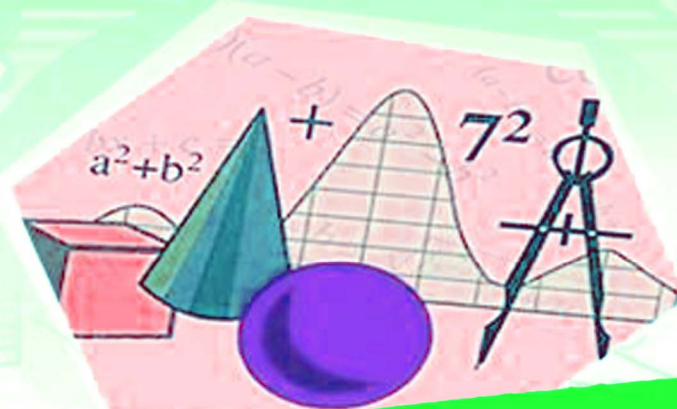


ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

NEW

TRẮC NGHIỆM NÂNG CAO
GIỚI HẠN

CÓ ĐÁP ÁN VÀ LỜI GIẢI CHI TIẾT



ÔN THI THPT QUỐC GIA

GIỚI HẠN

A - LÝ THUYẾT CHUNG

GIỚI HẠN CỦA DẪY SỐ

I. Giới hạn hữu hạn của dãy số

1. Định nghĩa

- **Định nghĩa 1:** Ta nói rằng dãy số (u_n) có giới hạn là 0 khi n dần đến dương vô cực và viết $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ viết tắt là $\lim u_n = 0$ hoặc $u_n \rightarrow 0$, nếu mọi số hạng của dãy số đều có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn một số dương bé tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.
- **Định nghĩa 2:** Ta nói rằng dãy số (u_n) có giới hạn là số thực a khi n dần đến dương vô cực và viết $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$, viết tắt là $\lim u_n = a$ hoặc $u_n \rightarrow a$, nếu $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - a) = 0$

2. Một vài giới hạn đặc biệt

- $\lim \frac{1}{n} = 0$; $\lim \frac{1}{n^k} = 0$ với k nguyên dương
- $\lim q^n = 0$ nếu $|q| < 1$
- Nếu $u_n = c$ (c là hằng số) thì $\lim u_n = \lim c = c$

II. Định lý về giới hạn hữu hạn

Định lý 1:

- Nếu $\lim u_n = a$, $\lim v_n = b$ thì
 - $\lim (u_n + v_n) = a + b$
 - $\lim (u_n - v_n) = a - b$
 - $\lim (u_n v_n) = a.b$
 - $\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{a}{b}$ (nếu $b \neq 0$)
- Nếu $u_n \geq 0$ với mọi n và $\lim u_n = a$ thì $a \geq 0$ và $\lim \sqrt{u_n} = \sqrt{a}$

III. Tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn

Cấp số nhân vô hạn $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$ có công bội q với $|q| < 1$ gọi là cấp số nhân lùi vô hạn. Tổng

S của cấp số nhân đó là: $S = u_1 + u_1 q + u_1 q^2 + \dots = \frac{u_1}{1 - q}$.

IV. Giới hạn vô cực

1. Định nghĩa:

- Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn $+\infty$ nếu với mỗi số dương tùy ý, mọi số hạng của dãy số, kể từ một số hạng nào đó trở đi, đều lớn hơn số dương đó. Khi đó ta viết $\lim (u_n) = +\infty$ hoặc $\lim (u_n) = +\infty$ hoặc $u_n \rightarrow +\infty$
- Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn $-\infty$ nếu với mỗi số âm tùy ý, mọi số hạng của dãy số, kể từ một số hạng nào đó trở đi, đều nhỏ hơn số âm đó.

Khi đó ta viết $\lim(u_n) = -\infty$ hoặc $\lim u_n = -\infty$ hoặc $u_n \rightarrow -\infty$

2. Một vài giới hạn đặc biệt

- a) $\lim n^k = +\infty$ với k nguyên dương
- b) $\lim q^n = +\infty$ nếu $q > 1$

3. Định lý 2:

- a) Nếu $\lim u_n = a$ và $\lim v_n = \pm\infty$ thì $\lim \frac{u_n}{v_n} = 0$
- b) Nếu $\lim u_n = a > 0$, $\lim v_n = 0$ và $v_n > 0$ với mọi n thì $\lim \frac{u_n}{v_n} = +\infty$
- c) Nếu $\lim u_n = +\infty$ và $\lim v_n = a > 0$ thì $\lim(u_n v_n) = +\infty$

V. Một số lưu ý:

Khi làm bài tập trắc nghiệm, ta có thể làm như bài tập tự luận, sau khi tính toán sẽ chọn kết quả phù hợp với yêu cầu của bài toán

Ngoài ra có thể sử dụng các nhận xét để có kết quả nhanh chóng, chính xác hơn. Có một số bài tập có thể nhận xét nhanh để loại trừ được những phương án không phù hợp

GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

1. Định lý:

a) Giả sử $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = M$. Khi đó:

- $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = L + M$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)] = L - M$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$ (nếu $M \neq 0$)

b) Nếu $f(x) \geq 0$ với mọi $x \in J \setminus \{x_0\}$, trong đó J là một khoảng nào đó chứa x_0 thì $L \geq 0$ và

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$$

2. Một vài giới hạn đặc biệt

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^k = +\infty$ với k nguyên dương
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = -\infty$ nếu k là số lẻ
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = +\infty$ nếu k là số chẵn

3. Một vài quy tắc về giới hạn vô cực

Định lý về giới hạn của tích và thương hai hàm số chỉ áp dụng được khi các hàm số có giới hạn hữu hạn

Sau đây là một số quy tắc tính giới hạn của tích và thương hai hàm số khi một trong hai hàm số có giới hạn vô cực.

Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \neq 0$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty$ thì

$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x).g(x)]$ bằng $\pm\infty$ (dấu “+” nếu hai giới hạn cùng dấu và dấu “-” nếu hai giới hạn khác dấu).

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = \pm\infty$ (dấu “+” nếu hai giới hạn cùng dấu và dấu “-” nếu hai giới hạn khác dấu).

Các quy tắc trên vẫn được áp dụng cho các trường hợp :

$$x \rightarrow x_0^+, x \rightarrow x_0^-, x \rightarrow +\infty \text{ và } x \rightarrow -\infty$$

HÀM SỐ LIÊN TỤC

1. Hàm số liên tục tại một điểm

Định nghĩa: Giả sử hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng K và $x_0 \in K$. Hàm số $y = f(x)$ gọi là liên tục tại $x = x_0$ nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

Hàm số không liên tục tại $x = x_0$ gọi là gián đoạn tại x_0

2. Hàm số liên tục trên một khoảng, trên một đoạn

Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên một khoảng nếu nó liên tục tại mọi điểm trên khoảng đó. Hàm số $y = f(x)$ gọi là liên tục trên đoạn $[a; b]$ nếu nó liên tục trên khoảng (a, b) và $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$;

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$$

3. Một số định lý cơ bản

Định lý 1: Hàm số đa thức liên tục trên tập $\mathbb{R}$. Hàm số phân thức hữu tỉ (thương của hai đa thức) và các hàm số lượng giác $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$, $y = \cot x$ là những hàm số liên tục trên tập xác định của chúng

Định lý 2. Giả sử $y = f(x)$ và $y = g(x)$ là hai hàm số liên tục tại điểm x_0 . Khi đó:

- Các hàm số $y = f(x) + g(x)$, $y = f(x) - g(x)$ và $y = f(x).g(x)$ liên tục tại điểm x_0
- Hàm số $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại x_0 nếu $g(x_0) \neq 0$

Định lý 3. Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $f(a).f(b) < 0$ thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a; b)$ sao cho $f(c) = 0$

B - BÀI TẬP

Câu 1. Tìm $\lim u_n$ biết $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}}$

A. $+\infty$

B. $-\infty$

C. 3

D. 1

Câu 2. Tìm $\lim u_n$ biết $u_n = \underbrace{\sqrt{2\sqrt{2}\dots\sqrt{2}}}_{n \text{ dấu căn}}$

A. $+\infty$ B. $-\infty$

C. 2

D. 1

Câu 3. Tìm giá trị đúng của $S = \sqrt{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots \right)$.

A. $\sqrt{2} + 1$.

B. 2.

C. $2\sqrt{2}$.D. $\frac{1}{2}$.

Câu 4. Tính giới hạn $\lim \left[\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right]$

A. 0

B. 1.

C. $\frac{3}{2}$.

D. Không có giới

Câu 5. Tính $\lim \left[\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \dots + \frac{1}{n(2n+1)} \right]$

A. 1.

B. 0.

C. $\frac{2}{3}$.

D. 2.

Câu 6. Tính giới hạn: $\lim \left[\frac{1}{1.3} + \frac{1}{2.4} + \dots + \frac{1}{n(n+2)} \right]$

A. $\frac{3}{4}$.

B. 1.

C. 0.

D. $\frac{2}{3}$.

Câu 7. Tính giới hạn $\lim \left[\frac{1}{1.4} + \frac{1}{2.5} + \dots + \frac{1}{n(n+3)} \right]$.

A. $\frac{11}{18}$.

B. 2.

C. 1.

D. $\frac{3}{2}$.

Câu 8. Tính giới hạn: $\lim \left[\left(1 - \frac{1}{2^2} \right) \left(1 - \frac{1}{3^2} \right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) \right]$.

A. 1.

B. $\frac{1}{2}$.C. $\frac{1}{4}$.D. $\frac{3}{2}$.

Câu 9. Tính giới hạn của dãy số $u_n = (1 - \frac{1}{T_1})(1 - \frac{1}{T_2}) \dots (1 - \frac{1}{T_n})$ trong đó $T_n = \frac{n(n+1)}{2} \therefore$

A. $+\infty$ B. $-\infty$ C. $\frac{1}{3}$

D. 1

Câu 10. Tính giới hạn của dãy số $u_n = \frac{2^3-1}{2^3+1} \cdot \frac{3^3-1}{3^3+1} \dots \frac{n^3-1}{n^3+1} \therefore$

A. $+\infty$ B. $-\infty$ C. $\frac{2}{3}$

D. 1

Câu 11. Tính giới hạn của dãy số $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{2k-1}{2^k} \therefore$

A. $+\infty$ B. $-\infty$

C. 3

D. 1

Câu 12. Tính giới hạn của dãy số $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2+k} \therefore$

A. $+\infty$ B. $-\infty$

C. 3

D. 1

Câu 13. Tính giới hạn của dãy số $u_n = q + 2q^2 + \dots + nq^n$ với $|q| < 1 \therefore$

A. $+\infty$ B. $-\infty$ C. $\frac{q}{(1-q)^2}$ D. $\frac{q}{(1+q)^2}$

Câu 14. Biết $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3}{n^3 + 1} = \frac{a}{b} (a, b \in \mathbb{N})$. Giá trị của $2a^2 + b^2$ là:

A. 33

B. 73

C. 51

D. 99

Câu 15. Tính giới hạn của dãy số $u_n = \frac{1}{2\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}} \therefore$

A. $+\infty$ B. $-\infty$

C. 0

D. 1

Câu 16. Tính giới hạn của dãy số $u_n = \frac{(n+1)\sqrt{1^3 + 2^3 + \dots + n^3}}{3n^3 + n + 2} \therefore$

A. $+\infty$ B. $-\infty$ C. $\frac{1}{9}$

D. 1

Câu 17. Cho các số thực a, b thỏa $|a| < 1; |b| < 1$. Tìm giới hạn $I = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+a+a^2+\dots+a^n}{1+b+b^2+\dots+b^n}$.

A. $+\infty$ B. $-\infty$ C. $\frac{1-b}{1-a}$

D. 1

Câu 18. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi: $\begin{cases} u_0 = 2011 \\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n^2} \end{cases}$. Tìm $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n^3}{n}$.

A. $+\infty$ B. $-\infty$

C. 3

D. 1

Câu 19. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 3 \\ 2(n+1)u_{n+1} = nu_n + n + 2 \end{cases}$. Tính $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.

A. $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 1$.B. $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 4$.C. $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 3$.D. $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

Câu 20. Cho dãy số có giới hạn (u_n) xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \frac{1}{2-u_n}, n \geq 1 \end{cases}$. Tìm kết quả đúng của $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.

A. 0.

B. 1.

C. -1.

D. $\frac{1}{2}$

Câu 21. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn
$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{u_n + \sqrt{2} - 1}{1 - (\sqrt{2} - 1)u_n}, \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$
 Tính u_{2018} .

A. $u_{2018} = 7 + 5\sqrt{2}$

B. $u_{2018} = 2$

C. $u_{2018} = 7 - 5\sqrt{2}$

D. $u_{2018} = 7 + \sqrt{2}$

Câu 22. Cho dãy số (x_n) xác định bởi $x_1 = \frac{1}{2}, x_{n+1} = x_n^2 + x_n, \forall n \geq 1$

Đặt $S_n = \frac{1}{x_1 + 1} + \frac{1}{x_2 + 1} + \dots + \frac{1}{x_n + 1}$. Tính $\lim S_n$.

A. $+\infty$

B. $-\infty$

C. 2

D. 1

Câu 23. Cho dãy (x_k) được xác định như sau: $x_k = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \dots + \frac{k}{(k+1)!}$

Tìm $\lim u_n$ với $u_n = \sqrt[n]{x_1^n + x_2^n + \dots + x_{2011}^n}$.

A. $+\infty$

B. $-\infty$

C. $1 - \frac{1}{2012!}$

D. $1 + \frac{1}{2012!}$

Câu 24. Cho dãy (x_k) được xác định như sau: $x_k = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \dots + \frac{k}{(k+1)!}$.

Tìm $\lim u_n$ với $u_n = \sqrt[n]{x_1^n + x_2^n + \dots + x_{2011}^n}$.

A. $+\infty$.

B. $-\infty$.

C. $1 - \frac{1}{2012!}$.

D. $1 + \frac{1}{2012!}$.

Câu 25. Cho hàm số $f(n) = a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2} + c\sqrt{n+3} (n \in \mathbb{N}^*)$ với a, b, c là hằng số thỏa mãn $a + b + c = 0$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = -1$

B. $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = 1$

C. $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = 0$

D. $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = 2$

Câu 26. Cho $a, b \in \mathbb{N}^*, (a, b) = 1; n \in \{ab+1, ab+2, \dots\}$. Kí hiệu r_n là số cặp số $(u, v) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ sao cho

$$n = au + bv. \text{ Tìm } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_n}{n} = \frac{1}{ab}.$$

A. $+\infty$.

B. $-\infty$.

C. $\frac{1}{ab}$.

D. $ab - 1$.

Câu 27. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 3, 2u_{n+1} = u_n + 1$ với mọi $n \geq 1$. Gọi S_n là tổng n số hạng đầu tiên của dãy số (u_n) . Tìm $\lim S_n$.

A. $\lim S_n = +\infty$.

B. $\lim S_n = 1$.

C. $\lim S_n = -\infty$.

D. $\lim S_n = -1$.

Câu 28. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 1, u_2 = 2, u_{n+2} = \frac{u_{n+1} + u_n}{2}$ với mọi $n \geq 1$. Tìm $\lim u_n$.

- A. $+\infty$. B. $\frac{3}{2}$. C. $\frac{5}{3}$. D. $\frac{4}{3}$.

Câu 29. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = \frac{1}{4}, u_{n+1} = u_n^2 + \frac{u_n}{2}$ với mọi $n \geq 1$. Tìm $\lim u_n$.

- A. $\lim u_n = \frac{1}{4}$. C. $\lim u_n = \frac{1}{2}$. B. $\lim u_n = 0$. D. $\lim u_n = +\infty$.

Câu 30. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 1, u_{n+1} = u_n + 2n + 1$ với mọi $n \geq 1$. Khi đó $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n}$ bằng.

- A. $+\infty$. B. 0. C. 1. D. 2.

Câu 31. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $u_1 = a, u_2 = b, u_{n+2} = \frac{u_{n+1} + u_n}{2}$ với mọi $n \geq 1$, trong đó a và b là các số thực cho trước, $a \leq b$. Tìm giới hạn của (u_n) .

- A. $\lim u_n = a$. C. $\lim u_n = \frac{a+2b}{3}$. B. $\lim u_n = b$. D. $\lim u_n = \frac{2a+b}{3}$.

Câu 32. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{4n^2 + n + 2}{an^2 + 5}$, trong đó a là tham số. Để (u_n) có giới hạn bằng 2 thì giá trị của tham số a là?

- A. -4. B. 2. C. 4. D. 3.

Câu 33. Tìm hệ thức liên hệ giữa các số thực dương a và b để: $\lim(\sqrt{n^2 + an + 5} - \sqrt{n^2 + bn + 3}) = 2$.

- A. $a + b = 2$. B. $a - b = 2$. C. $a + b = 4$. D. $a - b = 4$.

Câu 34. Tìm các số thực a và b sao cho $\lim(\sqrt[3]{1-n^3} - an - b) = 0$.

- A. $\begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \end{cases}$. B. $\begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases}$. C. $\begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \end{cases}$. D. $\begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \end{cases}$.

Câu 35. Cho dãy số (u_n) . Biết $\sum_{k=1}^n u_k = \frac{3n^2 + 9n}{2}$ với mọi $n \geq 1$. Tìm $\frac{1}{nu_n} \sum_{k=1}^n u_k$.

- A. 1. B. $\frac{1}{2}$. C. 0. D. $+\infty$.

Câu 36. $\lim \sum_{k=1}^n \frac{1+3+3^2+\dots+3^k}{5^{k+2}}$ bằng:

- A. 0. B. $\frac{17}{100}$. C. $\frac{17}{200}$. D. $\frac{1}{8}$.

GIỚI HẠN HÀM SỐ

Câu 37. Tìm giới hạn $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_0 x^n + \dots + a_{n-1} x + a_n}{b_0 x^m + \dots + b_{m-1} x + b_m}, (a_0, b_0 \neq 0).$

A. $+\infty$.B. $-\infty$.C. $\frac{4}{3}$.

D. Đáp án khác.

Câu 38. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x - 5 \sin 2x + \cos^2 x}{x^2 + 2}$ bằng:

A. $-\infty$.

B. 0.

C. 3.

D. $+\infty$.

Câu 39. Cho a và b là các số thực khác 0. Tìm hệ thức liên hệ giữa a và b để giới hạn:

$\lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{a}{x^2 - 6x + 8} - \frac{b}{x^2 - 5x + 6} \right)$ là hữu hạn:

A. $a - 4b = 0$.B. $a - 3b = 0$.C. $a - 2b = 0$.D. $a - b = 0$.

Câu 40. Cho a là một số thực khác 0. Kết quả đúng của $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^4 - a^4}{x - a}$ bằng:

A. $3a^3$ B. $2a^3$ C. a^3 D. $4a^3$

Câu 41. Cho $C = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - mx + m - 1}{x^2 - 1}$, m là tham số thực. Tìm m để $C = 2$.

A. $m = 2$ B. $m = -2$ C. $m = 1$ D. $m = -1$

Câu 42. Cho a và b là các số thực khác 0. Nếu $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + ax + b}{x - 2} = 6$ thì $a + b$ bằng:

A. 2

B. -4

C. -6

D. 8

Câu 43. Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x + 1 - \sqrt{5x + 1}}{x - \sqrt{4x - 3}}$ bằng $\frac{a}{b}$ (phân số tối giản). Giá trị của $a - b$ là

A. 1.

B. $\frac{1}{9}$.

C. -1.

D. $\frac{9}{8}$

Câu 44. Biết $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{8x + 11} - \sqrt{x + 7}}{x^2 - 3x + 2} = \frac{m}{n}$ trong đó $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản, m và n là các số nguyên dương. Tổng $2m + n$ bằng:

A. 68

B. 69

C. 70

D. 71

Câu 45. Biết $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{6x - 9} - \sqrt[3]{27x - 54}}{(x - 3)(x^2 + 3x - 18)} = \frac{m}{n}$, trong đó $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản, m và n là các số nguyên dương. Khi đó $3m + n$ bằng:

A. 55

B. 56

C. 57

D. 58

Câu 46. Cho a, b, c là các số thực khác 0. Tìm hệ thức liên hệ giữa a, b, c để $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax - b\sqrt{9x^2 + 2}}{cx + 1} = 5$.

A. $\frac{a-3b}{c}=5.$

B. $\frac{a-3b}{c}=-5.$

C. $\frac{a+3b}{c}=5.$

D. $\frac{a+3b}{c}=-5.$

Câu 47. Cho a và b là các tham số thực. Biết rằng $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{4x^2 + 3x + 1}{cx + 1} - (ax + b) \right] = 0$, a và b thỏa mãn hệ thức nào trong các hệ thức dưới đây?

A. $a + b = 9.$

B. $a + b = -9.$

C. $a - b = 9.$

D. $a - b = -9.$

Câu 48. Cho a là một số thực dương. Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{a} \right) \frac{1}{(x-a)^2}.$

A. bằng $-\frac{1}{a^2}.$

B. là $+\infty.$

C. là $-\infty.$

D. không tồn tại.

Câu 49. Cho n là một số nguyên dương. Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{n}{1-x^n} - \frac{1}{1-x} \right).$

A. $\frac{n}{2}.$

B. $\frac{n-1}{2}.$

C. $\frac{n+1}{2}.$

D. $\frac{n+2}{2}.$

Câu 50. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực k sao cho giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{k}{x^2-1} \right)$ là hữu hạn.

A. $k = 2.$

B. $k \neq 2.$

C. $k < 2.$

D. $k > 2.$

Câu 51. Tìm giới hạn $B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+ax} - 1}{x}$ ($n \in \mathbb{N}^*, a \neq 0$):

A. $+\infty$

B. $-\infty$

C. $\frac{a}{n}$

D. $1 - \frac{n}{a}$

Câu 52. Tìm giới hạn $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+ax} - 1}{\sqrt[m]{1+bx} - 1}$ với $ab \neq 0$:

A. $+\infty$

B. $-\infty$

C. $\frac{am}{bn}$

D. $1 + \frac{am}{bn}$

Câu 53. Tìm giới hạn $N = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{1+ax} - \sqrt[n]{1+bx}}{x}$:

A. $+\infty$

B. $-\infty$

C. $\frac{a}{m} - \frac{b}{n}$

D. $\frac{a}{m} + \frac{b}{n}$

Câu 54. Tìm giới hạn $N = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{1+ax} - \sqrt[n]{1+bx}}{\sqrt{1+x} - 1}$:

A. $+\infty$

B. $-\infty$

C. $\frac{2(an-bm)}{mn}$

D. 0

Câu 55. Tìm giới hạn $G = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{1+ax} \sqrt[n]{1+bx} - 1}{x}$:

- A. $+\infty$ B. $-\infty$ C. $\frac{a}{m} - \frac{b}{n}$ D. $\frac{a}{m} + \frac{b}{n}$

Câu 56. Tìm giới hạn $F = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{(2x+1)(3x+1)(4x+1)} - 1}{x}$:

- A. $+\infty$ B. $-\infty$ C. $\frac{9}{n}$ D. 0

Câu 57. Tìm giới hạn $B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\alpha x} \sqrt[3]{1+\beta x} \sqrt[4]{1+\gamma x} - 1}{x}$ với $\alpha\beta\gamma \neq 0$.:

- A. $+\infty$ B. $-\infty$ C. $B = \frac{\gamma}{4} - \frac{\beta}{3} + \frac{\alpha}{2}$ D. $B = \frac{\gamma}{4} + \frac{\beta}{3} + \frac{\alpha}{2}$

Câu 58. Tìm giới hạn $V = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{x^2}$:

- A. $+\infty$ B. $-\infty$ C. $\frac{mn(n-m)}{2}$ D. $\frac{mn(n+m)}{2}$

Câu 59. Tìm giới hạn $K = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x}) \dots (1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}$:

- A. $+\infty$ B. $-\infty$ C. $\frac{1}{n!}$ D. 0

Câu 60. Tìm giới hạn $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x^2} + x)^n - (\sqrt{1+x^2} - x)^n}{x}$:

- A. $+\infty$ B. $-\infty$ C. $2n$ D. 0

Câu 61. Tìm giới hạn $V = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{\sqrt{1+2x} - \sqrt[3]{1+3x}}$:

- A. $+\infty$ B. $-\infty$ C. $\frac{2(an-bm)}{mn}$ D. $mn(n-m)$

Câu 62. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho hàm số $f(x) = mx + \sqrt{9x^2 - 3x + 1}$ có giới hạn hữu hạn khi $x \rightarrow +\infty$.

- A. $m = -3$ B. $m \neq -3$ C. $m \geq 0$ D. $m < 0$

Câu 63. Giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 3x + 5} + ax) = +\infty$ nếu.

- A. $a \geq 1$. B. $a \leq 1$. C. $a > 1$. D. $a < 1$.

Câu 64. Cho a và b là các số thực khác 0. Biết $\lim_{x \rightarrow +\infty} (ax - \sqrt{x^2 + bx + 2}) = 3$, thì tổng $a+b$ bằng

- A. 2. B. -6. C. 7. D. -5.

Câu 65. Cho a và b là các số thực khác 0. Biết $\lim_{x \rightarrow +\infty} (ax + b - \sqrt{x^2 - 6x + 2}) = 5$ số lớn hơn trong hai số a và b là số nào trong các số dưới đây?

- A. 4. B. 3. C. 2. D. 1.

Câu 66. Biết $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{9x^2 + 2x} + \sqrt[3]{27x^3 + 4x^2 + 5}) = -\frac{m}{n}$ trong đó $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản, m và n là các số nguyên dương. Tìm bội số chung nhỏ nhất của m và n .

- A. 135. B. 136. C. 138. D. 140.

Câu 67. Cho a và b là các số nguyên dương. Biết $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{9x^2 + ax} + \sqrt[3]{27x^3 + bx^2 + 5}) = \frac{7}{27}$, hỏi a và b thỏa mãn hệ thức nào dưới đây?

- A. $a + 2b = 33$. B. $a + 2b = 34$. C. $a + 2b = 35$. D. $a + 2b = 36$.

Câu 68. Tìm giới hạn $C = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt[n]{(x + a_1)(x + a_2) \dots (x + a_n)} - x]$:

- A. $+\infty$ B. $-\infty$ C. $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$ D. $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{2n}$

Câu 69. Cho a và b là các số thực khác 0. Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{ax + 1}}{\sin bx}$ bằng:

- A. $\frac{a}{2b}$ B. $-\frac{a}{2b}$ C. $\frac{2a}{b}$ D. $-\frac{2a}{b}$

Câu 70. Cho a, b, c là các số thực khác 0, $3b - 2c \neq 0$. Tìm hệ thức liên hệ giữa a, b, c để:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{\sqrt{1 + bx} - \sqrt[3]{1 + cx}} = \frac{1}{2}.$$

- A. $\frac{a}{3b - 2c} = \frac{1}{10}$ B. $\frac{a}{3b - 2c} = \frac{1}{6}$ C. $\frac{a}{3b - 2c} = \frac{1}{2}$ D. $\frac{a}{3b - 2c} = \frac{1}{12}$

Câu 71. Cho m và n là các số nguyên dương phân biệt. Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x - 1)}{x^m - x^n}$ bằng:

- A. $m - n$ B. $n - m$ C. $\frac{1}{m - n}$ D. $\frac{1}{n - m}$

Câu 72. Tìm giới hạn $A = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\pi x^m)}{\sin(\pi x^n)}$:

- A. $+\infty$ B. $-\infty$ C. $\frac{n}{m}$ D. 0

Câu 73. Tìm giới hạn $H = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{\cos ax} - \sqrt[m]{\cos bx}}{\sin^2 x}$:

- A. $+\infty$ B. $-\infty$ C. $\frac{b}{2n} - \frac{a}{2m}$ D. 0

Câu 74. Tìm giới hạn $M = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt[n]{\cos ax}}{x^2}$:

A. $+\infty$ B. $-\infty$ C. $\frac{a}{2n}$

D. 0

Câu 75. Cho $f(x)$ là đa thức thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - 15}{x - 3} = 12$. Tính $T = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[3]{5f(x) - 11} - 4}{x^2 - x - 6}$.

A. $T = \frac{3}{20}$.B. $T = \frac{3}{40}$.C. $T = \frac{1}{4}$ D. $T = \frac{1}{20}$.

HÀM SỐ LIÊN TỤC

Câu 76. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{ax} - 1}{x} & \text{kh} i x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{kh} i x = 0 \end{cases}$, với $a \neq 0$. Tìm giá trị của a để hàm số $f(x)$ liên tục

tại $x_0 = 0$.

A. $a = 1$.B. $a = \frac{1}{2}$.C. $a = -1$.D. $a = -\frac{1}{2}$

Câu 77. Tìm a để các hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{4x+1} - 1}{ax^2 + (2a+1)x} & \text{kh} i x \neq 0 \\ 3 & \text{kh} i x = 0 \end{cases}$ liên tục tại $x = 0$

A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $-\frac{1}{6}$

D. 1

Câu 78. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 & , x \geq 1 \\ \frac{2x^3}{1+x} & , 0 \leq x < 1 \\ x \sin x & , x < 0 \end{cases}$. Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

A. $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.B. $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.C. $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.D. $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$.

Câu 79. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}{x} & \text{kh} i x < 0 \\ m + \frac{1-x}{1+x} & \text{kh} i x \geq 0 \end{cases}$ liên tục tại $x = 0$.

A. $m = 1$.B. $m = -2$.C. $m = -1$.D. $m = 0$

Câu 80. Tìm m để các hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{x-2} + 2x-1}{x-1} & \text{kh} i x \neq 1 \\ 3m-2 & \text{kh} i x = 1 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$

A. $m = 1$

B. $m = \frac{4}{3}$

C. $m = 2$

D. $m = 0$

Câu 81. Tìm m để các hàm số $f(x) = \begin{cases} \sqrt{2x-4}+3 & \text{khi } x \geq 2 \\ \frac{x+1}{x^2-2mx+3m+2} & \text{khi } x < 2 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$

A. $m = 1$

B. $m = -\frac{1}{6}$

C. $m = 5$

D. $m = 0$

Câu 82. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x-\sqrt{x+2}}{x^2-4} & \text{neu } x > 2 \\ x^2+3b & \text{neu } x < 2 \\ 2a+b-6 & \text{neu } x = 2 \end{cases}$ liên tục tại $x = 2$. Tính $I = a + b$?

A. $I = \frac{19}{30}$

B. $I = -\frac{93}{16}$

C. $I = \frac{19}{32}$

D. $I = -\frac{173}{16}$

Câu 83. Chọn hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{(x-3)^2}}{x-3} & \text{khi } x \neq 3 \\ m & \text{khi } x = 3 \end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm

số liên tục tại $x = 3$.

A. $m \in \emptyset$.

B. $m \in \mathbb{R}$.

C. $m = 1$.

D. $m = -1$.

Câu 84. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{ax^2 - (a-2)x - 2}{\sqrt{x+3} - 2} & \text{khi } x \neq 1 \\ 8 + a^2 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$. Có tất cả bao nhiêu giá trị của a để hàm

số liên tục tại $x = 1$?

A. 1.

B. 0.

C. 3.

D. 2.

Câu 85. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 12 & (x \geq 9) \\ \frac{ax-2b-12}{\sqrt[3]{x-1}-2} & (x < 9) \end{cases}$. Biết rằng a, b là giá trị thực để hàm số liên tục

tại $x_0 = 9$. Tính giá trị của $P = a + b$.

A. $P = \frac{1}{2}$

B. $P = 5$

C. $P = 17$

D. $P = -\frac{1}{2}$

Câu 86. Cho phương trình $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ (1) trong đó a, b, c là các tham số thực. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau

A. Phương trình (1) vô nghiệm với mọi a, b, c .

B. Phương trình (1) có ít nhất một nghiệm với mọi a, b, c .

C. Phương trình (1) có ít nhất hai nghiệm với mọi a, b, c .

D. Phương trình (1) có ít nhất ba nghiệm với mọi a, b, c .

Câu 87. Phương trình $x^5 - \frac{1}{2}x^4 - 5x^3 + x^2 + 4x - 1 = 0$ có bao nhiêu nghiệm.

A. 2

B. 3

C. 4

D. 5

Câu 88. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho phương trình sau có nghiệm

$$(2m^2 - 5m + 2)(x - 1)^{2017}(x^{2018} - 2) + 2x + 3 = 0.$$

A. $m \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2}; 2 \right\}$. **B.** $m \in \left(-\infty; \frac{1}{2} \right) \cup (2; +\infty)$. **C.** $m \in \left\{ \frac{1}{2}; 2 \right\}$. **D.** $m \in \mathbb{R}$.

C - HƯỚNG DẪN GIẢI

GIỚI HẠN DÃY SỐ

Câu 1. Tìm $\lim u_n$ biết $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$

A. $+\infty$ B. $-\infty$

C. 3

D. 1

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có: $\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} < \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} < \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}, k=1,2,\dots,n$ Suy ra $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} < u_n < \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

Mà $\lim \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = 1$ nên suy ra $\lim u_n = 1$.

Câu 2. Tìm $\lim u_n$ biết $u_n = \underbrace{\sqrt{2\sqrt{2}\dots\sqrt{2}}}_{n \text{ dấu căn}}$

A. $+\infty$ B. $-\infty$

C. 2

D. 1

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có: $u_n = 2^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n}} = 2^{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}$, nên $\lim u_n = \lim 2^{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n} = 2$.

Câu 3. Tìm giá trị đúng của $S = \sqrt{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots \right)$.

A. $\sqrt{2} + 1$.

B. 2.

C. $2\sqrt{2}$.D. $\frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có: $S = \sqrt{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots \right) = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2\sqrt{2}$.

Câu 4. Tính giới hạn $\lim \left[\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right]$

A. 0

B. 1.

C. $\frac{3}{2}$.

D. Không có giới

hạn.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$$\text{Đặt : } A = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

$$\Rightarrow \lim \left[\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right] = \lim \frac{n}{n+1} = \lim \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = 1$$

Câu 5. Tính $\lim \left[\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \dots + \frac{1}{n(2n+1)} \right]$

- A. 1. B. 0. C. $\frac{2}{3}$. D. 2.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$$\text{Đặt } A = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \dots + \frac{1}{n(2n+1)}$$

$$\Rightarrow 2A = \frac{2}{1.3} + \frac{2}{3.5} + \dots + \frac{2}{n(2n+1)}$$

$$\Rightarrow 2A = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n+1}$$

$$\Rightarrow 2A = 1 - \frac{1}{2n+1} = \frac{2n}{2n+1}$$

$$\Rightarrow A = \frac{n}{2n+1}$$

$$\text{Nên } \lim \left[\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \dots + \frac{1}{n(2n+1)} \right] = \lim \frac{n}{2n+1} = \lim \frac{1}{2 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{2}.$$

Câu 6. Tính giới hạn: $\lim \left[\frac{1}{1.3} + \frac{1}{2.4} + \dots + \frac{1}{n(n+2)} \right]$

- A. $\frac{3}{4}$. B. 1. C. 0. D. $\frac{2}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$$\text{Ta có : } \lim \left[\frac{1}{1.3} + \frac{1}{2.4} + \dots + \frac{1}{n(n+2)} \right] = \lim \frac{1}{2} \left[\frac{2}{1.3} + \frac{2}{2.4} + \dots + \frac{2}{n(n+2)} \right]$$

$$= \lim \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) = \lim \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{3}{4}.$$

Câu 7. Tính giới hạn $\lim \left[\frac{1}{1.4} + \frac{1}{2.5} + \dots + \frac{1}{n(n+3)} \right]$.

A. $\frac{11}{18}$.

B. 2.

C. 1.

D. $\frac{3}{2}$.

Hướng dẫn giải**Chọn A.****Cách 1:**

$$\begin{aligned} \lim \left[\frac{1}{1.4} + \frac{1}{2.5} + \dots + \frac{1}{n(n+3)} \right] &= \lim \left[\frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+3} \right) \right] \\ &= \lim \left[\frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) \right] \\ &= \frac{11}{18} - \lim \left[\frac{3n^2 + 12n + 11}{(n+1)(n+2)(n+3)} \right] = \frac{11}{18}. \end{aligned}$$

Cách 2: Bấm máy tính như sau: $C = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt[n]{(x+a_1)(x+a_2)\dots(x+a_n)} - x]$ và so đáp án (có thể thay 100 bằng số nhỏ hơn hoặc lớn hơn).

Câu 8. Tính giới hạn: $\lim \left[\left(1 - \frac{1}{2^2} \right) \left(1 - \frac{1}{3^2} \right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) \right]$.

A. 1.

B. $\frac{1}{2}$.

C. $\frac{1}{4}$.

D. $\frac{3}{2}$.

Hướng dẫn giải**Chọn B.****Cách 1:**

$$\begin{aligned} \lim \left[\left(1 - \frac{1}{2^2} \right) \left(1 - \frac{1}{3^2} \right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) \right] &= \lim \left[\left(1 - \frac{1}{2} \right) \left(1 + \frac{1}{2} \right) \left(1 - \frac{1}{3} \right) \left(1 + \frac{1}{3} \right) \dots \left(1 - \frac{1}{n} \right) \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right] \\ \Rightarrow y^n - x^n &= (y-x)(y^{n-1} + y^{n-2}x + \dots + x^{n-1}) \Rightarrow y-x = \frac{y^n - x^n}{y^{n-1} + y^{n-2}x + \dots + x^{n-1}} \end{aligned}$$

Cách 2: Bấm máy tính như sau: $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (y-x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y^n - x^n}{y^{n-1} + y^{n-2}x + \dots + x^{n-1}}$ và so đáp án (có thể thay 100 bằng số nhỏ hơn hoặc lớn hơn).

Câu 9. Tính giới hạn của dãy số $u_n = (1 - \frac{1}{T_1})(1 - \frac{1}{T_2})\dots(1 - \frac{1}{T_n})$ trong đó $T_n = \frac{n(n+1)}{2} \therefore$

A. $+\infty$

B. $-\infty$

C. $\frac{1}{3}$

D. 1

Hướng dẫn giải**Chọn C.**

$$\text{Ta có: } 1 - \frac{1}{T_k} = 1 - \frac{2}{k(k+1)} = \frac{(k-1)(k+2)}{k(k+1)}$$

$$\text{Suy ra } u_n = \frac{1}{3} \cdot \frac{n+2}{n} \Rightarrow \lim u_n = \frac{1}{3}.$$

Câu 10. Tính giới hạn của dãy số $u_n = \frac{2^3-1}{2^3+1} \cdot \frac{3^3-1}{3^3+1} \cdots \frac{n^3-1}{n^3+1} \therefore$

A. $+\infty$ B. $-\infty$ C. $\frac{2}{3}$

D. 1

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$$\text{Ta có } \frac{k^3-1}{k^3+1} = \frac{(k-1)(k^2+k+1)}{(k+1)[(k-1)^2+(k-1)+1]}$$

$$\text{Suy ra } \Rightarrow u_n = \frac{2}{3} \cdot \frac{n^2+n+1}{(n-1)n} \Rightarrow \lim u_n = \frac{2}{3}$$

Câu 11. Tính giới hạn của dãy số $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{2k-1}{2^k} \therefore$

A. $+\infty$ B. $-\infty$

C. 3

D. 1

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$$\text{Ta có: } u_n - \frac{1}{2}u_n = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \right) - \frac{2n-1}{2^{n+1}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}u_n = \frac{3}{2} - \frac{2n+1}{2^{n+1}} \Rightarrow \lim u_n = 3.$$

Câu 12. Tính giới hạn của dãy số $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2+k} \therefore$

A. $+\infty$ B. $-\infty$

C. 3

D. 1

Hướng dẫn giải

Chọn D.

$$\text{Ta có: } n \frac{n}{n^2+n} \leq u_n \leq n \frac{n}{n^2+1} \Rightarrow \frac{-n}{n^2+1} \leq u_n - 1 \leq \frac{-1}{n^2+1}$$

$$\Rightarrow |u_n - 1| \leq \frac{n}{n^2+1} \rightarrow 0 \Rightarrow \lim u_n = 1.$$

Câu 13. Tính giới hạn của dãy số $u_n = q + 2q^2 + \cdots + nq^n$ với $|q| < 1 \therefore$

A. $+\infty$ B. $-\infty$ C. $\frac{q}{(1-q)^2}$ D. $\frac{q}{(1+q)^2}$ **Hướng dẫn giải****Chọn C.**Ta có: $u_n - qu_n = q + q^2 + q^3 + \dots + q^n - nq^{n+1}$

$$\Rightarrow (1-q)u_n = q \frac{1-q^n}{1-q} - nq^{n+1}. \text{ Suy ra } \lim u_n = \frac{q}{(1-q)^2}.$$

Câu 14. Biết $\lim \frac{1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3}{n^3 + 1} = \frac{a}{b} (a, b \in \mathbb{N})$. Giá trị của $2a^2 + b^2$ là:

A. 33

B. 73

C. 51

D. 99**Hướng dẫn giải****Chọn D.**

Câu 15. Tính giới hạn của dãy số $u_n = \frac{1}{2\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}}$:

A. $+\infty$ B. $-\infty$

C. 0

D. 1**Hướng dẫn giải****Chọn D.**

$$\text{Ta có: } \frac{1}{(k+1)\sqrt{k} + k\sqrt{k+1}} = \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}$$

$$\text{Suy ra } u_n = 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \Rightarrow \lim u_n = 1$$

Câu 16. Tính giới hạn của dãy số $u_n = \frac{(n+1)\sqrt{1^3 + 2^3 + \dots + n^3}}{3n^3 + n + 2}$:

A. $+\infty$ B. $-\infty$ **C. $\frac{1}{9}$**

D. 1

Hướng dẫn giải**Chọn C.**

$$\text{Ta có: } 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{3} \right]^2$$

$$\text{Suy ra } u_n = \frac{n(n+1)^2}{3(3n^3 + n + 2)} \Rightarrow \lim u_n = \frac{1}{9}.$$

- Câu 17.** Cho các số thực a, b thỏa $|a| < 1; |b| < 1$. Tìm giới hạn $I = \lim \frac{1+a+a^2+\dots+a^n}{1+b+b^2+\dots+b^n}$.
- A. $+\infty$ B. $-\infty$ C. $\frac{1-b}{1-a}$ D. 1

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có $1, a, a^2, \dots, a^n$ là một cấp số nhân công bội a $1+a+a^2+\dots+a^n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$

Tương tự $1+b+b^2+\dots+b^n = \frac{1-b^{n+1}}{1-b}$

Suy ra $\lim I = \lim \frac{\frac{1-a^{n+1}}{1-a}}{\frac{1-b^{n+1}}{1-b}} = \frac{1-b}{1-a}$

(Vì $|a| < 1, |b| < 1 \Rightarrow \lim a^{n+1} = \lim b^{n+1} = 0$).

- Câu 18.** Cho dãy số (u_n) được xác định bởi: $\begin{cases} u_0 = 2011 \\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n^2} \end{cases}$. Tìm $\lim \frac{u_n^3}{n}$.
- A. $+\infty$ B. $-\infty$ C. 3 D. 1

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta thấy $u_n > 0, \forall n$

Ta có: $u_{n+1}^3 = u_n^3 + 3 + \frac{3}{u_n^3} + \frac{1}{u_n^6}$ (1)

Suy ra: $u_n^3 > u_{n-1}^3 + 3 \Rightarrow u_n^3 > u_0^3 + 3n$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra: $u_{n+1}^3 < u_n^3 + 3 + \frac{1}{u_0^3 + 3n} + \frac{1}{(u_0^3 + 3n)^2} < u_n^3 + 3 + \frac{1}{3n} + \frac{1}{9n^2}$

Do đó: $u_n^3 < u_0^3 + 3n + \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \frac{1}{9} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ (3)

Lại có: $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} < 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} = 2 - \frac{1}{n} < 2 \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq \sqrt{n} \sqrt{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}} < \sqrt{2n}$

Nên: $u_0^3 + 3n < u_n^3 < u_0^3 + 3n + \frac{2}{9} + \frac{\sqrt{2n}}{3}$

Hay $3 + \frac{u_0^3}{n} < \frac{u_n^3}{n} < 3 + \frac{u_0^3}{n} + \frac{2}{9n} + \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{n}}.$

Vậy $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n^3}{n} = 3.$

Câu 19. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 3 \\ 2(n+1)u_{n+1} = nu_n + n + 2 \end{cases}$. Tính $\lim u_n$.

A. $\lim u_n = 1.$

B. $\lim u_n = 4.$

C. $\lim u_n = 3.$

D. $\lim u_n = 0.$

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Câu 20. Cho dãy số có giới hạn (u_n) xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \frac{1}{2 - u_n}, n \geq 1 \end{cases}$. Tìm kết quả đúng của $\lim u_n$.

A. 0.

B. 1.

C. -1.

D. $\frac{1}{2}$

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có: $u_1 = \frac{1}{2}; u_2 = \frac{2}{3}; u_3 = \frac{3}{4}; u_4 = \frac{4}{5}; u_5 = \frac{5}{6}; \dots$

Dự đoán $u_n = \frac{n}{n+1}$ với $n \in \mathbb{N}^*$

Dễ dàng chứng minh dự đoán trên bằng phương pháp quy nạp.

Từ đó $\lim u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = 1.$

Câu 21. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{u_n + \sqrt{2} - 1}{1 - (\sqrt{2} - 1)u_n} \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Tính u_{2018} .

A. $u_{2018} = 7 + 5\sqrt{2}$

B. $u_{2018} = 2$

C. $u_{2018} = 7 - 5\sqrt{2}$

D. $u_{2018} = 7 + \sqrt{2}$

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Câu 22. Cho dãy số (x_n) xác định bởi $x_1 = \frac{1}{2}, x_{n+1} = x_n^2 + x_n, \forall n \geq 1$

Đặt $S_n = \frac{1}{x_1+1} + \frac{1}{x_2+1} + \dots + \frac{1}{x_n+1}$. Tính $\lim S_n$.

A. $+\infty$ B. $-\infty$

C. 2

D. 1

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Từ công thức truy hồi ta có: $x_{n+1} > x_n, \forall n=1, 2, \dots$

Nên dãy (x_n) là dãy số tăng.

Giả sử dãy (x_n) là dãy bị chặn trên, khi đó sẽ tồn tại $\lim x_n = x$

Với x là nghiệm của phương trình: $x = x^2 + x \Leftrightarrow x = 0 < x_1$ vô lí

Do đó dãy (x_n) không bị chặn, hay $\lim x_n = +\infty$.

$$\text{Mặt khác: } \frac{1}{x_{n+1}} = \frac{1}{x_n(x_n+1)} = \frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_n+1}$$

$$\text{Suy ra: } \frac{1}{x_n+1} = \frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_{n+1}}$$

$$\text{Dẫn tới: } S_n = \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_{n+1}} = 2 - \frac{1}{x_{n+1}} \Rightarrow \lim S_n = 2 - \lim \frac{1}{x_{n+1}} = 2$$

Câu 23. Cho dãy (x_k) được xác định như sau: $x_k = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \dots + \frac{k}{(k+1)!}$

Tìm $\lim u_n$ với $u_n = \sqrt[n]{x_1^n + x_2^n + \dots + x_{2011}^n}$.

A. $+\infty$ B. $-\infty$ C. $1 - \frac{1}{2012!}$ D. $1 + \frac{1}{2012!}$

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$$\text{Ta có: } \frac{k}{(k+1)!} = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} \text{ nên } x_k = 1 - \frac{1}{(k+1)!}$$

$$\text{Suy ra } x_k - x_{k+1} = \frac{1}{(k+2)!} - \frac{1}{(k+1)!} < 0 \Rightarrow x_k < x_{k+1}$$

$$\text{Mà: } x_{2011} < \sqrt[n]{x_1^n + x_2^n + \dots + x_{2011}^n} < \sqrt[n]{2011} x_{2011}$$

$$\text{Mặt khác: } \lim x_{2011} = \lim \sqrt[n]{2011} x_{2011} = x_{2011} = 1 - \frac{1}{2012!}$$

Vậy $\lim u_n = 1 - \frac{1}{2012!}$.

Câu 24. Cho dãy (x_k) được xác định như sau: $x_k = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \dots + \frac{k}{(k+1)!}$.

Tìm $\lim u_n$ với $u_n = \sqrt[n]{x_1^n + x_2^n + \dots + x_{2011}^n}$.

A. $+\infty$.

B. $-\infty$.

C. $1 - \frac{1}{2012!}$.

D. $1 + \frac{1}{2012!}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có: $\frac{k}{(k+1)!} = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}$ nên $x_k = 1 - \frac{1}{(k+1)!}$.

Suy ra $x_k - x_{k+1} = \frac{1}{(k+2)!} - \frac{1}{(k+1)!} < 0 \Rightarrow x_k < x_{k+1}$.

Mà: $x_{2011} < \sqrt[n]{x_1^n + x_2^n + \dots + x_{2011}^n} < \sqrt[n]{2011} x_{2011}$.

Mặt khác: $\lim x_{2011} = \lim \sqrt[n]{2011} x_{2011} = x_{2011} = 1 - \frac{1}{2012!}$.

Vậy $\lim u_n = 1 - \frac{1}{2012!}$.

Câu 25. Cho hàm số $f(n) = a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2} + c\sqrt{n+3}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) với a, b, c là hằng số thỏa mãn $a + b + c = 0$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = -1$

B. $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = 1$

C. $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = 0$

D. $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = 2$

Hướng dẫn giải

Chọn C

Câu 26. Cho $a, b \in \mathbb{N}^*$, $(a, b) = 1$; $n \in \{ab+1, ab+2, \dots\}$. Kí hiệu r_n là số cặp số $(u, v) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ sao cho

$n = au + bv$. Tìm $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_n}{n} = \frac{1}{ab}$.

A. $+\infty$.

B. $-\infty$.

C. $\frac{1}{ab}$.

D. $ab - 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Xét phương trình $\left[0; \frac{n-1}{n}\right] (1)$.

Gọi (u_0, v_0) là một nghiệm nguyên dương của (1). Giả sử (u, v) là một nghiệm nguyên dương khác (u_0, v_0) của (1).

Ta có $au_0 + bv_0 = n, au + bv = n$ suy ra $a(u - u_0) + b(v - v_0) = 0$ do đó tồn tại k nguyên dương sao cho $u = u_0 + kb, v = v_0 - ka$. Do v là số nguyên dương nên $v_0 - ka \geq 1 \Leftrightarrow k \leq \frac{v_0 - 1}{a}$. (2)

Ta nhận thấy số nghiệm nguyên dương của phương trình (1) bằng số các số k nguyên dương cộng với 1. Do đó $r_n = \left\lfloor \frac{v_0 - 1}{a} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{n}{ab} - \frac{u_0}{b} - \frac{1}{a} \right\rfloor + 1$.

Từ đó ta thu được bất đẳng thức sau: $\frac{n}{ab} - \frac{u_0}{b} - \frac{1}{a} \leq r_n \leq \frac{n}{ab} - \frac{u_0}{b} - \frac{1}{a} + 1$.

Từ đó suy ra: $\frac{1}{ab} - \frac{u_0}{nb} - \frac{1}{na} \leq \frac{r_n}{n} \leq \frac{1}{ab} - \frac{u_0}{nb} - \frac{1}{na} + \frac{1}{n}$.

Từ đây áp dụng nguyên lý kẹp ta có ngay $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_n}{n} = \frac{1}{ab}$.

Cách 3: Dùng chức lim của máy VNCALL 570ES Plus: chuyển chế độ Rad + $\lim_{x \rightarrow -10^9} \frac{\cos 5x}{2x}$ và so đáp án.

Câu 27. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 3, 2u_{n+1} = u_n + 1$ với mọi $n \geq 1$. Gọi S_n là tổng n số hạng đầu tiên của dãy số (u_n) . Tìm $\lim S_n$.

A. $\lim S_n = +\infty$. B. $\lim S_n = 1$. C. $\lim S_n = -\infty$. D. $\lim S_n = -1$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Cách 1: Ta có $2u_{n+1} = u_n + 1 \Leftrightarrow u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}$. Đặt $v_n = u_n - 1$.

Khi đó: $v_{n+1} = u_{n+1} - 1 = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{2}(u_n - 1) = \frac{1}{2}v_n$. Vậy (v_n) là một cấp số nhân có công bội $q = \frac{1}{2}$. Gọi T_n là tổng n số hạng đầu tiên của (v_n) .

Ta có: $T_n = v_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} = v_1 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 2v_1 \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$. Suy ra: $S_n = T_n + n = 2v_1 \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) + n$.

Vậy $\lim S_n = +\infty$.

Cách 2: Sử dụng MTCT. Nhập vào màn hình: $A = A + X : Y = \frac{1}{2}X + \frac{1}{2} : X = Y$.

Bấm r, máy hỏi A? nhập 0, máy hỏi X? nhập 3, máy hỏi Y? Nhập 0, bấm = liên tiếp ta thấy giá trị của A ngày một tăng cao.

Câu 28. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 1, u_2 = 2, u_{n+2} = \frac{u_{n+1} + u_n}{2}$ với mọi $n \geq 1$. Tìm $\lim u_n$.

A. $+\infty$.

B. $\frac{3}{2}$.

C. $\frac{5}{3}$.

D. $\frac{4}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Sử dụng MTCT.

Qui trình bấm máy	Kết quả thu được
QcQraQz+QxR2\$QyQzQrQxQyQxQrQcr1=2=====	$C = \frac{A+B}{2}$
=====	1.666666667
=====	
=====	

Dùng cách tìm dạng phân số của số thập phân vô hạn tuần hoàn $1,(6)$ ta được

$$1,66666667 = \frac{5}{3}.$$

Vậy giới hạn của dãy số trong trường hợp này bằng $\frac{5}{3}$.

Bổ sung: Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $u_1 = a, u_2 = b, u_{n+2} = \frac{u_n + u_{n+1}}{2}$ với $\forall n \geq 1$, trong đó a, b là các số thực cho trước, $a \leq b$. Người ta chứng minh được rằng

$$\lim u_n = \frac{a + 2b}{3}.$$

Câu 29. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = \frac{1}{4}, u_{n+1} = u_n^2 + \frac{u_n}{2}$ với mọi $n \geq 1$. Tìm $\lim u_n$.

A. $\lim u_n = \frac{1}{4}$.

C. $\lim u_n = \frac{1}{2}$.

B. $\lim u_n = 0$.

D. $\lim u_n = +\infty$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Giả sử dãy có giới hạn hữu hạn L . Khi đó ta có: $L = L^2 + \frac{L}{2} \Rightarrow 2L^2 = L \Rightarrow \begin{cases} L = 0 \\ L = \frac{1}{2} \end{cases}$

Tuy nhiên đến đây ta không còn căn cứ để kết luận $L = 0$ hay $L = \frac{1}{2}$.

Ta sử dụng MTCT tương tự như bài tập trên thì thấy rằng giới hạn của dãy số là 0. Vậy chọn **Chọn B.**

$$Y = X^2 + \frac{X}{2}$$

$$1,706192802.10^{-9}$$

Câu 30. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 1, u_{n+1} = u_n + 2n + 1$ với mọi $n \geq 1$. Khi đó $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n}$ bằng.

A. $+\infty$.

B. 0.

C. 1.

D. 2.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

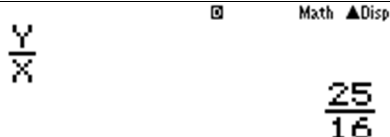
Cách 1: Ta có

$$u_1 = 1^2; u_2 = 1 + 2.1 + 1 = 2^2; u_3 = 2^2 + 2.2 + 1 = 3^2; \dots$$

Dự đoán $u_n = n^2$. Khi đó $u_{n+1} = u_n + 2n + 1 = (n+1)^2$. Vậy $u_n = n^2 \forall n \geq 1$.

$$\text{Suy ra } \lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim \frac{(n+1)^2}{n^2} = 1.$$

Cách 2: Sử dụng MTCT. Nhập vào màn hình.

Qui trình bấm máy	Kết quả thu được
QnQrQ)+2Qz+1QyaQnRQ)\$QyQ)QrQnQyQzQrQz+1r1=1= =====	

Bấm r, máy hỏi X? nhập 1, máy hỏi A? nhập bấm = liên tiếp, theo dõi giá trị của $\frac{Y}{X}$, ta thấy giá trị đó dần về 1.

Nhận xét: Ở bài này sẽ phải bấm phím = liên tiếp khá nhiều lần, do khi n chưa đủ lớn thì chênh lệch giữa $(n+1)^2$ và n^2 là khá xa nên giá trị của $\frac{(n+1)^2}{n^2}$ khá xa so với 1.

Câu 31. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $u_1 = a, u_2 = b, u_{n+2} = \frac{u_{n+1} + u_n}{2}$ với mọi $n \geq 1$, trong đó a và b là các số thực cho trước, $a \leq b$. Tìm giới hạn của (u_n) .

A. $\lim u_n = a$.C. $\lim u_n = \frac{a+2b}{3}$.B. $\lim u_n = b$.D. $\lim u_n = \frac{2a+b}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Đây là một bài toán chứa tham số.

Vì là bài toán trắc nghiệm nên có một cách là cho a và b các giá trị cụ thể, rồi sử dụng MTCT để tìm giới hạn, từ đó tìm được đáp án đúng.

Chẳng hạn cho $a = 2, b = 3$. Khi đó $\frac{a+2b}{3} = \frac{8}{3}$, $\frac{2a+b}{3} = 7$ và $a, b, \frac{a+2b}{3}, \frac{2a+b}{3}$ đôi một khác nhau.

Nhập vào màn hình:

Qui trình bấm máy	Kết quả thu được
QcQraQz+QxR2\$QyQzQrQxQyQxQrQcr2=3=====	$C = \frac{A+B}{2}$
=====	
=====	2.666666666
=====	

Dùng cách tìm dạng phân số của số thập phân vô hạn tuần hoàn $2,(6)$, ta được $2,(6) = \frac{8}{3}$.

Vậy giới hạn của dãy số trong trường hợp này bằng $\frac{8}{3}$.

Bổ sung: Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $u_1 = a, u_2 = b, u_{n+2} = \frac{u_{n+1} + u_n}{2} \forall n \geq 1$, trong đó a, b là các số thực cho trước, $a \leq b$.

a) Chứng minh dãy (u_{2n}) là dãy giảm, còn dãy (u_{2n+1}) là dãy tăng.

b) Chứng minh rằng $|x_{n+2} - x_{n+1}| = \frac{|x_2 - x_1|}{2^n} \forall n \geq 1$.

c) Chứng minh rằng $2x_{n+2} + x_{n+1} = 2x_2 + x_1 \forall n \geq 1$.

d) Chứng minh rằng (u_n) có giới hạn và giới hạn đó là $\frac{a+2b}{3}$.

Câu 32. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{4n^2 + n + 2}{an^2 + 5}$, trong đó a là tham số. Để (u_n) có giới hạn bằng 2 thì giá trị của tham số a là?

A. -4.

B. 2.

C. 4.

D. 3.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Để thấy với $a = 2$ thì $\lim u_n = \lim \frac{4n^2 + n + 2}{2n^2 + 5} = 2$.

Thật vậy:

Nếu $a = 0$ thì $\lim u_n = \lim \frac{4n^2 + n + 2}{5} = +\infty$.

Nếu $a \neq 0$ thì $\lim u_n = \lim \frac{4n^2 + n + 2}{an^2 + 5} = \frac{4}{a}$.

Do đó để $\lim u_n = 2$ thì $\frac{4}{a} = 2 \Leftrightarrow a = 2$.

Câu 33. Tìm hệ thức liên hệ giữa các số thực dương a và b để: $\lim(\sqrt{n^2 + an + 5} - \sqrt{n^2 + bn + 3}) = 2$.

A. $a + b = 2$.

B. $a - b = 2$.

C. $a + b = 4$.

D. $a - b = 4$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Từ kết quả đã trình bày trong phần ví dụ, ta thấy cần phải nhân chia với biểu thức liên hợp. Ta có:

$$\sqrt{n^2 + an + 5} - \sqrt{n^2 + bn + 3} = \frac{(a-b)n + 2}{\sqrt{n^2 + an + 5} + \sqrt{n^2 + bn + 3}} = \frac{a-b + \frac{2}{n}}{\sqrt{1 + \frac{a}{n} + \frac{5}{n^2}} + \sqrt{1 + \frac{b}{n} + \frac{3}{n^2}}}.$$

Suy ra $\lim(\sqrt{n^2 + an + 5} - \sqrt{n^2 + bn + 3}) = \frac{a-b}{2}$. Do đó để

$$\lim(\sqrt{n^2 + an + 5} - \sqrt{n^2 + bn + 3}) = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{a-b}{2} = 2 \Leftrightarrow a-b = 4.$$

Câu 34. Tìm các số thực a và b sao cho $\lim(\sqrt[3]{1-n^3} - an - b) = 0$.

A. $\begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \end{cases}$.

B. $\begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases}$.

C. $\begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \end{cases}$.

D. $\begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \end{cases}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có $\lim(\sqrt[3]{1-n^3} - an - b) = 0 \Leftrightarrow b = \lim(\sqrt[3]{1-n^3} - an)$. Để $\lim(\sqrt[3]{1-n^3} - an)$ hữu hạn thì $a > 0$ (xem lại phần ví dụ).

phần Ví dụ). Ta có $\lim(\sqrt[3]{1-n^3} + n) = 0$. Vậy $b = 0$.

Câu 35. Cho dãy số (u_n) . Biết $\sum_{k=1}^n u_k = \frac{3n^2 + 9n}{2}$ với mọi $n \geq 1$. Tìm $\frac{1}{nu_n} \sum_{k=1}^n u_k$.

A. 1.

B. $\frac{1}{2}$.

C. 0.

D. $+\infty$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có:

$$u_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} u_k - \sum_{k=1}^n u_k = \frac{3(n+1)^2 + 9(n+1)}{2} - \frac{3n^2 + 9n}{2} = 3n + 6 = 3(n+1) + 3.$$

Suy ra $u_n = 3n + 3$.

Vậy $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nu_n} \sum_{k=1}^n u_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 9n}{2n(3n+3)} = \frac{3}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2}$.

Câu 36. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1+3+3^2+\dots+3^k}{5^{k+2}}$ bằng:

- A. 0. B. $\frac{17}{100}$. C. $\frac{17}{200}$. D. $\frac{1}{8}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1+3+3^2+\dots+3^k}{5^{k+2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{\sum_{i=1}^{k+1} 3^{i-1}}{5^{k+2}}$.

Do đó nên rất khó để sử dụng MTCT đối với bài toán này. Ta có:

$$\sum_{k=1}^n \frac{\sum_{i=1}^{k+1} 3^{i-1}}{5^{k+2}} = \sum_{k=1}^n \frac{3^{k+1}-1}{2 \cdot 5^{k+2}} = \frac{3}{50} \sum_{k=1}^n \left(\frac{3}{5}\right)^k - \frac{1}{50} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{5}\right)^k = \frac{3}{50} \cdot \frac{\frac{3}{5}}{1-\frac{3}{5}} - \frac{1}{50} \cdot \frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}} = \frac{17}{200}.$$

GIỚI HẠN HÀM SỐ

Câu 37. Tìm giới hạn $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_0 x^n + \dots + a_{n-1} x + a_n}{b_0 x^m + \dots + b_{m-1} x + b_m}, (a_0, b_0 \neq 0).$

A. $+\infty$.B. $-\infty$.C. $\frac{4}{3}$.D. Đáp án khác.

Hướng dẫn giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n (a_0 + \frac{a_1}{x} + \dots + \frac{a_{n-1}}{x^{n-1}} + \frac{a_n}{x^n})}{x^m (b_0 + \frac{b_1}{x} + \dots + \frac{b_{m-1}}{x^{m-1}} + \frac{b_m}{x^m})}$$

$$\bullet \text{ Nếu } m = n \Rightarrow A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_0 + \frac{a_1}{x} + \dots + \frac{a_{n-1}}{x^{n-1}} + \frac{a_n}{x^n}}{b_0 + \frac{b_1}{x} + \dots + \frac{b_{m-1}}{x^{m-1}} + \frac{b_m}{x^m}} = \frac{a_0}{b_0}.$$

$$\bullet \text{ Nếu } m > n \Rightarrow A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_0 + \frac{a_1}{x} + \dots + \frac{a_{n-1}}{x^{n-1}} + \frac{a_n}{x^n}}{x^{m-n} (b_0 + \frac{b_1}{x} + \dots + \frac{b_{m-1}}{x^{m-1}} + \frac{b_m}{x^m})} = 0$$

(Vì tử $\rightarrow a_0$, mẫu $\rightarrow 0$).

$$\bullet \text{ Nếu } m < n, \text{ ta có: } A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{n-m} (a_0 + \frac{a_1}{x} + \dots + \frac{a_{n-1}}{x^{n-1}} + \frac{a_n}{x^n})}{b_0 + \frac{b_1}{x} + \dots + \frac{b_{m-1}}{x^{m-1}} + \frac{b_m}{x^m}} = \begin{cases} +\infty & \text{khi } a_0 b_0 > 0 \\ -\infty & \text{khi } a_0 b_0 < 0 \end{cases}.$$

Câu 38. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x - 5\sin 2x + \cos^2 x}{x^2 + 2}$ bằng:

A. $-\infty$.B. 0.

C. 3.

D. $+\infty$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x - 5\sin 2x + \cos^2 x}{x^2 + 2} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x - 10\sin 2x + \cos 2x}{2x^2 + 4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x}{2x^2 + 4} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-10\sin 2x + \cos 2x}{2x^2 + 4} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-10\sin 2x + \cos 2x}{2x^2 + 4}. \end{aligned}$$

Vì $-10\sin 2x + \cos 2x \leq \sqrt{(10^2 + 1^2)(\sin^2 2x + \cos^2 2x)} = \sqrt{101}$ nên:

$$0 \leq \left| \frac{-10 \sin 2x + \cos 2x}{2x^2 + 4} \right| \leq \frac{\sqrt{101}}{2x^2 + 4}.$$

$$\text{Mà } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{101}}{2x^2 + 4} = 0 \text{ nên } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-10 \sin 2x + \cos 2x}{2x^2 + 4} = 0.$$

Câu 39. Cho a và b là các số thực khác 0. Tìm hệ thức liên hệ giữa a và b để giới hạn:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{a}{x^2 - 6x + 8} - \frac{b}{x^2 - 5x + 6} \right) \text{ là hữu hạn:}$$

A. $a - 4b = 0$.

B. $a - 3b = 0$.

C. $a - 2b = 0$.

D. $a - b = 0$.

Hướng dẫn giải

Cách 1: Ta có
$$\frac{a}{x^2 - 6x + 8} - \frac{b}{x^2 - 5x + 6} = \frac{a}{(x-2)(x-4)} - \frac{b}{(x-2)(x-3)}$$
$$= \frac{a(x-3) - b(x-4)}{(x-2)(x-3)(x-4)} = \frac{g(x)}{(x-2)(x-3)(x-4)}.$$

Ta có $\lim_{x \rightarrow 2^-} (x-2) = 0$; $\lim_{x \rightarrow 2^-} (x-3) = -1$; $\lim_{x \rightarrow 2^-} (x-4) = -2$; $\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = 2b - a$.

Do đó nếu $\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) \neq 0 \Leftrightarrow 2b - a \neq 0$ thì giới hạn cần tìm là vô cực theo quy tắc 2.

Từ đó chọn được đáp án đúng là **C**.

(Thật vậy, nếu $\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = 2b - a = 0$ thì

$$\frac{a}{x^2 - 6x + 8} - \frac{b}{x^2 - 5x + 6} = \frac{bx - 2b}{(x-2)(x-3)(x-4)} = \frac{b}{(x-3)(x-4)}$$

Và do đó
$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{a}{x^2 - 6x + 8} - \frac{b}{x^2 - 5x + 6} \right) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{b}{(x-3)(x-4)} = \frac{b}{2}.$$

Cách 2: Sử dụng MTCT. Với mỗi đáp án, lấy các giá trị cụ thể của a và b , thay vào hàm số rồi tính giới hạn.

Từ đó chọn được đáp án là **C**.

Câu 40. Cho a là một số thực khác 0. Kết quả đúng của $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^4 - a^4}{x - a}$ bằng:

A. $3a^3$

B. $2a^3$

C. a^3

D. $4a^3$

Hướng dẫn giải

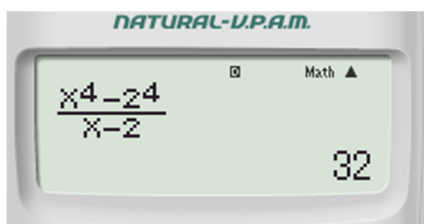
Chọn D.

Cách 1: Ta có

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^4 - a^4}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)(x^3 + x^2a + xa^2 + a^3)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} (x^3 + x^2a + xa^2 + a^3) = 4a^3.$$

Cách 2: Cho a một giá trị cụ thể rồi tính giới hạn bằng máy tính cầm tay. Chẳng hạn với

$a = 2$ ta có $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^4 - 2^4}{x - 2} = 32 = 4 \cdot 2^3$. Do đó chọn **Chọn D**.



Câu 41. Cho $C = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - mx + m - 1}{x^2 - 1}$, m là tham số thực. Tìm m để $C = 2$.

A. $m = 2$

B. $m = -2$

C. $m = 1$

D. $m = -1$

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$$\text{Cách 1: } C = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - mx + m - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-m+1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-m+1}{x+1} = \frac{2-m}{2}$$

Vậy $C = 2 \Leftrightarrow m = -2$.

Cách 2: Thay lần lượt các giá trị của m vào, rồi tìm C cho đến khi gặp kết quả $C = 2$ thì dừng lại.

Câu 42. Cho a và b là các số thực khác 0. Nếu $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + ax + b}{x - 2} = 6$ thì $a + b$ bằng:

A. 2

B. -4

C. -6

D. 8

Hướng dẫn giải

Đáp án C

Đặt $g(x) = x^2 + ax + b$. Rõ ràng là nếu $g(2) \neq 0$ thì $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)}{x-2}$ không thể hữu hạn. Do đó điều kiện đầu tiên là $g(2) = 0 \Leftrightarrow 2a + b = -4$.

Khi đó $g(x) = (x-2)(x - \frac{b}{2})$ và $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x - \frac{b}{2}) = 2 - \frac{b}{2}$.

Vậy $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)}{x-2} = 6 \Rightarrow 2 - \frac{b}{2} = 6 \Rightarrow b = -8 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow a + b = -6$.

Câu 43. Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+1-\sqrt{5x+1}}{x-\sqrt{4x-3}}$ bằng $\frac{a}{b}$ (phân số tối giản). Giá trị của $a - b$ là

A. 1.

B. $\frac{1}{9}$.

C. -1.

D. $\frac{9}{8}$

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Câu 44. Biết $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{8x+11} - \sqrt{x+7}}{x^2 - 3x + 2} = \frac{m}{n}$ trong đó $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản, m và n là các số nguyên dương. Tổng $2m + n$ bằng:

A. 68

B. 69

C. 70

D. 71

Hướng dẫn giải**Chọn A.**

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \frac{\sqrt[3]{8x+11} - \sqrt{x+7}}{x^2 - 3x + 2} &= \frac{\sqrt[3]{8x+11} - 3}{x^2 - 3x + 2} - \frac{\sqrt{x+7} - 3}{x^2 - 3x + 2} \\ &= \frac{x-2}{(x-2)(x-1)(\sqrt[3]{(8x+11)^2} + 3\sqrt[3]{8x+11} + 9)} - \frac{x-2}{(x-2)(x-1)(\sqrt{x+7} + 3)} \\ &= \frac{8}{(x-1)(\sqrt[3]{(8x+11)^2} + 3\sqrt[3]{8x+11} + 9)} - \frac{1}{(x-1)(\sqrt{x+7} + 3)} \end{aligned}$$

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{8}{(x-1)(\sqrt[3]{(8x+11)^2} + 3\sqrt[3]{8x+11} + 9)} = \frac{8}{27}; \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x-1)(\sqrt{x+7} + 3)} = \frac{1}{6}$$

$$\text{Do đó } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{8x+11} - \sqrt{x+7}}{x^2 - 3x + 2} = \frac{8}{27} - \frac{1}{6} = \frac{7}{54}$$

Vậy $m = 7; n = 54$ và $2m + n = 68$.

Câu 45. Biết $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{6x-9} - \sqrt[3]{27x-54}}{(x-3)(x^2+3x-18)} = \frac{m}{n}$, trong đó $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản, m và n là các số nguyên dương. Khi đó $3m + n$ bằng:

A. 55

B. 56

C. 57

D. 58

Hướng dẫn giải**Chọn C.**

$$\text{Ta có } \frac{\sqrt{6x-9} - \sqrt[3]{27x-54}}{(x-3)(x^2+3x-18)} = \frac{\sqrt{6x-9} - \sqrt[3]{27x-54}}{(x-3)^2(x+6)}$$

Sử dụng MTCT ta tính được:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{6x-9} - \sqrt[3]{27x-54}}{(x-3)^2} = \frac{1}{6}; \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x+6} = \frac{1}{9}$$

$$\text{nên } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{6x-9} - \sqrt[3]{27x-54}}{(x-3)(x^2+3x-18)} = \frac{1}{54}. \text{ Vậy } 3m + n = 57.$$

Giải tự luận: Đặt $t = x - 3$ thì $\lim_{x \rightarrow 3} t = 0$ và

$$\frac{\sqrt{6x-9} - \sqrt[3]{27x-54}}{(x-3)^2} = \frac{\sqrt{6t+9} - \sqrt[3]{27t+27}}{t^2} = \frac{\sqrt{6t+9} - (t+3)}{t^2} + \frac{(t+3) - \sqrt[3]{27t+27}}{t^2}$$

Câu 46. Cho a, b, c là các số thực khác 0. Tìm hệ thức liên hệ giữa a, b, c để $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax - b\sqrt{9x^2 + 2}}{cx + 1} = 5$

- A. $\frac{a-3b}{c} = 5$. B. $\frac{a-3b}{c} = -5$. C. $\frac{a+3b}{c} = 5$. D. $\frac{a+3b}{c} = -5$.

Hướng dẫn giải

Đáp án C

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax - b\sqrt{9x^2 + 2}}{cx + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax + bx\sqrt{9 + \frac{2}{x^2}}}{cx + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a + b\sqrt{9 + \frac{2}{x^2}}}{c + \frac{1}{x}} = \frac{a + 3b}{c}.$$

$$\text{Do đó } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax - b\sqrt{9x^2 + 2}}{cx + 1} = 5 \Leftrightarrow \frac{a + 3b}{c} = 5.$$

Câu 47. Cho a và b là các tham số thực. Biết rằng $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{4x^2 + 3x + 1}{cx + 1} - (ax + b) \right] = 0$, a và b thỏa

mãn hệ thức nào trong các hệ thức dưới đây?

- A. $a + b = 9$. B. $a + b = -9$. C. $a - b = 9$. D. $a - b = -9$.

Hướng dẫn giải

Đáp án A

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{4x^2 + 3x + 1}{x + 2} - (ax + b) \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[(4x + 5) + \frac{11}{x + 2} - (ax + b) \right].$$

$$\text{Do đó } \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{4x^2 + 3x + 1}{x + 2} - (ax + b) \right] = 0 \Rightarrow a = 4; b = -5 \Rightarrow a - b = 9.$$

Câu 48. Cho a là một số thực dương. Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{a} \right) \frac{1}{(x - a)^2}$.

- A. bằng $-\frac{1}{a^2}$. B. là $+\infty$. C. là $-\infty$. D. không tồn tại.

Đáp án D

$$\text{Cách 1: Ta có } \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{a} \right) \frac{1}{(x - a)^2} = \frac{a - x}{ax} \cdot \frac{1}{(x - a)^2} = \frac{-1}{ax(x - a)}.$$

$$\text{Do đó } \lim_{x \rightarrow a^-} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{a} \right) \frac{1}{(x - a)^2} = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{-1}{ax(x - a)} = +\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{a} \right) \frac{1}{(x - a)^2} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{-1}{ax(x - a)} = -\infty;$$

Vậy $\lim_{x \rightarrow a^-} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{a} \right) \frac{1}{(x-a)^2} \neq \lim_{x \rightarrow a^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{a} \right) \frac{1}{(x-a)^2}$ nên $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{a} \right) \frac{1}{(x-a)^2}$ không tồn tại.

Cách 2: Cho a một giá trị cụ thể, chẳng hạn $a=1$, thay vào hàm số rồi sử dụng MTCT để tính giới hạn.

Câu 49. Cho n là một số nguyên dương. Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{n}{1-x^n} - \frac{1}{1-x} \right)$.

A. $\frac{n}{2}$.

B. $\frac{n-1}{2}$.

C. $\frac{n+1}{2}$.

D. $\frac{n+2}{2}$.

Hướng dẫn giải

Đáp án B

Cách 1: Sử dụng MTCT tính giới hạn với một giá trị cụ thể của n rồi so sánh với đáp án.

Chẳng hạn $n=3$ ta có $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3}{1-x^3} - \frac{1}{1-x} \right) = 1$.

$$\begin{aligned} \text{Cách 2: } \frac{n}{1-x^n} - \frac{1}{1-x} &= \frac{n - (1+x+x^2+\dots+x^{n-1})}{1-x^n} = \frac{1-x+1-x^2+\dots+1-x^{n-1}}{1-x^n} \\ &= \frac{1+(1+x)+(1+x+x^2)+\dots+(1+x+x^2+\dots+x^{n-2})}{1+x+x^2+\dots+x^{n-1}} \end{aligned}$$

$$\text{Do đó } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{n}{1-x^n} - \frac{1}{1-x} \right) = \frac{n-1}{2}.$$

$$\text{Lưu ý: } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{n}{1-x^n} - \frac{1}{1-x} \right) = \frac{n-1}{2}.$$

Câu 50. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực k sao cho giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{k}{x^2-1} \right)$ là hữu hạn.

A. $k=2$.

B. $k \neq 2$.

C. $k < 2$.

D. $k > 2$.

Hướng dẫn giải

Đáp án A

Ta có $\frac{1}{x-1} - \frac{k}{x^2-1} = \frac{x+1-k}{x^2-1}$. Mà $\lim_{x \rightarrow 1} (x+1-k) = 2-k$; $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2-1) = 0$ nên để

$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{k}{x^2-1} \right)$ là hữu hạn thì điều kiện cần là $2-k=0 \Leftrightarrow k=2$.

Thật vậy, khi $k=2$, $\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} = \frac{x-1}{x^2-1} = \frac{1}{x+1}$. Nên $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{k}{x^2-1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$.

Lưu ý: $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{k}{x^n-1} \right)$ hữu hạn $\Leftrightarrow k=n$.

Câu 51. Tìm giới hạn $B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+ax} - 1}{x}$ ($n \in \mathbb{N}^*, a \neq 0$):

A. $+\infty$ B. $-\infty$ C. $\frac{a}{n}$ D. $1 - \frac{n}{a}$

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Cách 1: Nhân liên hợp

Ta có:

$$B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[n]{1+ax} - 1)(\sqrt[n]{(1+ax)^{n-1}} + \sqrt[n]{(1+ax)^{n-2}} + \dots + \sqrt[n]{1+ax} + 1)}{x(\sqrt[n]{(1+ax)^{n-1}} + \sqrt[n]{(1+ax)^{n-2}} + \dots + \sqrt[n]{1+ax} + 1)}$$

$$B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a}{\sqrt[n]{(1+ax)^{n-1}} + \sqrt[n]{(1+ax)^{n-2}} + \dots + \sqrt[n]{1+ax} + 1} = \frac{a}{n}.$$

Cách 2: Đặt ẩn phụ

$$\text{Đặt } t = \sqrt[n]{1+ax} \Rightarrow x = \frac{t^n - 1}{a} \text{ và } x \rightarrow 0 \Leftrightarrow t \rightarrow 1$$

$$\Rightarrow B = a \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t-1}{t^n - 1} = a \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t-1}{(t-1)(t^{n-1} + t^{n-2} + \dots + t + 1)} = \frac{a}{n}.$$

Câu 52. Tìm giới hạn $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+ax} - 1}{\sqrt[m]{1+bx} - 1}$ với $ab \neq 0$:

A. $+\infty$ B. $-\infty$ C. $\frac{am}{bn}$ D. $1 + \frac{am}{bn}$

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Áp dụng bài toán trên ta có:

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+ax} - 1}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt[m]{1+bx} - 1} = \frac{a}{n} \cdot \frac{m}{b} = \frac{am}{bn}.$$

Câu 53. Tìm giới hạn $N = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{1+ax} - \sqrt[n]{1+bx}}{x}$:

A. $+\infty$ B. $-\infty$ C. $\frac{a}{m} - \frac{b}{n}$ D. $\frac{a}{m} + \frac{b}{n}$

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$$\text{Ta có: } N = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{1+ax} - 1}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+bx} - 1}{x} = \frac{a}{m} - \frac{b}{n}$$

Câu 54. Tìm giới hạn $N = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{1+ax} - \sqrt[n]{1+bx}}{\sqrt{1+x} - 1}$:

A. $+\infty$ B. $-\infty$ C. $\frac{2(an-bm)}{mn}$

D. 0

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$$\text{Ta có: } N = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt[m]{1+ax} - 1}{x} - \frac{\sqrt[n]{1+bx} - 1}{x} \right) \cdot \frac{x}{\sqrt{1+x} - 1} = \left(\frac{a}{m} - \frac{b}{n} \right) \cdot 2 = \frac{2(an - bm)}{mn}.$$

Câu 55. Tìm giới hạn $G = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{1+ax} \sqrt[n]{1+bx} - 1}{x}$:

- A. $+\infty$ B. $-\infty$ C. $\frac{a}{m} - \frac{b}{n}$ D. $\frac{a}{m} + \frac{b}{n}$

Hướng dẫn giải

Chọn D.

$$\text{Ta có: } G = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{1+ax} (\sqrt[n]{1+bx} - 1)}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{1+ax} - 1}{x} = \frac{b}{n} + \frac{a}{m}$$

Câu 56. Tìm giới hạn $F = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{(2x+1)(3x+1)(4x+1)} - 1}{x}$:

- A. $+\infty$ B. $-\infty$ C. $\frac{9}{n}$ D. 0

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$$\text{Đặt } y = \sqrt[n]{(2x+1)(3x+1)(4x+1)} \Rightarrow y \rightarrow 1 \text{ khi } x \rightarrow 0$$

$$\text{Và: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{y^n - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2x+1)(3x+1)(4x+1) - 1}{x} = 9$$

$$\text{Do đó: } F = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{y^n - 1}{x(y^{n-1} + y^{n-2} + \dots + y + 1)} = \frac{9}{n}$$

Câu 57. Tìm giới hạn $B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\alpha x} \sqrt[3]{1+\beta x} \sqrt[4]{1+\gamma x} - 1}{x}$ với $\alpha\beta\gamma \neq 0$.:

- A. $+\infty$ B. $-\infty$ C. $B = \frac{\gamma}{4} - \frac{\beta}{3} + \frac{\alpha}{2}$ D. $B = \frac{\gamma}{4} + \frac{\beta}{3} + \frac{\alpha}{2}$

Hướng dẫn giải

Chọn D.

$$\text{Ta có: } \sqrt{1+\alpha x} \sqrt[3]{1+\beta x} \sqrt[4]{1+\gamma x} - 1 =$$

$$= \sqrt{1+\alpha x} \sqrt[3]{1+\beta x} (\sqrt[4]{1+\gamma x} - 1) + \sqrt{1+\alpha x} ((\sqrt[3]{1+\beta x} - 1) + (\sqrt{1+\alpha x} - 1))$$

$$B = \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{1+\alpha x} \sqrt[3]{1+\beta x}) \frac{\sqrt[4]{1+\gamma x} - 1}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{1+\alpha x} \frac{\sqrt[3]{1+\beta x} - 1}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\alpha x} - 1}{x}$$

Câu 58. Tìm giới hạn $V = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{x^2}$:

- A. $+\infty$ B. $-\infty$ C. $\frac{mn(n-m)}{2}$ D. $\frac{mn(n+m)}{2}$

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$$\text{Ta có: } V = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+nx)^m - (1+mnx)}{x^2} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+mx)^n - (1+mnx)}{x^2} = \frac{mn(n-m)}{2}.$$

Câu 59. Tìm giới hạn $K = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x}) \dots (1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}} :$

A. $+\infty$ B. $-\infty$ C. $\frac{1}{n!}$

D. 0

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$$\text{Ta có: } K = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(1+\sqrt{x})(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1) \dots (\sqrt[n]{x^{n-1}} + \dots + 1)} = \frac{1}{n!}.$$

Câu 60. Tìm giới hạn $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x^2} + x)^n - (\sqrt{1+x^2} - x)^n}{x} :$

A. $+\infty$ B. $-\infty$ C. $2n$

D. 0

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left[(\sqrt{1+x^2} + x)^n - 1 \right] \left[(\sqrt{1+x^2} + x)^n + 1 \right]}{x (\sqrt{1+x^2} + x)^n} = 2n.$$

Câu 61. Tìm giới hạn $V = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{\sqrt{1+2x} - \sqrt[3]{1+3x}} :$

A. $+\infty$ B. $-\infty$ C. $\frac{2(an-bm)}{mn}$ D. $mn(n-m)$

Hướng dẫn giải

Chọn D.

$$\text{Ta có: } V = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{(1+mx)^n - 1}{x^2} - \frac{(1+nx)^m - 1}{x^2} \right] \frac{x^2}{\sqrt{1+2x} - \sqrt[3]{1+3x}} = \frac{mn(n-m)}{2} \cdot 2 = mn(n-m).$$

Câu 62. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho hàm số $f(x) = mx + \sqrt{9x^2 - 3x + 1}$ có giới hạn hữu hạn khi $x \rightarrow +\infty$.

A. $m = -3$ B. $m \neq -3$ C. $m \geq 0$ D. $m < 0$

Hướng dẫn giải

Đáp án A

Cách 1: Sử dụng MTCT tính toán khi $m = -3$ ta được kết quả

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-3x + \sqrt{9x^2 - 3x + 1}) = -\frac{1}{2}. \text{ Vậy ta chỉ xét các đáp án A và D.}$$

Lại sử dụng MTCT tính toán khi $m = -1$ ta được kết quả $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x + \sqrt{9x^2 - 3x + 1}) = +\infty$.

Vậy loại **Chọn D**. Do đó đáp án đúng là **A**.

Cách 2: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (mx + \sqrt{9x^2 - 3x + 1})$.

+ Nếu $m \geq 0$ thì $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (mx + \sqrt{9x^2 - 3x + 1}) = +\infty$.

+ Nếu $m < 0$ thì $\lim_{x \rightarrow +\infty} (mx + \sqrt{9x^2 - 3x + 1}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(m + \sqrt{9 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} \right)$.

Ta thấy nếu $m \neq -3$ thì $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(m + \sqrt{9 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} \right) \neq 0$ và do đó

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (mx + \sqrt{9x^2 - 3x + 1}) = \infty. \text{ Ngược lại nếu } m = -3 \text{ thì } \lim_{x \rightarrow +\infty} (-3x + \sqrt{9x^2 - 3x + 1}) = -\frac{1}{2}.$$

Vậy đáp án đúng là **A**.

Câu 63. Giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 3x + 5} + ax) = +\infty$ nếu.

A. $a \geq 1$.

B. $a \leq 1$.

C. $a > 1$.

D. $a < 1$.

Hướng dẫn giải

Đáp án D

Cách 1: Sử dụng MTCT tính giới hạn khi $a = 1$ và $a = 0$, ta được

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 3x + 5} + x) = \frac{3}{2}; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - 3x + 5} = +\infty. \text{ Từ đó suy ra đáp án đúng là D}$$

Cách 2: $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 3x + 5} + ax) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(a + \sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2}} \right)$.

Vì $\lim_{x \rightarrow -\infty} = -\infty$ nên để $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 3x + 5} + ax) = +\infty$ thì $a - 1 < 0 \Leftrightarrow a < 1$.

Câu 64. Cho a và b là các số thực khác 0. Biết $\lim_{x \rightarrow +\infty} (ax - \sqrt{x^2 + bx + 2}) = 3$, thì tổng $a + b$ bằng

A. 2.

B. -6.

C. 7.

D. -5.

Hướng dẫn giải

Đáp án D

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} (ax - \sqrt{x^2 + bx + 2}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(a - \sqrt{1 + \frac{b}{x} + \frac{2}{x^2}} \right)$.

Do đó nếu $a \neq 1$ thì $\lim_{x \rightarrow +\infty} (ax - \sqrt{x^2 + bx + 2}) = \infty$. Vậy $a = 1$. Khi đó

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 + bx + 2}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-bx - 2}{x + \sqrt{x^2 + bx + 2}} = -\frac{b}{2}.$$

Vậy: $-\frac{b}{2} = 3 \Leftrightarrow b = -6$. Do đó $a + b = -5$.

Câu 65. Cho a và b là các số thực khác 0. Biết $\lim_{x \rightarrow +\infty} (ax + b - \sqrt{x^2 - 6x + 2}) = 5$ số lớn hơn trong hai số a và b là số nào trong các số dưới đây?

A. 4.

B. 3.

C. 2.

D. 1.

Hướng dẫn giải

Đáp án C

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (ax + b - \sqrt{x^2 - 6x + 2}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(a - \sqrt{1 - \frac{6}{x} + \frac{2}{x^2}} \right) + b.$$

Do đó nếu $a \neq 1$ thì $\lim_{x \rightarrow +\infty} (ax + b - \sqrt{x^2 - 6x + 2}) = \infty$. Vậy $a = 1$. Khi đó ta có

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + b - \sqrt{x^2 - 6x + 2}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x - 2}{x + \sqrt{x^2 - 6x + 2}} + b = \frac{6}{2} + b = b + 3.$$

Vậy: $-b + 3 = 5 \Leftrightarrow b = 2$. Do đó số lớn hơn trong hai số a và b là số 2.

Câu 66. Biết $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{9x^2 + 2x} + \sqrt[3]{27x^3 + 4x^2 + 5}) = -\frac{m}{n}$ trong đó $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản, m và n là các số nguyên dương. Tìm bội số chung nhỏ nhất của m và n .

A. 135.

B. 136.

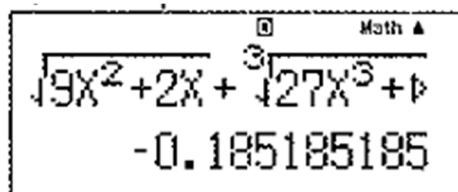
C. 138.

D. 140.

Hướng dẫn giải

Đáp án A

Cách 1: Sử dụng MTCT tính giá trị hàm số tại $x = -10^{10}$ ta được kết quả



Áp dụng kỹ thuật tìm dạng phân số của số thập phân vô hạn tuần hoàn ta có $0,(\overline{185}) = \frac{5}{27}$.

Vậy $\frac{m}{n} = \frac{5}{27}$.

Từ đó chọn đáp án đúng là A.

Cách 2: $\sqrt{9x^2 + 2x} + \sqrt[3]{27x^3 + 4x^2 + 5} = \left(\sqrt{9x^2 + 2x} + 3x \right) + \left(\sqrt[3]{27x^3 + 4x^2 + 5} - 3x \right)$

$$= \frac{2x}{\sqrt{9x^2+2x}-3x} - \frac{4x^2+5}{\sqrt[3]{(27x^3+4x^2+5)^2+3x\sqrt{27x^3+4x^2+5}+9x^2}}.$$

$$\text{Suy ra } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{9x^2+2x} + \sqrt[3]{27x^3+4x^2+5} \right) = \frac{2}{-6} + \frac{4}{9+9+9} = -\frac{5}{27}.$$

Câu 67. Cho a và b là các số nguyên dương. Biết $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{9x^2+ax} + \sqrt[3]{27x^3+bx^2+5}) = \frac{7}{27}$, hỏi a và b thỏa mãn hệ thức nào dưới đây?

- A.** $a+2b=33$. **B.** $a+2b=34$. **C.** $a+2b=35$. **D.** $a+2b=36$.

Hướng dẫn giải

Đáp án B

Làm tương tự như câu 49, ta có: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{9x^2+ax} + \sqrt[3]{27x^3+bx^2+5} \right) = \frac{-a}{6} + \frac{b}{27} = \frac{2b-9a}{54}$.

Do đó $2b-9a=14$. Suy ra a là số chẵn. Vậy $a+2b$ là số chẵn. Từ đó loại đáp án A và C.

$$\text{Giải hệ } \begin{cases} a+2b=34 \\ 2b-9a=14 \end{cases} \text{ được } a=2; b=16.$$

$$\text{Giải hệ } \begin{cases} a+2b=36 \\ 2b-9a=14 \end{cases} \text{ được } a=\frac{11}{5} \text{ (loại).}$$

Câu 68. Tìm giới hạn $C = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt[n]{(x+a_1)(x+a_2)\dots(x+a_n)} - x]$:

- A.** $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n}$ **D.** $\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{2n}$

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$$\text{Đặt } y = \sqrt[n]{(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)}$$

$$\Rightarrow y^n - x^n = (y-x)(y^{n-1} + y^{n-2}x + \dots + x^{n-1}) \Rightarrow y-x = \frac{y^n - x^n}{y^{n-1} + y^{n-2}x + \dots + x^{n-1}}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (y-x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y^n - x^n}{y^{n-1} + y^{n-2}x + \dots + x^{n-1}}$$

$$\Rightarrow C = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{y^n - x^n}{x^{n-1}}}{\frac{y^{n-1} + y^{n-2}x + \dots + x^{n-1}}{x^{n-1}}}.$$

$$\text{Mà } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y^n - x^n}{x^{n-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (a_1 + a_2 + \dots + a_n + \frac{b_2}{x} + \frac{b_3}{x^2} + \dots + \frac{b_n}{x^{n-1}})$$

$$= a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y^k x^{n-1-k}}{x^{n-1}} = 1 \quad \forall k = 0, \dots, n-1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y^{n-1} + y^{n-2}x + \dots + x^{n-1}}{x^{n-1}} = n.$$

$$\text{Vậy } C = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}.$$

Câu 69. Cho a và b là các số thực khác 0. Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{ax+1}}{\sin bx}$ bằng:

A. $\frac{a}{2b}$

B. $-\frac{a}{2b}$

C. $\frac{2a}{b}$

D. $-\frac{2a}{b}$

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Cách 1: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{ax+1}}{\sin bx} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \sqrt{ax+1}}{x} \cdot \frac{bx}{\sin bx} \cdot \frac{1}{b} \right).$

Mà $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{ax+1}}{\sin bx} = \frac{-a}{2}; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{bx}{\sin bx} = 1$ **ên** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{ax+1}}{\sin bx} = \frac{-a}{2b};$

Cách 2: Cho a và b các giá trị cụ thể, thay vào rồi tính giới hạn. Chẳng hạn với $a = b = 1$,

sử dụng MTCT ta tính được $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{x+1}}{\sin x} = \frac{1}{2}$. Từ đó chọn đáp án đúng là **B.**

Câu 70. Cho a, b, c là các số thực khác 0, $3b - 2c \neq 0$. Tìm hệ thức liên hệ giữa a, b, c để:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{\sqrt{1+bx} - \sqrt[3]{1+cx}} = \frac{1}{2}.$$

A. $\frac{a}{3b-2c} = \frac{1}{10}$

B. $\frac{a}{3b-2c} = \frac{1}{6}$

C. $\frac{a}{3b-2c} = \frac{1}{2}$

D. $\frac{a}{3b-2c} = \frac{1}{12}$

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Cách 1: $\frac{\tan ax}{\sqrt{1+bx} - \sqrt[3]{1+cx}} = a \cdot \frac{\tan ax}{ax} \cdot \frac{x}{\sqrt{1+bx} - \sqrt[3]{1+cx}}$

Lại có $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{ax} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin ax}{ax} \cdot \frac{1}{\cos ax} \right) = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+bx} - \sqrt[3]{1+cx}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{1+bx} - 1}{x} - \frac{\sqrt[3]{1+cx} - 1}{x} \right) = \frac{b}{2} - \frac{c}{3} = \frac{3b-2c}{6}$$

Vậy $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{\sqrt{1+bx} - \sqrt[3]{1+cx}} = \frac{6a}{3b-2c}.$

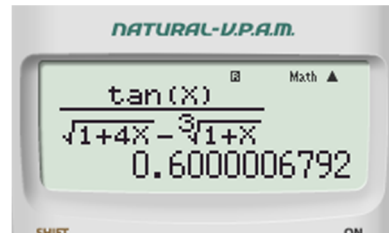
Do đó hệ thức liên hệ giữa a, b, c là $\frac{6a}{3b-2c} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{a}{3b-2c} = \frac{1}{12}$

Cách 2: Sử dụng MTCT. Với mỗi đáp án, chọn các giá trị cụ thể của a, b, c thỏa mãn hệ thức

rồi thay vào để tính giới hạn. Nếu giới hạn tìm được bằng $\frac{1}{2}$ thì đó là đáp án đúng.

Chẳng hạn, với đáp án A, chọn $a=1; b=4; c=1$, sử dụng MTCT tính được

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{\sqrt{1+4x} - \sqrt[3]{1+x}} = \frac{3}{5}.$$



Vậy A không phải là đáp án đúng.

Tương tự vậy B và C cũng không phải là đáp án đúng.

Câu 71. Cho m và n là các số nguyên dương phân biệt. Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{x^m - x^n}$ bằng:

- A. $m-n$ B. $n-m$ C. $\frac{1}{m-n}$ D. $\frac{1}{n-m}$

Hướng dẫn giải

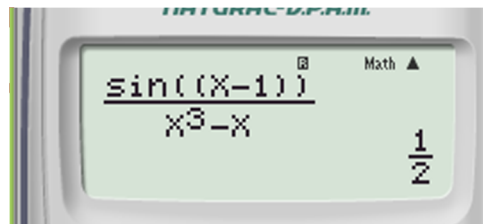
Chọn C.

Cách 1: Ta có $\frac{\sin(x-1)}{x^m - x^n} = \frac{\sin(x-1)}{x-1} \cdot \frac{x-1}{x^m - x^n}$

Mà $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - x^n}{x-1} = m-n$; $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{x-1} = 1$ nên $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{x^m - x^n} = \frac{1}{m-n}$

Cách 2: Cho m và n các giá trị cụ thể, thay vào rồi sử dụng MTCT tính giới hạn. Chẳng hạn

với $m=3; n=1$ ta tính được $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{x^3 - x} = \frac{1}{2} = \frac{1}{m-n}$.



Vậy đáp án đúng là C

Câu 72. Tìm giới hạn $A = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\pi x^m)}{\sin(\pi x^n)}$:

- A. $+\infty$ B. $-\infty$ C. $\frac{n}{m}$ D. 0

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$$\begin{aligned} A &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi(1-x^m)}{\sin \pi(1-x^n)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi(1-x^m)}{\pi(1-x^m)} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\pi(1-x^n)}{\sin \pi(1-x^n)} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x^n}{1-x^m} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x^n}{1-x^m} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-x)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + 1)}{(1-x)(x^{m-1} + x^{m-2} + \dots + 1)} = \frac{n}{m}. \end{aligned}$$

Câu 73. Tìm giới hạn $H = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{\cos ax} - \sqrt[n]{\cos bx}}{\sin^2 x}$:

A. $+\infty$ B. $-\infty$ C. $\frac{b}{2n} - \frac{a}{2m}$

D. 0

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$$\text{Ta có: } H = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sqrt[n]{\cos ax} - 1}{x^2} + \frac{1 - \sqrt[n]{\cos bx}}{x^2}}{\frac{\sin^2 x}{x^2}} = \frac{b}{2n} - \frac{a}{2m}$$

Câu 74. Tìm giới hạn $M = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt[n]{\cos ax}}{x^2}$:

A. $+\infty$ B. $-\infty$ C. $\frac{a}{2n}$

D. 0

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } 1 - \sqrt[n]{\cos ax} &= \frac{1 - \cos ax}{1 + \sqrt[n]{\cos ax} + (\sqrt[n]{\cos ax})^2 + \dots + (\sqrt[n]{\cos ax})^{n-1}} \\ \Rightarrow M &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos ax}{x^2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \sqrt[n]{\cos ax} + (\sqrt[n]{\cos ax})^2 + \dots + (\sqrt[n]{\cos ax})^{n-1}} = \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{n} = \frac{a}{2n}. \end{aligned}$$

Câu 75. Cho $f(x)$ là đa thức thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - 15}{x - 3} = 12$. Tính $T = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[3]{5f(x) - 11} - 4}{x^2 - x - 6}$.

A. $T = \frac{3}{20}$.B. $T = \frac{3}{40}$.C. $T = \frac{1}{4}$ D. $T = \frac{1}{20}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

HÀM SỐ LIÊN TỤC

Câu 76. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{ax}-1}{x} & \text{ khi } x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{ khi } x = 0 \end{cases}$, với $a \neq 0$. Tìm giá trị của a để hàm số $f(x)$ liên tục

tại $x_0 = 0$.

A. $a = 1$.

B. $a = \frac{1}{2}$.

C. $a = -1$.

D. $a = -\frac{1}{2}$

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Câu 77. Tìm a để các hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{4x+1}-1}{ax^2+(2a+1)x} & \text{ khi } x \neq 0 \\ 3 & \text{ khi } x = 0 \end{cases}$ liên tục tại $x = 0$

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{1}{4}$

C. $-\frac{1}{6}$

D. 1

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

$$\begin{aligned} \text{Ta có : } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4x+1}-1}{x(ax+2a+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4}{(ax+2a+1)(\sqrt{4x+1}+1)} = \frac{2}{2a+1} \end{aligned}$$

$$\text{Hàm số liên tục tại } x = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{2a+1} = 3 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{6}.$$

Câu 78. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 & , x \geq 1 \\ \frac{2x^3}{1+x} & , 0 \leq x < 1 \\ x \sin x & , x < 0 \end{cases}$. Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

A. $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

B. $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

C. $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

D. $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

Với $x > 1$ ta có hàm số $f(x) = x^2$ liên tục trên khoảng $(1; +\infty)$. (1)

Với $0 < x < 1$ ta có hàm số $f(x) = \frac{2x^3}{1+x}$ liên tục trên khoảng $(0;1)$. (2)

Với $x < 0$ ta có $f(x) = x \sin x$ liên tục trên khoảng $(-\infty; 0)$. (3)

Với $x = 1$ ta có $f(1) = 1$; $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 = 1$; $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^3}{1+x} = 1$

Suy ra $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1 = f(1)$.

Vậy hàm số liên tục tại $x = 1$.

Với $x = 0$, ta có $f(0) = 0$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x^3}{1+x} = 0$; $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x \cdot \sin x)$
 $= \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x} = 0$ suy ra $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$.

Vậy hàm số liên tục tại $x = 0$. (4)

Từ (1), (2), (3) và (4) suy ra hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

Câu 79. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}{x} & \text{khi } x < 0 \\ m + \frac{1-x}{1+x} & \text{khi } x \geq 0 \end{cases}$ liên tục tại $x = 0$.

A. $m = 1$. **B.** $m = -2$. **C.** $m = -1$. **D.** $m = 0$

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Câu 80. Tìm m để các hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{x-2} + 2x-1}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ 3m-2 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$

A. $m = 1$ **B.** $m = \frac{4}{3}$ **C.** $m = 2$ **D.** $m = 0$

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Với $x \neq 1$ ta có $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x-2} + 2x-1}{x-1}$ nên hàm số liên tục trên khoảng $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

Do đó hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi hàm số liên tục tại $x = 1$

Ta có: $f(1) = 3m - 2$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x-2} + 2x-1}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \left[1 + \frac{x^3 + x - 2}{(x-1)(x^2 - x\sqrt[3]{x-2} + \sqrt[3]{(x-2)^2})} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \left[1 + \frac{x^2 + x + 2}{x^2 - x\sqrt[3]{x-2} + \sqrt[3]{(x-2)^2}} \right] = 2$$

Nên hàm số liên tục tại $x=1 \Leftrightarrow 3m-2=2 \Leftrightarrow m=\frac{4}{3}$

Vậy $m=\frac{4}{3}$ là những giá trị cần tìm.

Câu 81. Tìm m để các hàm số $f(x) = \begin{cases} \sqrt{2x-4}+3 & \text{khi } x \geq 2 \\ \frac{x+1}{x^2-2mx+3m+2} & \text{khi } x < 2 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$

A. $m=1$

B. $m=-\frac{1}{6}$

C. $m=5$

D. $m=0$

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Với $x > 2$ ta có hàm số liên tục

Để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thì hàm số phải liên tục trên khoảng $(-\infty; 2)$ và liên tục tại $x=2$.

- Hàm số liên tục trên $(-\infty; 2)$ khi và chỉ khi tam thức

$$g(x) = x^2 - 2mx + 3m + 2 \neq 0, \forall x \leq 2$$

$$\text{TH 1: } \begin{cases} \Delta' = m^2 - 3m - 2 \leq 0 \\ g(2) = -m + 6 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{3 - \sqrt{17}}{2} \leq m \leq \frac{3 + \sqrt{17}}{2}$$

$$\text{TH 2: } \begin{cases} \Delta' = m^2 - 3m - 2 > 0 \\ x_1 = m - \sqrt{\Delta'} > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 3m - 2 > 0 \\ m > 2 \\ \Delta' < (m-2)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{3 + \sqrt{17}}{2} \\ m < 6 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{3 + \sqrt{17}}{2} < m < 6$$

Nên $\frac{3 - \sqrt{17}}{2} \leq m < 6$ (*) thì $g(x) \neq 0, \forall x \leq 2$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (\sqrt{2x-4} + 3) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+1}{x^2 - 2mx + 3m + 2} = \frac{3}{6-m}$$

Hàm số liên tục tại $x=2 \Leftrightarrow \frac{3}{6-m} = 3 \Leftrightarrow m=5$ (thỏa (*))

Câu 82. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x - \sqrt{x+2}}{x^2 - 4} & \text{neiu } x > 2 \\ x^2 + 3b & \text{neiu } x < 2 \\ 2a + b - 6 & \text{neiu } x = 2 \end{cases}$ liên tục tại $x = 2$. Tính $I = a + b$?

A. $I = \frac{19}{30}$

B. $I = -\frac{93}{16}$

C. $I = \frac{19}{32}$

D. $I = -\frac{173}{16}$

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Câu 83. Chọn hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{(x-3)^2}}{x-3} & \text{khi } x \neq 3 \\ m & \text{khi } x = 3 \end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm

số liên tục tại $x = 3$.

A. $m \in \emptyset$.

B. $m \in \mathbb{R}$.

C. $m = 1$.

D. $m = -1$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$.

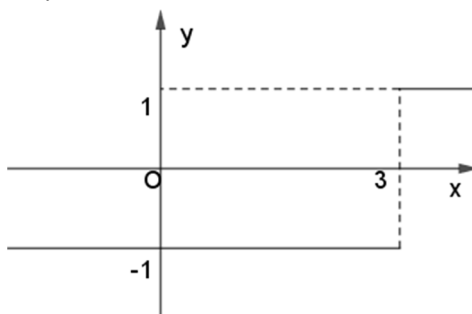
Ta có $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{\sqrt{(x-3)^2}}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{|x-3|}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-(x-3)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} (-1) = -1$.

Tương tự ta có $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 1$. (có thể dùng MTCT để tính giới hạn của hàm số)

Vậy $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$ nên $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ không tồn tại. Vậy với mọi m , hàm số đã cho không liên tục tại $x = 3$.

Do đó đáp án đúng là **A.**

Ta có thể tam khảo thêm đồ thị của hàm số khi $x \neq 3$ để hiểu rõ hơn.



Câu 84. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{ax^2 - (a-2)x - 2}{\sqrt{x+3} - 2} & \text{khi } x \neq 1 \\ 8 + a^2 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$. Có tất cả bao nhiêu giá trị của a để hàm

số liên tục tại $x = 1$?

A. 1.

B. 0.

C. 3.

D. 2.**Hướng dẫn giải.****Chọn D**

Ta có

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax^2 - (a-2)x - 2}{\sqrt{x+3} - 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(ax+a+2)}{\sqrt{x+3} - 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \left[(ax+a+2)(\sqrt{x+3} + 2) \right] = 8(a+1).$$

$$\text{Hàm số liên tục tại } x=1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \Leftrightarrow 8(a+1) = 8+a^2 \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ a=8 \end{cases}.$$

Câu 85. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 12 & (x \geq 9) \\ \frac{ax-2b-12}{\sqrt[3]{x-1}-2} & (x < 9) \end{cases}$. Biết rằng a, b là giá trị thực để hàm số liên tục

tại $x_0 = 9$. Tính giá trị của $P = a + b$.

A. $P = \frac{1}{2}$ B. $P = 5$ C. $P = 17$ D. $P = -\frac{1}{2}$ **Hướng dẫn giải****Chọn D.**

Câu 86. Cho phương trình $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ (1) trong đó a, b, c là các tham số thực. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau

A. Phương trình (1) vô nghiệm với mọi a, b, c .B. Phương trình (1) có ít nhất một nghiệm với mọi a, b, c .C. Phương trình (1) có ít nhất hai nghiệm với mọi a, b, c .D. Phương trình (1) có ít nhất ba nghiệm với mọi a, b, c .**Hướng dẫn giải****Chọn B.**

Để thấy $a = b = c = 0$ thì phương trình (1) trở thành $x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Vậy A, C, D sai. Do đó B đúng.

Giải thích thêm: Xét bài toán “Chứng minh rằng phương trình $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ (1) luôn có ít nhất một nghiệm với mọi a, b, c ”. Ta có lời giải cụ thể như sau:

Đặt $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Ta có:

$$+ \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + ax^2 + bx + c) = -\infty \text{ với mọi } a, b, c \text{ nên tồn tại một giá trị } x = x_1 \text{ sao cho } f(x_1) < 0.$$

+ $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + ax^2 + bx + c) = +\infty$ với mọi a, b, c nên tồn tại một giá trị $x = x_2$ sao cho $f(x_2) > 0$.

Vậy $f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$ mà $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên suy ra $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trên khoảng $(x_1; x_2)$. Từ đó suy ra ĐPCM.

Câu 87. Phương trình $x^5 - \frac{1}{2}x^4 - 5x^3 + x^2 + 4x - 1 = 0$ có bao nhiêu nghiệm.

A. 2

B. 3

C. 4

D. 5

Hướng dẫn giải.

Chọn D

Câu 88. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho phương trình sau có nghiệm

$$(2m^2 - 5m + 2)(x - 1)^{2017}(x^{2018} - 2) + 2x + 3 = 0.$$

A. $m \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2}; 2 \right\}$. B. $m \in \left(-\infty; \frac{1}{2} \right) \cup (2; +\infty)$. C. $m \in \left\{ \frac{1}{2}; 2 \right\}$. D. $m \in \mathbb{R}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

+ Nếu $2m^2 - 5m + 2 = 0$ thì phương trình đã cho trở thành $2x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$.

+ Nếu $2m^2 - 5m + 2 \neq 0$, phương trình đã cho là một đa thức bậc lẻ (bậc 4035) nên theo kết quả đã biết, phương trình có ít nhất một nghiệm.

Vậy với mọi $m \in \mathbb{R}$, phương trình đã cho luôn có ít nhất một nghiệm.