. (C) 32.420.000 đồng. (D) 34.240.000 đồng.

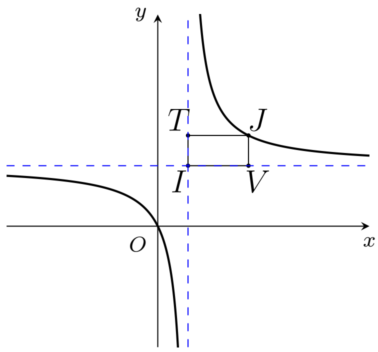
Câu 20.

Hình vẽ bên dưới mô tả đoạn đường đi vào GARA Ô TÔ nhà cô Hiền. Đoạn đường đầu tiên có chiều rộng bằng x (m), đoạn đường thẳng vào cổng GARA có chiều rộng 2,6 (m). Biết kích thước xe ô tô là $5m \times 1,9m$. Để tính toán và thiết kế đường đi cho ô tô người ta coi ô tô như một khối hộp chữ nhật có kích thước chiều dài 5 (m), chiều rộng 1,9 (m). Hỏi chiều rộng nhỏ nhất của đoạn đường đầu tiên gần nhất với giá trị nào trong các giá trị bên dưới để ô tô có thể đi vào GARA được?



(A) $x = 3,7$ m. (B) $x = 2,6$ m.
(C) $x = 3,55$ m. (D) $x = 4,27$ m.

Câu 21. Cho hàm số $y=\dfrac{2x}{x-1}$ có đồ thị (C) và điểm J thay đổi thuộc (C) như hình vẽ bên. Hình chữ nhật $ITJV$ có chu vi nhỏ nhất bằng



Ⓐ $2\sqrt{2}$. Ⓑ 6. Ⓒ $4\sqrt{2}$. Ⓓ 4.

Câu 22. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên $\mathbb{R}$. Biết $f'(0)=3$, $f'(2)=-2018$ và bảng xét dấu của $f''(x)$ như sau

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y=f(x+2017)+2018x$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm thuộc khoảng nào sau đây?

Ⓐ $(0;2)$. Ⓑ $(-\infty;-2017)$. Ⓒ $(-2017;0)$. Ⓓ $S=(2017;+\infty)$.

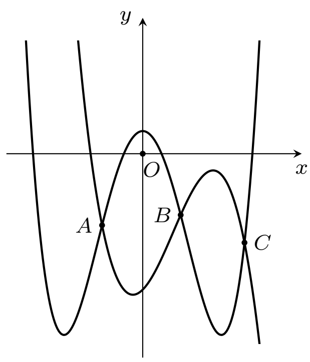
Câu 23. Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{x^2+4}$ với $a\neq 0$ và a, b là các số thực. Biết rằng $\max\limits_{x\in\mathbb{R}} y=5$ và $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} y=-2$. Giá trị của biểu thức $P=a^2b$ bằng

Ⓐ 7680. Ⓑ 1920. Ⓒ 3840. Ⓓ -1920.

Câu 24. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=\dfrac{34}{\sqrt{(x^3-3x+2m)^2+1}}$ trên đoạn $[0;3]$ bằng 2. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

Ⓐ 8. Ⓑ -8. Ⓒ -6. Ⓓ -1.

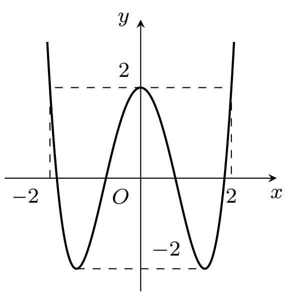
Câu 25. Cho hai hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ là hai hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ là đường cong nét đậm, đồ thị hàm số $y=g'(x)$ là đường cong nét mảnh như hình vẽ. Gọi ba giao điểm A, B, C của $y=f'(x)$ và $y=g'(x)$ trên hình vẽ lần lượt có hoành độ là a b, c. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $h(x)=f(x)-g(x)$ trên đoạn $[a;c]$?



Ⓐ $\min\limits_{[a;c]} h(x)=h(0)$. Ⓑ $\min\limits_{[a;c]} h(x)=h(a)$.

Ⓒ $\min\limits_{[a;c]} h(x)=h(b)$. Ⓓ $\min\limits_{[a;c]} h(x)=h(c)$.

Câu 26. Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[0;20]$ sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)=\left||2f(x)+m+4|-f(x)-3\right|$ trên đoạn $[-2;2]$ không bé hơn 1?



Ⓐ 18. Ⓑ 19. Ⓒ 20. Ⓓ 21.

Câu 27. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x+2m}{x+1}$ (m là tham số thực). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của m sao cho $\max\limits_{[0;1]}|f(x)|+\min\limits_{[0;1]}|f(x)|=3$. Số phần tử của S là

(A) 2. (B) 3. (C) 1. (D) 0.

Câu 28. Cho hàm số $y = |x^4 - 2x^2 + 3m|$ với m là tham số. Biết rằng có đúng hai giá trị m_1, m_2 của m để giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1; 2]$ bằng 2021. Tính giá trị $|m_1 - m_2|$.

(A) $\dfrac{1}{3}$. (B) $\dfrac{4052}{3}$. (C) $\dfrac{8}{3}$. . (D) $\dfrac{4051}{3}$.

Câu 29. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{2x^4 - mx - 4}{x + 2}$. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của m sao cho $\min\limits_{[-1;1]} |f(x)| > \dfrac{3}{4}$. Số phần tử của S là

(A) 4. (B) 2. (C) 1. (D) 3.

Câu 30. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{\log x + m}{\log x + 2}$ (m là tham số thực). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho $\min\limits_{\left[\frac{1}{10};1\right]} |f(x)| + \max\limits_{\left[\frac{1}{10};1\right]} |f(x)| = 2$. Tổng số phần tử của S bằng

(A) $-\dfrac{2}{3}$. (B) 2. . (C) $\dfrac{4}{3}$. (D) $\dfrac{10}{3}$.

Câu 31. Cho hàm số $f(x) = |3e^{4x} - 4e^{3x} - 24e^{2x} + 48e^{x} + m|$. Gọi A, B lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên $[0; \ln 2]$. Gọi S là tập hợp tất cả giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-23; -10]$ thỏa mãn $A \leq 3B$. Tổng các phần tử của tập S bằng

(A) -33. (B) 0. (C) -111. (D) -74.

Câu 32. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-4; 4]$ và có bảng biến thiên như hình vẽ bên dưới.

x	-4	-3	-2	1	2	3	4
$f(x)$	0	-2	5	-6	4	-5	3

Có tất cả bao nhiêu giá trị thực của tham số $m \in [-4; 4]$ để hàm số $g(x) = |f(x^3 + 2x) + 3f(m)|$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $[-1; 1]$ bằng 8?

(A) 12. . (B) 11. (C) 9. (D) 10.

Câu 33. Cho $a, b, c > 0$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $H = \dfrac{3a^4 + 12b^4 + 25c^3 + 2}{\left(a + \sqrt{2}b + c\right)^3}$ thuộc tập hợp nào dưới đây?

(A) $A\left(\dfrac{5}{6}; 2\right)$. (B) $\left[\dfrac{13}{18}; 2\right]$. (C) $\left[\dfrac{2}{3}; 2\right]$. (D) $\left[0; \dfrac{1}{3}\right]$.

Câu 34. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{mx - \sqrt{x + 2019}}{x + 2020}$ trên tập $\mathscr{D} = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq |x| \leq 2018\}$ không vượt quá $\dfrac{1}{2}$. Số các phần tử của S là

(A) 2110. (B) 2108. (C) 1054. (D) 1009.

Câu 35. Cho hàm số $f(t) = \dfrac{2t + 1}{t - 2}$ và x, y là các số thực thỏa mãn $5x^2 + 2xy + y^2 = 9$. Giá trị lớn nhất của $f\left(\dfrac{6x - 6}{4x - y - 9}\right)$ bằng

(A) $\dfrac{1}{3}$. (B) $\dfrac{2}{3}$. (C) -3. (D) $\dfrac{-1}{3}$.

Câu 36. Cho hàm số $y = (x^2 + x + m)^2$. Tổng tất cả các giá trị thực của tham số m để $\min\limits_{[-2;2]} y = 4$ bằng

(A) $-\dfrac{23}{4}$. (B) $-\dfrac{31}{4}$. (C) -8. (D) $\dfrac{9}{4}$.

BÀI 4. ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

A LÝ THUYẾT

1. Đường tiệm cận ngang

Tiệm cận ngang

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên một khoảng vô hạn (là khoảng dạng $(a;+\infty)$, $(-\infty;b)$ hoặc $(-\infty;+\infty)$). Đường thẳng $y = y_0$ là đường tiệm cận ngang (hay tiệm cận ngang) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = y_0, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = y_0.$$

2. Đường tiệm cận đứng

Tiệm cận đứng

Đường thẳng $x = x_0$ được gọi là đường tiệm cận đứng (hay tiệm cận đứng) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty.$$

Đồ thị hàm phân thức dạng $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c \neq 0; ad - bc \neq 0)$ luôn có tiệm cận ngang là $y = \dfrac{a}{c}$ và tiệm cận đứng $x = -\dfrac{d}{c}$.

3. Dấu hiệu nhận biết các đường tiệm cận của đồ thị hàm số

Dấu hiệu tìm tiệm cận

- Hàm phân thức mà nghiệm của mẫu không là nghiệm của tử có tiệm cận đứng.
- Hàm phân thức mà bậc của tử $\leq$ bậc của mẫu có TCN.
- Hàm căn thức dạng: $y = \sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)}$, $y = \sqrt{f(x)} - g(x)$, $y = g(x) - \sqrt{f(x)}$ có tiệm cận ngang (dùng liên hợp).
- Hàm $y = a^x$, $(0 < a \neq 1)$ có tiệm cận ngang $y = 0$.
- Hàm số $y = \log_a x$, $(0 < a \neq 1)$ có tiệm cận đứng $x = 0$.

4. Cách tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số

Phương pháp tìm tiệm cận

- Tiệm cận đứng: ta đi tìm nghiệm của mẫu không là nghiệm của tử.
- Tiệm cận ngang: tính hai giới hạn: $\lim\limits_{x\to+\infty} y$ hoặc $\lim\limits_{x\to-\infty} y$.

5. Một số chú ý trong quá trình tìm tiệm cận

- Nếu $x \to +\infty \Rightarrow x > 0 \Rightarrow \sqrt{x^2} = |x| = x$.
- Nếu $x \to -\infty \Rightarrow x < 0 \Rightarrow \sqrt{x^2} = |x| = -x$.

B VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$ và $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 2$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

Ⓐ Đồ thị hàm số không có tiệm cận.
Ⓑ Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 1$.
Ⓒ Đồ thị hàm số có hai tiệm cận.
Ⓓ Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $= 2$.

Lời giải.

Vì $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$ nên đồ thi hàm số có tiệm cận đứng $x = 1$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Ví dụ 2. Cho hàm số $y = \dfrac{2x^2 - x}{x^2 + 5x + 4}$. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số là

Ⓐ 2. Ⓑ 1. Ⓒ 3. Ⓓ 4.

Lời giải.

Ta có $x^2 + 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = -4. \end{array}\right. \Rightarrow$ Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1; -4\}$.

Vì $\lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{2x^2 - x}{x^2 + 5x + 4} = +\infty$ và $\lim\limits_{x \to -4^-} \dfrac{2x^2 - x}{x^2 + 5x + 4} = +\infty$, nên đường thẳng $x = -1$ và $x = -4$ là hai tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Mặt khác $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{2x^2 - x}{x^2 + 5x + 4} = 2$, nên đường thẳng $y = 2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số có ba đường tiệm cận.

Chọn đáp án Ⓒ □

Ví dụ 3. Cho hàm số $y = \dfrac{\sqrt{x+3} - 2}{x^2 - 3x + 2}$. Đồ thị hàm số có bao nhiêu đường tiệm cận?

Ⓐ 3. Ⓑ 1. Ⓒ 4 . Ⓓ 2.

Lời giải.

Ta có $x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2. \end{array}\right. \Rightarrow$ Tập xác định $\mathscr{D} = [-3; +\infty) \setminus \{1; 2\}$.

Ta có $\dfrac{\sqrt{x+3} - 2}{x^2 - 3x + 2} = \dfrac{x - 1}{(x-1)(x-2)\left(\sqrt{x+3} + 2\right)} = \dfrac{1}{(x-2)\left(\sqrt{x+3} + 2\right)}$, $\forall x \neq 1$.

Vì $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{1}{(x-2)\left(\sqrt{x+3} + 2\right)} = +\infty$ nên $x = 2$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Mặt khác $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{(x-2)\left(\sqrt{x+3} + 2\right)} = 0$, nên đồ thị hàm số nhận $y = 0$ làm tiệm cận ngang.

Vậy đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận.

Chọn đáp án Ⓓ □

Ví dụ 4. Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2x^2-5x}-\sqrt{2x^2-3x}}$

Ⓐ $y=2; y=-2$.
Ⓑ $y=\sqrt{2};\ y=-\sqrt{2}$.
Ⓒ $y=\sqrt{2}$.
Ⓓ $y=2$.

Lời giải.

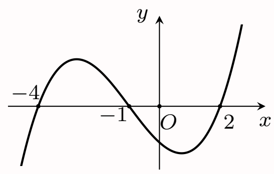
Tập xác định $\mathscr{D}=(-\infty;0)\cup\left(\dfrac{5}{2};+\infty\right)$.

Ta có

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2x^2-5x}+\sqrt{2x^2-3x}}{-2x}=-\sqrt{2} \text{ và } \lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{2x^2-5x}+\sqrt{2x^2-3x}}{-2x}=\sqrt{2}.$$

Vậy đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang là đường thẳng $y=\pm\sqrt{2}$.
Chọn đáp án Ⓑ □

Ví dụ 5.
Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình bên. Hỏi đồ thị hàm số $y=g(x)=\dfrac{2x}{f(x)}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?



Ⓐ 3.
Ⓑ 1.
Ⓒ 4.
Ⓓ 2.

Lời giải.

Điều kiện xác định $f(x)\neq 0$.

Từ đồ thị ta thấy $f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-4\\ x=-1\\ x=2.\end{array}\right.$

Khi đó $f(x)=a(x+4)(x+1)(x-2)$ có 3 nghiệm.
Do đó đồ thị hàm số $y=g(x)$ có 3 đường tiệm cận đứng.
Chọn đáp án Ⓐ □

Ví dụ 6. Biết đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{3x-5}+ax+b}{(x-2)^2}$ không có tiệm cận đứng. Khi đó $4a-b$ bằng

Ⓐ -8.
Ⓑ 10.
Ⓒ -4.
Ⓓ 8.

Lời giải.

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{3x-5}+ax+b}{(x-2)^2}$ không có tiệm cận đứng

$$\Leftrightarrow\ f(x)=\sqrt{3x-5}+ax+b=0 \text{ có nghiệm kép } x=2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(2)=0\\ f'(2)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+2a+b=0\\ \dfrac{3}{2\sqrt{2\cdot 3-5}}+a=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\dfrac{3}{2}\\ b=2.\end{cases}$$

Vậy $4a-b=4\cdot\left(-\dfrac{3}{2}\right)-2=-8$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Ví dụ 7. Tìm tập hợp các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = \dfrac{\sqrt{(x-1)(x^2+3x+3)}}{mx^2+2x-3}$ có đúng ba đường tiệm cận.

Ⓐ $m \in \left(-\dfrac{1}{3};0\right)$. Ⓑ $m \in \left(-\dfrac{1}{3};+\infty\right)$. Ⓒ $m \in \left[-\dfrac{1}{3};0\right)$. Ⓓ $m \in \left(-\dfrac{1}{3};0\right]$.

Lời giải.

Ta có $(x-1)(x^2+3x+3) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$

Trường hợp 1:

Nếu $m = 0$ thì đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang. Do đó đồ thị hàm số không thể có ba đường tiệm cận.

Trường hợp 2:

Nếu $m \neq 0$ thì đồ thị hàm số có một đường tiệm cận ngang $y = 0$.

Do đó đồ thị hàm số có đúng ba đường tiệm cận $\Leftrightarrow mx^2+2x-3=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thuộc nửa khoảng $[1;+\infty)$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ (x_1-1)(x_2-1) \geq 0 \\ (x_1-1)+(x_2-1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+3m > 0 \\ \dfrac{-1}{m} \geq 0 \\ \dfrac{1+m}{m} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\dfrac{1}{3} \\ m < 0 \\ m > -1 \end{cases} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{3} < m < 0.$$

Vậy $m \in \left(-\dfrac{1}{3};0\right)$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Ví dụ 8. Cho hàm số $y = \dfrac{x-1}{x+2}$ có đồ thị (C), gọi d là tiếp tuyến với (C) tại điểm có hoành độ bằng $m-2$. Biết đường thẳng d cắt tiệm cận đứng của (C) tại điểm $A(x_1;y_1)$ và cắt tiệm cận ngang của (C) tại điểm $B(x_2;y_2)$. Gọi S là tập hợp các số m sao cho $x_2+y_1=-5$. Tính tổng bình phương các phần tử của S.

Ⓐ 0. Ⓑ 4. Ⓒ 10. Ⓓ 9.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{3}{(x+2)^2}$.

Với $x = m-2 \Rightarrow y = 1-\dfrac{3}{m}$. Suy ra $A\left(m-2;\, 1-\dfrac{3}{m}\right)$ $(m \neq 0)$.

Phương trình tiếp tuyến d của (C) có dạng $y = \dfrac{3}{m^2}(x-m+2)+1-\dfrac{3}{m}$.

Đồ thị (C) có tiệm cận ngang $y=1$ và tiệm cận đứng $x=-2$.

Tọa độ điểm A là nghiệm của hệ $\begin{cases} y = \dfrac{3}{m^2}(x-m+2)+1-\dfrac{3}{m} \\ x=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1-\dfrac{6}{m} \\ x=-2 \end{cases}$ nên $y_1 = 1-\dfrac{6}{m}$.

Tọa độ điểm B là nghiệm của hệ $\begin{cases} y = \dfrac{3}{m^2}(x-m+2)+1-\dfrac{3}{m} \\ y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=2m-2 \end{cases}$ nên $x_2 = 2m-2$.

Suy ra $x_2+y_1 = 2m-\dfrac{6}{m}-1=-5 \Leftrightarrow 2m^2+4m-6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-3. \end{array}\right.$

Vậy tổng bình phương các phần tử của S là $1^2+(-3)^2=10$.

Chọn đáp án Ⓒ □

C MỘT SỐ DẠNG TOÁN CƠ BẢN

Dạng 1. Cơ bản về tiệm cận của đồ thị hàm số

Câu 1. Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{5x^2-4x-1}{x^2-1}$ là

Ⓐ 0. Ⓑ 1. Ⓒ 2. Ⓓ 3.

Câu 2. Tìm số tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-1}$.

Ⓐ 2. Ⓑ 3. Ⓒ 0. Ⓓ 1.

Câu 3. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-2}{x^2-4}$ có mấy tiệm cận?

Ⓐ 3. Ⓑ 1. Ⓒ 2. Ⓓ 0.

Câu 4. Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x}$ là

Ⓐ 1. Ⓑ 2. Ⓒ 0. Ⓓ 3.

Câu 5. Tìm tất cả các tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1-\sqrt{x^2+x+3}}{x^2-5x+6}$.

Ⓐ $x=3$ và $x=2$. Ⓑ $x=3$. Ⓒ $x=-3$ và $x=-2$. Ⓓ $x=-3$.

Câu 6. Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x+16}-4}{x^2+x}$ là

Ⓐ 3. Ⓑ 2. Ⓒ 1. Ⓓ 0.

Câu 7. Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x^2+x}$ là

Ⓐ 3. Ⓑ 0. Ⓒ 1. Ⓓ 2.

Câu 8. Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x(4x+6)}-2}{x+2}$ là

Ⓐ 1. Ⓑ 3. Ⓒ 2. Ⓓ 4.

Câu 9. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+2x+3}{\sqrt{x^4-3x^2+2}}$. Đồ thị hàm số đã cho có bao nhiêu đường tiệm cận?

Ⓐ 4. Ⓑ 5. Ⓒ 3. Ⓓ 6.

Câu 10. Số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x-2}+1}{x^2-3x+2}$ là

Ⓐ 4. Ⓑ 1. Ⓒ 3. Ⓓ 2.

Câu 11. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+\sqrt{x^2-x}}{3x+1}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

Ⓐ 2. Ⓑ 3. Ⓒ 0. Ⓓ 1.

Câu 12. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{5x+1-\sqrt{x+1}}{x^2-2x}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

Ⓐ 0. Ⓑ 1. Ⓒ 2. Ⓓ 3.

Câu 13. Tìm số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{4\sqrt{3x+1}-3x-5}$.

Ⓐ 2. Ⓑ 3. Ⓒ 1. Ⓓ 0.

Câu 14. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+2x+3}{\sqrt{x^4-3x^2+2}}$. Đồ thị hàm số đã cho có bao nhiêu đường tiệm cận?

(A) 4. (B) 5. (C) 3. (D) 6.

Câu 15. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{4x^2+2x-1}+x}{x+1}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

(A) 1. (B) 0. (C) 2. (D) 3.

Câu 16. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x^2-6x+2m}}$ có hai đường tiệm cận đứng. Số phần tử của S là

(A) vô số. (B) 12. (C) 14. (D) 13.

Câu 17. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{x^2-8x+m}$ có 3 đường tiệm cận?

(A) 14. (B) 8. (C) 15. (D) 16.

Câu 18. Cho hàm số $y=\dfrac{x-3}{x^3-3mx^2+(2m^2+1)x-m}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2020;2020]$ để đồ thị hàm số có 4 đường tiệm cận?

(A) 4039. (B) 4040. (C) 4038. (D) 4037.

Câu 19. Có bao nhiêu số nguyên của m thuộc đoạn $[-100;100]$ để đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{(x-m)\sqrt{2x-x^2}}$ có đúng hai đường tiệm cận?

(A) 200. (B) 2. (C) 199. (D) 0.

Câu 20. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+m}{x^2-3x+2}$ có đúng hai đường tiệm cận.

(A) $m=-1$. (B) $m\in\{1;4\}$. (C) $m=4$. (D) $m\in\{-1;-4\}$.

Câu 21. Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-2mx+4}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị có ba đường tiệm cận

(A) $m>2$. (B) $\begin{cases} m<-2 \\ m\neq -\dfrac{5}{2} \end{cases}$. (C) $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} m>2 \\ m<-2 \end{array}\right. \\ m\neq -\dfrac{5}{2} \end{cases}$. (D) $\left[\begin{array}{l} m<-2 \\ m>2 \end{array}\right.$.

Câu 22. Biết rằng đồ thị của hàm số $y=\dfrac{(n-3)x+n-2017}{x+m+3}$ (m,n là các số thực) nhận trục hoành làm tiệm cận ngang và trục tung là tiệm cận đứng. Tính tổng $m+n$.

(A) 0. (B) -3. (C) 3. (D) 6.

Câu 23. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{\sqrt{mx^2-8x+2}}$ có đúng bốn đường tiệm cận?

(A) 8. (B) 6. (C) 7. (D) Vô số.

Câu 24. Tìm tham số m để đồ thị hàm số $y=x-\sqrt{mx^2-3x+7}$ có tiệm cận ngang.

(A) $m=1$. (B) $m=-1$. (C) $m=\pm1$. (D) Không có m.

Câu 25. Cho hàm số $y=\dfrac{ax+1}{bx-2}$. Tìm a,b để đồ thị hàm số có $x=1$ là tiệm cận đứng và $y=\dfrac{1}{2}$ là tiệm cận ngang.

(A) $a=-1;b=2$. (B) $a=4;b=4$. (C) $a=1;b=2$. (D) $a=-1;b=-2$.

Câu 26. Có bao nhiêu giá trị nguyên $m \in [-10;10]$ sao cho đồ thị hàm số $y = \dfrac{x-1}{2x^2+6x-m-3}$ có hai đường tiệm cận đứng?

Ⓐ 19. Ⓑ 15. Ⓒ 17. Ⓓ 18.

Câu 27. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{\sqrt{mx^2+3mx+4}}{x+2}$ bằng 3?

Ⓐ 4. Ⓑ 2. Ⓒ Vô số. Ⓓ 3.

Câu 28. Tổng các giá trị của tham số m để đồ thị của hàm số $y = \dfrac{x-1}{x^2+2(m-1)x+m^2-2}$ có đúng một tiệm cận đứng.

Ⓐ $-\dfrac{1}{2}$. Ⓑ 2. Ⓒ -3. Ⓓ $\dfrac{3}{2}$.

Câu 29. Cho hàm số $y = \dfrac{x-3}{x^3-3mx^2+(2m^2+1)\,x-m}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc đoạn $[-6;6]$ của tham số m để đồ thị hàm số có bốn đường tiệm cận?

Ⓐ 12. Ⓑ 9. Ⓒ 8. Ⓓ 11.

Câu 30. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x^2-3x+m}{x-m}$ không có tiệm cận đứng.

Ⓐ $m = 1$. Ⓑ $m > 1$. Ⓒ $m = 1$ và $m = 0$. Ⓓ $m \neq 0$.

Câu 31. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m thuộc đoạn $[-2017;2017]$ để đồ thị hàm số $y = \dfrac{x+2}{\sqrt{x^2-4x+m}}$ có hai tiệm cận đứng.

Ⓐ 2019. Ⓑ 2021. Ⓒ 2018. Ⓓ 2020.

Câu 32. Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2019m$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2020m^4$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị của m để đồ thị của hàm số $y = f(x)$ có duy nhất một tiệm cận ngang?

Ⓐ 4. Ⓑ 2. Ⓒ 3. Ⓓ 1.

Câu 33. Cho hàm số $y = \dfrac{1}{[x^2-(2m+1)x+2m]\sqrt{x-m}}$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số có 4 đường tiệm cận.

Ⓐ $\begin{cases} 0 < m < 1 \\ m \neq \dfrac{1}{2} \end{cases}$. Ⓑ $\begin{cases} m < 1 \\ m \neq \dfrac{1}{2} \end{cases}$. Ⓒ $m > 1$. Ⓓ $\begin{cases} 0 \leq m \leq 1 \\ m \neq \dfrac{1}{2} \end{cases}$.

Câu 34. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số $y = \dfrac{6x-3}{(mx^2-6x+3)(9x^2+6mx+1)}$ có đúng 1 đường tiệm cận?

Ⓐ 0. Ⓑ 2. Ⓒ 1. Ⓓ Vô số.

Câu 35. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x + \sqrt{mx^2+1}$ có tiệm cận ngang.

Ⓐ $0 < m < 1$. Ⓑ $m = 1$. Ⓒ $m = -1$. Ⓓ $m > 1$.

Câu 36. Cho hàm số $y = \dfrac{x-2}{mx^2-2x+4}$. Có tất cả bao nhiêu giá trị của tham số m để đồ thị hàm số có đúng hai đường tiệm cận?

Ⓐ 0. Ⓑ 2. Ⓒ 3. Ⓓ 1.

Câu 37. Gọi S là tập các giá trị nguyên của m sao cho đồ thị hàm số $y = \dfrac{2019x}{\sqrt{17x^2-1}-m|x|}$ có bốn đường tiệm cận. Tính số phần tử của tập S.

Ⓐ Vô số. Ⓑ 3. Ⓒ 5. Ⓓ 4.

Câu 38. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho đồ thị hàm số $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^3+mx+1} - \sqrt[3]{x^4+x+1} + m^2x}$ nhận trục tung làm tiệm cận đứng. Khi đó tổng các phần tử của S bằng

Ⓐ $\dfrac{1}{2}$. Ⓑ $-\dfrac{1}{2}$. Ⓒ $\dfrac{1}{3}$. Ⓓ $-\dfrac{1}{3}$.

Câu 39. Có bao nhiêu giá trị m nguyên thuộc khoảng $(-10;10)$ để đồ thị hàm số $y = \dfrac{\sqrt{x(x-m)}-1}{x+2}$ có đúng ba đường tiệm cận?

Ⓐ 12. Ⓑ 11. Ⓒ 0. Ⓓ 10.

Câu 40. Cho hàm số $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^3-3x^2+m-1}}$ với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số đã cho có 4 đường tiệm cận.

Ⓐ $1 < m < 5$. Ⓑ $-1 < m < 2$.
Ⓒ $m < 1$ hoặc $m > 5$. Ⓓ $m > 2$ hoặc $m < -1$.

Câu 41. Hàm số $y = \dfrac{\sqrt{3x+1}+ax+b}{(x-1)^2}$ không có tiệm cận đứng. Khi đó hiệu $a-b$ bằng

Ⓐ $\dfrac{1}{2}$. Ⓑ $-\dfrac{3}{4}$. Ⓒ $-\dfrac{5}{4}$. Ⓓ $-\dfrac{1}{2}$.

Câu 42. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham để m đồ thị hàm số $y = \dfrac{\sqrt{-x^2+2016x+2017}-24\sqrt{7}}{x-m}$ có tiệm cận đứng?

Ⓐ vô số. Ⓑ 2. Ⓒ 2017. Ⓓ 2019.

Câu 43. Tìm tất cả các giá trị thực của m sao cho đồ thị hàm số $y = \dfrac{\sqrt{mx^2+1}}{x+1}$ có đúng một đường tiệm cận.

Ⓐ $-1 \le m < 0$. Ⓑ $-1 \le m \le 0$. Ⓒ $m < -1$. Ⓓ $m > 0$.

Dạng 2. Bài tập tiệm cận của đồ thị hàm số

Câu 1. Cho hàm số $y = \dfrac{x-3}{x^3 - 3mx^2 + (2m^2+1)\,x - m}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc đoạn $[-2020; 2020]$ của tham số m để đồ thị hàm số có 4 đường tiệm cận?

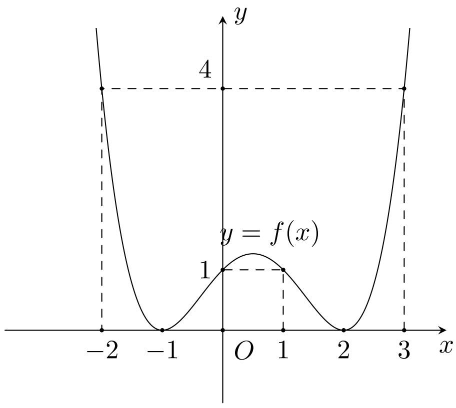
Ⓐ 4039. Ⓑ 4040. Ⓒ 4038. Ⓓ 4037.

Câu 2. Cho hàm số $y = \dfrac{20 + \sqrt{6x - x^2}}{\sqrt{x^2 - 8x + 2m}}$. Tìm tất cá các giá trị của m sao cho đồ thị hàm số có đúng hai đường tiệm cận đứng.

Ⓐ $m \in [6; 8)$. Ⓑ $m \in (6; 8)$. Ⓒ $m \in [12; 16)$. Ⓓ $m \in (0; 16)$.

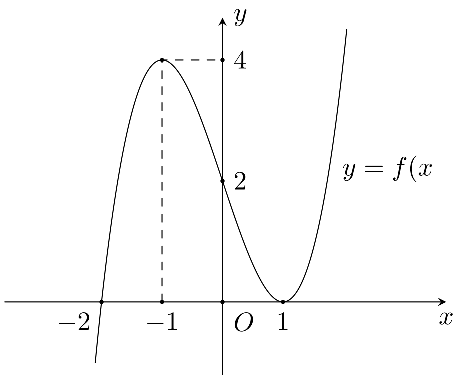
Câu 3.
Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $g(x) = \dfrac{(x^2-4)^4\,(x-3)\,(x^3+1)}{f(f(x)-1)}$ là

Ⓐ 6. Ⓑ 5. Ⓒ 3. Ⓓ 4.



Câu 4.
Cho đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ như hình vẽ. Đồ thị của hàm số $g(x) = \dfrac{3x^2 - x - 2}{3f^2(x) - 6f(x)}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng

Ⓐ 5. Ⓑ 4. Ⓒ 3. Ⓓ 2.



Câu 5. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên dưới.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	3	↘	-1	↗	$+\infty$

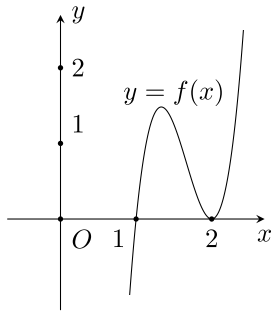
Đồ thị hàm số $g(x) = \dfrac{2x + 7 - 3\sqrt{4x+5}}{|f(x)| - 1}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang

Ⓐ 4. Ⓑ 3. Ⓒ 2. Ⓓ 5.

Câu 6.

Cho hàm số bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi đồ thị hàm số $g(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2\sqrt{x-1}}{x\left[f^2(x) - f(x)\right]}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

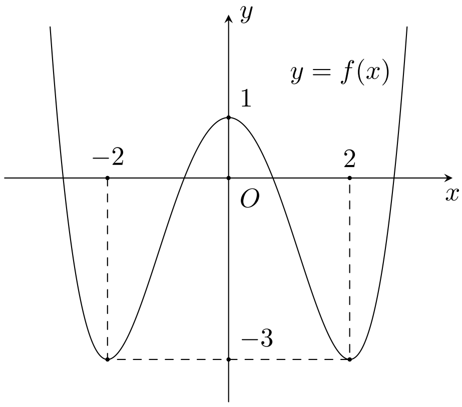
(A) 3. (B) 5. (C) 6. (D) 4.



Câu 7.

Cho hàm trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi đồ thị hàm số $y = \dfrac{(x^2-4)(x^2+2x)}{[f(x)]^2 + 2f(x) - 3}$ có tổng cộng bao nhiêu tiệm cận đứng?

(A) 5. (B) 2. (C) 3. (D) 4.



Câu 8. Biết đồ thị hàm số $y = \dfrac{\sqrt{3x+1} + ax + b}{(x-5)^2}$ không có tiệm cận đứng. Tính $a^2 + b^3$.

(A) $\dfrac{-4841}{152}$. (B) $\dfrac{-4814}{152}$. (C) $\dfrac{4841}{152}$. (D) $\dfrac{4814}{152}$.

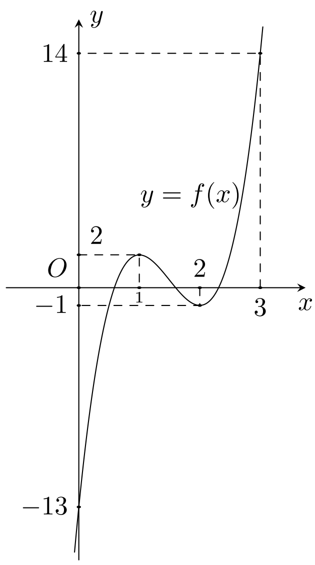
Câu 9. Biết rằng tích phân $I = \displaystyle\int\limits_{\frac{1}{3}}^{3} \left(1 + x + \dfrac{4}{x^2}\right) \mathrm{e}^{x - \frac{2}{x^2}} \mathrm{d}x = 3\mathrm{e}^{\frac{a}{b}} - \dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{\frac{-c}{d}}$, trong đó các phân số $\dfrac{a}{b}$; $\dfrac{c}{d}$ tối giản. Hãy xác định phương trình đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$.

(A) $y = \dfrac{25}{3}$. (B) $y = \dfrac{25}{53}$. (C) $y = \dfrac{25}{9}$. (D) $y = 3$.

Câu 10.

Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$có đồ thị như hình vẽ. Tổng các giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $g(x) = \dfrac{2020}{f\left(f(x)+1\right) - m}$ có 4 đường tiệm cận bằng

(A) 15. (B) 1. (C) 13. (D) 11.



Câu 11. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = f(x) = \dfrac{\sqrt{6x-3} + mx - 2m - 3}{3x^3 - 14x^2 + 20x - 8}$ có đúng hai đường tiệm cận?

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) Vô số.

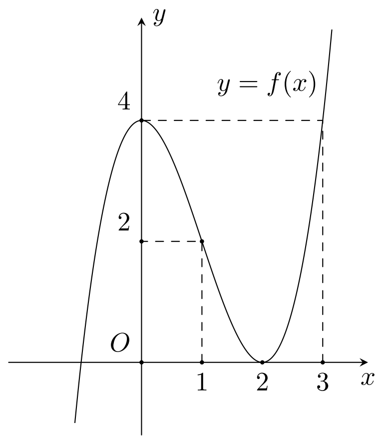
Câu 12. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $f(x)=\dfrac{\left(\sqrt[3]{9-x^2}-2\right)\ln(x+1)}{x^3-x}$ là

Ⓐ 0. Ⓑ 1. Ⓒ 2. Ⓓ 3.

Câu 13.

Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi M, m lần lượt là số tiệm cận đứng, tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{(x^2-2x-3)\sqrt{x^2-x}\sqrt{x^4-17x^2+16}}{|f(x)-2|\,(2x^2-3x)}$. Khi đó mệnh đề nào đúng?

Ⓐ $2M=3m$. Ⓑ $M=3m$. Ⓒ $M=2m$. Ⓓ $M=m$.



Câu 14. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{(2x-3)\sqrt{x^2+2x-8}}{(|x+2|-1)\left(\sqrt{4x^2+x+4}+2x\right)}$ có tổng số đường tiệm cận đứng, tiệm cận ngang là

Ⓐ 2. Ⓑ 3. Ⓒ 4. Ⓓ 6.

Câu 15. Đồ thị hàm số $y=f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-2\sqrt{x+2}}{x(x-2)^2} & \text{nếu } x>2\\ \sqrt{4x^2+x+1}+2x & \text{nếu } x\le 2\end{cases}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

Ⓐ 1. Ⓑ 2 . Ⓒ 3. Ⓓ 4.

Câu 16. Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{4x^3-20x^2+(m+24)x-2m}{20x^2+14x+9-(14x+11)\sqrt{2x^2+1}}$ có đồ thị là (C). Gọi S là tập hợp các giá trị của m để (C) có đúng một tiệm cận đứng. Tổng các giá trị trong S là

Ⓐ -1. Ⓑ -3. Ⓒ -5. Ⓓ -7.

Câu 17. Cho đồ thị hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đúng hai đường tiệm cận ngang $y=-5$, $y=1$. Tìm giá trị của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y=|f(x)+m|$ có đúng một đường tiệm cận ngang.

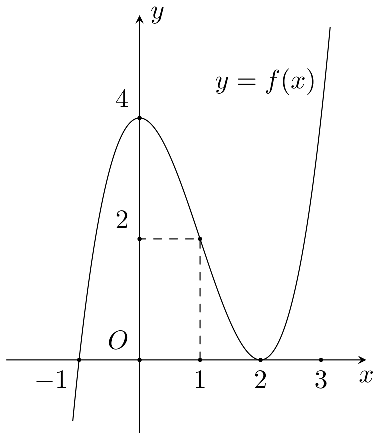
Ⓐ $m=1$. Ⓑ $m=-2$. Ⓒ $m=2$. Ⓓ $m=3$.

Câu 18. Cho hàm số $f(x)=x\left(\sqrt[3]{ax^3+bx^2-1}-2\sqrt{x^2-x+1}\right)$. Biết rằng đồ thị hàm số có một đường tiệm cận ngang bằng $y=\dfrac{5}{4}$. Giá trị $a+b$ thuộc khoảng nào trong các khoảng sau?

Ⓐ $(-5;-3)$. Ⓑ $(-3;0)$. Ⓒ $(0;3)$. Ⓓ $(3;5)$.

Câu 19.

Cho hàm số bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$ có đồ thị như hình vẽ. Đồ thị hàm số $g(x) = \dfrac{\sqrt{x}(x-2)}{f^2(x) - 2f(x)}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?



(A) 2. (B) 4. (C) 3. (D) 1.

Câu 20. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số $y = \dfrac{x-1}{x^2 - 2mx + 4}$ có 3 đường tiệm cận.

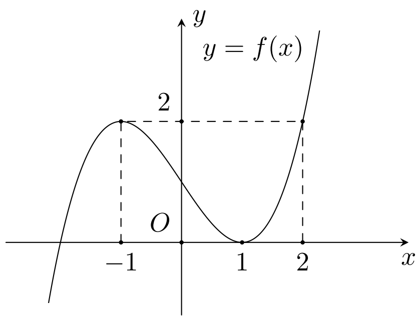
(A) $m < 2$. (B) $-2 < m < 2$. (C) $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} m > 2 \\ m < -2 \end{array}\right. \\ m \neq \dfrac{5}{2} \end{cases}$. (D) $\left[\begin{array}{l} m > 2 \\ m < -2 \end{array}\right.$.

Câu 21. Gọi S là tập các giá trị của m sao cho đồ thị hàm số $y = \dfrac{x-1}{x^2 - 2mx + m^2 - 2m - 6}$ có đúng hai đường tiệm cận. Số phần tử của S là

(A) 2. (B) 3. (C) 0. (D) 1.

Câu 22.

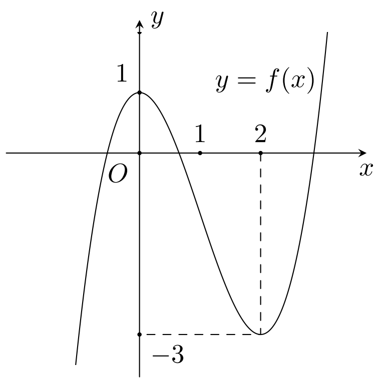
Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a \neq 0)$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi S là tập các giá trị nguyên của m thuộc khoảng $(-2019; 2020)$ để đồ thị hàm số $g(x) = \dfrac{(x+1)\sqrt{f(x)}}{(f(x)-2)(x^2 - 2mx + m + 2)}$ có 5 đường tiệm cận (tiệm cận đứng hoặc tiệm cận ngang). Số phần tử của tập S là



(A) 2016. (B) 4034. (C) 4036. (D) 2017.

Câu 23.

Cho hàm số bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi đồ thị hàm số $g(x) = \dfrac{(x^2 - 2x)\sqrt{1-x}}{(x-3)\left[f^2(x) + 3f(x)\right]}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?



(A) 4. (B) 3. (C) 5. (D) 6.

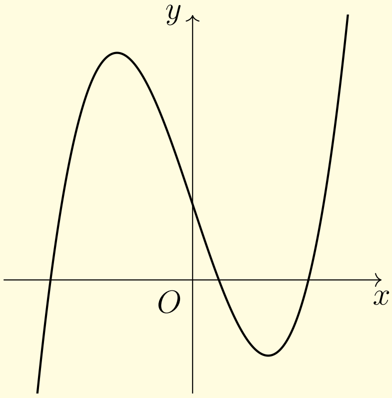
BÀI 5. CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN ĐỒ THỊ HÀM SỐ

A LÝ THUYẾT

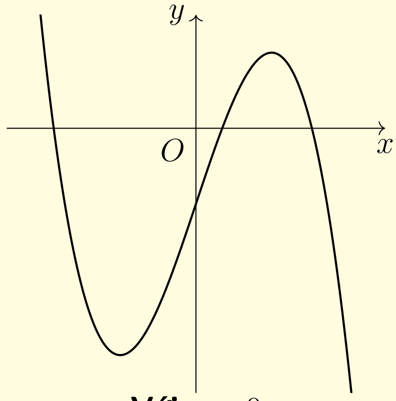
1. Hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d\,(a \neq 0)$

Khảo sát Hàm số bậc ba

- **Trường hợp 1:** phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

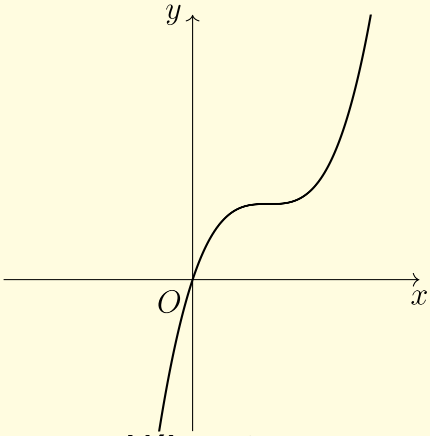


Với $a > 0$

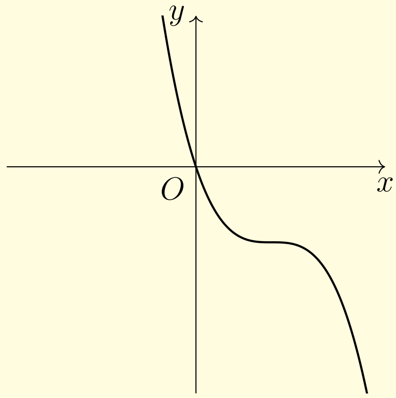


Với $a < 0$

- **Trường hợp 2:** phương trình $y' = 0$ có nghiệm kép.

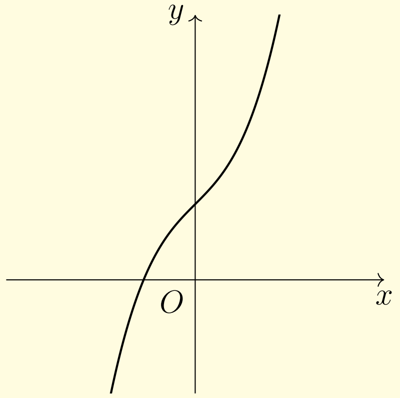


Với $a > 0$

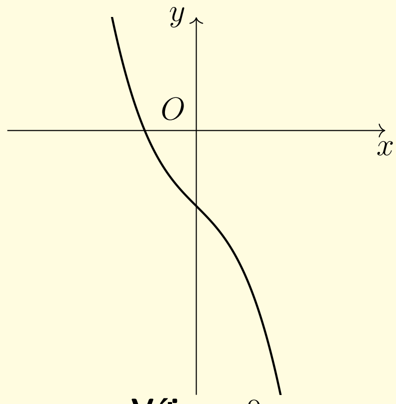


Với $a < 0$

- **Trường hợp 3:** phương trình $y' = 0$ vô nghiệm.



Với $a > 0$



Với $a < 0$

2. Hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$)

Hàm trùng phương

a) Đạo hàm $y' = 4ax^3 + 2bx = 2x(2a^2x + b)$, $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 2ax^2 + b = 0. \end{array}\right.$

b) Để hàm số có 3 cực trị: $ab < 0$.

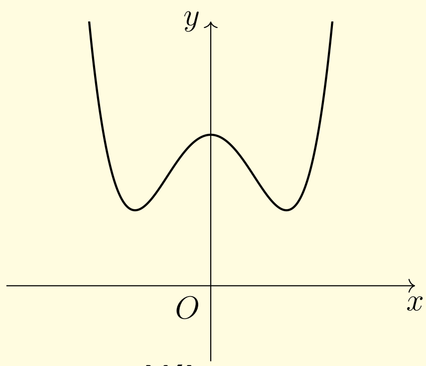
- Nếu $\begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \end{cases}$ thì hàm số có 2 cực đại và 1 cực tiểu.
- Nếu $\begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \end{cases}$ thì hàm số có 1 cực đại và 2 cực tiểu.

c) Để hàm số có 1 cực trị: $ab \geq 0$.

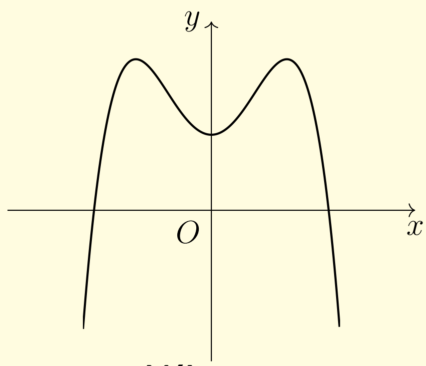
- Nếu $\begin{cases} a > 0 \\ b \geq 0 \end{cases}$ hàm số có 1 cực tiểu và không có cực đại.
- Nếu $\begin{cases} a < 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$ hàm số có 1 cực đại và không có cực tiểu.

d) Các dạng đồ thị hàm số trùng phương.

- **Trường hợp 1:** phương trình $y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt $(ab < 0)$.

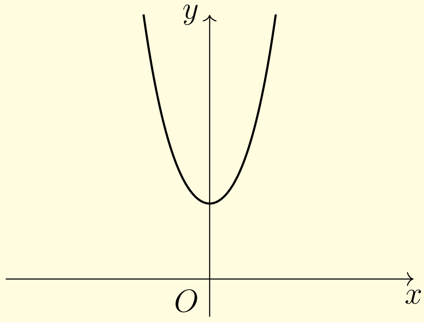


Với $a > 0$

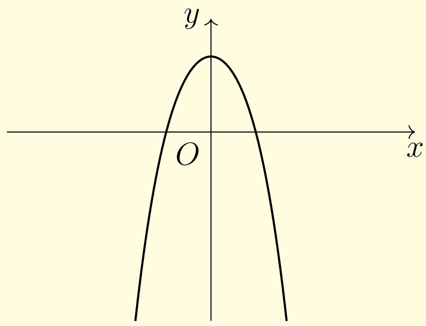


Với $a < 0$

Trường hợp 2: phương trình $y' = 0$ có 1 nghiệm.



Với $a > 0$



Với $a < 0$

3. Hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c \neq 0, ad - bc \neq 0)$

Hàm số nhất biến

- Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$.
- Đạo hàm $y' = \dfrac{ad - bc}{(cx+d)^2}$.
- Nếu $ad - bc > 0$ thì hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định. Đồ thị nằm góc phần tư 2 và 4.
- Nếu $ad - bc < 0$ thì hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định. Đồ thị nằm góc phần tư 1 và 3.
- Đồ thị hàm số có TCĐ $x = -\dfrac{d}{c}$ và TCN $y = \dfrac{a}{c}$.
- Đồ thị có tâm đối xứng $I\left(-\dfrac{d}{c}; \dfrac{a}{c}\right)$.

4. Các phép biến đổi đồ thị

Dạng 1. Từ đồ thị $(C): y = f(x)$ suy ra đồ thị $(C'): y = f(|x|)$.

Ta có $y = f(|x|) = \begin{cases} f(x) & \text{khi } x \geq 0 \\ f(-x) & \text{khi } x < 0. \end{cases}$

và $y = f(|x|)$ là hàm chẵn nên đồ thị (C') nhận Oy làm trục đối xứng.

Cách vẽ (C') **từ** (C)

- Giữ nguyên phần đồ thị bên phải Oy của đồ thị $(C): y = f(x)$.
- Bỏ phần đồ thị bên trái Oy của (C), **lấy đối xứng phần đồ thị được giữ** qua Oy.

Dạng 2. Từ đồ thị $(C): y = f(x)$ suy ra đồ thị $(C'): y = |f(x)|$.

Ta có $y = |f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{khi } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{khi } f(x) < 0. \end{cases}$

Cách vẽ (C') **từ** (C)

- Giữ nguyên phần đồ thị phía trên Ox của đồ thị (C) : $y = f(x)$.
- Bỏ phần đồ thị phía dưới Ox của (C), **lấy đối xứng phần đồ thị bị bỏ** qua Ox.

Dạng 3. Từ đồ thị $(C): y = u(x)v(x)$ suy ra đồ thị $(C'): y = |u(x)| \cdot v(x)$.

Ta có $y = |u(x)| \cdot v(x) = \begin{cases} u(x)v(x) = f(x) & \text{khi } u(x) \geq 0 \\ -u(x)v(x) = -f(x) & \text{khi } u(x) < 0. \end{cases}$

Cách vẽ (C') **từ** (C)

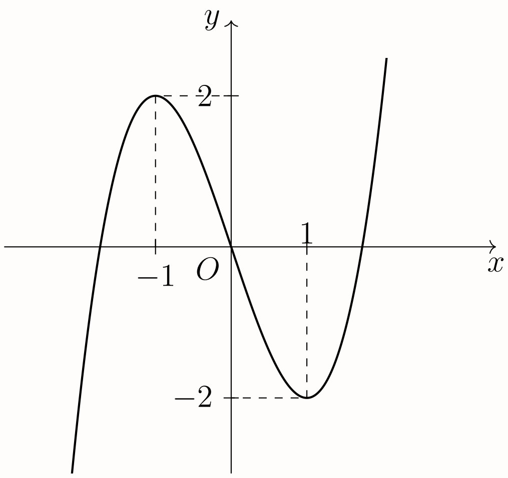
- Giữ nguyên phần đồ thị trên miền $u(x) \geq 0$ của đồ thị $(C): y = f(x)$.
- Bỏ phần đồ thị trên miền $u(x) < 0$ của (C), **lấy đối xứng phần đồ thị bị bỏ** qua Ox.

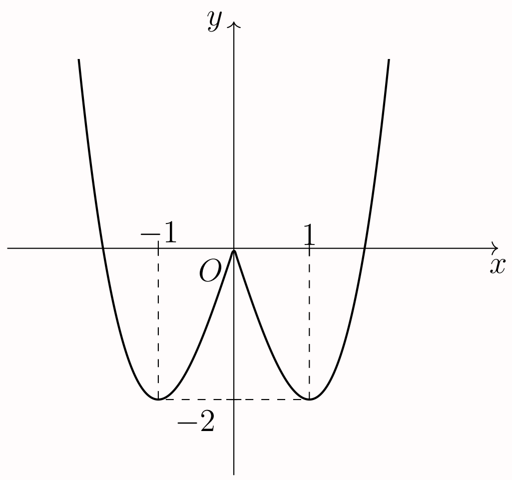
B VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Từ đồ thị $(C): y = f(x) = x^3 - 3x$ suy ra đồ thị $(C)': y = |x|^3 - 3|x|$.

a) Bỏ phần đồ thị của (C) bên trái Oy, giữ nguyên (C) bên phải Oy.

b) Lấy đối xứng phần đồ thị được giữ qua Oy.





$(C)': y = |x|^3 - 3|x|$

0.1. Bài tập rèn luyện

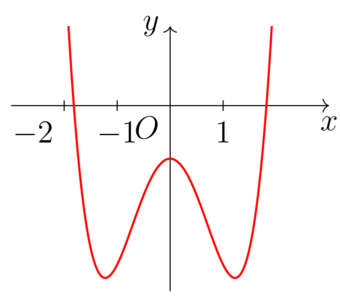
C MỘT SỐ DẠNG TOÁN CƠ BẢN

Dạng 1. Đọc và biến đổi đồ thị

Câu 1. Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

Ⓐ $a > 0, b < 0, c < 0$. Ⓑ $a > 0, b > 0, c < 0$.

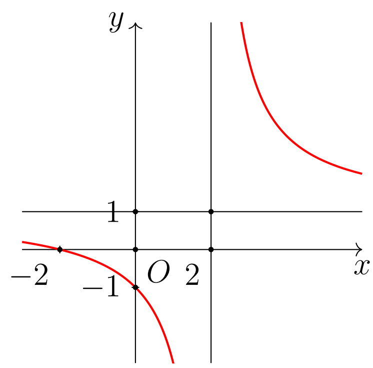
Ⓒ $a < 0, b > 0, c < 0$. Ⓓ $a > 0, b < 0, c > 0$.



Câu 2. Tìm a, b, c để hàm số $y = \dfrac{ax+2}{cx+b}$ có đồ thị như hình vẽ sau

Ⓐ $a = 1; b = 1; c = -1$. Ⓑ $a = 1; b = -2; c = 1$.

Ⓒ $a = 1; b = 2; c = 1$. Ⓓ $a = 2; b = -2; c = -1$.

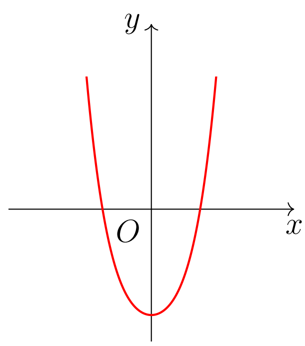


Câu 3.

Hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$, $(a \neq 0)$ có đồ thị như hình bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

Ⓐ $a > 0, b < 0, c \leq 0$. Ⓑ $a < 0, b < 0, c < 0$.

Ⓒ $a > 0, b \geq 0, c > 0$. Ⓓ $a > 0, b \geq 0, c < 0$.

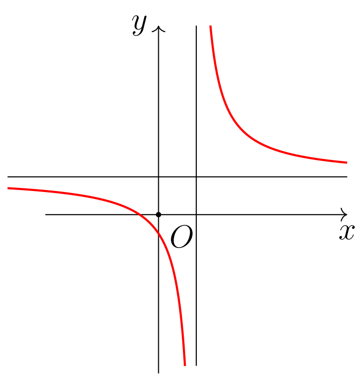


Câu 4.

Cho hàm số $y = \dfrac{bx-c}{x-a}$ $(a \neq 0$ và a, b, $c \in \mathbb{R})$ có đồ thị như hình bên. Khẳng định nào dưới đây đúng?

Ⓐ $a > 0, b > 0, c - ab < 0$. Ⓑ $a < 0, b > 0, c - ab < 0$.

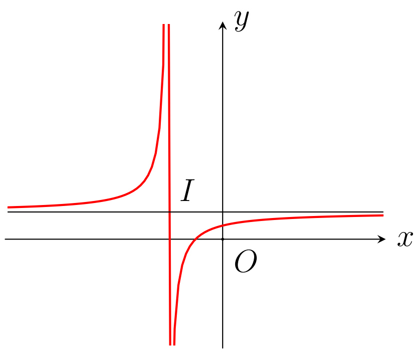
Ⓒ $a < 0, b < 0, c - ab > 0$. Ⓓ $a > 0, b < 0, c - ab < 0$.



Câu 5.

Cho hàm số $y = \dfrac{ax+1}{x-b}$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?

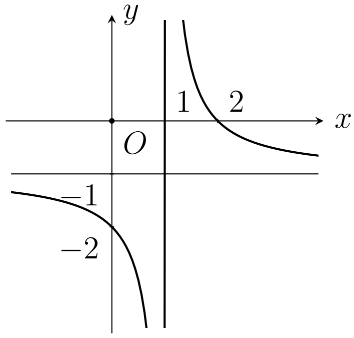
Ⓐ $a > 0 > b$. Ⓑ $a > b > 0$. Ⓒ $a < b < 0$. Ⓓ $a < 0 < b$.



Câu 6.

Cho hàm số $y = \dfrac{ax - b}{x - 1}$ có đồ thị như hình dưới.
Khẳng định nào dưới đây là đúng?

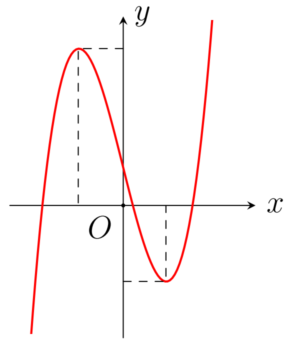
Ⓐ $b < 0 < a$. Ⓑ $0 < b < a$. Ⓒ $b < a < 0$. Ⓓ $0 < a < b$.



Câu 7.

Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình bên. Khẳng định nào sau đây đúng?

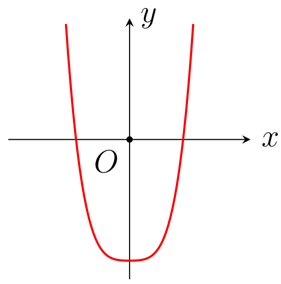
Ⓐ $a > 0, b < 0, c > 0, d > 0$.
Ⓑ $a > 0, b > 0, c < 0, d > 0$.
Ⓒ $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$.
Ⓓ $a < 0, b > 0, c < 0, d > 0$.



Câu 8.

Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ (với $ab \neq 0$).
Chọn điều kiện đúng của a, b để hàm số đã cho có dạng đồ thị như hình bên.

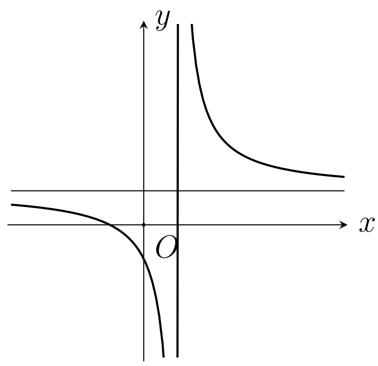
Ⓐ $\begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \end{cases}$. Ⓑ $\begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \end{cases}$. Ⓒ $\begin{cases} a < 0 \\ b < 0 \end{cases}$. Ⓓ $\begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \end{cases}$.



Câu 9.

Cho hàm số $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ có đồ thị như hình bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

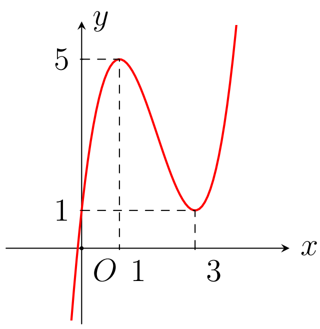
Ⓐ $ab < 0, cd < 0$.
Ⓑ $bc > 0, ad < 0$.
Ⓒ $ac > 0, bd > 0$.
Ⓓ $bd < 0, ad > 0$.



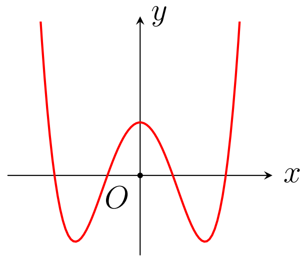
Câu 10.

Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ ở bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?

Ⓐ $a > 0, b > 0, c > 0, d > 0$.
Ⓑ $a > 0, b < 0, c > 0, d > 0$.
Ⓒ $a < 0, b < 0, c > 0, d < 0$.
Ⓓ $a > 0, b > 0, c < 0, d > 0$.

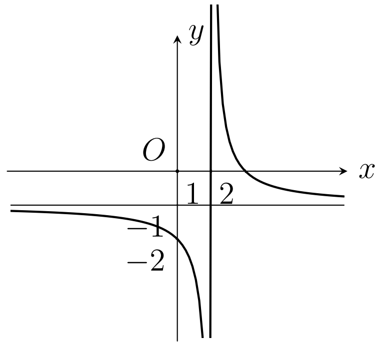


Câu 11. Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây là **đúng**?



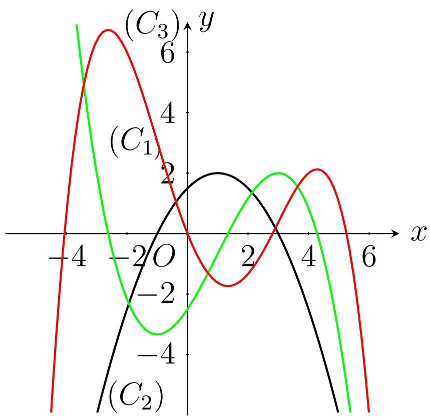
(A) $a > 0, b < 0, c < 0$.
(B) $a > 0, b > 0, c > 0$.
(C) $a > 0, b < 0, c > 0$.
(D) $a < 0, b > 0, c > 0$.

Câu 12. Cho hàm số $y = \dfrac{ax + b}{x + c}$ có đồ thị như hình bên với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Tính giá trị của biểu thức $T = a - 3b + 2c$?



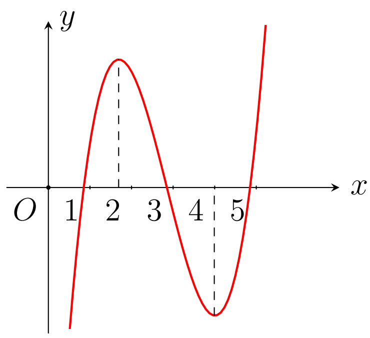
(A) $T = -9$.
(B) $T = -7$.
(C) $T = 12$.
(D) $T = 10$.

Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đạo hàm cấp hai trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của các hàm số $y = f(x), y = f'(x), y = f''(x)$ lần lượt là đường cong nào trong hình bên?



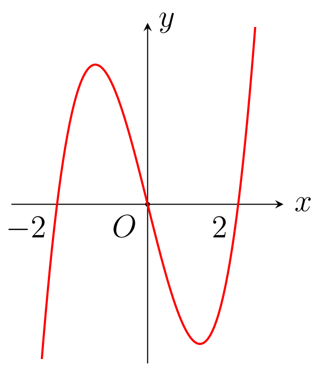
(A) $(C_3), (C_2), (C_1)$.
(B) $(C_1), (C_3), (C_2)$.
(C) $(C_3), (C_1), (C_2)$.
(D) $(C_1), (C_2), (C_3)$.

Câu 14. Cho hàm số $y = f(x)$. Biết $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau. Kết luận nào sau đây là đúng?



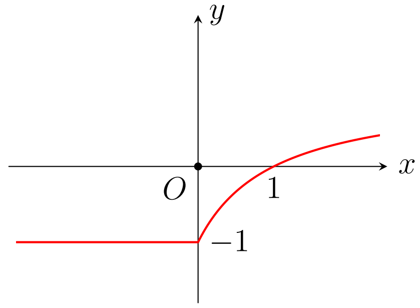
(A) Hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị.
(B) Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ chỉ có hai điểm cực trị và chúng nằm về hai phía của trục hoành..
(C) Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 2)$.
(D) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1; 3)$.

Câu 15. Cho hàm số $y = f(x)$xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Khẳng định nào sau đây là đúng?



(A) $f(x)$ đạt cực đại tại $x = 0$.
(B) $f(x)$ đạt cực đại tại $x = -1$.
(C) $f(x)$ đạt cực đại tại $x = \pm 2$.
(D) $f(x)$ đạt cực đại tại $x = 1$.

Câu 16. Hình vẽ bên là một phần của đồ thị hàm số nào?



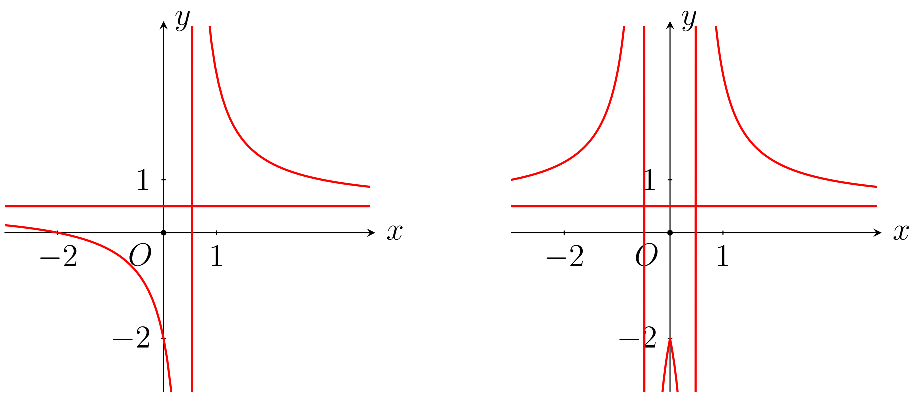
Ⓐ $y = \dfrac{-x-1}{|x|+1}$.

Ⓑ $y = \dfrac{x-1}{|x|+1}$.

Ⓒ $y = \dfrac{x-1}{|x+1|}$.

Ⓓ $y = \dfrac{x}{|x|+1}$.

Câu 17. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đạo hàm cấp hai trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của các hàm số $y = f(x), y = f'(x), y = f''(x)$ lần lượt là đường cong nào trong hình bên?



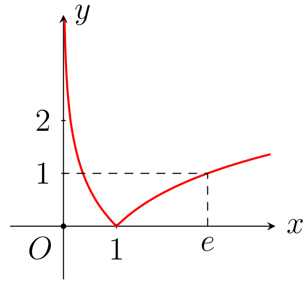
Ⓐ $y = \dfrac{x+2}{|2x-1|}$.

Ⓑ $y = \dfrac{|x+2|}{2x-1}$.

Ⓒ $y = \dfrac{|x|+2}{2|x|-1}$.

Ⓓ $y = \left|\dfrac{x+2}{2x-1}\right|$.

Câu 18. Đường cong trong hình bên dưới là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



Ⓐ $y = \ln(x+1) - \ln 2$.

Ⓑ $y = |\ln x|$.

Ⓒ $y = \ln|x+1| - \ln 2$.

Ⓓ $y = \ln|x|$.

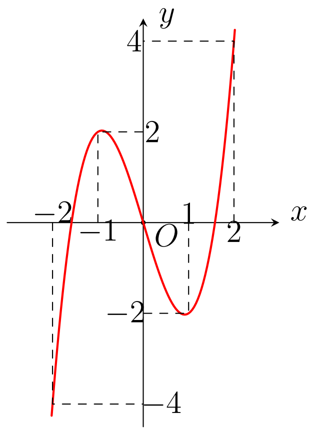
Câu 19. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên đoạn $[-2; 2]$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên dưới. Các giá trị của tham số để phương trình $|f(x)| = m$ có 6 nghiệm thực phân biệt là

Ⓐ $0 < m < 2$.

Ⓑ $m < 0$.

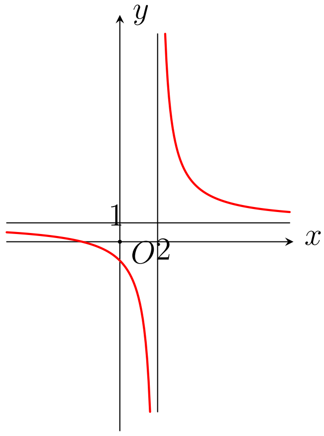
Ⓒ $m > 0$.

Ⓓ $0 \leq m \leq 2$.



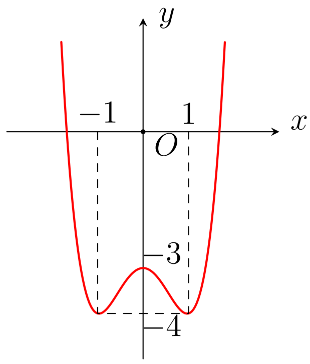
Câu 20. Đường cong ở hình bên dưới là đồ thị của hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ với a, b, c, d là các số thực. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $y' < 0, \forall x \neq 2$.
(B) $y' < 0, \forall x \neq 1$.
(C) $y' > 0, \forall x \neq 2$.
(D) $y' > 0, \forall x \neq 1$.



Câu 21. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Tìm các giá trị thực của tham số m để phương trình $|f(x)| = m$ có 6 nghiệm phân biệt.

(A) $3 < m < 4$.
(B) $0 < m < 3$.
(C) $-4 < m < -3$.
(D) $0 < m < 4$.

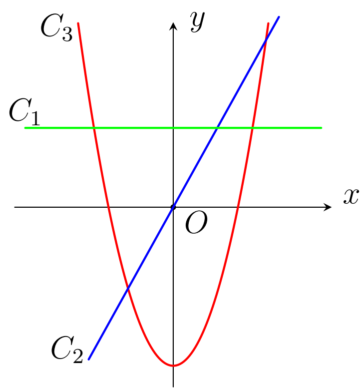


Câu 22. Cho đồ thị (C) có phương trình $y = \dfrac{x+2}{x-1}$, biết rằng ĐTHS $y = f(x)$ đối xứng với (C) qua trục tung. Khi đó $f(x)$ là

(A) $y = \dfrac{x+2}{x+1}$.
(B) $y = -\dfrac{x+2}{x-1}$.
(C) $y = -\dfrac{x-2}{x+1}$.
(D) $y = \dfrac{x-2}{x+1}$.

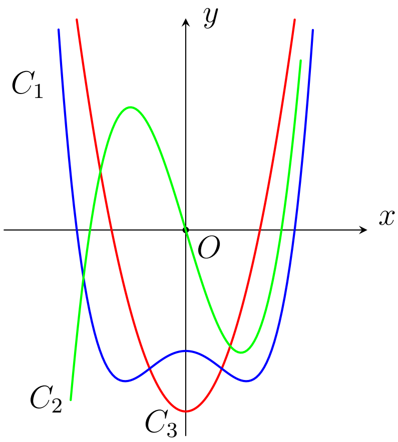
Câu 23. Cho đồ thị của ba hàm số $y = f(x), y = f'(x), y = f''(x)$ được vẽ mô tả ở hình dưới đây. Hỏi đồ thị các hàm số $y = f(x), y = f'(x)$ và $y = f''(x)$ theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong nào?

(A) $(C_3); (C_2); (C_1)$.
(B) $(C_2); (C_1); (C_3)$.
(C) $(C_2); (C_3); (C_1)$.
(D) $(C_1); (C_3); (C_2)$.



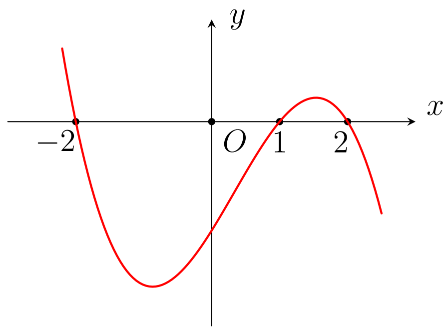
Câu 24. Cho đồ thị của ba hàm số $y = f(x), y = f'(x), y = f''(x)$ được vẽ mô tả ở hình dưới đây. Hỏi đồ thị các hàm số $y = f(x), y = f'(x)$ và $y = f''(x)$ theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong nào?

(A) $(C_3); (C_2); (C_1)$.
(B) $(C_2); (C_1); (C_3)$.
(C) $(C_2); (C_3); (C_1)$.
(D) $(C_1); (C_3); (C_2)$.



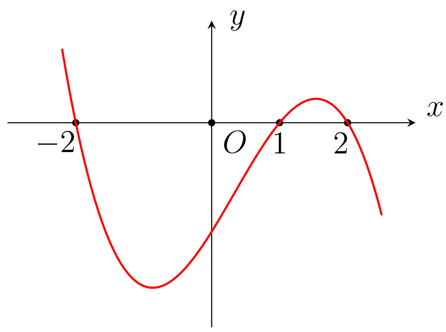
Câu 25. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên dưới. Đặt $g(x) = f(|x+m|)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x)$ có 5 điểm cực trị?

A. 3. B. 4. C. 5. D. Vô số.



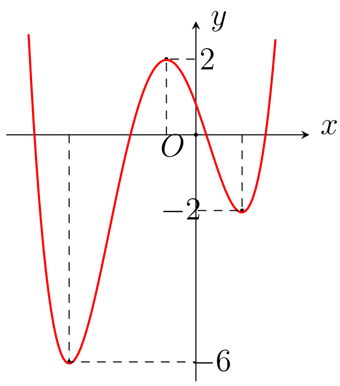
Câu 26. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên dưới. Đặt $g(x) = f(|x| + m)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x)$ có **đúng** 5 điểm cực trị?

A. 2. B. 3. C. 4. D. Vô số.



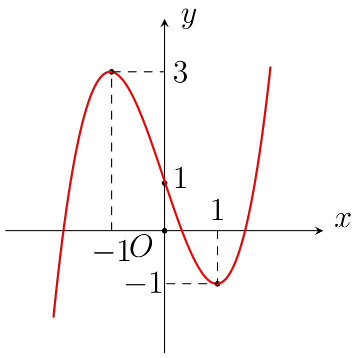
Câu 27. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Đồ thị hàm số $g(x) = |f(x+2018) + m^2|$ có 5 điểm cực trị khi

A. 2. B. 3. C. 4. D. 6.



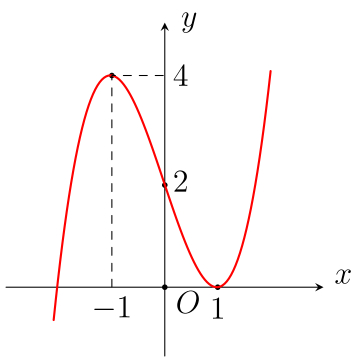
Câu 28. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Với $m < -1$ thì hàm số $g(x) = f(|x+m|)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 1. B. 2. C. 3. D. 5.

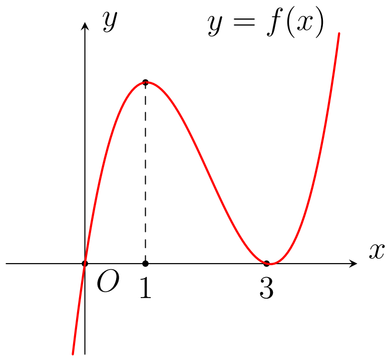


Câu 29. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $g(x) = f(|x| + m)$ có 5 điểm cực trị.

A. $m < -1$. B. $m > -1$. C. $m > 1$. D. $m < 1$.



Câu 30. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $h(x) = |f^2(x) + f(x) + m|$ có đúng 3 điểm cực trị.



Ⓐ $m > \frac{1}{4}$. Ⓑ $m \geq \frac{1}{4}$. Ⓒ $m < 1$. Ⓓ $m \leq 1$.

Câu 31. Cho hàm số $y = \dfrac{ax+1}{bx+c}$ (với a, b, c là các tham số) có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	‖	$+$
$f(x)$	$1 \nearrow +\infty$	‖	$-\infty \nearrow 1$

Xét bốn phát biểu sau: (1) $c > 1$; (2) $a + b < 0$; (3) $a + b + c = 0$; (4) $a > 0$.
Số phát biểu đúng trong bốn phát biểu đã nêu là

Ⓐ 4. Ⓑ 3. Ⓒ 2. Ⓓ 1.

Câu 32. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{ax-5}{bx+c}$, $(a, b, c \in \mathbb{R})$ có bảng biến thiên như sau:

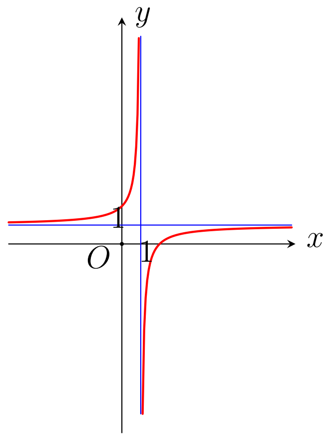
x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	‖	$+$
$f(x)$	$-2 \nearrow +\infty$	‖	$-\infty \nearrow -2$

Trong các số a, b và c có bao nhiêu số âm?

Ⓐ 0. Ⓑ 1. Ⓒ 3. Ⓓ 2.

Câu 33. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx-1}$, $(a, b, c \in \mathbb{R})$ có đồ thị như hình vẽ:
Trong các số a, b và c có bao nhiêu số dương?

Ⓐ 1. Ⓑ 2. Ⓒ 3. Ⓓ 0.



Dạng 2. Tương giao của đồ thị hàm số

0.1. Lý thuyết

Tọa độ giao điểm của hai đồ thị hàm số

Phương pháp

Cho 2 hàm số $y = f(x), y = g(x)$ có đồ thị lần lượt là (C) và (C').

- Lập phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (C'): $f(x) = g(x)$. $\quad (*)$
- Giải phương trình tìm x từ đó suy ra y và tọa độ giao điểm.
- Số nghiệm của $(*)$ là số giao điểm của (C) và (C').

Tương giao của đồ thị hàm bậc 3

Phương pháp

a) Phương pháp 1: Bảng biến thiên (phương pháp đồ thị)

- Lập phương trình hoành độ giao điểm dạng $F(x, m) = 0$ (phương trình ẩn x tham số m).
- Cô lập m đưa phương trình về dạng $m = f(x)$.
- Lập bảng biến thiên cho hàm số $y = f(x)$.
- Dựa và giả thiết và bảng biến thiên từ đó suy ra m.

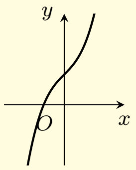
Dấu hiệu: Sử dụng phương pháp bảng biến thiên khi m độc lập với x.

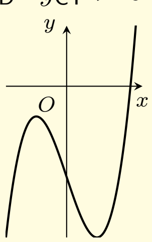
b) Phương pháp 2: Nhẩm nghiệm – tam thức bậc 2

- Lập phương trình hoành độ giao điểm $F(x, m) = 0$.
- Nhẩm nghiệm (Khử tham số). Giả sử $x = x_0$ là 1 nghiệm của phương trình.
- Phân tích $F(x, m) = 0 \Leftrightarrow (x - x_0) \cdot g(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = x_0 \\ g(x) = 0. \end{array}\right.$ ($g(x) = 0$ là phương trình bậc hai ẩn x tham số m).
- Dựa vào yêu cầu bài toán đi xử lý phương trình bậc hai $g(x) = 0$.

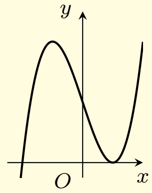
c) Phương pháp 3: Cực trị

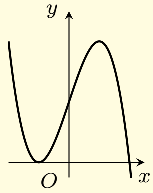
- Nhận dạng: Khi bài toán không cô lập được m và cũng không nhẩm được nghiệm.
- Quy tắc
  - Lập phương trình hoành độ giao điểm $F(x, m) = 0$. $\quad (1)$.
    Xét hàm số $y = F(x, m)$.
  - Để (1) có đúng 1 nghiệm thì đồ thị $y = F(x, m)$ cắt trục hoành tại đúng 1 điểm.
    + Hoặc hàm số luôn đơn điệu trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi hàm số không có cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ hoặc vô nghiệm hoặc có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta_{y'} \leq 0$.
    + Hoặc hàm số có cực đại, cực tiểu và $y_{\text{CD}} \cdot y_{\text{CT}} > 0$.



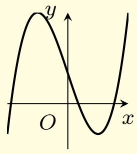


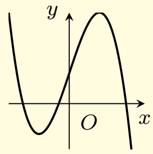
— Để (1) có đúng 2 nghiệm thì đồ thị $y = F(x,m)$ cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ Hàm số có cực đại, cực tiểu và $y_{\text{CĐ}} \cdot y_{\text{CT}} = 0$ (tham khảo hình vẽ).





— Để (1) có đúng 3 nghiệm thì đồ thị $y = F(x,m)$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ Hàm số có cực đại, cực tiểu và $y_{\text{CĐ}} \cdot y_{\text{CT}} < 0$ (tham khảo hình vẽ).





Tương giao của hàm số phân thức

a) Cho hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ (C) và đường thẳng $d\colon y = px + q$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và $d\colon \dfrac{ax+b}{cx+d} = px + q \Leftrightarrow F(x,m) = 0$ (phương trình bậc 2 ẩn x tham số m).

b) Các câu hỏi thường gặp.

- Tìm m để d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (1) có 2 nghiệm phân biệt khác $-\dfrac{d}{c}$.
- Tìm m để d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt cùng thuộc nhánh phải của (C) $\Leftrightarrow$ (1) có 2 nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ và thỏa mãn $-\dfrac{d}{c} < x_1 < x_2$.
- Tìm m để d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt cùng thuộc nhánh trái của (C) $\Leftrightarrow$ (1) có 2 nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ và thỏa mãn $x_1 < x_2 < -\dfrac{d}{c}$.
- Tìm m để d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt thuộc hai nhánh của (C) $\Leftrightarrow$ (1) có 2 nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ và thỏa mãn $x_1 < -\dfrac{d}{c} < x_2$.
- Tìm m để d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt A và B thỏa mãn điều kiện hình học cho trước
  - — Đoạn thẳng $AB = kS$.
  - — Tam giác ABC vuông.
  - — Tam giác ABC có diện tích S_0.

c) Quy tắc.

- Tìm điều kiện tồn tại A, B $\Leftrightarrow$ (1) có 2 nghiệm phân biệt.
- Xác định tọa độ của A và B (chú ý Vi-ét).
- Dựa vào giả thiết xác lập phương trình ẩn m. Từ đó suy ra m.

d) Công thức khoảng cách.

- $A\left(x_A; y_A\right), B\left(x_B; y_B\right)$ khi đó $AB = \sqrt{\left(x_B - x_A\right)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2}$.
- $\begin{cases} M\left(x_0; y_0\right) \\ \Delta\colon Ax_0 + By_0 + C = 0 \end{cases} \Rightarrow \mathrm{d}\left(M, \Delta\right) = \dfrac{\left|Ax_0 + By_0 + C\right|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

Tương giao của hàm số bậc 4

a) Nghiệm của phương trình bậc bốn trùng phương $ax^4 + bx^2 + c = 0$. (1)

b) Nhẩm nghiệm

- Nhẩm nghiệm: Giả sử $x = x_0$ là một nghiệm của phương trình.
- Khi đó ta phân tích: $f(x,m) = (x^2 - x_0^2)\,g(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm x_0 \\ g(x) = 0. \end{cases}$
- Dựa vào giả thiết xử lý phương trình bậc hai $g(x) = 0$.

c) Ẩn phụ - tam thức bậc 2

- Đặt $t = x^2$, $(t \geq 0)$. Phương trình (1) trở thành $at^2 + bt + c = 0$. (2)
- Để (1) có đúng 1 nghiệm thì (2) có nghiệm $t_1; t_2$ thỏa mãn $\left[\begin{array}{l} t_1 < 0 = t_2 \\ t_1 = t_2 = 0. \end{array}\right.$
- Để (1) có đúng 2 nghiệm thì (2) có nghiệm $t_1; t_2$ thỏa mãn $\left[\begin{array}{l} t_1 < 0 < t_2 \\ 0 < t_1 = t_2. \end{array}\right.$
- Để (1) có đúng 3 nghiệm thì (2) có nghiệm $t_1; t_2$ thỏa mãn $0 = t_1 < t_2$.
- Để (1) có đúng 4 nghiệm thì (2) có nghiệm $t_1; t_2$ thỏa mãn $0 < t_1 < t_2$.

d) Bài toán: tìm m để $(C)\colon y = ax^4 + bx^2 + c$ cắt Ox tại bốn điểm có hoành độ lập thành một cấp số cộng.

- Phương trình hoành độ giao điểm $ax^4 + bx^2 + c = 0$. (1)
- Đặt $t = x^2$, $(t \geq 0)$. Phương trình $at^2 + bt + c = 0$. (2)
- Để (1) cắt Ox tại 4 điểm phân biệt thì (2) phải có 2 nghiệm dương $t_1 < t_2$ thỏa mãn $t_2 = 9t_1$.
- Kết hợp $t_2 = 9t_1$ với định lý Vi–ét tìm được m.

0.2. Ví dụ minh họa

Ví dụ 2. Gọi m là số thực dương sao cho đường thẳng $y = m + 1$ cắt đồ thị hàm số $y = x^4 - 3x^2 - 2$ tại hai điểm phân biệt M, N thỏa mãn tam giác OMN vuông tại O (O là gốc tọa độ). Kết luận nào sau đây là đúng?

A $m \in \left(\dfrac{11}{4}; \dfrac{15}{4}\right)$. **B** $m \in \left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{3}{4}\right)$. **C** $m \in \left(\dfrac{7}{4}; \dfrac{9}{4}\right)$. **D** $m \in \left(\dfrac{3}{4}; \dfrac{5}{4}\right)$.

Lời giải.

Gọi $d\colon y = m + 1$ và $(C)\colon y = x^4 - 3x^2 - 2$.
Phương trình tương giao $x^4 - 3x^2 - 2 = m + 1 \Leftrightarrow x^4 - 3x^2 - m - 3 = 0$. (1)
Đặt $t = x^2 \geq 0$, phương trình (1) trở thành $t^2 - 3t - m - 3 = 0$. (2)
Phương trình (2) có tích $a \cdot c = -m - 3 < 0$ khi m là số thực dương.
Suy ra phương trình (2) luôn có hai nghiệm trái dấu $t_1 < 0 < t_2$.
Từ đó suy ra phương trình (1) có hai nghiệm đối nhau $x_1 = -\sqrt{t_2}; x_2 = \sqrt{t_2}$. Khi đó d và (C) cắt nhau tại hai điểm phân biệt đối xứng nhau qua Oy là $M\left(-\sqrt{t_2}; m+1\right)$, $N\left(\sqrt{t_2}, m+1\right)$.
Mặt khác tam giác OMN vuông tại O thì $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = 0 \Leftrightarrow t_2 = (m+1)^2$.
Thay $t_2 = (m+1)^2$ vào phương trình (2) ta được

$$(m+1)^4 - 3(m+1)^2 - m - 3 = 0 \Leftrightarrow (m+1)^4 - 3(m+1)^2 - (m+1) - 2 = 0.$$

Đặt $a = m + 1 > 1$ ta được phương trình

$$a^4 - 3a^2 - a - 2 = 0 \Leftrightarrow (a-2)\cdot(a^3 + 2a^2 + a + 1) = 0 \Leftrightarrow a = 2 (do a > 1 nên a^3 + 2a^2 + a + 1 > 0).$$

Từ đó ta được $m + 1 = 2 \Leftrightarrow m = 1$.

Chọn đáp án D

Ví dụ 3. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\backslash\{1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	||	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2 || $+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $f(x) + 1 = m$ có đúng ba nghiệm thực phân biệt.

A $(-4; 2)$. B $(-\infty; 2]$. C $[-4; 2)$. D $(-3; 3)$.

Lời giải.

Phương trình $f(x) + 1 = m \Leftrightarrow f(x) = m - 1$ có đúng ba nghiệm phân biệt khi và chỉ khi đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = m - 1$ cắt nhau tại ba điểm phân biệt.

Căn cứ vào bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ ta được $-4 < m - 1 < 2 \Leftrightarrow -3 < m < 3$.

Vậy $m \in (-3; 3)$.

Chọn đáp án D

Ví dụ 4. Cho hàm số $f(x) = x^3 + 3x^2 + mx + 1$. Gọi S là tổng tất cả giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt đường thẳng $y = 1$ tại ba điểm phân biệt $A(0; 1)$, B, C sao cho các tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại B, C vuông góc với nhau. Giá trị của S bằng

A $\dfrac{9}{2}$. B $\dfrac{9}{5}$. C $\dfrac{9}{4}$. D $\dfrac{11}{5}$.

Lời giải.

Phương trình hoàn độ giao điểm của $y = x^3 + 3x^2 + mx + 1$ và $y = 1$ là

$$x^3 + 3x^2 + mx + 1 = 1 \Leftrightarrow x(x^2 + 6x + m) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 + 6x + m = 0. \quad (*) \end{array}\right.$$

Để đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt đồ thị hàm số $y = 1$ tại ba điểm phân biệt $A(0; 1)$, $B(x_1; y_1)$, $C(x_2; y_2)$ thì phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt khác 0

$$\Rightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta = 9 - 4m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m < \dfrac{9}{4}. \end{cases}$$

Theo hệ thức Vi-ét ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = -3 \\ x_1 \cdot x_2 = m. \end{cases}$

Để tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại B, C vuông góc với nhau thì

$$f'(x_1)\cdot f'(x_2) = -1 \Leftrightarrow \left(3x_1^2 + 6x_1 + m\right)\cdot\left(3x_2^2 + 6x_2 + m\right) = -1$$

$$\Leftrightarrow 9x_1^2x_2^2 + 18x_1x_2(x_1 + x_2) + 3m\left(x_1^2 + x_2^2\right) + 6m(x_1 + x_2) + 36x_1x_2 + m^2 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4m^2 - 9m + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \dfrac{9 + \sqrt{65}}{8} \\ m = \dfrac{9 - \sqrt{65}}{8} \end{array}\right. \Rightarrow S = \frac{9 + \sqrt{65}}{8} + \frac{9 - \sqrt{65}}{8} = \frac{9}{4}.$$

Chọn đáp án (C) □

Ví dụ 5. Cho hàm số $y = \dfrac{x}{1-x}$, (C) và điểm $A(-1;1)$. Tìm m để đường thẳng $d\colon y = mx - m - 1$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt M, N sao cho $AM^2 + AN^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

(A) $m = -1$. (B) $m = 0$. (C) $m = -2$. (D) $m = -\dfrac{2}{3}$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d là $\dfrac{x}{1-x} = mx - m - 1$ (đk $x \neq 1$)

$\Rightarrow x = (1-x)(mx-m-1) \Leftrightarrow x = mx - m - 1 - mx^2 + mx + x \Leftrightarrow mx^2 - 2mx + m + 1 = 0.\quad (*)$

Để (C) và d cắt nhau tại hai điểm phân biệt M, N thì $(*)$ phải có 2 nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' = m^2 - m(m+1) = -m > 0 \\ m - 2m + m + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < 0.$$

Giả sử $M(x_1; y_1), N(x_2; y_2)$. Theo hệ thức viét $x_1 + x_2 = 2$; $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{m+1}{m}$.

Suy ra $y_1 + y_2 = m(x_1 + x_2) - 2m - 2 = 2m - 2m - 2 = -2$

và $y_1 \cdot y_2 = (mx_1 - m - 1)(mx_2 - m - 1) = m^2x_1x_2 - m(m+1)(x_1 + x_2) + (m+1)^2$

$\qquad = m(m+1) - 2m(m+1) + (m+1)^2 = m + 1.$

Ta có

$$\begin{aligned} AM^2 + AN^2 &= (x_1+1)^2 + (y_1-1)^2 + (x_2+1)^2 + (y_2-1)^2 \\ &= (x_1+x_2+2)^2 - 2(x_1+1)(x_2+1) + (y_1+y_2-2)^2 - 2(y_1-1)(y_2-1) \\ &= (x_1+x_2+2)^2 - 2(x_1x_2 + x_1 + x_2 + 1) + (y_1+y_2-2)^2 - 2(y_1y_2 - (y_1+y_2) + 1) \\ &= (2+2)^2 - 2\left(\frac{m+1}{m} + 2 + 1\right) + (-2-2)^2 - 2(m + 1 - (-2) + 1) \\ &= 18 - 2\left(\frac{m+1}{m}\right) - 2m = 18 - 2 - 2\cdot\frac{1}{m} - 2m = 16 + 2\cdot\left[\frac{1}{-m} + (-m)\right] \\ &\geq 16 + 2\cdot 2 = 20. \end{aligned}$$

Suy ra $AM^2 + AN^2$ đạt giá trị nhỏ nhất là 20 khi $\dfrac{1}{-m} = -m \Leftrightarrow m^2 = 1 \Leftrightarrow m = \pm 1$.

Vậy $m = -1$ (vì $m < 0$)

Chọn đáp án (A) □

Ví dụ 6. Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2$ có đồ thị (C), có bao nhiêu đường thẳng d có đúng 3 điểm chung với đồ thị (C) và các điểm chung có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -1$.

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

Lời giải.

Vì đường thẳng d cắt đồ thị hàm số (C) tại 3 điểm phân biệt nên đường thẳng d là đường thẳng có hệ số góc dạng $y = ax + b$.

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (C) là $x^4 - 2x^2 = ax + b$.

Mà phương trình là phương trình bậc 4 nên phương trình muốn có 3 nghiệm phân biệt thì trong đó sẽ có 1 nghiệm kép gọi là x_1, hai nghiệm còn lại là x_2, x_3.

Suy ra đường thẳng d là tiếp tuyến của đồ thị (C), không mất tính tổng quát giả sử đường thẳng d tiếp xúc với đồ thị hàm số (C) tại x_1.

Gọi d là tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ x_1, d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt có hoành độ $x_2, x_3 (\neq x_1)$ thỏa mãn $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -1$.

Ta có $d\colon y = (4x_1^3 - 4x_1)(x - x_1) + x_1^4 - 2x_1^2$.

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (C) là

$$x^4 - 2x^2 = (4x_1^3 - 4x_1)(x - x_1) + x_1^4 - 2x_1^2. \quad (1)$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ (1) có 3 nghiệm phân biệt thỏa mãn $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -1$.
(1) $\Leftrightarrow (x - x_1)^2(x^2 + 2x_1x + 3x_1^2 - 2) = 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = x_1 \\ f(x) = x^2 + 2x_1x + 3x_1^2 - 2 = 0. \end{array}\right.$
Để phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt thỏa mãn $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -1$ thì phương trình $f(x) = 0$ phải có 2 nghiệm phân biệt x_2, x_3 khác x_1 và thỏa mãn định lí Vi-ét $\left\{\begin{array}{l} x_2 + x_3 = -2x_1 \\ x_2 \cdot x_3 = 3x_1^2 - 2 \end{array}\right.$
Ta có $\left\{\begin{array}{l} \Delta' = x_1^2 - 3x_1^2 + 2 > 0 \\ {x_1}^2 + 2x_1^2 + 3x_1^2 - 2 \neq 0 \\ {x_1}^3 + (x_2 + x_3)^3 - 3x_2x_3(x_2 + x_3) = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -1 < x_1 < 1 \\ 3x_1^2 - 1 \neq 0 \\ {x_1}^3 + (-2x_1)^3 - 3(3x_1^2 - 2).(-2x_1) = -1 \end{array}\right.$
$\Leftrightarrow x_1 = \dfrac{-11 + \sqrt{165}}{22}$.
Vậy có đúng 1 đường thẳng thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án (B) □

Ví dụ 7. Có bao nhiêu số thực của tham số m để đường thẳng $y = (m-6)x-4$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3+x^2-3x-1$ tại ba điểm phân biệt có tung độ y_1, y_2, y_3 thỏa mãn $\dfrac{1}{y_1 + 4} + \dfrac{1}{y_2 + 4} + \dfrac{1}{y_3 + 4} = \dfrac{2}{3}$.

(A) 2. (B) 0. (C) 3. (D) 1.

Lời giải.

Ta có phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng và đồ thị hàm bậc ba đã cho là

$$x^3 + x^2 - 3x - 1 = (m - 6)x - 4 \Leftrightarrow x^3 + x^2 + (3 - m)x + 3 = 0. \quad (1)$$

Giả sử x_1, x_2, x_3 là ba nghiệm phân biệt của phương trình (1).
Theo hệ thức viet đối với phương trình bậc ba ta có $\left\{\begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = -1 \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 3 - m \\ x_1x_2x_3 = -3 \end{array}\right.$.
Nhận thấy tung độ của ba giao điểm thỏa mãn phương trình$y = (m - 6)x - 4$ nên ta có được

$$y_1 + 4 = (m - 6)x_1, y_2 + 4 = (m - 6)x_2 \text{và} y_3 + 4 = (m - 6)x_3.$$

Khi đó $\dfrac{1}{y_1 + 4} + \dfrac{1}{y_2 + 4} + \dfrac{1}{y_3 + 4} = \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow \dfrac{1}{(m - 6)x_1} + \dfrac{1}{(m - 6)x_2} + \dfrac{1}{(m - 6)x_3} = \dfrac{2}{3}$.
$\dfrac{1}{m - 6} \cdot \dfrac{x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1}{x_1x_2x_3} = \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow \dfrac{1}{m - 6} . \dfrac{3 - m}{-3} = \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow m = 9$.
Thử lại với $m = 9$ suy ra phương trình hoành độ giao điểm $x^3 + x^2 - 6x + 3 = 0$ có ba nghiệm phân biệt thỏa mãn giả thiết cho (Dùng casio để kiểm tra). Vậy có một số thực m thỏa mãn.
Chọn đáp án (D) □

Ví dụ 8. Một đường thẳng cắt đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2$ tại bốn điểm phân biệt có hoành độ là 0, 1, m và n. Tính $S = m^2 + n^2$.

(A) $S = 0$. (B) $S = 1$. (C) $S = 2$. (D) $S = 3$.

Lời giải.

Do đường thẳng cắt đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2$ tại điểm có hoành độ 0 nên phương trình đường thẳng có dạng $y = ax$.
Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng $y = ax$ với đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2$ là

$$x^4 - 2x^2 = ax \Leftrightarrow x^4 - 2x^2 - ax = 0 \Leftrightarrow x(x^3 - 2x - a) = 0$$

Do phương trình có 4 nghiệm là 0, 1, m, n nên ta có

$x(x^3 - 2x - a) = x(x-1)(x-m)(x-n) \Rightarrow x^3 - 2x - a = (x^2 - mx - x + m)(x - n)$

$\Leftrightarrow x^3 - 2x - a = x^3 - nx^2 - mx^2 + mnx - x^2 + nx + mx - mn$

$\Leftrightarrow x^3 - 2x - a = x^3 + (-n - m - 1)x^2 + (m + n + mn)x - mn$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -m - n - 1 = 0 \\ m + n + mn = -2 \\ -mn = -a \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m + n = -1 \\ mn = -1 \end{cases}$

$\Rightarrow S = m^2 + n^2 = (m+n)^2 - 2mn = 3.$

Chọn đáp án D □

Ví dụ 9. Cho phương trình $(x^2 - 3x + m)^2 + x^2 - 8x + 2m = 0$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-20; 20]$ để phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt?

A 19. B 18. C 17. D 20.

Lời giải.

Ta có

$\left(x^2 - 3x + m\right)^2 + x^2 - 8x + 2m = 0 \Leftrightarrow \left[\left(x^2 - 3x + m\right)^2 - x^2\right] + \left(2x^2 - 8x + 2m\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left(x^2 - 4x + m\right)\left(x^2 - 2x + m\right) + 2\left(x^2 - 4x + m\right) = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 - 4x + m\right)\left(x^2 - 2x + m + 2\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 4x + m = 0 \quad (1) \\ x^2 - 2x + m + 2 = 0. \quad (2) \end{array}\right.$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ mỗi phương trình (1) và (2) có 2 nghiệm phân biệt không trùng nhau.

Phương trình (1) và (2) có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_1' > 0 \\ \Delta_2' > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - m > 0 \\ 1 - m - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 4 \\ m < -1. \end{cases}$

Giả sử phương trình (1) và (2) có nghiệm x_0 trùng nhau.

Suy ra hệ $\begin{cases} x^2 - 4x + m = 0 \quad (1) \\ x^2 - 2x + m + 2 = 0 \quad (2) \end{cases}$ có nghiệm

$\Rightarrow x_0^2 - 4x_0 + m - (x_0^2 - 2x_0 + m + 2) = 0 \Leftrightarrow x_0 = -1.$

Với $x_0 = -1$ thay vào (1) ta được $m = -5$.

Với $m \neq -5$ phương trình (1) và (2) không có nghiệm trùng nhau.

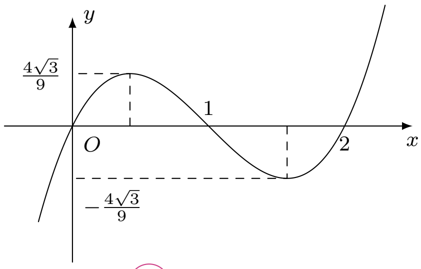
Kết hợp m là số nguyên thuộc đoạn $[-20; 20]$ suy ra $m \in \{-20; -19; \ldots; -6; -4; -3; -2\}$.

Vậy có 18 số nguyên m thoả mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án B □

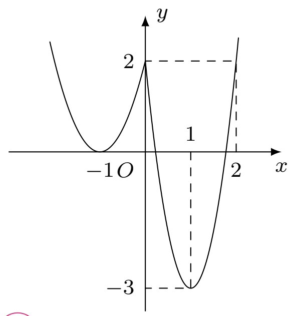
0.3. Bài tập áp dụng

Câu 1. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f\left(\left|\sqrt{4-x^2}-|x^2-1|\right|\right) = \dfrac{1}{2021}$ là



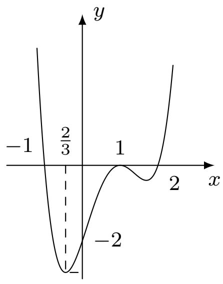
Ⓐ 24. Ⓑ 14. Ⓒ 12. Ⓓ 10.

Câu 2. Cho hai hàm số $u(x) = \dfrac{x+3}{\sqrt{x^2+3}}$ và $f(x)$, trong đó đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ bên. Hỏi có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $f(u(x)) = m$ có đúng 3 nghiệm phân biệt?



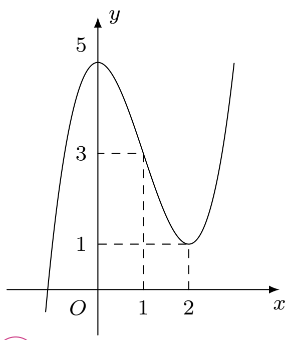
Ⓐ 1. Ⓑ 4. Ⓒ 3. Ⓓ 2.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $y = f'(x)$ là đường cong trong hình vẽ bên. Đặt $g(x) = f(f'(x)-1)$, gọi S là tập nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$. Số phần tử của tập S là



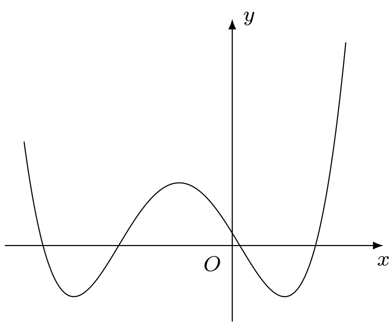
Ⓐ 8. Ⓑ 6. Ⓒ 10. Ⓓ 9.

Câu 4. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\left|\dfrac{3\sin x - \cos x - 1}{2\cos x - \sin x + 4}\right| + 2\right) = f\left(\sqrt{(m+2)^2+4}\right)$ có nghiệm?



Ⓐ 3. Ⓑ 5. Ⓒ 4. Ⓓ 2.

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Gọi (C_1) và (C_2) lần lượt là đồ thị của hai hàm số $y = f''(x)\cdot f(x) - [f'(x)]^2$ và $y = 2021^x$. Số giao điểm của (C_1) và (C_2) là

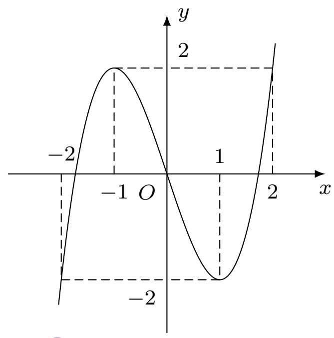


A. 1. B. 0. C. 2. D. 4.

Câu 6. Biết hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ đạt cực trị tại $x = 1$ và $x = 2021$. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $f(x) = f(m)$ có ba nghiệm phân biệt?

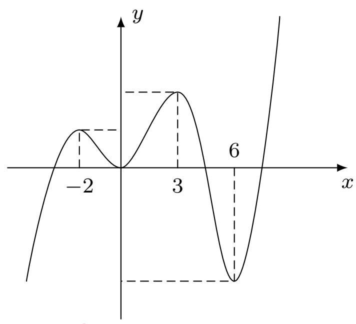
A. 4037. B. 2019. C. 4001. D. 2021.

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số mđể phương trình $f\left(\sqrt{4 + 2f(\cos x)}\right) = m$ có nghiệm $x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$?



A. 4. B. 5. C. 3. D. 2.

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $f(2x^3 - 6x + 2) = \dfrac{1}{2}m - 5$ có 6 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-1; 2]$?



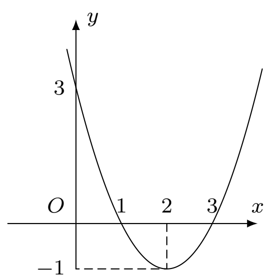
A. 4. B. 3. C. 2. D. 1.

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ. Số nghiệm của phương trình $|f(f(x))| = 2$ là

x	$-\infty$		-4		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	1	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

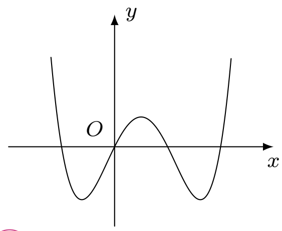
A. 4. B. 5. C. 9. D. 7.

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f^2(|x|) + (m-2)f(|x|) + m - 3 = 0$ có 6 nghiệm phân biệt?



A. 2. B. 3. C. 1. D. 4.

Câu 11. Biết đồ thị hàm số bậc bốn $y = f(x)$ được cho bởi hình vẽ bên. Tìm số giao điểm của đồ thị hàm số $y = g(x) = [f'(x)]^2 - f(x) \cdot f''(x)$ và trục hoành.



Ⓐ 4. Ⓑ 0. Ⓒ 6. Ⓓ 2.

Câu 12. Cho hàm số $f(x) = x + \sqrt{1+x^2}$. Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $xf(x) - \dfrac{1+\sqrt{4x+m-1}}{f(-1-\sqrt{4x+m-1})} = 0$ có hai nghiệm phân biệt là

Ⓐ 2. Ⓑ 3. Ⓒ 6. Ⓓ 4.

Câu 13. Cho hàm số $f(x) = (1-m^3)x^3 + 3mx^2 + (3m^2 - 2m + 2)x + m^3 + 2m$ với m là tham số. Có bao nhiêu số nguyên $m \in [-2020; 2021]$ sao cho $f(x) \geq 0$ với mọi $x \in [2020;\ 2021]$?

Ⓐ 2023. Ⓑ 2022. Ⓒ 2021. Ⓓ 2020.

Câu 14. Cho hàm số $y = f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$. Tập hợp các giá trị m để phương trình $f\left(f\left(\dfrac{2\sin x + 1}{2}\right)\right) = f(m)$ có nghiệm là đoạn $[a;\ b]$. Khi đó giá trị $4a^2 + 8b$ thuộc khoảng nào sau đây?

Ⓐ $\left(7; \dfrac{23}{2}\right)$. Ⓑ $(-2; 5)$. Ⓒ $\left(\dfrac{43}{3}; \dfrac{39}{2}\right)$. Ⓓ $\left(\dfrac{37}{3}; \dfrac{65}{4}\right)$.

Câu 15. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{x^2+5x+2}{2x+1}$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để bất phương trình $2021f(\sqrt{3x^2-18x+28}) - m\sqrt{3x^2-18x+28} \geq m + 4042$ nghiệm đúng với mọi x thuộc đoạn $[2; 4]$.

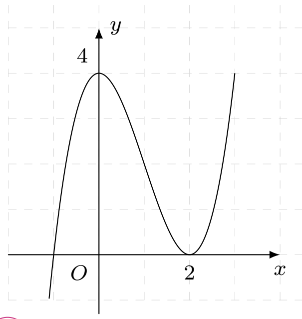
Ⓐ 673. Ⓑ 808. Ⓒ 135. Ⓓ 898.

Câu 16. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình. Số nghiệm của phương trình $f\left(2^{3x^4-4x^2+2}\right) + 1 = 0$ là

x	$-\infty$		-1		2		5		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Ⓐ 2. Ⓑ 3. Ⓒ 6. Ⓓ 5.

Câu 17. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như bên. Số nghiệm phương trình $2f(x + 1 - \sqrt{6x+3}) = 1$ là

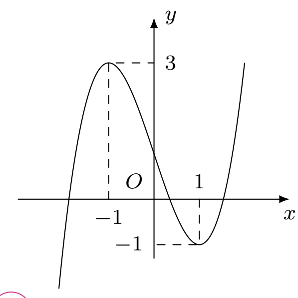


Ⓐ 3. Ⓑ 4. Ⓒ 6. Ⓓ 5.

Câu 18. Cho hàm số $f(x) = x^3 - \frac{1}{2}mx + m - 8$, $x \in \mathbb{R}$ với m là một hằng số khác 0. Biết rằng phương trình $f(x) = 0$ có đúng hai nghiệm phân biệt. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của k thỏa mãn phương trình $f(x) = k$ có 3 nghiệm phân biệt ?

(A) 3. (B) 34. (C) 6. (D) 34.

Câu 19. Cho hàm đa thức $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Đặt $g(x) = |f(x^2)|$. Số nghiệm của phương trình $g(x) \cdot [2g(x) - 1] = 0$ là



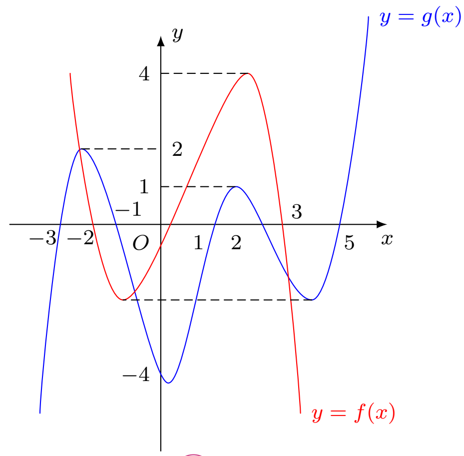
(A) 11. (B) 10. (C) 13. (D) 12.

Câu 20. Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ. Phương trình $|f(2x^2 + 3) - 2| = 5$ có bao nhiêu nghiệm?

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	-3	$\nearrow$	3

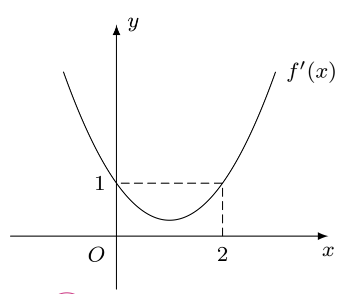
(A) 3. (B) 5. (C) 6. (D) 4.

Câu 21. Cho hai hàm $y = f(x)$ và $y = g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Khi đó tổng số nghiệm của phương trình $f(g(x)) = 0$ và $g(f(x)) = 0$ là



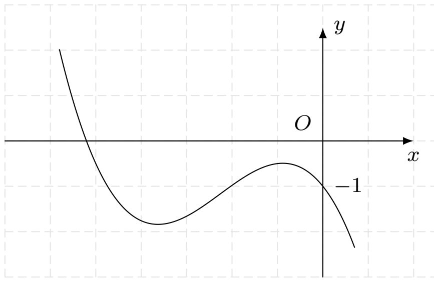
(A) 25. (B) 22. (C) 21. (D) 26.

Câu 22. Cho $f(x)$ là hàm số bậc ba. Hàm số $f'(x)$ có đồ thị như hình. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(e^x+1) - x - m = 0$ có hai nghiệm thực phân biệt.



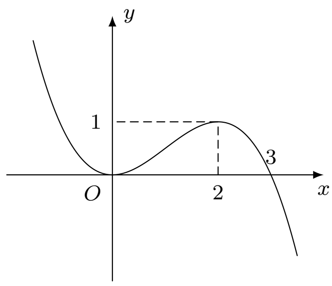
(A) $m > f(2)$. (B) $m > f(2) - 1$. (C) $m < f(1) - \ln 2$. (D) $m > f(1) + \ln 2$.

Câu 23. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên dưới. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f(x^3 f(x)) + 1 = 0$ là



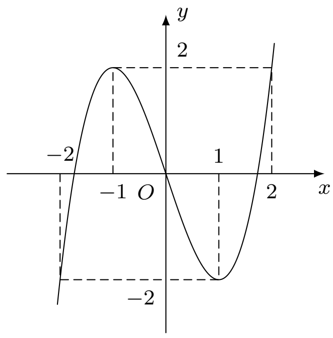
Ⓐ 6. Ⓑ 8. Ⓒ 5. Ⓓ 4.

Câu 24. Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ với $(a, b, c, d, e \in \mathbb{R})$. Biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m trên $[-5; 5]$ để phương trình $f(-x^2 + 2x + m) = e$ có bốn nghiệm phân biệt.



Ⓐ 0. Ⓑ 2. Ⓒ 5. Ⓓ 7.

Câu 25. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\sqrt{4 + 2f(\cos x)}\right) = m$ có nghiệm $x \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

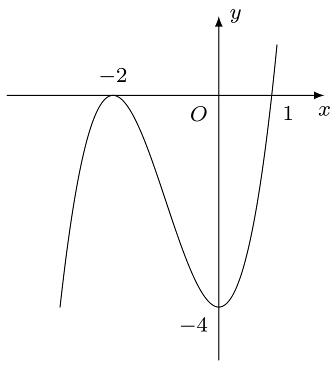


Ⓐ 4. Ⓑ 3. Ⓒ 2. Ⓓ 5.

Câu 26. Cho hàm số $f(x) = x^3 + x - 2^m$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(f(x)) = x$ có nghiệm thuộc đoạn $[1; 2]$.

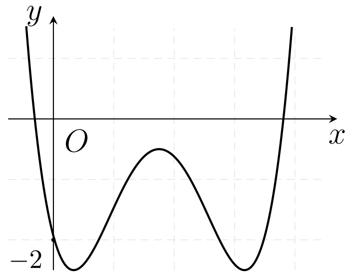
Ⓐ 3. Ⓑ 4. Ⓒ 0. Ⓓ 2.

Câu 27. Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình dưới đây. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in (-5; 5)$ để phương trình $f^2(x) - (m + 4)\,|f(x)| + 2m + 4 = 0$ có 6 nghiệm phân biệt?



Ⓐ 2. Ⓑ 4. Ⓒ 3. Ⓓ 5.

Câu 28. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f\left(x^2 f(x)\right) + 2 = 0$ là



Ⓐ 8. Ⓑ 12. Ⓒ 6. Ⓓ 9.

Câu 1. Cho hai hàm số $y=\dfrac{x-1}{x}+\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x+1}{x+2}+\dfrac{x+2}{x+3}$ và $y=|x+2|-x-m$ (m là tham số thực) có đồ thị lần lượt là (C_1), (C_2). Tập hợp tất cả các giá trị của m để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại đúng bốn điểm phân biệt là

A $(-2;\,+\infty)$. B $(-\infty;\,-2]$. C $[-2;\,+\infty)$. D $(-\infty;\,-2)$.

Câu 2. Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hai hàm số $y=(2x^2+1)\sqrt{x-1}$ và $y=\dfrac{11}{3x-4}-\dfrac{1}{2-x}+11+m$ cắt nhau tại 2 điểm phân biệt.

A $(-\infty;0)$. B $(-\infty;1)$. C $(-\infty;1]$. D $(-\infty;2]$.

Câu 3. Có bao nhiêu cặp số thực $(a;b)$ để bất phương trình $(x-1)(x+2)(ax^2+bx+2)\geq 0$ nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$?

A 3. B 2. C 0. D 1.

Câu 4. Cho 2 hàm số $y=x^7+x^5+x^3+3m-1$ và $y=|x-2|-x-2m$ (m là tham số thực) có đồ thị lần lượt là (C_1), (C_2). Tập hợp tất cả các giá trị của m để (C_1) cắt (C_2) là

A $m\in\mathbb{R}$. B $m\in(2;+\infty)$. C $m\in(-\infty;2)$. D $m\in[2;+\infty)$.

Câu 5. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m thuộc đoạn $[-2019;2019]$ để phương trình $\sqrt{3+x}\left(2\sqrt{3+x}-m\right)+\sqrt{1-x}\left(5\sqrt{1-x}+2m\right)=4\sqrt{-x^2-2x+3}$ có nghiệm thực?

A 2019. B 4032. C 4039. D 4033.

Câu 6. Có bao nhiêu m nguyên dương để hai đường cong $(C_1): y=\left|2+\dfrac{2}{x-10}\right|$ và $(C_2): y=\sqrt{4x-m}$ cắt nhau tại ba điểm phân biệt có hoành độ dương?

A 35. B 37. C 36. D 34.

Câu 7. Cho hàm số $f(x)=(x-1)\cdot(x-2)\cdots(x-2020)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-2020;2020]$ để phương trình $f'(x)=m\cdot f(x)$ có 2020 nghiệm phân biệt?

A 2020. B 4040. C 4041. D 2020.

Câu 8. Cho hai hàm số $y=\ln\left|\dfrac{x-2}{x}\right|$ và $y=\dfrac{3}{x-2}-\dfrac{1}{x}+4m-2020$. Tổng tất các các giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hai hàm số cắt nhau tại một điểm duy nhất là

A 506. B 1011. C 2020. D 1010.

Câu 9. Cho hai hàm số $y=(x+1)(2x+1)(3x+1)(m+2|x|)$; $y=-12x^4-22x^3-x^2+10x+3$ có đồ thị lần lượt là (C_1), (C_2). Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m trên đoạn $[-2020;2020]$ để (C_1) cắt (C_2) tại 3 điểm phân biệt?

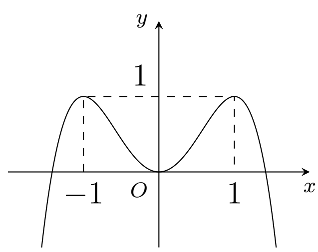
A 4040. B 2020. C 2021. D 4041.

Câu 10. Cho hai hàm số $y=x^6+6x^4+6x^2+1$ và $y=x^3\sqrt{m-15x}\,(m+3-15x)$ có đồ thị lần lượt là (C_1) và (C_2). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2019;2019]$ để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại hai điểm phân biệt. Số phần tử của tập hợp S bằng

A 2006. B 2005. C 2007. D 2008.

Câu 11. Cho hàm số $y=f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ có đồ thị như hình vẽ bên đây, trong đó a,b,c,d,e là các hệ số thực. Số nghiệm của phương trình $f\left(\sqrt{f(x)}\right)+f(x)+2\sqrt{f(x)}-1=0$ là

A 3. B 4. C 2. D 0.



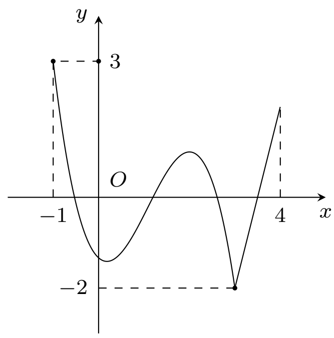
Câu 12. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ:

x	$-\infty$		-4		-2		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $6f\left(x^2-4x\right)=m$ có ít nhất ba nghiệm thực phân biệt thuộc khoảng $(0;+\infty)$?

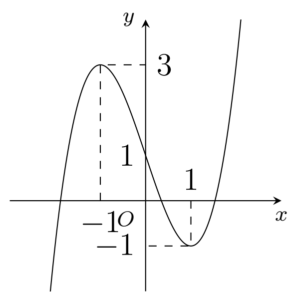
A 25. B 30. C 29. D 24.

Câu 13. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $[-1;4]$ và có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-10;10]$ để bất phương trình $|f\left(x\right)+m|<2m$ đúng với mọi x thuộc đoạn $[-1;4]$.



A 6. B 5. C 7. D 8.

Câu 14. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi S là tập hợp tất cả giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\sin x\right)-m+2=2\sin x$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;\pi)$. Tổng các phần tử của S bằng



A 4. B -1. C 3. D 2.

Câu 15. Cho hàm số $f\left(x\right)=x^3+x+2$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\sqrt[3]{f^3\left(x\right)+f\left(x\right)+m}\right)=-x^3-x+2$ có nghiệm $x\in[-1;2]$?

A 1750. B 1748. C 1747. D 1746.

Câu 16. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[2;4]$ và có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $x+2\sqrt{x^2-2x}=m\cdot f(x)$ có nghiệm thuộc đoạn $[2;4]$?

x	2		3		$\frac{7}{2}$		4
$f(x)$	4	$\searrow$	3	$\nearrow$	$\sqrt{11}$	$\searrow$	2

A 6. B 5. C 4. D 3.

Câu 17. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục và có đạo hàm trên đoạn $[-2;4]$ và có bảng biến thiên như sau

x	-2		0		1		2		4
y'		$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	
y	-3	$\nearrow$	2	$\searrow$	$1,5$	$\searrow$	1	$\nearrow$	6

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{9}{x^2} - 4 \geq 0 \\ 6f(-2x+1) - 8x^3 + 6x - m = 0 \end{cases}$ có ba nghiệm phân biệt?

Ⓐ 9. Ⓑ 11. Ⓒ 10. Ⓓ 8.

Dạng 3. Tiếp tuyến - sự tiếp xúc của hai đồ thị

0.4. Lý thuyết

1. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(C)\colon y = f(x)$ tại $M(x_0; y_0)$

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C) và điểm $M(x_0; y_0) \in (C)$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị tại M.

- **Bước 1:** Tính $f'(x)$. Tìm hệ số góc của tiếp tuyến tại M là $f'(x_0)$.
- **Bước 2:** Phương trình tiếp tuyến tại M là $y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + y_0$.

2. Viết phương trình tiếp tuyến có hệ số góc k cho trước

- Gọi Δ là tiếp tuyến cần tìm.
- Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm. Khi đó x_0 thỏa mãn $f'(x_0) = k$.
- Giải phương trình trên tìm được x_0. Suy ra $y_0 = f(x_0)$.
- Phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y = k \cdot (x - x_0) + y_0$.

3. Điều kiện tiếp xúc của hai đồ thị

Cho hai đồ thị $(C)\colon y = f(x)$ và $(C')\colon y = g(x)$. Khi đó (C) và (C') tiếp xúc nhau khi và chỉ khi hệ sau có nghiệm

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x). \end{cases}$$

Nghiệm của hệ phương trình chính là hoành độ tiếp điểm.

3.1. Ví dụ minh họa

Ví dụ 10. Cho hàm số $y = \dfrac{x+1}{x-1}$ có đồ thị (C). Điểm M thuộc (C) có hoành độ lớn hơn 1. Tiếp tuyến của (C) tại M cắt hai tiệm cận tại A và B. Diện tích nhỏ nhất của tam giác OAB bằng.

(A) $4 + 2\sqrt{2}$. (B) 4. (C) $4\sqrt{2}$. (D) $4 + \sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{-2}{(x-1)^2}$.

Gọi $M\left(m+1; 1 + \dfrac{2}{m}\right)$ là tiếp điểm (với $m > 0$) và Δ là tiếp tuyến của (C) tại M.

Khi đó $\Delta\colon y = -\dfrac{2}{m^2} \cdot (x - m - 1) + 1 + \dfrac{2}{m}$.

Ta có tiệm cận đứng: $x = 1$ và tiệm cận ngang: $y = 1$.

Gọi $A(1; y_A)$ là giao điểm của Δ và tiệm cận đứng.

Suy ra $y_A = -\dfrac{2}{m^2} \cdot (-m) + 1 + \dfrac{2}{m} = 1 + \dfrac{4}{m}$.

Gọi $B(x_B; 1)$ là giao điểm của Δ và tiệm cận ngang.

Suy ra $1 = -\dfrac{2}{m^2}(x_B - m - 1) + 1 + \dfrac{2}{m} \Rightarrow x_B = 2m + 1$.

Khi đó $\overrightarrow{OA} = \left(1; 1 + \dfrac{4}{m}\right)$ và $\overrightarrow{OB} = (2m + 1; 1)$.

Suy ra $S_{OAB}=\dfrac{1}{2}\left|1-2m-1-\dfrac{8m+4}{m}\right|=\left|4+m+\dfrac{2}{m}\right|=4+m+\dfrac{2}{m}\geq 4+2\sqrt{m\cdot\dfrac{2}{m}}=4+2\sqrt{2}$.
Vậy S_{OAB} đạt GTNN bằng $4+2\sqrt{2}$ khi $m=\sqrt{2}$.
Chọn đáp án (A) □

Ví dụ 11. Cho hàm số $y=\dfrac{1}{2}x^3-\dfrac{3}{2}x^2+2$ có đồ thị là (C). Xét hai điểm $A(a;y_A)$; $B(b;y_B)$ thuộc đồ thị sao cho tuyến tuyến của (C) tại A và B song song nhau. Biết đường thẳng AB đi qua điểm $D(5;3)$. Phương trình AB là

(A) $x-y-2=0$. (B) $x+y-8=0$. (C) $x-3y+4=0$. (D) $x-2y+1=0$.

Lời giải.

Ta có $y'=\dfrac{3}{2}x^2-3x$.
Do tiếp tuyến tại A và B song song nhau nên

$$\begin{aligned}&y'(a)=y'(b)\\ \Leftrightarrow\ &\dfrac{3}{2}a^2-3a=\dfrac{3}{2}b^2-3b\\ \Leftrightarrow\ &(a-b)(a+b-2)=0\\ \Leftrightarrow\ &a+b-2=0 \text{ (do } a\neq b).\end{aligned}$$

Mặt khác

$$\begin{aligned}y_A+y_B&=\dfrac{1}{2}(a^3+b^3)-\dfrac{3}{2}(a^2+b^2)+4\\ &=\dfrac{1}{2}\left[(a+b)^3-3ab(a+b)\right]-\dfrac{3}{2}\left[(a+b)^2-2ab\right]+4\\ &=2.\end{aligned}$$

Gọi I là trung điểm AB. Khi đó ta có $\begin{cases}x_I=\dfrac{x_A+x_B}{2}=1\\ y_I=\dfrac{y_A+y_B}{2}=1.\end{cases}$.
Mà AB đi qua $D(5;3)$ nên AB có một véc-tơ chỉ phương là $\overrightarrow{ID}=(4;2)=2(2;1)$. Suy ra $\vec{n}=(1;-2)$ là một véc-tơ pháp tuyến của AB.
Vậy AB có phương trình $1\cdot(x-1)-2\cdot(y-1)=0\Leftrightarrow x-2y+1=0$.

Chọn đáp án (D) □

Ví dụ 12. Cho đồ thị $(C)\colon y=\dfrac{x+2}{x-1}$ và điểm $A(0;a)$. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của $a\in[-2018;2018]$ sao cho từ A có thể kẻ được hai tiếp tuyến đến (C) đồng thời hai tiếp điểm nằm về hai phía của trục hoành?

(A) 2020. (B) 2018. (C) 2019. (D) 2017.

Lời giải.

Ta có $y'=\dfrac{-3}{(x-1)^2}$.
Phương trình đường thẳng Δ đi qua A, hệ số góc k có dạng

$$y=k\cdot x+a.$$

Δ tiếp xúc với (C) $\Leftrightarrow$ hệ sau có nghiệm

$$\begin{cases} \dfrac{x+2}{x-1} = kx + a \\ -\dfrac{3}{(x-1)^2} = k. \end{cases}$$

Suy ra $\dfrac{x+2}{x-1} = -\dfrac{3x}{(x-1)^2} + a \Leftrightarrow (1-a)x^2 + 2(2+a)x - 2 - a = 0$ (với $x \neq 1$). (*)

Từ A kẻ được 2 tiếp tuyến đến (C) khi và chỉ khi $(*)$ có hai nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-a \neq 0 \\ \Delta'_{y'} > 0 \\ 1-a+2(2+a)-2-a \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 1 \\ (2+a)^2 + (1-a)(2+a) > 0 \\ 3 \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 1 \\ 3a+6 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \in (-2;+\infty) \setminus \{1\}.$$

Gọi $y_1 = \dfrac{x_1+2}{x_1-1}$ và $y_2 = \dfrac{x_2+2}{x_2-1}$ là hai tung độ của tiếp điểm.

Yêu cầu bài toán

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow y_1 \cdot y_2 < 0 \quad & \Leftrightarrow \frac{x_1+2}{x_1-1} \cdot \frac{x_2+2}{x_2-1} < 0 \\ & \Leftrightarrow \frac{x_1x_2 + 2(x_1+x_2) + 4}{x_1x_2 - (x_1+x_2) + 1} < 0 \\ & \Leftrightarrow \frac{-2-a-4(2+a)+4(1-a)}{-2-a+4+2a+1-a} < 0 \\ & \Leftrightarrow \frac{-9a-6}{3} < 0 \\ & \Leftrightarrow a > -\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

So với điều kiện $a \in (-2;+\infty) \setminus \{1\}$ ta được $a \in \left(-\dfrac{2}{3};+\infty\right) \setminus \{1\}$.

Mà $a \in \mathbb{Z}$, $a \in [-2018;2018]$ nên $a \in \{0;2;3;4;\ldots;2018\}$.

Chọn đáp án B □

Ví dụ 13. Cho parabol $(P)\colon y = x^2 - 2px + q$. Biết rằng qua $A(2;1)$ luôn kẻ được tiếp tuyến đến (P) và tập hợp tất cả các điểm $M(p;q)$ là miền nghiệm của bất phương trình $ax + by + c \leq 0$. Biểu thức $T = 3a - 2b^2 + c$ không thể nhận giá trị nào sau đây?

A 10. B 9. C 11. D -2.

Lời giải.

Ta có $y' = 2x - 2p$.

Gọi Δ là đường thẳng đi qua $A(2;1)$ với hệ số góc k. Khi đó $\Delta\colon y = k \cdot (x-2) + 1$.

Δ tiếp xúc với (C) khi và chỉ khi hệ sau có nghiệm

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x^2 - 2px + q = k \cdot (x-2) + 1 \\ 2x - 2p = k \end{cases} \\ \Rightarrow \quad & x^2 - 2px + q = (2x-2p) \cdot (x-2) + 1 \\ \Leftrightarrow \quad & x^2 - 4x + 4p - q + 1 = 0. \quad (*) \end{aligned}$$

Theo giả thiết, từ A luôn kẻ được tiếp tuyến đến (C) nên $(*)$ luôn có nghiệm

$$\Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 4-4p+q-1 \geq 0 \Leftrightarrow -4p+q+3 \geq 0 \text{ với mọi } p, q.$$

Suy ra tập hợp các điểm $M(p;q)$ là miền nghiệm của bất phương trình $4x-y-3 \leq 0$.
Cho nên

$$\frac{a}{4}=\frac{b}{-1}=\frac{c}{-3} \Rightarrow \begin{cases} a=-4b \\ c=3b. \end{cases}$$

Do đó $T=3a-2b^2+c=3(-4b)-2b^2+3b=-2b^2-9b=-2\left(b+\dfrac{9}{4}\right)^2+\dfrac{81}{8} \leq \dfrac{81}{8}$.

Vậy T không thể bằng 11.
Chọn đáp án C □

Ví dụ 14. Cho hàm số $y=f(x)=x^2-4x+4m-m^2$. Có bao nhiêu giá trị của m để đồ thị hàm số $g(x)=f\left[f(x)\right]$ tiếp xúc với Ox.

A 3. B 2. C 4. D 1.

Lời giải.

Ta có $f'(x)=2x-4$. Cho $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=2$.
Đồ thị của hàm $g(x)=f\left[f(x)\right]$ tiếp xúc với Ox khi và chỉ khi hệ sau có nghiệm

$$\begin{cases} f\left[f(x)\right]=0 \\ f'(x)\cdot f'\left[f(x)\right]=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f^2(x)-4f(x)=m^2-4m \\ \left[\begin{array}{l} f'(x)=0 \\ f'\left[f(x)\right]=0. \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f^2(x)-4f(x)=m^2-4m \quad (*) \\ \left[\begin{array}{l} x=2 \\ f(x)=2. \end{array}\right. \end{cases}$$

- Với $x=2$ thì $f(2)=4m-m^2-4$. Khi đó

$$\begin{aligned} (*) &\Leftrightarrow (4m-m^2-4)^2-4(4m-m^2-4)=m^2-4m \\ &\Leftrightarrow (4m-m^2-4)^2-3(4m-m^2-4)+4=0 \\ &\Leftrightarrow m\in\varnothing. \end{aligned}$$

- Với $f(x)=2$ thì $(*) \Leftrightarrow m^2-4m+4=0 \Leftrightarrow m=2$.
  Thử lại: khi $m=2$ thì $f(x)=2 \Leftrightarrow x^2-4x+4=2 \Leftrightarrow x^2-4x+2=0$.
  Phương trình này có nghiệm nên nhận $m=2$.

Vậy với $m=2$ thì đồ thị hàm $g(x)=f\left[f(x)\right]$ tiếp xúc với Ox.
Chọn đáp án D □

Ví dụ 15. Cho hàm số $y=f(x)=x^3-3x^2+2$ có đồ thị là (C) và $A(a;-2)$. Từ A kẻ ít nhất hai tiếp tuyến đến (C). Gọi A là tập hợp tất cả giá trị của a sao cho tổng các hệ số góc bằng 9. Tính tổng các phần tử trong S.

A $2\sqrt{6}$. B 2. C $\sqrt{6}$. D $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải.

Ta có $y'=3x^2-6x$.
Gọi Δ là đường thẳng đi qua $A(a;-2)$ với hệ số góc k. Khi đó $\Delta\colon y=k(x-a)-2$.
Δ tiếp xúc với (C) khi và chỉ khi hệ sau có nghiệm

$$\begin{cases} x^3-3x^2+2=k(x-a)-2 \\ 3x^2-6x=k \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow\quad x^3-3x^2+2=(3x^2-6x)\cdot(x-a)-2\\
&\Leftrightarrow\quad (x-2)^2(x+1)-(x-2)(3x^2-3ax)=0\\
&\Leftrightarrow\quad (x-2)[2x^2-(3a-1)x+2]=0\\
&\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l}x=2\\ 2x^2-(3a-1)x+2=0.\quad (*)\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Tồn tại ít nhất 2 tiếp tuyến kẻ từ A khi và chỉ khi $(*)$ có nghiệm kép khác 2 hoặc có hai nghiệm phân biệt.

- Trường hợp 1: $(*)$ có nghiệm kép.

  Khi đó $\Delta=(3a-1)^2-16=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=-1\\ a=\dfrac{5}{3}.\end{array}\right.$

  Với $a=-1$ thì $(*)\Leftrightarrow 2x^2+4x+2\Leftrightarrow x=-1$.
  Tổng hai hệ số góc của hai tiếp tuyến tại hai tiếp điểm là $f'(2)+f'(-1)=9$.
  Suy ra nhận $a=-1$.
  Với $a=\dfrac{5}{3}$ thì $(*)\Leftrightarrow 2x^2-4x+2\Leftrightarrow x=1$.
  Khi đó tổng hai hệ số góc của hai tiếp tuyến tại hai tiếp điểm là $f'(2)+f'(1)=-3\neq 9$.
  Suy ra loại $a=\dfrac{5}{3}$.

- Trường hợp 2: $(*)$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khác 2

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'>0\\ 2\cdot 2^2-(3a-1)\cdot 2+2\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a<-1 \text{ hay } a>\dfrac{5}{3}\\ a\neq 2.\end{cases}\quad (**)$$

  Khi đó tổng các hệ số góc bằng 9

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow\quad f'(2)+f'(x_1)+f'(x_2)=9\\
&\Leftrightarrow\quad 3x_1^2-6x_1+3x_2^2-6x_2=9\\
&\Leftrightarrow\quad 3(x_1+x_2)^2-6(x_1+x_2)-6x_1x_2-9=0\\
&\Leftrightarrow\quad 3\cdot\frac{(3a-1)^2}{4}-6\cdot\frac{3a-1}{2}-6-9=0\\
&\Leftrightarrow\quad 27a^2-54a-45=0\\
&\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l}a=\dfrac{3+2\sqrt{6}}{3}\\ a=\dfrac{3-2\sqrt{6}}{3}.\end{array}\right.
\end{aligned}$$

  So với điều kiện $(**)$ ta nhận $a=\dfrac{3+2\sqrt{6}}{3}$.

- Trường hợp 3: (*) có hai nghiệm phân biệt, trong đó có một nghiệm bằng 2 $\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta>0\\ a=2\end{cases}\Leftrightarrow a=2$.

  Khi đó $(*)\Leftrightarrow 2x^2-5x+2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\ x=\dfrac{1}{2}.\end{array}\right.$

  Khi đó tổng các hệ số góc bằng $f'(2)+f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{9}{4}\neq 2$.

  Suy ra loại $a=2$.

Vậy $a=-1$; $a=\dfrac{3+2\sqrt{6}}{3}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán và tổng các giá trị của a là $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$.

Chọn đáp án D □

Ví dụ 16. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^4 - \frac{14}{3}x^2$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu điểm $A \in (C)$ sao cho tiếp tuyến của (C) tại A cắt (C) tại hai điểm $M(x_1; y_1)$; $N(x_2; y_2)$ phân biệt khác A sao cho $y_1 - y_2 = 8(x_1 - x_2)$?

A 1. **B** 2. **C** 0. **D** 3.

Lời giải.

Gọi $A\left(a; \frac{1}{3}a^4 - \frac{14}{3}a^2\right)$.

Ta có $y' = \frac{4}{3}x^3 - \frac{28}{3}x$.

Phương trình tiếp tuyến Δ của (C) tại A có dạng $y = \left(\frac{4}{3}a^3 - \frac{28}{3}a\right) \cdot (x-a) + \frac{1}{3}a^4 - \frac{14}{3}a^2$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d là

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{4}{3}a^3 - \frac{28}{3}a\right) \cdot (x-a) + \frac{1}{3}a^4 - \frac{14}{3}a^2 = \frac{1}{3}x^4 - \frac{14}{3}x^2 \\
\Leftrightarrow\ & (x-a)^2 \cdot \left(x^2 + 2ax + 3a^2 - 14\right) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = a \\ x^2 + 2ax + 3a^2 - 14 = 0. \quad (*) \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Tồn tại hai giao điểm M, N khi và chỉ khi $(*)$ có hai nghiệm phân biệt khác a

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ a^2 + 2a^2 + 3a^2 - 14 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a^2 + 14 > 0 \\ 6a^2 - 14 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \in \left(-\sqrt{7}; \sqrt{7}\right) \setminus \left\{\pm\frac{\sqrt{21}}{3}\right\}. \quad (**)$$

Ta có

$$\begin{aligned}
& y_1 - y_2 = 8(x_1 - x_2) \\
\Leftrightarrow\ & \left(\frac{4}{3}a^3 - \frac{28}{3}a\right) \cdot (x_1 - x_2) = 8(x_1 - x_2) \\
\Leftrightarrow\ & \frac{4}{3}a^3 - \frac{28}{3}a - 8 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} a = 3 \\ a = -1 \\ a = -2. \end{array}\right.
\end{aligned}$$

So với điều kiện $(**)$ ta được $\left[\begin{array}{l} a = -1 \\ a = -2. \end{array}\right.$

Chọn đáp án B

4. Bài tập minh họa

Câu 1. Phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = x^3 - 2x^2 + x + 2019$ tại điểm có hoành độ $x_0 = -1$ là

Ⓐ $y = 8x + 2016$. Ⓑ $y = 8x + 2007$. Ⓒ $y = 8x + 2014$. Ⓓ $y = 8x + 2023$.

Câu 2. Phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = x(4-x)^2$ tại điểm $M_0(1;9)$ là

Ⓐ $y = 3x + 12$. Ⓑ $y = 3x + 8$. Ⓒ $y = 3x - 3$. Ⓓ $y = 3x + 6$.

Câu 3. Phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = x^4 + 2x^2 - 1$ tại điểm có hoành độ $x_0 = -2$ là

Ⓐ $y = -40x - 80$. Ⓑ $y = -40x - 57$. Ⓒ $y = -40x + 103$. Ⓓ $y = -40x + 25$.

Câu 4. Cho hàm số $y = x^4 + 2x^2 + 3$ có đồ thị (C). Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại $M(1;6)$ là

Ⓐ $y = 8x - 2$. Ⓑ $y = 8x + 5$. Ⓒ $y = 8x - 8$. Ⓓ $y = 8x + 14$.

Câu 5. Cho hàm số $y = \dfrac{x+1}{x-2}$ có đồ thị (C). Tiếp tuyến của (C) tại điểm có tung độ bằng 4 là

Ⓐ $y = 3x - 5$. Ⓑ $y = -3x + 13$. Ⓒ $y = 3x + 13$. Ⓓ $y = -3x + 5$.

Câu 6. Cho hàm số $y = \dfrac{1}{x-1}$ có đồ thị (C). Tiếp tuyến của (C) tại điểm có tung độ bằng 1 tạo với hai trục tọa độ Ox, Oy một tam giác có diện tích bằng

Ⓐ 1. Ⓑ $\dfrac{1}{2}$. Ⓒ 9. Ⓓ $\dfrac{9}{2}$.

Câu 7. Cho hàm số $y = \ln(x+1) + \ln x$ có đồ thị (C), điểm $M \in (C)$ có tung độ bằng $\ln 2$. Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm M là

Ⓐ $y = -\dfrac{3}{2}x + 3 + \ln 2$. Ⓑ $y = \dfrac{3}{2}x - \dfrac{3}{2} + \ln 2$.

Ⓒ $y = 3x - 1$. Ⓓ $y = \dfrac{3}{2}x - \dfrac{1}{2}$.

Câu 8. Cho hàm số $y = x\ln(x-1)$ có đồ thị (C). Phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với trục hoành là

Ⓐ $y = 0$. Ⓑ $y = x - 1$. Ⓒ $y = 2x - 4$. Ⓓ $y = 2x + 4$.

Câu 9. Cho hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ có đồ thị (C). Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có tung độ bằng $y_0 = -15$ là

Ⓐ $y = 24x + 9$. Ⓑ $y = 24x + 39$. Ⓒ $y = -15$. Ⓓ $y = 24x - 39$.

Câu 10. Cho hàm số $y = x^3 - x^2 + 2x + 5$ có đồ thị (C). Trong các tiếp tuyến của (C), thì tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất tiếp xúc với (C) tại điểm có tung độ bằng

Ⓐ $\dfrac{1}{3}$. Ⓑ $\dfrac{151}{27}$. Ⓒ $\dfrac{113}{27}$. Ⓓ $\dfrac{5}{3}$.

Câu 11. Cho hàm số $y = \log_2 \dfrac{x+3}{2-x}$ có đồ thị (C). Phương trình tiếp tuyến đồ thị hàm số tại giao điểm của đồ thị (C) với đường thẳng $d: y = 2$ là

Ⓐ $y = \dfrac{5}{4\ln 2}x - \dfrac{5}{4\ln 2}$. Ⓑ $y = \dfrac{1}{4\ln 2}x + 2 - \dfrac{5}{4\ln 2}$.

Ⓒ $y = x + 2 - \dfrac{5}{4\ln 2}$. Ⓓ $y = \dfrac{5}{4\ln 2}x + 2 - \dfrac{5}{4\ln 2}$.

Câu 12. Biết đường thẳng $y = 2\ln 4 \cdot x + m$ là tiếp tuyến của đường cong $y = 4^{2x}$ khi đó giá trị tham số m bằng

Ⓐ $2\ln 4 - 1$. Ⓑ 1 hoặc 3. Ⓒ 1. Ⓓ 1 hoặc $2\ln 4 - 1$.

Câu 13. Cho hàm số $y = x^3 - 4x^2 + 3x - 3$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị (C) song song với đường thẳng $\Delta\colon 2x + y + 1 = 0$?

Ⓐ 1. Ⓑ 2. Ⓒ 3. Ⓓ 0.

Câu 14. Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 7x + 2$. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số có hệ số góc lớn nhất có phương trình là

Ⓐ $y = 4x - 1$. Ⓑ $y = 4x + 1$. Ⓒ $y = -4x - 1$. Ⓓ $y = -4x + 1$.

Câu 15. Biết tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + 23$ tại điểm $A(2; -5)$ vuông góc với đường thẳng $x + 4y - 2019 = 0$. Tính $2a + b - 4$.

Ⓐ 15. Ⓑ 23. Ⓒ -23. Ⓓ -15.

Câu 16. Đường thẳng $y = m$ tiếp xúc với đồ thị hàm số $(C) : f(x) = x^4 - 8x^2 + 35$ tại hai điểm phân biệt. Tìm tung độ tiếp điểm.

Ⓐ -35. Ⓑ 35. Ⓒ -19. Ⓓ 19.

Câu 17. Cho hàm số $y = \frac{1}{2}x^2 - \ln(2x - 2)$ có đồ thị (C). Số tiếp tuyến với đồ thị (C) của hàm số vuông góc với đường thẳng $y = -x + 2$ là

Ⓐ 0. Ⓑ 1. Ⓒ 2. Ⓓ 3.

Câu 18. Cho hàm số $y = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}$ có đồ thị (C). Tiếp tuyến của đồ thị (C) có hệ số góc nhỏ nhất là

Ⓐ $y = 0$. Ⓑ $y = 2x + 1$. Ⓒ $y = x + 2$. Ⓓ $y = 2x$.

Câu 19. Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 6x + 1$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) biết tiếp tuyến đi qua điểm $N(0; 1)$.

Ⓐ $y = -\frac{33}{4}x + 11$. Ⓑ $y = -\frac{33}{4}x + 12$. Ⓒ $y = -\frac{33}{4}x + 1$. Ⓓ $y = -\frac{33}{4}x + 2$.

Câu 20. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Có tất cả bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị hàm số đi qua điểm $A(1; 0)$

Ⓐ 1. Ⓑ 2. Ⓒ 3. Ⓓ 4.

Câu 21. Cho hàm số $y = \frac{x^2 - x - 2}{x - 3}$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị (C) đi qua điểm $A(4; 1)$?

Ⓐ 1. Ⓑ 2. Ⓒ 3. Ⓓ 0.

Câu 22. Cho hàm số $y = \frac{2x}{x + 1}$ có đồ thị (C). Biết rằng có hai tiếp tuyến của đồ thị (C) đi qua điểm $A(0; 1)$. Tích hệ số góc của hai tiếp tuyến đó bằng

Ⓐ 1. Ⓑ -1. Ⓒ -2. Ⓓ 2.

Câu 23. Gọi S là tập các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 + mx^2 - 9x - 9m$ tiếp xúc với trục hoành. Tổng các phần tử của S bằng

Ⓐ 1. Ⓑ 0. Ⓒ 3. Ⓓ -3.

Câu 24. Xét đồ thị (C) của hàm số $y = x^3 + 3ax + b$ với a, b là các số thực. Gọi M, N là hai điểm phân biệt thuộc (C) sao cho tiếp tuyến với (C) tại hai điểm đó có hệ số góc bằng 3. Biết khoảng cách từ gốc tọa độ tới đường thẳng MN bằng 1. Khi đó giá trị lớn nhất của $a^2 - b^2$ bằng

Ⓐ 0. Ⓑ $\frac{3}{2}$. Ⓒ -2. Ⓓ $\frac{-2}{3}$.

Câu 25. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) = x - \sqrt{x^2 + 1}\ \forall x \in \mathbb{R}$. Gọi Δ là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $f(x)$ tại điểm có hoành độ $x_0 = \frac{1}{2}$. Giả sử Δ cắt Ox tại điểm A và cắt Oy tại điểm B. Khi đó diện tích của tam giác OAB bằng

Ⓐ 1. Ⓑ 2. Ⓒ 4. Ⓓ 8.

Câu 26. Cho hàm số: $y = \frac{2x + 2}{x - 1}$ có đồ thị (C). Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) biết tiếp tuyến tại điểm $M(x_0; y_0) \in (C)$ thỏa mãn phương trình $|x_0| - 2 = 0$ là

A. $y=-\frac{4}{9}x-\frac{1}{9}$, $y=4x+14$.
B. $y=-\frac{4}{9}x-\frac{2}{9}$, $y=4x+1$.
C. $y=-\frac{4}{9}x-\frac{1}{9}$, $y=4x+1$.
D. $y=-\frac{4}{9}x-\frac{2}{9}$, $y=-4x+14$.

Câu 27. Cho hàm số $y=4x^2(1-x)+x^4$ (C). Phương trình tiếp tuyến tại giao điểm của (C) với parabol $(P): y=x^2$ là

A. $y=0$; $y=1$; $y=24x-6$.
B. $y=9$; $y=1$; $y=24x-6$.
C. $y=0$; $y=5$; $y=24x-63$.
D. $y=0$; $y=1$; $y=24x-63$.

Câu 28. Cho hàm số $y=\frac{2x-1}{x+1}$ có đồ thị là (C). Gọi I là giao điểm 2 đường tiệm cận. Gọi $M(x_0,y_0)$, $x_0<-3$ là một điểm trên (C) sao cho tiếp tuyến với (C) tại M cắt hai đường tiệm cận lần lượt tại A,B thỏa mãn $AI^2+IB^2=40$. Khi đó tích x_0y_0 bằng

A. -1.
B. -12.
C. 7.
D. 12.

Câu 29. Cho hàm số $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$ có đồ thị (H). Tìm trên Oy tất cả các điểm từ đó kẻ được duy nhất một tiếp tuyến tới (H).

A. $M(0;1)$.
B. $M_1(0;1)$ và $M_2(0;-1)$.
C. Không tồn tại.
D. $M(0;-1)$.

Câu 30. Cho hàm số $y=\frac{2x-1}{x-1}$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến này cắt trục hoành và trục tung lần lượt tại các điểm A,B phân biệt thỏa mãn $AB=\sqrt{82}\cdot OB$.

A. $y=-\frac{1}{9}x+\frac{13}{9}$ và $y=-\frac{1}{9}x+\frac{25}{9}$.
B. $y=-\frac{1}{9}x+\frac{25}{9}$.
C. $y=-\frac{1}{9}x+\frac{13}{9}$.
D. $y=-\frac{1}{9}x+\frac{17}{9}$ và $y=\frac{1}{9}x+\frac{25}{9}$.

Câu 31. Tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y=\frac{x^2}{x+1}$ tại điểm có hoành độ x_0 là nghiệm của phương trình $16x^2-2x-8=6\sqrt{2x-1}$ là

A. $y=\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}$.
B. $y=\frac{3}{4}x-\frac{9}{4}$.
C. $y=\frac{9}{2}$.
D. $y=\frac{4}{3}x-\frac{1}{4}$.

Câu 32. Cho hàm số $y=\frac{x-1}{x-2}$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm M có hoành độ không nhỏ hơn 3, biết tiếp tuyến cắt hai tia Ox,Oy lần lượt tại hai điểm A,B sao cho tam giác OAB cân.

A. $y=x-5$.
B. $y=-x+5$.
C. $y=x-1$.
D. $y=-x+1$.

Câu 33. Cho hàm số $y=\frac{3x-1}{x-1}$ có đồ thị (C). Biết $y=ax+b$ là phương trình tiếp tuyến của (C) có hệ số góc nhỏ nhất trong các tiếp tuyến có hoành độ tiếp điểm là số nguyên dương. Tính $2a+b$.

A. -2.
B. 9.
C. 7.
D. 5.

Câu 34. Cho hàm số $y=\frac{3-x}{x+1}$ có đồ thị (C) và đường thẳng $\Delta: y=-4x+m$. Tính tổng tất cả các giá trị của m thỏa mãn Δ là tiếp tuyến của (C)

A. 10.
B. 3.
C. -13.
D. -10.

Câu 35. Cho hàm số $y=x^2(x^2-2)$ có đồ thị (C). Gọi $M(0;b)$ là điểm thuộc trục Oy mà từ đó kẻ được 4 tiếp tuyến đến (C). Giá trị của b là

A. $0<b<1$.
B. $\left[\begin{array}{l} b=0 \\ b=\frac{1}{3} \end{array}\right.$.
C. $-1<b<1$.
D. $0<b<\frac{1}{3}$.

Câu 36. Cho hàm số $y = \dfrac{x+1}{x-1}$ có đồ thị (C). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số a để có hai tiếp tuyến của (C) qua $A\,(a;2)$ với hệ số góc k_1, k_2 thỏa mãn $k_1 + k_2 + 10k_1^2 \cdot k_2^2 = 0$. Tổng các phần tử của S bằng

Ⓐ 7. Ⓑ $\dfrac{7}{2}$. Ⓒ $\dfrac{7-\sqrt{5}}{2}$. Ⓓ $\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}$.

Câu 37. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 4$ có đồ thị là (C). Có bao nhiêu điểm có tọa độ nguyên thuộc trục hoành sao cho từ đó có thể kẻ đến (C) duy nhất một tiếp tuyến?

Ⓐ 1. Ⓑ 2. Ⓒ 3. Ⓓ Vô số.

Câu 38. Cho hàm số $y = \dfrac{x+2}{x-1}$ có đồ thị là (C). Tìm a để từ điểm $A\,(0;a)$ có thể kẻ đến (C) hai tiếp tuyến sao cho hai tiếp điểm tương ứng nằm về hai phía trục hoành.

Ⓐ $\begin{cases} a > -2 \\ a \neq 1 \end{cases}$. Ⓑ $\left[\begin{array}{l} a > -\dfrac{2}{3} \\ a \neq 1 \end{array}\right.$. Ⓒ $\begin{cases} a > -\dfrac{2}{3} \\ a \neq 1 \end{cases}$. Ⓓ $-2 < a < -\dfrac{2}{3}$.

Câu 39. Cho hàm số $y = -x^3 + mx^2 - x - 4m$ có đồ thị (C_m) và A là điểm cố định có hoành độ âm của (C_m). Giá trị của m để tiếp tuyến tại A của (C_m) vuông góc với đường phân giác góc phần tư thứ nhất là

Ⓐ $m = -6$. Ⓑ $m = 2$. Ⓒ $m = -3$. Ⓓ $m = \dfrac{-7}{2}$.

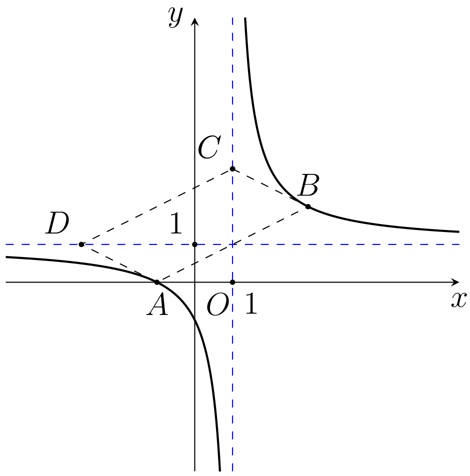
Câu 40. Cho hàm số $y = \dfrac{2x-1}{2x-2}$ có đồ thị (C). Gọi $M\,(x_0; y_0)$ (với $x_0 > 1$) là điểm thuộc (C), biết tiếp tuyến của (C) tại M cắt tiệm cận đứng và tiệm cận ngang lần lượt tại A và B sao cho $S_{\Delta OIB} = 8S_{\Delta OIA}$ (trong đó O là gốc tọa độ, I là giao điểm hai tiệm cận). Tính giá trị của $S = x_0 + 4y_0$

Ⓐ $S = 8$. Ⓑ $S = \dfrac{17}{4}$. Ⓒ $S = \dfrac{23}{4}$. Ⓓ $S = 2$.

Câu 41.

Cho hàm số $y = \dfrac{x+1}{x-1}$ có đồ thị (C). Gọi $A\,(x_A; y_A)$, $B\,(x_B; y_B)$ là hai điểm thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại A, B song song với nhau $(x_A < x_B)$. Tiếp tuyến tại A cắt đường tiệm cận ngang của (C) tại D, tiếp tuyến tại B cắt đường tiệm cận đứng của (C) tại C (tham khảo hình vẽ bên dưới). Chu vi tứ giác $ABCD$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng

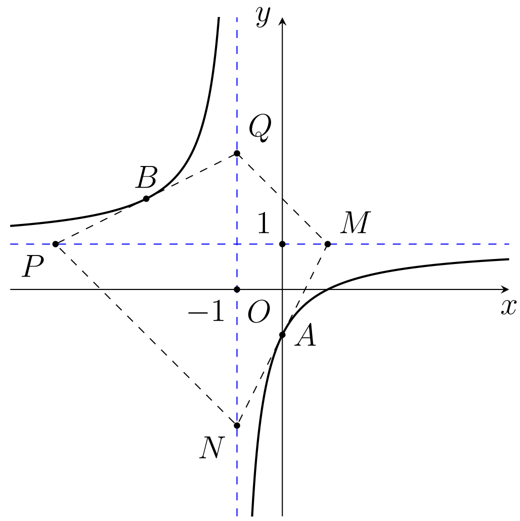
Ⓐ 16. Ⓑ 8. Ⓒ 20. Ⓓ 12.



Câu 42.

Cho hàm số $y=\dfrac{x-1}{x+1}$ có đồ thị (C). Gọi A, B là hai điểm thuộc hai nhánh của (C) và các tiếp tuyến của (C) tại A, B cắt các đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của (C) lần lượt tại các điểm M, N, P, Q (tham khảo hình vẽ bên dưới). Diện tích tứ giác $MNPQ$ có giá trị nhỏ nhất bằng

(A) 16. (B) 32. (C) 8. (D) 4.



Câu 43. Hỏi có bao nhiêu giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^4-2mx^2+3m$ tiếp xúc với trục hoành tại hai điểm phân biệt?

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) Vô số.

Câu 44. Cho hàm số $y=\dfrac{x^4-x^3-m^2x^2+m^2x}{x^2+1}$. Có bao nhiêu giá trị của m để đồ thị hàm số đã cho tiếp xúc với trục hoành?

(A) 2. (B) 0. (C) 4. (D) 3.

Câu 45. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=\mathrm{e}^x+m$ tiếp xúc với đồ thị hàm số $y=\ln(x+1)$.

(A) $m=\mathrm{e}$. (B) $m=1$. (C) $m=-\mathrm{e}$. (D) $m=-1$.

Câu 46. Số tiếp tuyến chung của hai đồ thị $(C_1): y=\dfrac{x^4}{4}-2x^2+4$và $(C_2): y=x^2+4$ là

(A) 0. (B) 1. (C) 4. (D) 5.

Câu 47. Cho hai hàm số $y=x^2$ (C_1) và $y=\sqrt{5-x^2}-\dfrac{41}{16}$ (C_2). Phương trình tiếp tuyến chung của hai đồ thị (C_1), (C_2) có hệ số góc dương là

(A) $y=\dfrac{-1}{2}x-\dfrac{1}{16}$. (B) $y=\dfrac{1}{4}x-\dfrac{1}{16}$. (C) $y=\dfrac{-1}{4}x-\dfrac{1}{16}$. (D) $y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{16}$.

Câu 48. Phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm có hoành độ $x=1$, biết $f^2(1+2x)=x-f^3(1-x)$ là đường thẳng nào sau đây?

(A) $3x-7y+6=0$. (B) $x-7y-6=0$. (C) $x+7y+6=0$. (D) $3x+7y+6=0$.

Câu 49. Cho hai hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ đều có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f^3(2-x)-2f^2(2+3x)+x^2\cdot g(x)+36x=0$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại $x_o=2$ là

(A) $y=-3x$. (B) $y=2x-4$. (C) $y=-x+2$. (D) $y=x$.

Câu 50. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$ có đồ thị là (C). Gọi điểm I là giao của hai đường tiệm cận của (C). M là một điểm bất kì trên (C) và tiếp tuyến của (C) tại M cắt hai tiệm cận tại A, B. Biết chu vi tam giác IAB có giá trị nhỏ nhất bằng $a+\sqrt{b}$ với $a,b\in\mathbb{N}$. Hỏi mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) $a-b+4=0$. (B) $2a-b<0$. (C) $a^2+b^2=100$. (D) $\log_a b=2$.

Câu 51. Cho hàm số $y=x^4-(m+1)x^2+4m$ có đồ thị (C_m). Tìm tham số m để (C_m) tiếp xúc với đường thẳng $(d): y=3$ tại hai điểm phân biệt

(A) $\left[\begin{array}{l}m=1\\m=3\end{array}\right.$. (B) $\left[\begin{array}{l}m=1\\m=16\end{array}\right.$. (C) $\left[\begin{array}{l}m=2\\m=13\end{array}\right.$. (D) $\left[\begin{array}{l}m=1\\m=13\end{array}\right.$.

Câu 52. Giá trị m để đường thẳng $\Delta : y = m(2-x)+2$ cắt đồ thị $(C) : y = -x^3+3x^2-2$ tại 3 điểm phân biệt $A(2\,;2), B, C$ sao cho tích các hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị (C) tại B và C đạt giá trị nhỏ nhất là:

Ⓐ $m = 1$. Ⓑ $m = -2$. Ⓒ $m = 2$. Ⓓ $m = -1$.

Câu 53. Cho hàm số $y = (-x^2-2x-2)\,\mathrm{e}^{-x}$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu tiếp tuyến với đồ thị (C) cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại A, B (với A, B khác O) sao cho $\cos\widehat{ABO} = \dfrac{5}{\sqrt{26}}$.

Ⓐ 0. Ⓑ 1. Ⓒ 2. Ⓓ 3.

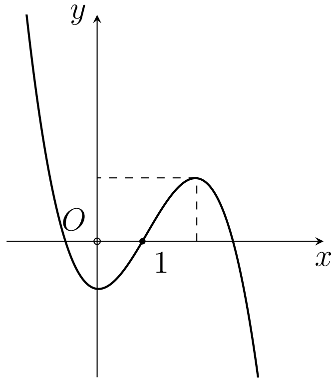
Câu 54. Biết rằng tồn tại duy nhất một giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^2-6x+m$ tiếp xúc với đồ thị hàm số $y = \sqrt{5-x^2}$. Giá trị m thuộc khoảng nào được cho dưới đây?

Ⓐ $(-\infty;-6)$. Ⓑ $(-6;0)$. Ⓒ $(0;6)$. Ⓓ $(6;+\infty)$.

Câu 55. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $(0;+\infty)$ thỏa mãn $f'(x) + \dfrac{f(x)}{x} = 4x^2 + 3x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và $f(1) = 2$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ $x = 2$ là

Ⓐ $y = -16x-20$. Ⓑ $y = 16x-20$. Ⓒ $y = 16x+20$. Ⓓ $y = -16x+20$.

Câu 56. Cho hàm đa thức bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị (C). Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Gọi đường thẳng Δ là tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ bằng 1. Hỏi Δ và (C) có bao nhiêu điểm chung?



Ⓐ 2. Ⓑ 3. Ⓒ 1. Ⓓ 4.

Câu 57. Cho hàm số $y = \dfrac{x+3}{x-1}$ có đồ thị là (C), điểm M thay đổi thuộc đường thẳng $d : y = 1-2x$ sao cho qua M có hai tiếp tuyến của (C) với hai tiếp điểm tương ứng là A, B. Biết rằng đường thẳng AB luôn đi qua điểm cố định là H. Độ dài đoạn OH là

Ⓐ $\sqrt{34}$. Ⓑ $\sqrt{10}$. Ⓒ $\sqrt{29}$. Ⓓ $\sqrt{58}$.

Câu 58. Cho hàm số $y = (m+1)\,x^3 - (2m+1)\,x - m + 1$ có đồ thị (C_m), biết rằng đồ thị (C_m) luôn đi qua ba điểm cố định A, B, C thẳng hàng. Có bao nhiêu số nguyên m thuộc đoạn $[-10;10]$ để (C_m) có tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng chứa ba điểm A, B, C?

Ⓐ 19. Ⓑ 1. Ⓒ 20. Ⓓ 10.

Câu 59. Cho đồ thị $(C) : y = x^3 - 3x^2$. Có bao nhiêu số nguyên $b \in (-10;10)$ để có đúng một tiếp tuyến của (C) đi qua điểm $B(0;b)$?

Ⓐ 2. Ⓑ 9. Ⓒ 17. Ⓓ 16.

Dạng 4. Toàn tập về phương pháp ghép trục

4.1. Cơ sở của phương pháp ghép trục giải quyết bài toán hàm hợp $g = f(u(x))$

Lý thuyết

Ta thực hiện theo các bước sau đây:

- Bước 1: Tìm tập xác định của hàm $g = f(u(x))$. Giả sử tập xác định tìm được như sau: $D = (a_1; a_2) \cup (a_3; a_4) \cup \ldots \cup (a_{n-1}; a_n)$, ở đây có thể $a_1 \equiv -\infty$; $a_n \equiv +\infty$
- Bước 2: Xét sự biến thiên của hàm $u = u(x)$ và hàm $y = f(x)$ Lập bảng biến thiên kép, xét sự tương quan giữa $[x; u = u(x)]$ và $[u; g = f(u)]$
  (Bảng biến thiên này thường có 3 dòng)

x	a_1					a_2	$\cdots$	a_{n-1}	a_n
$u = u(x)$	u_1	b_1	b_2	$\cdots$	b_k	u_2	$\cdots$	u_{n-1}	u_n
$g = f(u(x))$	$g(u_1)$	$g(b_1)$	$g(b_2)\cdots$		$g(b_k)$	$g(u_2)$	$\cdots$		$g(u_n)$

  — Dòng 1: Xác định các điểm đặc biệt của hàm $u = u(x)$, sắp xếp các điểm này theo thứ tự tăng dần từ trái qua phải, giải sử như sau: $a_1 < a_2 < \ldots < a_{n-1} < a_n$ (xem chú ý số 1).

  — Dòng 2: Điền các giá trị $u_i = u(a_i)$, với $\left(i = \overline{1, \ldots, n}\right)$. Trên mỗi khoảng $(u_i; u_{i+1})$, với $\left(i = \overline{1, n-1}\right)$ cần bổ sung các điểm kì dị $b_1, b_2, \ldots, b_k$ của hàm số $y = f(x)$. Trên mỗi khoảng $(u_i; u_{i+1})$, với $\left(i = \overline{1, n-1}\right)$, sắp xếp các điểm $u_i; b_k$ theo thứ tự, chẳng hạn: $u_i < b_1 < b_2 < \ldots < b_k < u_{i+1}$ hoặc $u_i > b_1 > b_2 > \ldots > b_k > u_{i+1}$ (xem chú ý số 2).

  — Dòng 3: Xét chiều biến thiên của hàm dựa vào bảng biến thiên của hàm $y = f(x)$ bằng cách hoán đổi u đóng vai trò của x; $f(u)$ đóng vai trò của $f(x)$.

  Sau khi hoàn thiện bảng biến thiên $g = f(u(x))$ ta sẽ thấy được hình dạng của đồ thị hàm số này.
- Bước 3: Dùng bẳng biến thiên hàm hợp $g = f(u(x))$ để giải quyết các yêu cầu của bài toán và đưa ra kết luận.

5. Một số chú ý quan trọng khi sử dụng phương pháp ghép trục để giải quyết các bài toán về hàm hợp

- *Các điểm đặc biệt của $u = u(x)$ gồm: các điểm biên của tập xác định D, các điểm cực trị của hàm số $u = u(x)$.*
- *Nếu xét hàm $u = |u(x)|$ thì ở dòng 1 các điểm đặc biệt còn có nghiệm của phương trình $u(x) = 0$ (là hoành độ giao điểm của hàm số $u = u(x)$ với trục Ox).*
- *Nếu xét hàm $u = u(|x|)$ thì ở dòng 1 các điểm đặc biệt còn có số 0(là hoành độ giao điểm của $u = u(x)$ và trục Oy).*

- *Có thể dùng thêm các mũi tên để thể hiện chiều biến thiên của $u = u(x)$.*
- *Điểm đặc biệt của hàm số $y = f(x)$ gồm: các điểm tại đó $f(x)$ và $f'(x)$ không xác định,*

các điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$.

- *Nếu xét hàm $g = |f(u(x))|$ thì trong dòng 2 các điểm đặc biệt còn có nghiệm của phương trình $f(x) = 0$.*
- *Nếu xét hàm $g = f(u(|x|))$ thì trong dòng 2 các điểm đặc biệt còn có số 0.*

5.1. Ví dụ minh họa

Ví dụ 17. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{4}$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	-2	↗	2	↘	-4	↗	$+\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$ của hàm số $5f\left(\cos^2 x - \cos x\right) = 1$ là

Ⓐ 11. Ⓑ 10. Ⓒ 9. Ⓓ 12.

Lời giải.

Tiến hành đặt $u = \cos^2 x - \cos x$. Đạo hàm $u' = -2 \cdot \cos x \cdot n \sin x + \sin x = \sin x\,(1 - 2\cos x)$.

Giải phương trình: $u' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \Rightarrow x = 0;\ \pi;\ 2\pi \\ \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow x = \pm\frac{\pi}{3};\ \frac{5\pi}{3};\ \frac{7\pi}{3}. \end{array}\right.$

Sử dụng phương pháp ghép trục:

x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{3}$		π		$\frac{5\pi}{3}$	2π	$\frac{7\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{2}$
u	0	$-\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	0	2	0	$-\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	0
$f(u)$	2	-2	2	-2	2	-4	2	-2	2	-2	2

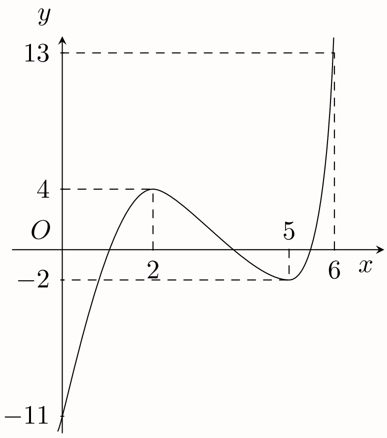
Từ bảng biến thiên ta có phương trình $f(u) = \frac{1}{5}$ có tất cả 10 nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án Ⓑ □

Ví dụ 18.

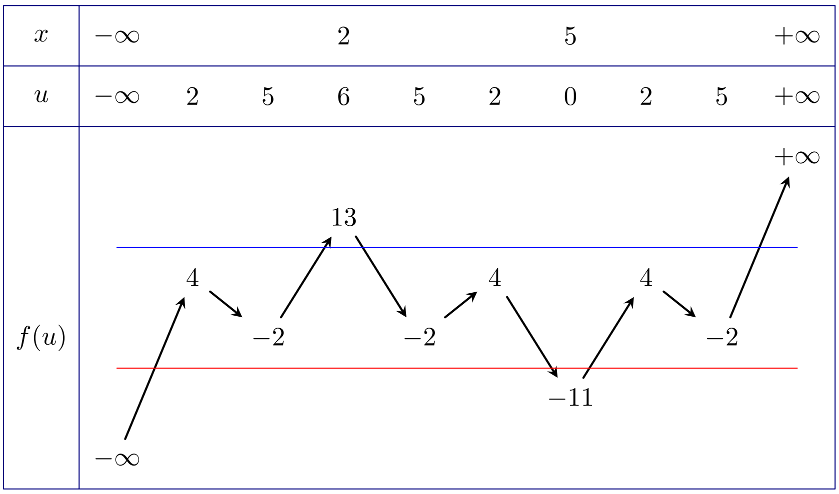
Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(f(x)+2\right) = \dfrac{m}{2}$ có 3 nghiệm phân biệt. Số phần tử của tập S là?

A 11. **B** 32. **C** 9. **D** 34.



Lời giải.

Đặt $u = f(x) + 2$. Từ đồ thị ta thấy hàm số đạt cực trị tại $x = 2$ và $x = 5$. Sử dụng phương pháp ghép trục:



Từ bảng biến thiên, phương trình có 3 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -11 < \dfrac{m}{2} < -2 \\ 4 < \dfrac{m}{2} < 13 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 8 < m < 26 \\ -22 < m < -4. \end{array}\right.$$

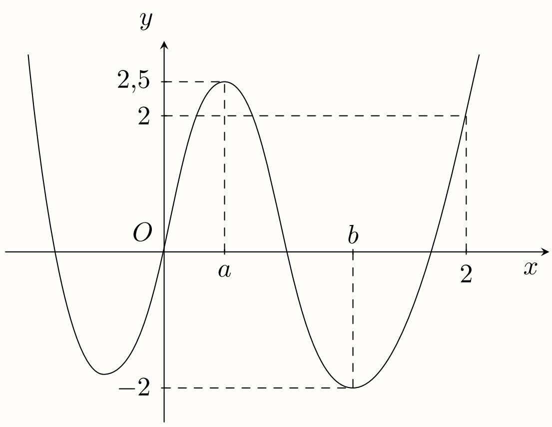
Vậy có 34 giá trị của m thỏa mãn.

Chọn đáp án D □

Ví dụ 19.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Hỏi phương trình $f\left(|x^3 - 3x|\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị thuộc đoạn $[-2; 2]$?

A 10. **B** 17. **C** 12. **D** 15.



Lời giải.

Đặt $u = |x^3 - 3x| = \sqrt{(x^3-3x)^2} \Rightarrow u' = \dfrac{(x^3-3x)(3x^2-3)}{\sqrt{(x^3-3x)^2}}$.

Giải phương trình đạo hàm

$$u' = \frac{(x^3-3x)(3x^2-3)}{\sqrt{(x^3-3x)^2}} = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 1 \\ x = \pm\sqrt{3}. \end{array}\right.$$

Sử dụng phương pháp ghép trục:

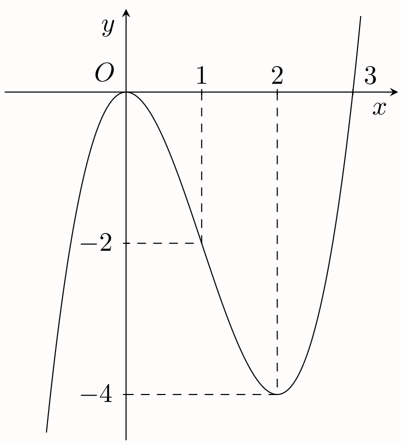
x	-2			$-\sqrt{3}$			-1			0			1			$\sqrt{3}$			2
u	2	b	a	0	a	b	2	b	a	0	a	b	2	b	a	0	a	b	2
$f(u)$	2	-2	2,5	0	2,5	-2	2	-2	2,5	0	2,5	-2	2	-2	2,5	0	2,5	-2	2

Từ bảng biến thiên, suy ra hàm số $f(|x^3-3x|)$ có 17 điểm cực trị.

Chọn đáp án (B) □

Ví dụ 20.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $7f\left(5 - 2\sqrt{1+3\cos x}\right) = 3m - 10$ có đúng ba nghiệm phân biệt thuộc $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$



(A) 10. (B) 1. (C) 15. (D) 2.

Lời giải.

Phương trình đã cho tướng tương với $f\left(5 - 2\sqrt{1+3\cos x}\right) = \dfrac{3m-10}{7}$.

Đặt $u = 5 - 2\sqrt{1+3\cos x} \Rightarrow u' = \dfrac{3\sin x}{\sqrt{1+3\cos x}}$.

Giải phương trình đạo hàm $u' = \dfrac{3\sin x}{\sqrt{1+3\cos x}} = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Sử dụng phương pháp ghép trục:

x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$-\frac{\pi}{2}$
u	3	2	1	2	3
$f(u)$	0 ↘	-4 ↗	-2 ↘	-4 ↗	0

Từ bảng biến thiên, yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \dfrac{3m-10}{7} = -2 \Leftrightarrow m = -\dfrac{4}{3}$. Vậy có 1 giá trị m thỏa mãn.

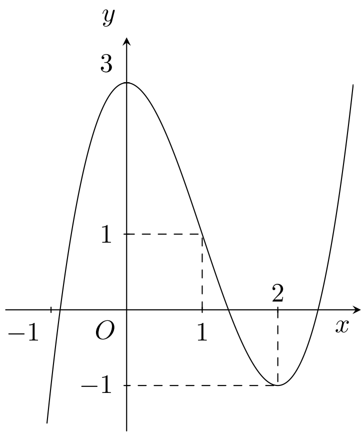
Chọn đáp án (B) □

5.2. Bài tập rèn luyện

Câu 60.

Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ. Số nghiệm thuộc khoảng $\left(-\dfrac{3\pi}{2}; 3\pi\right)$ của phương trình $f^2(\sin x) - 5\left|f(\sin x)\right| + 6 = 0$ là

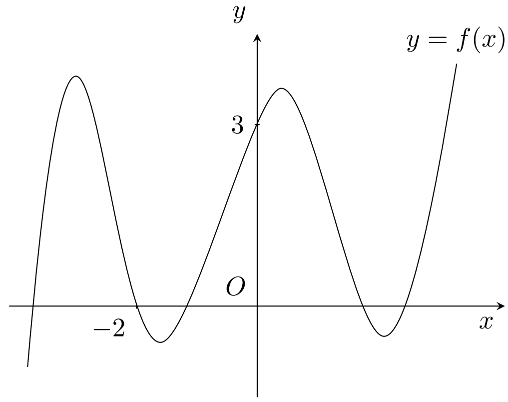
(A) 13. (B) 12. (C) 11. (D) 10.



Câu 61.

Cho hàm số $y = f(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$ có đồ thị như hình vẽ. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f(|4x+5| - 2) - 3 = 0$ là

(A) 8. (B) 4. (C) 10. (D) 6.



Câu 62. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$			0		0		0		
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	0	↗	2	↘	$-\infty$

Hỏi phương trình $\left|f\left(x - 1 - 2\sqrt{x-1}\right)\right| = 1$ có bao nhiêu nghiệm thực?

(A) 12. (B) 4. (C) 5. (D) 8.

Câu 63. Cho bảng biến thiên hàm số $f(5-2x)$ như hình vẽ dưới.

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$
y	-1	3	2	4	$-\infty$

Hỏi phương trình $|2f(x^2-4x+3)-1|=3$ có bao nhiêu nghiệm thực x tương ứng?

(A) 6. (B) 5. (C) 7. (D) 4.

Câu 64. Cho bảng biến thiên của hàm số $f(3-2x)$ như hình vẽ. Biết $f(4)=3$; $f(0)=0$. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $|f(x^3-3x+2)-m|=2$ có nhiều nghiệm nhất?

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y	-2	12	0	8	$-\infty$

(A) 7. (B) 6. (C) 5. (D) 2.

Câu 65. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f(-1)<2<f(5)$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$		2		0		3		$-\infty$

Số nghiệm của phương trình $f\left(\sqrt{2\cos^3(x)+2\cos x+5}+2\cos x\right)=2$ trên khoảng $\left(0;\dfrac{5\pi}{2}\right)$ là?

(A) 2. (B) 1. (C) 5. (D) 3.

Câu 66. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình bên.

x	$-\infty$	-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	-4	2	4	2	$+\infty$

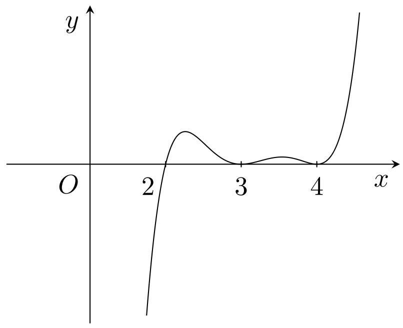
Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f^2(\cos x) + (3-m)f(\cos x) + 2m - 10 = 0$ có đúng 4 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[-\frac{\pi}{3}; \pi\right]$ là

A 5. B 6. C 7. D 4.

Câu 67.

Cho $f(x)$ là hàm đa thức bậc 6 và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Hỏi hàm số $y = g(x) = f(x^2 + 4x + 5)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A 2. B 5. C 3. D 1.



Câu 68. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$và có bảng xét dấu đạo hàm $f'(x)$ như hình vẽ bên dưới. Hàm số $g(x) = f\left(4 - \sqrt{4 - x^2}\right)$ đồng biến trên:

x	$-\infty$		-3		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

A $(0; 1)$. B $(1; 2)$. C $(-1; 0)$. D $(-3; -1)$.

Câu 69. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm $f'(x)$ như hình vẽ bên dưới. Hàm số $g(x) = f\left(-1 + \sqrt{7 + 6x - x^2}\right)$ nghịch biến trên:

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

A $(5; 6)$. B $(-1; 2)$. C $(2; 3)$. D $(3; 5)$.

6. Bài tập nâng cao

Câu 1. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, $f(-2) = 7$ và có bảng biến thiên như dưới đây

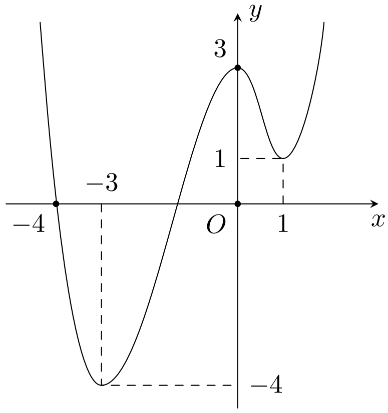
x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(|x^2-1|-2\right) = m$ có đúng 6 nghiệm thực phân biệt?

(A) 9. (B) 8. (C) 7. (D) 6.

Câu 2.
Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(|x+3|(x-1)) = \log m$ có ít nhất 5 nghiệm phân biệt?

(A) 990. (B) 991. (C) 989. (D) 913.

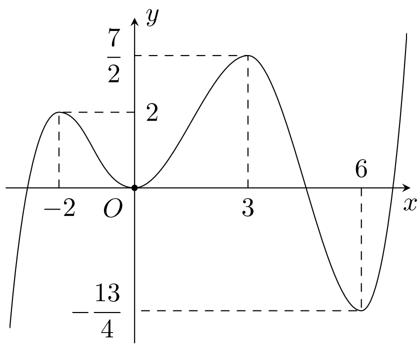


Câu 3. Cho hàm số $y = f(x) = x^3 + ax^2 + bx - 3$ trong đó a, b là các tham số thực thỏa mãn $\begin{cases} a+b-2>0 \\ 24+3(3a+b)<0 \end{cases}$. Hỏi phương trình $2f(x)\cdot f''(x) = [f'(x)]^2$ có bao nhiêu nghiệm?

(A) 2. (B) 4. (C) 3. (D) 1.

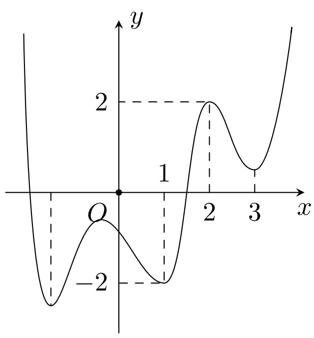
Câu 4.
Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $|f(2x^3-6x+2)| = 2$ là

(A) 15. (B) 14. (C) 12. (D) 13.



Câu 5.
Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in [-10; 10]$ để hàm số $g(x) = f\left(\dfrac{x^3+1}{2}\right) - (2m-1)\left(x^4+2x^2+2019\right)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$?

(A) 8. (B) 9. (C) 11. (D) 10.



Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-3		-1		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0		
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$	0	$\nearrow$		$\searrow$	-3	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

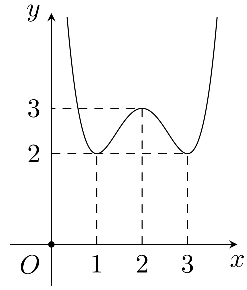
Số điểm cực đại của hàm số $g(x) = \left|f\left(|x^2 - 8x + 7| + x^2 - 3\right)\right|$ là

A 6. B 7. C 8. D 9.

Câu 7.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thuộc đoạn $\left[-2\pi, \dfrac{3\pi}{2}\right]$ của phương trình $2f(\sin x + 2) - 5 = 0$ là

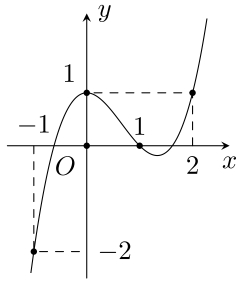
A 11. B 15. C 7. D 9.



Câu 8.

Cho hàm số $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + d$ $(a, b, c, d, e \in \mathbb{R})$, biết $f(1) = \dfrac{-1}{2}$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Hàm số $g(x) = |2f(x) - x^2 + 2x|$ đồng biến trên khoảng

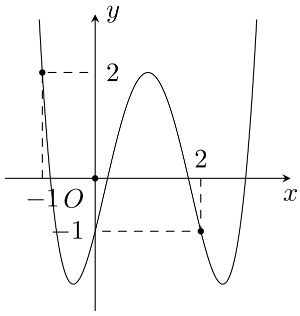
A $(2; +\infty)$. B $(-1; 1)$. C $(1; 2)$. D $(-\infty; -1)$.



Câu 9.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'\left(x^2 - 2x\right)$ như hình vẽ bên. Hỏi hàm số $y = f\left(x^2 - 1\right) + \dfrac{2}{3}x^3 + 1$ đồng biến trên khoảng nào?

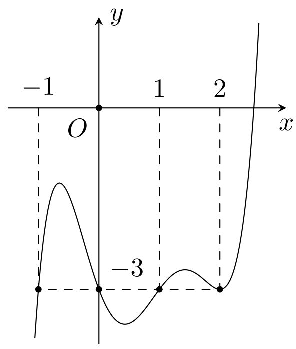
A $(-3; -2)$. B $(1; 2)$. C $(-2; -1)$. D $(-1; 0)$.



Câu 10.

Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(0) < 0$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ cho bởi hình vẽ bên. Hàm số $g(x) = |f(|x|) + 3|x||$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

A 2. B 3. C 4. D 5.



Câu 11. Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{9^x}{9^x + 3}$. Tìm m để phương trình $f\left(3m + \dfrac{1}{4}\sin x\right) + f\left(\cos^2 x\right) = 1$ có đúng 8 nghiệm phân biệt thuộc $[0; 3\pi]$

Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

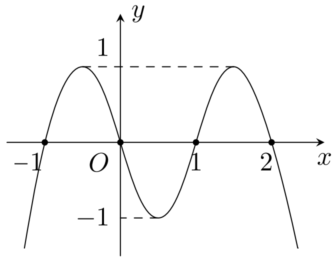
x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $\left[0; \dfrac{9\pi}{2}\right]$ phương trình $f\left[f(\cos x)\right] = 2$ là

(A) 9. (B) 6. (C) 5. (D) 7.

Câu 13.

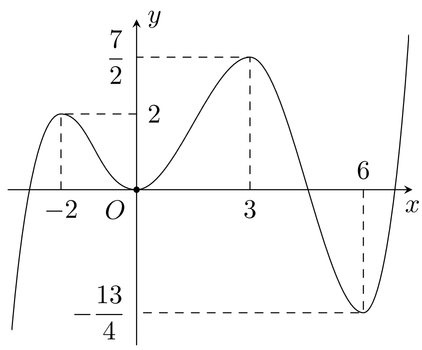
Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ với $a \neq 0$ có đồ thị như hình vẽ bên. Phương trình $|f(f(x))| = \log_2 m$ (với m là tham số thực dương), có tối đa bao nhiêu nghiệm?



(A) 18. (B) 3. (C) 5. (D) 7.

Câu 14.

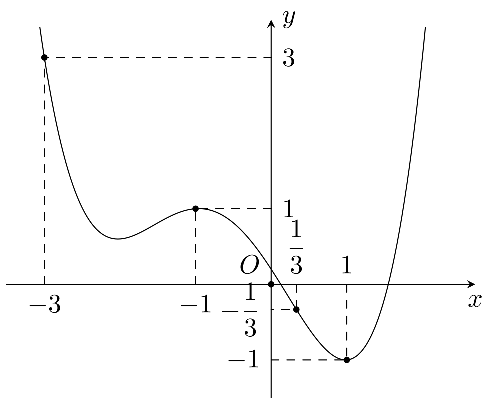
Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình dưới. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $f\left(2x^3 - 6x + 2\right) = 2m - 1$ có 6 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-1; 2]$?



(A) 2. (B) 3 . (C) 0. (D) 1.

Câu 15.

Cho hàm số $y = f(x)$, hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $g(x) = 2f\left(\dfrac{5\sin x - 1}{2}\right) + \dfrac{(5\sin x - 1)^2}{4} + 3$ có bao nhiêu điểm cực trị trên khoảng $(0; 2\pi)$?



(A) 9. (B) 7. (C) 6. (D) 8.

Câu 16. Cho $f(x)$ là hàm số bậc bốn thỏa mãn $f(0) = 0$. Hàm số $f'(x)$ có bảng biến thiên như sau

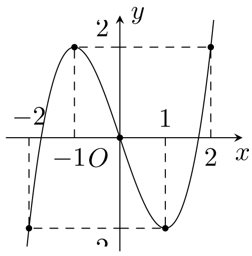
x	$-\infty$		-3		-1		$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\dfrac{61}{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số $g(x) = \left|f\left(x^3\right) - 3x\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

(A) 5. (B) 4. (C) 2. (D) 3.

Câu 17.

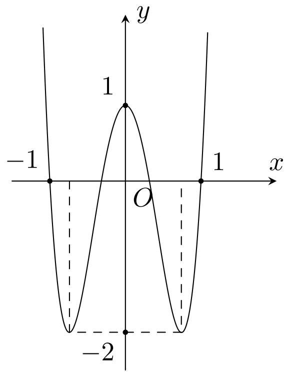
Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f(f(x)) = x$ là



(A) 6. (B) 7. (C) 8. (D) 9.

Câu 18.

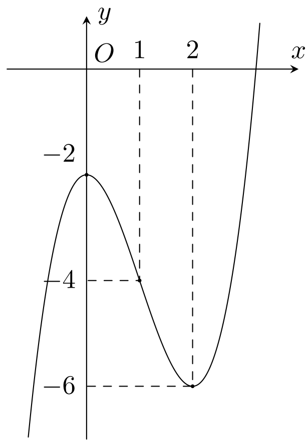
Cho hàm số đa thức bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Tìm số điểm cực trị của hàm số $g(x)$ biết $g'(x) = x^2\left[f\left(x^2-1\right)\right]^3$.



(A) 5. (B) 6. (C) 9. (D) 10.

Câu 19.

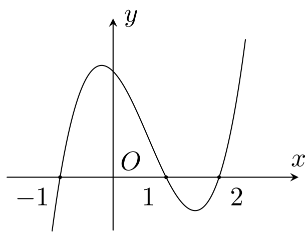
Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-20; 20]$ để hàm số $g(x) = |f(1-|x|)+m|$ có 5 điểm cực trị?



(A) 14. (B) 15. (C) 16. (D) 17.

Câu 20.

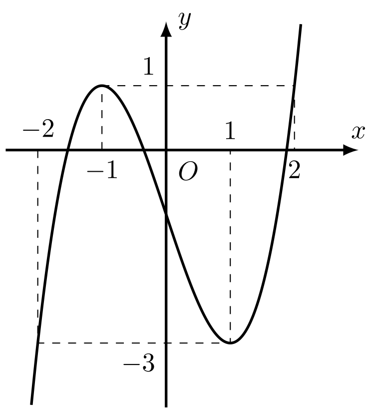
Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ dưới bên. Hàm số $g(x) = f\left(|x| + \left|x^2-1\right|\right)$ có bao nhiêu điểm cực đại?



(A) 3. (B) 4. (C) 5. (D) 7.

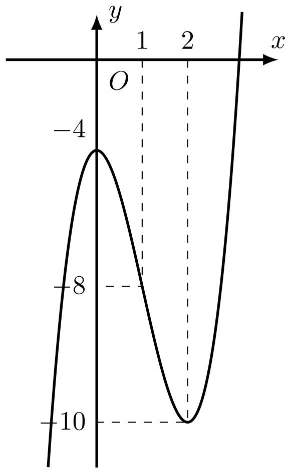
Câu 21.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên. Số giá trị nguyên của tham số m sao cho phương trình $f(2\sin x) = f(m)$ có 5 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[0; \dfrac{3\pi}{2}\right]$ là



(A) 1. (B) 3. (C) 2. (D) 0.

Câu 22.
Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-20; 20]$ để hàm số $g(x) = |f(1 - |x|) + m|$ có 5 điểm cực trị ?



(A) 14. (B) 13. (C) 11. (D) 12.

Câu 23. Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x$. Số điểm cực tiểu của hàm số $f\left(\sin 3x - \dfrac{3}{2}(\sin x + \sqrt{3}\cos x)\right)$ trên $\left[-\dfrac{\pi}{6}; \dfrac{13\pi}{6}\right]$ là

(A) 6. (B) 5. (C) 7. (D) 8.

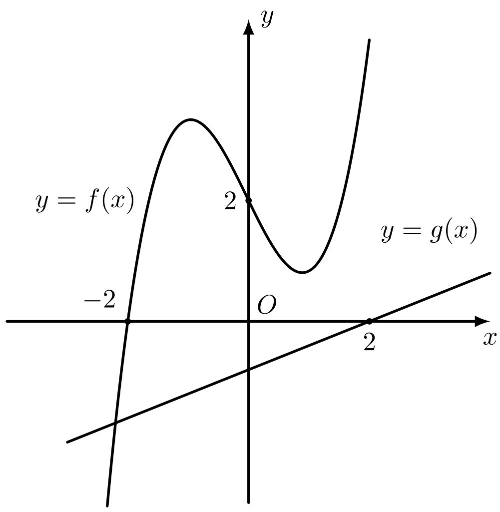
Câu 24. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, $f(-2) = 7$ và có bảng biến thiên như hình dưới đây.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(|x^2 - 1| - 2) = m$ có đúng 6 nghiệm thực phân biệt ?

(A) 9. (B) 8. (C) 7. (D) 6.

Câu 25. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ và hàm số bậc nhất $y = g(x)$ có đồ thị như hình dưới đây.



Hàm số $h(x) = \displaystyle\int_0^{f(x)} g(t)\,dt$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

(A) $(-3; -2)$. (B) $(-2; -1)$. (C) $(-1; 1)$. (D) $(1; 3)$.