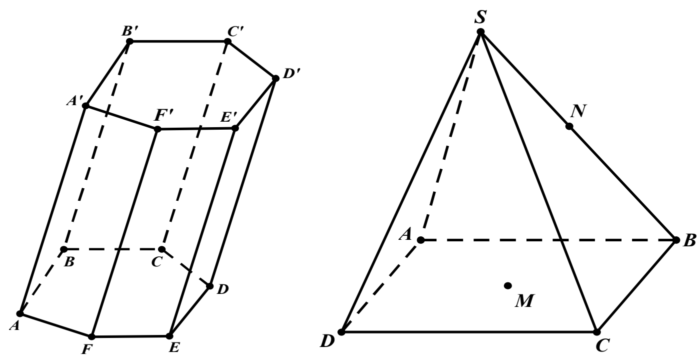
MỤC LỤC

PHẦN I. KHỐI ĐA DIỆN

1. KHỐI LĂNG TRỤ VÀ KHỐI CHÓP

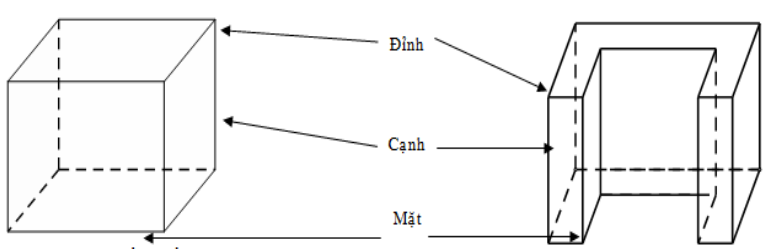
- Khối lăng trụ (chóp) là phần không gian được giới hạn bởi một hình lăng trụ (chóp) kể cả hình lăng trụ (chóp) ấy. Khối chóp cụt là phần không gian được giới hạn bởi một hình chóp cụt kể cả hình chóp cụt ấy.
- Điểm không thuộc khối lăng trụ (khối chóp, khối chóp cụt) được gọi là điểm ngoài của khối lăng trụ (khối chóp, khối chóp cụt). Điểm thuộc khối lăng trụ nhưng không thuộc hình lăng trụ ứng với khối lăng trụ (khối chóp, khối chóp cụt) đó được gọi là điểm trong của khối lăng trụ (khối chóp, khối chóp cụt).



2. KHÁI NIỆM VỀ HÌNH ĐA DIỆN VÀ KHỐI ĐA DIỆN

2.1. Khái niệm về hình đa diện

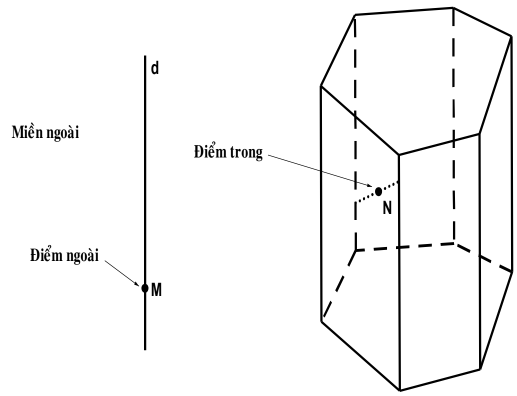
- Hình đa diện (gọi tắt là đa diện) là hình được tạo bởi một số hữu hạn các đa giác thỏa mãn hai tính chất:
  - Hai đa giác phân biệt chỉ có thể hoặc không có điểm chung, hoặc chỉ có một đỉnh chung, hoặc chỉ có một cạnh chung.
  - Mỗi cạnh của đa giác nào cũng là cạnh chung của đúng hai đa giác.
- Mỗi đa giác gọi là một mặt của hình đa diện. Các đỉnh, cạnh của các đa giác ấy theo thứ tự được gọi là các đỉnh, cạnh của hình đa diện.



2.2. Khái niệm về khối đa diện

- Khối đa diện là phần không gian được giới hạn bởi một hình đa diện, kể cả hình đa diện đó.

- Những điểm không thuộc khối đa diện được gọi là điểm ngoài của khối đa diện. Những điểm thuộc khối đa diện nhưng không thuộc hình đa diện đó được gọi là điểm trong của khối đa diện. Tập hợp các điểm trong được gọi là miền trong, tập hợp những điểm ngoài được gọi là miền ngoài của khối đa diện.
- Mỗi hình đa diện chia các điểm còn lại của không gian thành hai miền không giao nhau là miền trong và miền ngoài của hình đa diện, trong đó chỉ có miền ngoài là chứa hoàn toàn một đường thẳng nào đó.



3. HAI ĐA DIỆN BẰNG NHAU

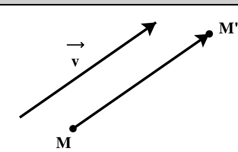
3.1. Phép dời hình trong không gian

Trong không gian, quy tắc đặt tương ứng mỗi điểm M với điểm M' xác định duy nhất được gọi là một phép biến hình trong không gian.

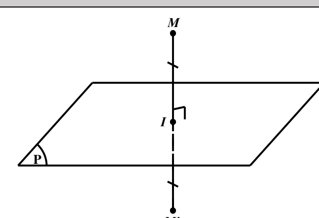
Phép biến hình trong không gian được gọi là phép dời hình nếu nó bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm tùy ý.

* Một số phép dời hình trong không gian:

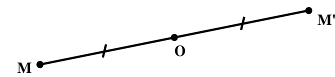
3.1.1. Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$

Nội dung	Hình vẽ
Là phép biến hình biến mỗi điểm M thành M' sao cho $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$.	

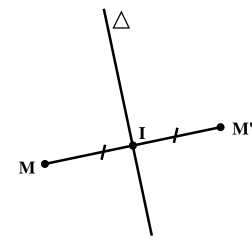
3.1.2. Phép đối xứng qua mặt phẳng (P)

Nội dung	Hình vẽ
Là phép biến hình biến mỗi điểm thuộc (P) thành chính nó, biến mỗi điểm M không thuộc (P) thành điểm M' sao cho (P) là mặt phẳng trung trực của MM'. Nếu phép đối xứng qua mặt phẳng (P) biến hình (H) thành chính nó thì (P) được gọi là mặt phẳng đối xứng của (H).	

3.1.3. Phép đối xứng qua tâm O

Nội dung	Hình vẽ
Là phép biến hình biến điểm O thành chính nó, biến mỗi điểm M khác O thành điểm M' sao cho O là trung điểm MM' Nếu phép đối xứng tâm O biến hình (H) thành chính nó thì O được gọi là tâm đối xứng của (H)	

3.1.4. Phép đối xứng qua đường thẳng Δ (phép đối xứng trục Δ)

Nội dung	Hình vẽ
Là phép biến hình biến mọi điểm thuộc đường thẳng Δ thành chính nó, biến mỗi điểm M không thuộc Δ thành điểm M' sao cho Δ là đường trung trực của MM'. Nếu phép đối xứng trục Δ biến hình (H) thành chính nó thì Δ được gọi là trục đối xứng của (H)	

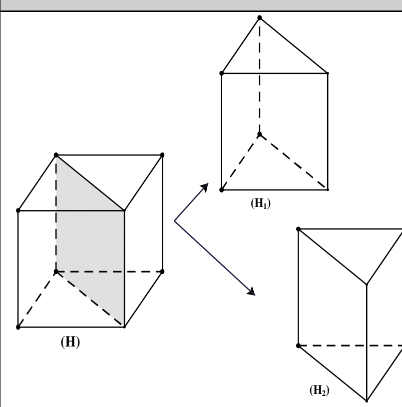
* <u>Nhận xét</u>:

- Thực hiện liên tiếp các phép dời hình sẽ được một phép dời hình.
- Phép dời hình biến đa diện (H) thành đa diện (H'), biến đỉnh, cạnh, mặt của (H) thành đỉnh, cạnh, mặt tương ứng của (H').

3.2. Hai hình bằng nhau

Hai hình đa diện được gọi là bằng nhau nếu có một phép dời hình biến hình này thành hình kia.

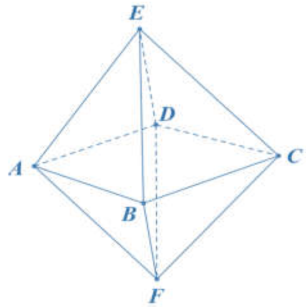
4. PHÂN CHIA VÀ LẮP GHÉP CÁC KHỐI ĐA DIỆN

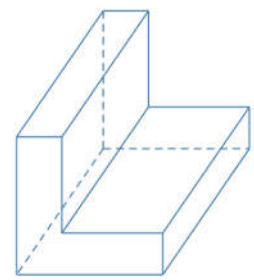
Nội dung	Hình vẽ
Nếu khối đa diện (H) là hợp của hai khối đa diện (H_1), (H_2) sao cho (H_1) và (H_2) không có chung điểm trong nào thì ta nói có thể chia được khối đa diện (H) thành hai khối đa diện (H_1) và (H_2), hay có thể lắp ghép hai khối đa diện (H_1) và (H_2) với nhau để được khối đa diện (H).	

5. KHỐI ĐA DIỆN LỒI

5.1. Khối đa diện lồi

Một khối đa diện được gọi là khối đa diện lồi nếu với bất kì hai điểm A và B nào của nó thì mọi điểm của đoạn AB cũng thuộc khối đó.





Khối đa diện lồi **Khối đa diện không lồi**

5.2. Khối đa diện đều

5.2.1. Định nghĩa

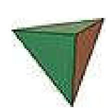
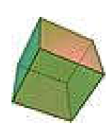
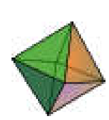
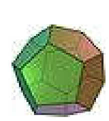
- Khối đa diện đều là một khối đa diện lồi có hai tính chất sau đây:
  - Các mặt là những đa giác đều n cạnh.
  - Mỗi đỉnh là đỉnh chung của đúng p cạnh.
- Khối đa diện đều như vậy gọi là khối đa diện đều loại $\{n, p\}$.

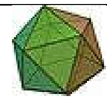
5.2.2. Định lí

Chỉ có 5 loại khối đa diện đều. Đó là loại $\{3;3\}$, loại $\{4;3\}$, loại $\{3;4\}$, loại $\{5;3\}$, loại $\{3;5\}$.

Tùy theo số mặt của chúng, 5 khối đa diện trên lần lượt có tên gọi là: Khối tứ diện đều; khối lập phương; khối bát diện đều; khối mười hai mặt đều; khối hai mươi mặt đều.

5.2.3. Bảng tóm tắt của năm loại khối đa diện đều

Khối đa diện đều		**Số đỉnh**	**Số cạnh**	**Số mặt**	**Loại**	**Số MPĐX**
Tứ diện đều		4	6	4	$\{3;3\}$	6
Khối lập phương		8	12	6	$\{4;3\}$	9
Bát diện đều		6	12	8	$\{3;4\}$	9
Mười hai mặt đều		20	30	12	$\{5;3\}$	15

Hai mươi mặt đều		12	30	20	$\{3;5\}$	15

Chú ý: Giả sử khối đa diện đều loại $\{n,p\}$ có $Đ$ đỉnh, C cạnh và M mặt.

Khi đó: $\boxed{pĐ = 2C = nM}$.

5.3. Một số kết quả quan trọng về khối đa diện lồi

5.3.1. Kết quả 1

Cho một khối tứ diện đều. Khi đó:

- Các trọng tâm của các mặt của nó là các đỉnh của một khối tứ diện đều;
- Các trung điểm của các cạnh của nó là các đỉnh của một khối bát diện đều (khối tám mặt đều).

5.3.2. Kết quả 2

Tâm của các mặt của một khối lập phương là các đỉnh của một khối bát diện đều.

5.3.3. Kết quả 3

Tâm của các mặt của một khối bát diện đều là các đỉnh của một khối lập phương.

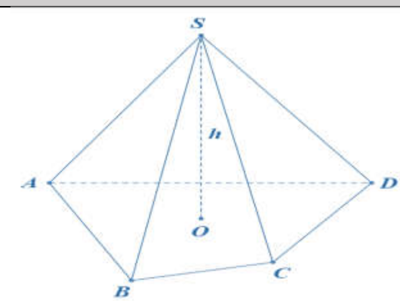
5.3.4. Kết quả 4

Hai đỉnh của một khối bát diện đều được gọi là **hai đỉnh đối diện** nếu chúng không cùng thuộc một cạnh của khối đó. Đoạn thẳng nối hai đỉnh đối diện gọi là **đường chéo** của khối bát diện đều. Khi đó:

- Ba đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường
- Ba đường chéo đôi một vuông góc với nhau;
- Ba đường chéo bằng nhau.

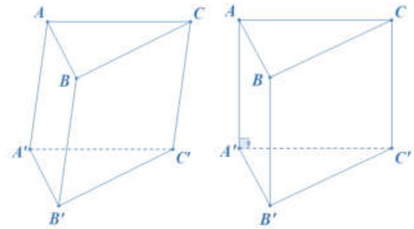
6. THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN

6.1. Thể tích khối chóp

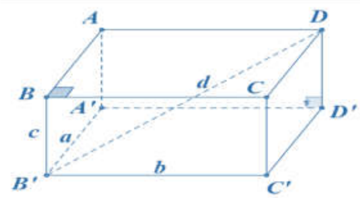
Nội dung	Hình vẽ
$\boxed{V = \frac{1}{3}S_{đáy}.h}$ • $S_{đáy}$: Diện tích mặt đáy. • h: Độ dài chiều cao khối chóp. $\boxed{V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}d_{(S,(ABCD))}.S_{ABCD}}$	

6.2. Thể tích khối lăng trụ

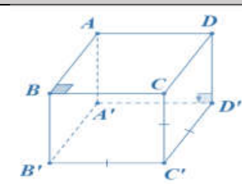
Nội dung	Hình vẽ

$\boxed{V = S_{đáy}.h}$ • $S_{đáy}$: Diện tích mặt đáy. • h: Chiều cao của khối chóp. **Lưu ý:** Lăng trụ đứng có chiều cao chính là cạnh bên.	

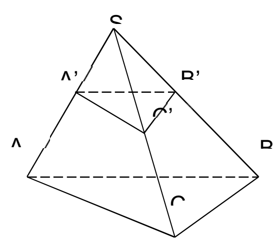
6.3. Thể tích khối hộp chữ nhật

Nội dung	Hình vẽ
$\boxed{V = a.b.c}$	

6.4. Thể tích khối lập phương

Nội dung	Hình vẽ
$\boxed{V = a^3}$	

6.5. Tỉ số thể tích

Nội dung	Hình vẽ
$\boxed{\dfrac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{SA'}{SA}.\dfrac{SB'}{SB}.\dfrac{SC'}{SC}}$ **Thể tích hình chóp cụt** $ABC.A'B'C'$ $\boxed{V = \dfrac{h}{3}\left(B + B' + \sqrt{BB'}\right)}$ Với B, B', h là diện tích hai đáy và chiều cao.	

6.6. Một số chú ý về độ dài các đường đặc biệt

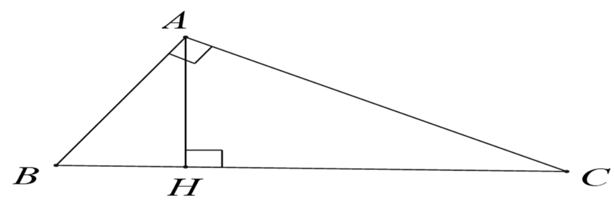
- Đường chéo của hình vuông cạnh a là $a\sqrt{2}$
- Đường chéo của hình lập phương cạnh a là : $a\sqrt{3}$
- Đường chéo của hình hộp chữ nhật có 3 kích thước a, b, c là : $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$
- Đường cao của tam giác đều cạnh a là: $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

7. CÁC CÔNG THỨC HÌNH PHẲNG

7.1. Hệ thức lượng trong tam giác

7.1.1. Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH

- $AB^2 + AC^2 = BC^2$
- $AB^2 = BH.BC$
- $AC^2 = CH.BC$
- $AH.BC = AB.AC$
- $AH^2 = BH.HC$



- $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2}$
- $AB = BC.\sin C = BC.\cos B = AC.\tan C = AC.\cot B$

7.1.2. Cho ΔABC có độ dài ba cạnh là: a, b, c độ dài các trung tuyến là m_a, m_b, m_c bán kính đường tròn ngoại tiếp R ; bán kính đường tròn nội tiếp r nửa chu vi p.

- Định lí hàm số cosin:

  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A;\ b^2 = c^2 + a^2 - 2ca.\cos B;\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos C$

- Định lí hàm số sin:

  $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$

- Độ dài trung tuyến:

  $m_a^2 = \dfrac{b^2 + c^2}{2} - \dfrac{a^2}{4};\ m_b^2 = \dfrac{c^2 + a^2}{2} - \dfrac{b^2}{4};\ m_c^2 = \dfrac{a^2 + b^2}{2} - \dfrac{c^2}{4}$

7.2. Các công thức tính diện tích

7.2.1. Tam giác

- $S = \dfrac{1}{2}a.h_a = \dfrac{1}{2}b.h_b = \dfrac{1}{2}c.h_c$
- $S = \dfrac{1}{2}bc\sin A = \dfrac{1}{2}ca.\sin B = \dfrac{1}{2}ab\sin C$
- $S = \dfrac{abc}{4R}$
- $S = pr$
- $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$
- ΔABC vuông tại A: $S = \dfrac{AB.AC}{2} = \dfrac{BC.AH}{2}$
- ΔABC đều, cạnh a: $AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

7.2.2. Hình vuông

- $S = a^2$ (a: cạnh hình vuông)

7.2.3. Hình chữ nhật

- $S = ab$ $\quad$ $(a, b$: hai kích thước)

7.2.4. Hình bình hành

- S = đáy × cao $= AB.AD.\sin\widehat{BAD}$

7.2.5. Hình thoi

- $S = AB.AD.\sin\widehat{BAD} = \frac{1}{2}AC.BD$

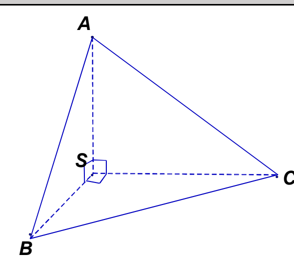
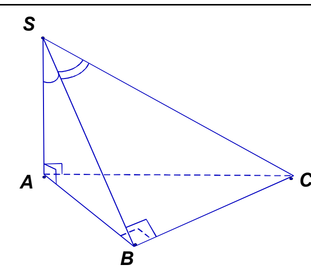
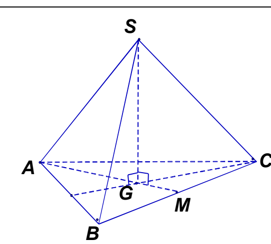
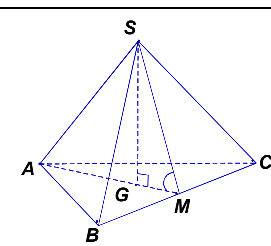
7.2.6. Hình thang

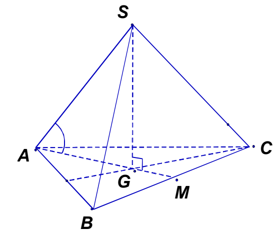
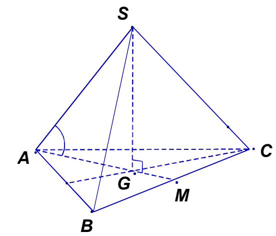
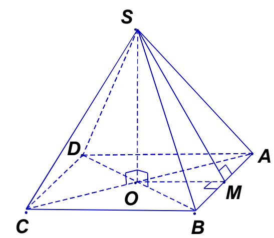
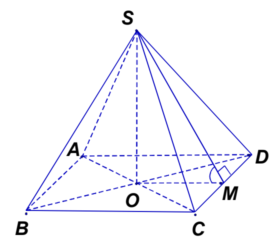
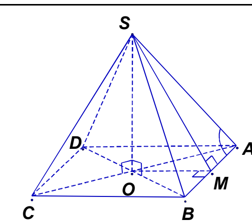
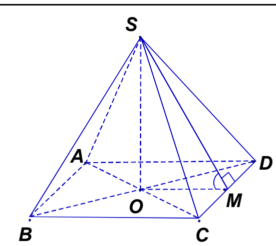
- $S = \frac{1}{2}(a+b)h$ $\quad$ $(a, b$: hai đáy, h: chiều cao)

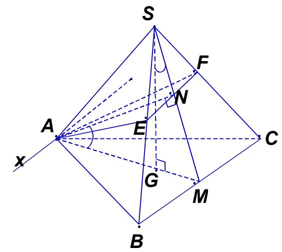
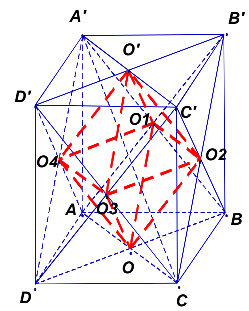
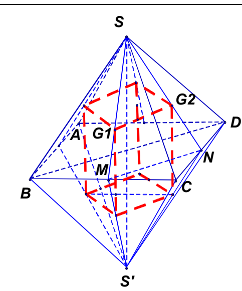
7.2.7. Tứ giác có hai đường chéo vuông góc AC & BD

- $S = \frac{1}{2}AC.BD$

8. MỘT SỐ CÔNG THỨC TÍNH NHANH THỂ TÍCH KHỐI CHÓP THƯỜNG GẶP

Nội dung	Hình vẽ
Cho hình chóp $SABC$ với các mặt phẳng $(SAB),(SBC),(SAC)$ vuông góc với nhau từng đôi một, diện tích các tam giác SAB, SBC, SAC lần lượt là S_1, S_2, S_3. Khi đó: $V_{S.ABC} = \frac{\sqrt{2S_1.S_2.S_3}}{3}$	
Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với (ABC), hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) vuông góc với nhau, $\widehat{BSC} = \alpha, \widehat{ASB} = \beta$. Khi đó: $V_{S.ABC} = \frac{SB^3.\sin 2\alpha.\tan\beta}{12}$	
Cho hình chóp đều $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a, cạnh bên bằng b. Khi đó: $V_{S.ABC} = \frac{a^2\sqrt{3b^2 - a^2}}{12}$	
Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a và mặt bên tạo với mặt phẳng đáy góc α. Khi đó: $V_{S.ABC} = \frac{a^3\tan\alpha}{24}$	

Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có các cạnh bên bằng b và cạnh bên tạo với mặt phẳng đáy góc β. Khi đó: $V_{S.ABC}=\dfrac{\sqrt{3}b^3.\sin\beta\cos^2\beta}{4}$	
Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có các cạnh đáy bằng a, cạnh bên tạo với mặt phẳng đáy góc β. Khi đó: $V_{S.ABC}=\dfrac{a^3.\tan\beta}{12}$	
Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a, và $SA=SB=SC=SD=b$. Khi đó: $V_{S.ABC}=\dfrac{a^2\sqrt{4b^2-2a^2}}{6}$	
Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, góc tạo bởi mặt bên và mặt phẳng đáy là α. Khi đó: $V_{S.ABCD}=\dfrac{a^3.\tan\alpha}{6}$	
Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, $\widehat{SAB}=\alpha$ với $\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right)$ Khi đó: $V_{S.ABCD}=\dfrac{a^3\sqrt{\tan^2\alpha-1}}{6}$	
Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có các cạnh bên bằng a, góc tạo bởi mặt bên và mặt đáy là α với $\alpha\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$. Khi đó: $V_{S.ABCD}=\dfrac{4a^3.\tan\alpha}{3\sqrt{\left(2+\tan^2\alpha\right)^3}}$	

Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A song song với BC và vuông góc với (SBC), góc giữa (P) với mặt phẳng đáy là α. Khi đó: $V_{S.ABCD} = \dfrac{a^3 \cot\alpha}{24}$	
Khối tám mặt đều có đỉnh là tâm các mặt của hình lập phương cạnh a. Khi đó: $V = \dfrac{a^3}{6}$	
Cho khối tám mặt đều cạnh a. Nối tâm của các mặt bên ta được khối lập phương. Khi đó: $V = \dfrac{2a^3\sqrt{2}}{27}$	

9. CÁC CÔNG THỨC ĐẶC BIỆT THỂ TÍCH TỨ DIỆN

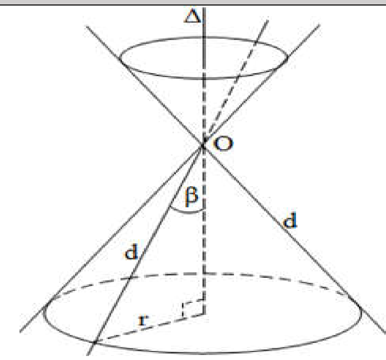
Công thức	Điều kiện tứ diện
$V_{S.ABC} = \dfrac{abc}{6}\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\varphi+2\cos\alpha\cos\beta\cos\varphi}$ Công thức tính khi biết 3 cạnh, 3 góc ở đỉnh 1 tứ diện	$\begin{cases} SA=a, SB=b, SC=c \\ \widehat{ASB}=\alpha, \widehat{BSC}=\beta, \widehat{CSA}=\varphi \end{cases}$
$V_{ABCD} = \dfrac{1}{6}abd\sin\alpha$ Công thức tính khi biết 2 cạnh đối, khoảng cách và góc 2 cạnh đó	$\begin{cases} AB=a, CD=b \\ d(AB,CD)=d, (AB,CD)=\alpha \end{cases}$
$V_{SABC} = \dfrac{2S_1S_2\sin\alpha}{3a}$ Công thức tính khi biết một cạnh, diện tích và góc giữa 2 mặt kề	$\begin{cases} S_{\Delta SAB}=S_1, S_{\Delta SAC}=S_2, SA=a \\ ((SAB),(SAC))=\alpha \end{cases}$
$V_{S.ABC} = \dfrac{abc}{6}\sin\alpha\sin\beta\sin\varphi$ Công thức tính khi biết 3 cạnh, 2 góc ở đỉnh và 1 góc nhị diện	$\begin{cases} SA=a, SB=b, SC=c \\ (\widehat{(SAB),(SAC)})=\alpha \\ \widehat{ASB}=\beta, \widehat{ASC}=\varphi \end{cases}$

$V_{ABCD}=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$	**Tứ diện đều** tất cả các cạnh bằng a
$V_{ABCD}=\dfrac{\sqrt{2}}{12}\sqrt{\left(a^2+b^2-c^2\right)\left(b^2+c^2-a^2\right)\left(a^2+c^2-b^2\right)}$	**Tứ diện gần đều** $\begin{cases}AB=CD=a\\AC=BD=b\\AD=BC=c\end{cases}$

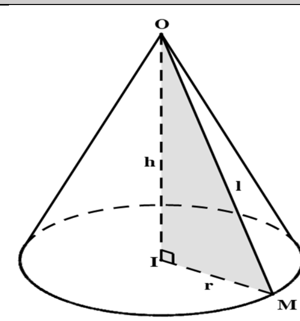
PHẦN II. MẶT NÓN - MẶT TRỤ - MẶT CẦU

1. MẶT NÓN TRÒN XOAY VÀ KHỐI NÓN

1.1. Mặt nón tròn xoay

Nội dung	Hình vẽ
Đường thẳng d,Δ cắt nhau tại O và tạo thành góc β với $0^0<\beta<90^0$, $mp\left(P\right)$ chứa d,Δ. $\left(P\right)$ quay quanh trục Δ với góc β không đổi $\Rightarrow$ mặt nón tròn xoay đỉnh O. • Δ gọi là trục. • d được gọi là đường sinh. • Góc 2β gọi là góc ở đỉnh.	

1.2. Khối nón

Nội dung	Hình vẽ
Là phần không gian được giới hạn bởi một hình nón tròn xoay kể cả hình nón đó. Những điểm không thuộc khối nón gọi là những điểm ngoài của khối nón. Những điểm thuộc khối nón nhưng không thuộc hình nón tương ứng gọi là những điểm trong của khối nón. Đỉnh, mặt đáy, đường sinh của một hình nón cũng là đỉnh, mặt đáy, đường sinh của khối nón tương ứng.	

Cho hình nón có chiều cao h, đường sinh l và bán kính đáy r.

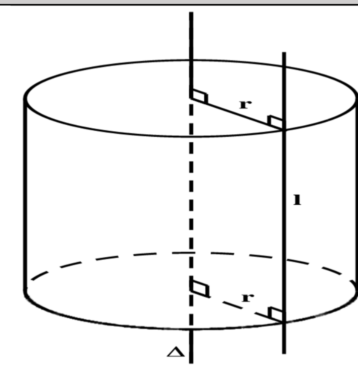
- **<u>Diện tích xung quanh:</u>** của hình nón: $\boxed{S_{xq}=\pi rl}$.
- **Diện tích đáy (hình tròn):** $\boxed{S_{đáy}=\pi r^2}$.
- **<u>Diện tích toàn phần:</u>** của hình nón: $\boxed{S_{tp}=\pi rl+\pi r^2}$.
- **<u>Thể tích khối nón</u>**: $\boxed{V=\dfrac{1}{3}\pi r^2h}$.

1.3. Thiết diện khi cắt bởi mặt phẳng

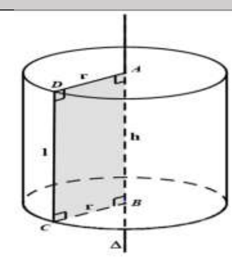
Điều kiện	Kết quả
Cắt mặt nón tròn xoay bởi mp (Q) đi qua đỉnh của mặt nón.	
• $mp(Q)$ cắt mặt nón theo 2 đường sinh. • $mp(Q)$ tiếp xúc với mặt nón theo một đường sinh.	• Thiết diện là tam giác cân. • (Q) là mặt phẳng tiếp diện của hình nón.
Cắt mặt nón tròn xoay bởi mp (Q) không đi qua đỉnh của mặt nón.	
• $mp(Q)$ vuông góc với trục hình nón. • $mp(Q)$ song song với 2 đường sinh hình nón. • $mp(Q)$ song song với 1 đường sinh hình nón.	• Giao tuyến là 1 đường parabol. • Giao tuyến là 2 nhánh của 1 hypebol. • Giao tuyến là một đường tròn.

2. MẶT TRỤ TRÒN XOAY

2.1. Mặt trụ

Nội dung	Hình vẽ
Trong mặt phẳng (P) cho hai đường thẳng Δ và l song song với nhau, cách nhau một khoảng bằng r. Khi quay mặt phẳng (P) xung quanh Δ thì đường thẳng l sinh ra một mặt tròn xoay được gọi là mặt trụ tròn xoay, gọi tắt là mặt trụ. • Đường thẳng Δ gọi là trục. • Đường thẳng l là đường sinh. • r là bán kính của mặt trụ đó.	

2.2. Hình trụ tròn xoay và khối trụ tròn xoay

Nội dung	Hình vẽ
Ta xét hình chữ nhật $ABCD$. Khi quay hình chữ nhật $ABCD$ xung quanh đường thẳng chứa một cạnh nào đó, chẳng hạn cạnh AB thì đường gấp khúc $ADCB$ sẽ tạo thành một hình gọi là hình trụ tròn xoay, hay gọi tắt là hình trụ.	

- Khi quay quanh AB, hai cạnh AD và BC sẽ vạch ra hai hình tròn bằng nhau gọi là hai đáy của hình trụ, bán kính của chúng gọi là bán kính của hình trụ.
- Độ dài đoạn CD gọi là độ dài đường sinh của hình trụ.

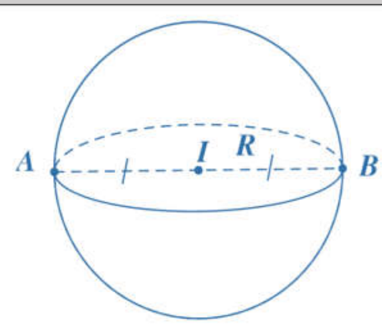
- Phần mặt tròn xoay được sinh ra bởi các điểm trên cạnh CD khi quay xung quanh AB gọi là mặt xung quanh của hình trụ.
- Khoảng cách AB giữa hai mặt phẳng song song chứa hai đáy là chiều cao của hình trụ.

Khối trụ tròn xoay hay khối trụ là phần không gian được giới hạn bởi một hình trụ tròn xoay kể cả hình trụ tròn xoay đó. Những điểm không thuộc khối trụ gọi là những điểm ngoài của khối trụ. Những điểm thuộc khối trụ nhưng không thuộc hình trụ tương ứng gọi là những điểm trong của khối trụ. Mặt đáy, chiều cao, đường sinh, bán kính của một hình trụ cũng là mặt đáy, chiều cao, đường sinh, bán kính của khối trụ tương ứng.Hình trụ có chiều cao h, đường sinh l và bán kính đáy r.

- **Diện tích xung quanh:** $\boxed{S_{xq} = 2\pi rl}$.
- **Diện tích toàn phần:** $\boxed{S_{tp} = 2\pi rl + 2\pi r^2}$.
- **Thể tích:** $\boxed{V = \pi r^2 h}$.

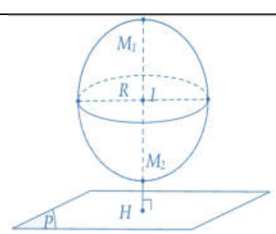
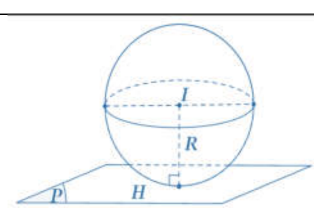
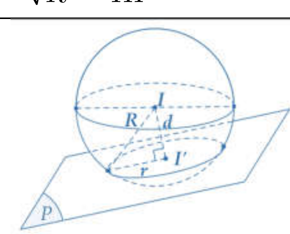
3. MẶT CẦU – KHỐI CẦU

3.1. Mặt cầu

Nội dung	Hình vẽ
Cho điểm I cố định và một số thực dương R. Tập hợp tất cả những điểm M trong không gian cách I một khoảng R được gọi là mặt cầu tâm I, bán kính R. **Kí hiệu:** $S\left(I;R\right)$. Khi đó: $\boxed{S\left(I;R\right) = \left\{M \middle\| IM = R\right\}}$	

3.2. Vị trí tương đối giữa mặt cầu và mặt phẳng

Cho mặt cầu $S\left(I;R\right)$ và mặt phẳng $\left(P\right)$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên $\left(P\right)$ $\Rightarrow d = IH$ là khoảng cách từ I đến mặt phẳng $\left(P\right)$. Khi đó:

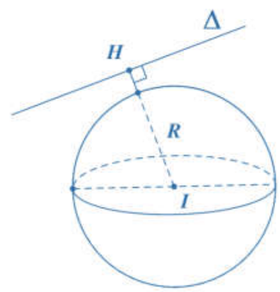
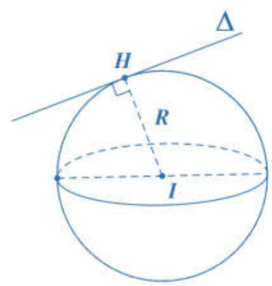
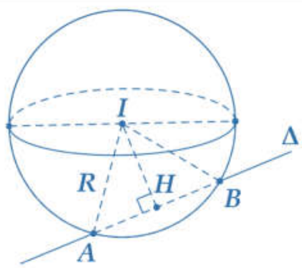
$d > R$	$d = R$	$d < R$
Mặt cầu và mặt phẳng không có điểm chung.	Mặt phẳng tiếp xúc mặt cầu: $\left(P\right)$ là mặt phẳng **tiếp diện** của mặt cầu và H: **tiếp điểm.**	Mặt phẳng cắt mặt cầu theo thiết diện là đường tròn có tâm I' và bán kính $r = \sqrt{R^2 - IH^2}$
		

Lưu ý:

Khi mặt phẳng (P) đi qua tâm I của mặt cầu thì mặt phẳng (P) được gọi là **mặt phẳng kính** và thiết diện lúc đó được gọi là **đường tròn lớn.**

3.3. Vị trí tương đối giữa mặt cầu và đường thẳng

Cho mặt cầu $S(I;R)$ và đường thẳng Δ. Gọi H là hình chiếu của I lên Δ. Khi đó:

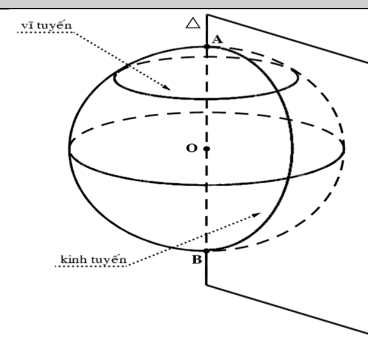
$IH > R$	$IH = R$	$IH < R$
Δ không cắt mặt cầu.	Δ tiếp xúc với mặt cầu. Δ: **Tiếp tuyến** của (S) H: **tiếp điểm.**	Δ cắt mặt cầu tại hai điểm phân biệt.
		

Lưu ý:

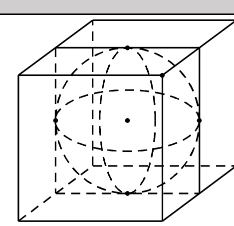
Trong trường hợp Δ cắt (S) tại 2 điểm A,B thì bán kính R của (S) được tính như sau:

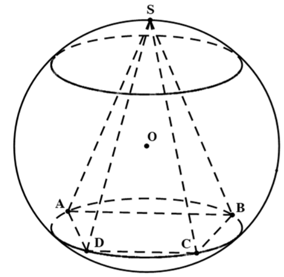
$$\begin{cases} d(I;\Delta) = IH \\ R = \sqrt{IH^2 + AH^2} = \sqrt{IH^2 + \left(\dfrac{AB}{2}\right)^2} \end{cases}.$$

3.4. Đường kinh tuyến và vĩ tuyến của mặt cầu

Nội dung	Hình vẽ
Giao tuyến của mặt cầu với nửa mặt phẳng có bờ là trục của mặt cầu được gọi là kinh tuyến. Giao tuyến (nếu có) của mặt cầu với các mặt phẳng vuông góc với trục được gọi là vĩ tuyến của mặt cầu. Hai giao điểm của mặt cầu với trục được gọi là hai cực của mặt cầu	

* Mặt cầu nội tiếp, ngoại tiếp hình đa diện:

Nội dung	Hình vẽ
Mặt cầu nội tiếp hình đa diện nếu mặt cầu đó tiếp xúc với tất cả các mặt của hình đa diện. Còn nói hình đa diện ngoại tiếp mặt cầu.	

Mặt cầu ngoại tiếp hình đa diện nếu tất cả các đỉnh của hình đa diện đều nằm trên mặt cầu. Còn nói hình đa diện nội tiếp mặt cầu. Mặt cầu tâm O bán kính r ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ khi và chỉ khi $OA = OB = OC = OD = OS = r$	

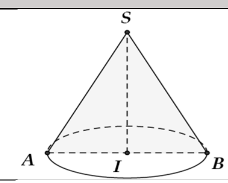
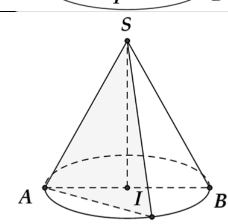
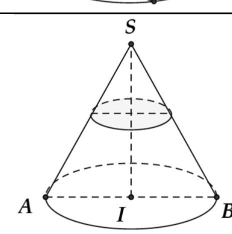
Cho mặt cầu $S\left(I;R\right)$

- **Diện tích mặt cầu:** $\boxed{S = 4\pi R^2}$.
- **Thể tích khối cầu:** $\boxed{V = \frac{4}{3}\pi R^3}$.

4. MỘT SỐ DẠNG TOÁN VÀ CÔNG THỨC GIẢI

4.1. Bài toán mặt nón

4.1.1.Dạng 1. Thiết diện của hình nón cắt bởi một mặt phẳng

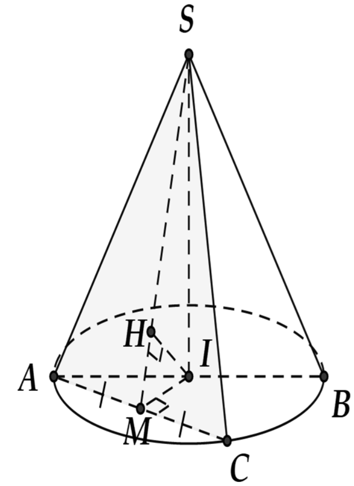
Nội dung	Hình vẽ
Thiết diện qua trục của hình nón là tam giác cân.	
Thiết diện qua đỉnh của hình nón là những tam giác cân có hai cạnh bên là hai đường sinh của hình nón.	
Thiết diện vuông góc với trục của hình nón là những đường tròn có tâm nằm trên trục của hình nón.	

4.1.2. Dạng 2. Bài toán liên quan đến thiết diện qua đỉnh của hình nón

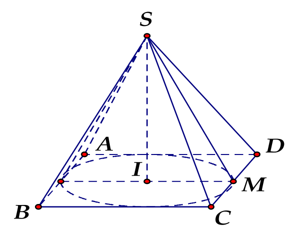
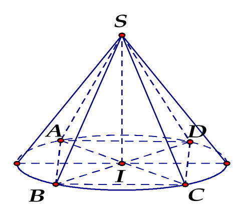
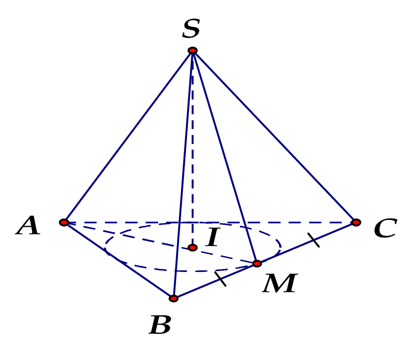
Cho hình nón có chiều cao là h, bán kính đáy r và đường sinh l.

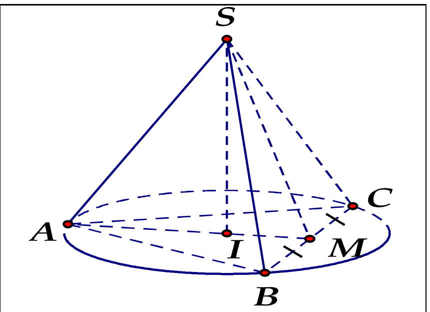
Một thiết diện đi qua đỉnh của hình nón có khoảng cách từ tâm của đáy đến mặt phẳng chứa thiết diện là d.

Nội dung	Hình vẽ

Gọi M là trung điểm của AC. Khi đó: • $AC \perp (SMI)$ • Góc giữa (SAC) và (ABC) là góc $\widehat{SMI}$. • Góc giữa (SAC) và SI là góc $\widehat{MSI}$. • $d\left(I,(SAC)\right) = IH = d.$ **Diện tích thiết diện** $S_{td} = S_{\Delta SAC} = \frac{1}{2}SM.AC = \frac{1}{2}\sqrt{SI^2 + IM^2}.2\sqrt{AI^2 - IM^2}$ $= \sqrt{r^2 - \frac{h^2d^2}{h^2 - d^2}}.\sqrt{h^2 + \frac{h^2d^2}{h^2 - d^2}}$	

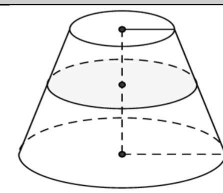
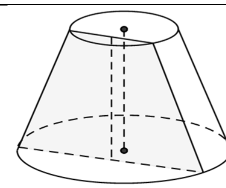
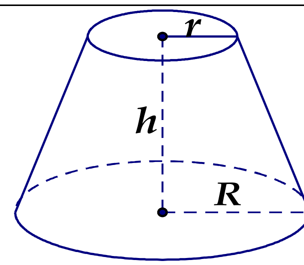
4.1.3. Dạng 3. Bài toán hình nón ngoại tiếp và nội tiếp hình chóp

Nội dung	Hình vẽ
Hình nón **nội tiếp** hình chóp $S.ABCD$ đều là hình nón có đỉnh là S, đáy là đường tròn nội tiếp hình vuông $ABCD$. Khi đó hình nón có: • Bán kính đáy $r = IM = \frac{AB}{2}$, • Đường cao $h = SI$, đường sinh $l = SM.$	Hình chóp tứ giác **đều** $S.ABCD$ 
Hình nón **ngoại tiếp** hình chóp $S.ABCD$ đều là hình nón có đỉnh là S, đáy là đường tròn ngoại tiếp hình vuông $ABCD$. Khi đó hình nón có: • Bán kính đáy: $r = IA = \frac{AC}{2} = \frac{AB\sqrt{2}}{2}.$ • Chiều cao: $h = SI.$ • Đường sinh: $l = SA.$	Hình chóp tứ giác **đều** $S.ABCD$ 
Hình nón **nội tiếp** hình chóp $S.ABC$ đều là hình nón có đỉnh là S, đáy là đường tròn nội tiếp tam giác $ABC.$ Khi đó hình nón có • Bán kính đáy: $r = IM = \frac{AM}{3} = \frac{AB\sqrt{3}}{6}.$ • Chiều cao: $h = SI.$ • Đường sinh: $l = SM.$	Hình chóp tam giác **đều** $S.ABC$ 
Hình nón **ngoại tiếp** hình chóp $S.ABC$ đều là hình nón có đỉnh là S, đáy là đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC.$	Hình chóp tam giác **đều** $S.ABC$

Khi đó hình nón có: • Bán kính đáy: $r = IA = \dfrac{2AM}{3} = \dfrac{AB\sqrt{3}}{3}$. • Chiều cao: $h = SI$. Đường sinh: $l = SA$.	

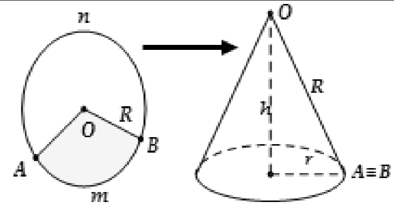
4.1.4. Dạng 4. Bài toán hình nón cụt

Khi cắt hình nón bởi một mặt phẳng song song với đáy thì phần mặt phẳng nằm trong hình nón là một hình tròn. Phần hình nón nằm giữa hai mặt phẳng nói trên được gọi là **hình nón cụt**.

Nội dung	Hình vẽ
Khi cắt hình nón cụt bởi một mặt phẳng song song với đáy thì được mặt cắt là một hình tròn.	
Khi cắt hình nón cụt bởi một mặt phẳng song song với trục thì được mặt cắt là một hình thang cân.	
Cho hình nón cụt có R, r, h lần lượt là bán kính đáy lớn, bán kính đáy nhỏ và chiều cao. Diện tích xung quanh của hình nón cụt: $\boxed{S_{xq} = \pi l\left(R + r\right)}$. Diện tích đáy (hình tròn): $\boxed{\begin{cases} S_{đáy1} = \pi r^2 \\ S_{đáy2} = \pi R^2 \end{cases} \Rightarrow \sum S_{đáy} = \pi\left(r^2 + R^2\right)}$. Diện tích toàn phần của hình nón cụt: $\boxed{S_{tp} = \pi l\left(R + r\right) + \pi r^2 + \pi R^2}$. Thể tích khối nón cụt: $\boxed{V = \dfrac{1}{3}\pi h\left(R^2 + r^2 + Rr\right)}$.	

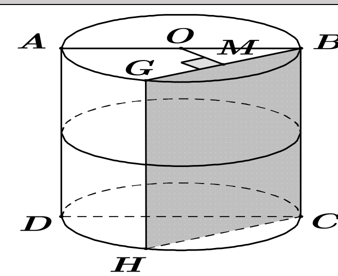
4.1.5. Dạng 5. Bài toán hình nón tạo bởi phần còn lại của hình tròn sau khi cắt bỏ đi hình quạt

Nội dung	Hình vẽ

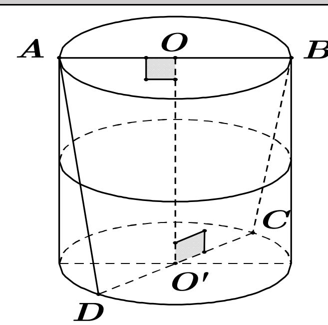
Từ hình tròn $(O;R)$ cắt bỏ đi hình quạt AmB. Độ dài cung $\overset{\frown}{AnB}$ bằng x. Phần còn lại của hình tròn ghép lại được một hình nón. Tìm bán kính, chiều cao và độ dài đường sinh của hình nón đó. Hình nón được tạo thành có $\begin{cases} l = R \\ 2\pi r = x \Rightarrow r = \dfrac{2\pi}{x}. \\ h = \sqrt{l^2 - r^2} \end{cases}$	

4.2. Một số dạng toán và công thức giải bài toán mặt trụ

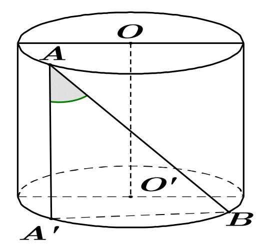
4.2.1. Dạng 1. Thiết diện của hình trụ cắt bởi một mặt phẳng

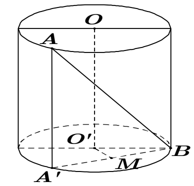
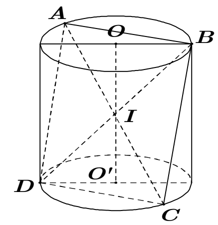
Nội dung	Hình vẽ
Thiết diện **vuông góc trục** là một đường tròn bán kính R Thiết diện **chứa trục** là một hình chữ nhật $ABCD$ trong đó $AB = 2R$ và $AD = h$. Nếu thiết diện qua trục là một hình vuông thì $h = 2R$. Thiết diện **song song với trục** và **không chứa trục** là hình chữ nhật $BGHC$ có khoảng cách tới trục là: $d\left(OO';(BGHC)\right) = OM$	

4.2.2. Dạng 2. Thể tích khối tứ diện có 2 cạnh là đường kính 2 đáy

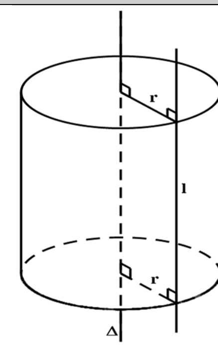
Nội dung	Hình vẽ
Nếu như AB và CD là hai đường kính bất kỳ trên hai đáy của hình trụ thì: $V_{ABCD} = \dfrac{1}{6}AB.CD.OO'.\sin(AB,CD)$ * Đặc biệt: Nếu AB và CD vuông góc nhau thì: $V_{ABCD} = \dfrac{1}{6}AB.CD.OO'$.	

4.2.3. Dạng 3. Xác định góc khoảng cách

Nội dung	Hình vẽ
Góc giữa AB và trục OO': $\left(\widehat{AB,OO'}\right) = \widehat{A'AB}$	

Khoảng cách giữa AB và trục OO': $d\left(AB;OO'\right) = OM$.	
Nếu $ABCD$ là một hình vuông nội tiếp trong hình trụ thì đường chéo của hình vuông cũng bằng đường chéo của hình trụ. Nghĩa là cạnh hình vuông: $AB\sqrt{2} = \sqrt{4R^2 + h^2}$.	

4.2.4. Dạng 4. Xác định mối liên hệ giữa diện tích xung quanh, toàn phần và thể tích khối trụ trong bài toán tối ưu

Nội dung	Hình vẽ
Một khối trụ có thể tích V không đổi. • Tìm bán kính đáy và chiều cao hình trụ để diện tích toàn phần nhỏ nhất: $S_{tp}\min \Leftrightarrow \begin{cases} R = \sqrt[3]{\dfrac{V}{4\pi}} \\ h = 2\sqrt[3]{\dfrac{V}{4\pi}} \end{cases}$ • Tìm bán kính đáy và chiều cao hình trụ để diện tích xung quanh cộng với diện tích 1 đáy và nhỏ nhất: $S\min \Leftrightarrow \begin{cases} R = \sqrt[3]{\dfrac{V}{\pi}} \\ h = \sqrt[3]{\dfrac{V}{\pi}} \end{cases}$	

4.2.5. Dạng 5. Hình trụ ngoại tiếp, nội tiếp một hình lăng trụ đứng

Cho hình lăng trụ tam giác đêu nội tiếp trong một hình trụ. Thể tích khối lăng trụ là V thì thể tích khối trụ là $V_{(T)} = \dfrac{4\pi V}{9}$

Cho hình lăng trụ tứ giác đêu $ABCD.A'B'C'D'$ ngoại tiếp trong một hình trụ. Diện tích xung quanh hình trụ là S_{xq} thì diện tích xung quanh của hình lăng trụ là $S_{xq} = \dfrac{2S}{\pi}$

5. MỘT SỐ DẠNG TOÁN VÀ CÔNG THỨC GIẢI BÀI TOÁN MẶT CẦU

5.1. Mặt cầu ngoại tiếp khối đa diện

5.1.1. Các khái niệm cơ bản

Trục của đa giác đáy: là đường thẳng đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp của đa giác đáy và vuông góc với mặt phẳng chứa đa giác đáy $\Rightarrow$ Bất kì một điểm nào nằm trên trục của đa giác thì cách đều các đỉnh của đa giác đó.

Đường trung trực của đoạn thẳng: là đường thẳng đi qua trung điểm của đoạn thẳng và vuông góc với đoạn thẳng đó.

$\Rightarrow$ Bất kì một điểm nào nằm trên đường trung trực thì cách đều hai đầu mút của đoạn thẳng.

Mặt trung trực của đoạn thẳng: là mặt phẳng đi qua trung điểm của đoạn thẳng và vuông góc với đoạn thẳng đó.

$\Rightarrow$ Bất kì một điểm nào nằm trên mặt trung trực thì cách đều hai đầu mút của đoạn thẳng.

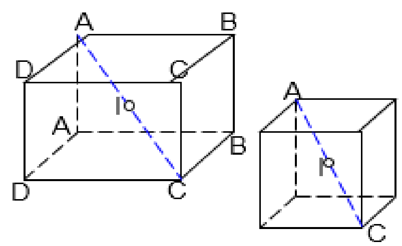
5.1.2. Tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp

Tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp: là điểm cách đều các đỉnh của hình chóp. Hay nói cách khác, nó chính là giao điểm I của trục đường tròn ngoại tiếp mặt phẳng đáy và mặt phẳng trung trực của một cạnh bên hình chóp.

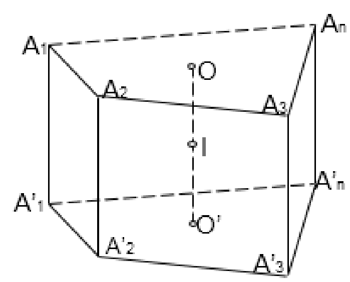
Bán kính: là khoảng cách từ I đến các đỉnh của hình chóp.

5.1.3. Cách xác định tâm và bán kính mặt cầu của một số hình đa diện

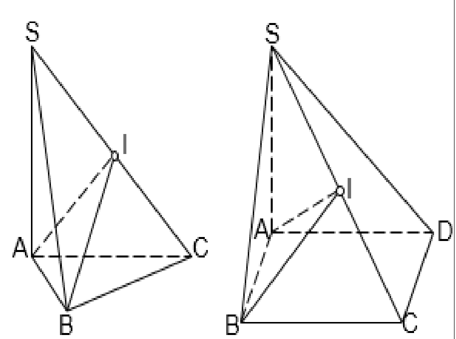
5.1.3.1. Hình hộp chữ nhật, hình lập phương

Nội dung	Hình vẽ
Tâm: trùng với tâm đối xứng của hình hộp chữ nhật (hình lập phương) $\Rightarrow$ Tâm là I, là trung điểm của AC'. **Bán kính**: bằng nửa độ dài đường chéo hình hộp chữ nhật (hình lập phương). $\Rightarrow$ Bán kính: $R = \dfrac{AC'}{2}$.	

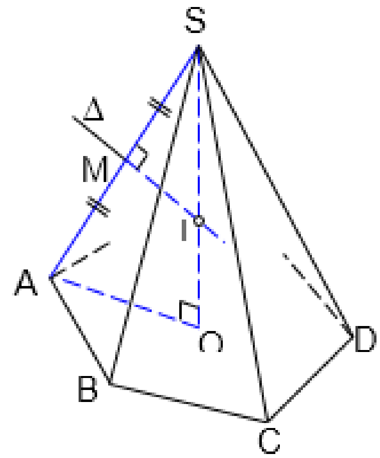
5.1.3.2. Hình lăng trụ đứng có đáy nội tiếp đường tròn

Nội dung	Hình vẽ
Xét hình lăng trụ đứng $A_1A_2A_3...A_n.A_1'A_2'A_3'...A_n'$, trong đó có 2 đáy $A_1A_2A_3...A_n$ và $A_1'A_2'A_3'...A_n'$ nội tiếp đường tròn (O) và (O'). Lúc đó, mặt cầu nội tiếp hình lăng trụ đứng có: • **Tâm**: I với I là trung điểm của OO'. • **Bán kính**: $R = IA_1 = IA_2 = ... = IA_n'$.	

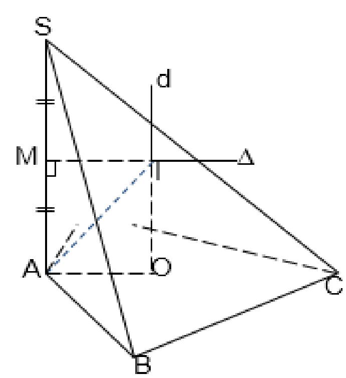
5.1.3.3. Hình chóp có các đỉnh nhìn đoạn thẳng nối 2 đỉnh còn lại dưới 1 góc vuông

Nội dung	Hình vẽ
Hình chóp $S.ABC$ có $\widehat{SAC} = \widehat{SBC} = 90^0$. • Tâm: I là trung điểm của SC. • Bán kính: $R = \dfrac{SC}{2} = IA = IB = IC$. Hình chóp $S.ABCD$ có $\widehat{SAC} = \widehat{SBC} = \widehat{SDC} = 90^0$. • Tâm: I là trung điểm của SC. • Bán kính: $R = \dfrac{SC}{2} = IA = IB = IC = ID$.	

5.1.3.4. Hình chóp đều

Nội dung	Hình vẽ
Cho hình chóp đều $S.ABC...$ • Gọi O là tâm của đáy $\Rightarrow SO$ là trục của đáy. • Trong mặt phẳng xác định bởi SO và một cạnh bên, chẳng hạn như $mp(SAO)$, ta vẽ đường trung trực của cạnh SA là Δ cắt SA tại M và cắt SO tại $I \Rightarrow I$ là tâm của mặt cầu. Bán kính: Ta có: $\Delta SMI \backsim \Delta SOA \Rightarrow \frac{SM}{SO} = \frac{SI}{SA} \Rightarrow$ Bán kính: $R = IS = \frac{SM.SA}{SO} = \frac{SA^2}{2SO} = IA = IB = IC = ...$	

5.1.3.5. Hình chóp có cạnh bên vuông góc với mặt phẳng đáy

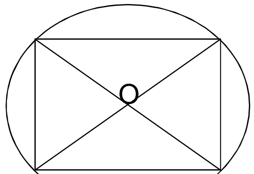
Nội dung	Hình vẽ
Cho hình chóp $S.ABC...$ có cạnh bên $SA \perp (ABC...)$ và đáy $ABC...$ nội tiếp được trong đường tròn tâm O. Tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC...$ được xác định như sau: • Từ tâm O ngoại tiếp của đường trònđáy, ta vẽ đường thẳng d vuông góc với $mp(ABC...)$ tại O. • Trong $mp(d, SA)$, ta dựng đường trung trực Δ của cạnh SA, cắt SA tại M, cắt d tại $I \Rightarrow I$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp và bán kính $R = IA = IB = IC = IS = ...$ • Tìm bán kính Ta có: $MIOB$ là hình chữ nhật. Xét ΔMAI vuông tại M có: $R = AI = \sqrt{MI^2 + MA^2} = \sqrt{AO^2 + \left(\frac{SA}{2}\right)^2}$.	

5.1.3.6. Hình chóp khác

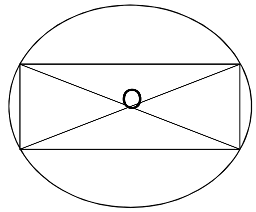
- Dựng trục Δ của đáy.
- Dựng mặt phẳng trung trực (α) của một cạnh bên bất kì.
- $(\alpha) \cap \Delta = I \Rightarrow I$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.
- Bán kính: khoảng cách từ I đến các đỉnh của hình chóp.

5.1.3.7. Đường tròn ngoại tiếp một số đa giác thường gặp

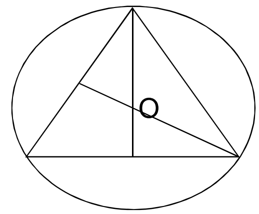
Khi xác định tâm mặt cầu, ta cần xác định trục của mặt phẳng đáy, đó chính là đường thẳng vuông góc với mặt phẳng đáy tại tâm O của đường tròn ngoại tiếp đáy. Do đó, việc xác định tâm ngoại O là yếu tố rất quan trọng của bài toán.



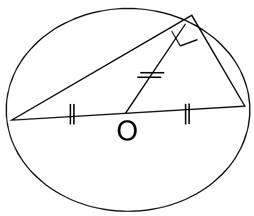
Hình vuông: O là giao điểm 2 đường chéo.



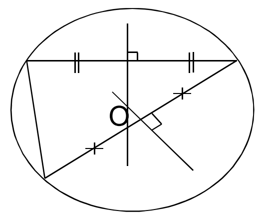
Hình chữ nhật: O là giao điểm của hai đường chéo.



Δ đều: O là giao điểm của 2 đường trung tuyến (trọng tâm).

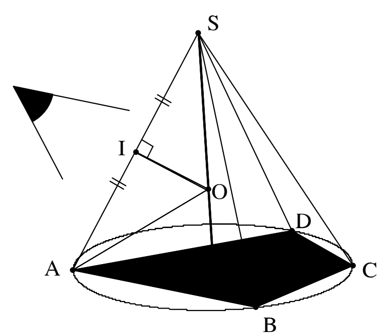


Δ vuông: O là trung điểm của cạnh huyền.



Δ thường: O là giao điểm của hai đường trung trực của hai cạnh Δ.

5.2. Kỹ thuật xác định mặt cầu ngoại tiếp hình chóp

Nội dung	Hình vẽ
Cho hình chóp $S.A_1A_2...A_n$ (thoả mãn điều kiện tồn tại mặt cầu ngoại tiếp). Thông thường, để xác định mặt cầu ngoại tiếp hình chóp ta thực hiện theo hai bước: • Bước 1: Xác định tâm của đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy. Dựng Δ: trục đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy. • Bước 2: Lập mặt phẳng trung trực (α) của một cạnh bên. Lúc đó • Tâm O của mặt cầu: $\Delta \cap mp(\alpha) = \{O\}$ • Bán kính: $R = SA\left(= SO\right)$. Tuỳ vào từng trường hợp.	

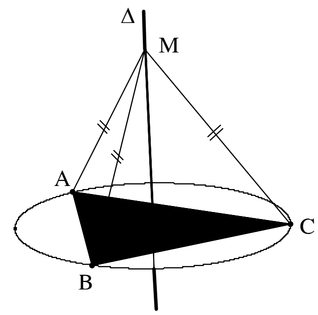
5.3. Kỹ năng xác định trục đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy

5.3.1. Trục đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy

Nội dung	Hình vẽ

Định nghĩa

Trục đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy là đường thẳng đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp đáy và vuông góc với mặt phẳng đáy.



Tính chất

$\forall M \in \Delta: \; MA = MB = MC$

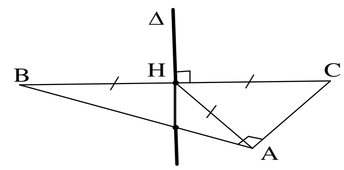
Suy ra: $MA = MB = MC \;\Leftrightarrow\; M \in \Delta$

Các bước xác định trục

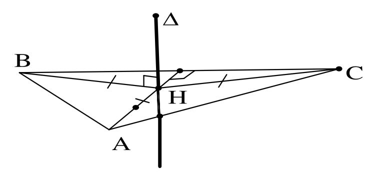
- <u>Bước 1:</u>
  Xác định tâm H của đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy.
- <u>Bước 2:</u>
  Qua H dựng Δ vuông góc với mặt phẳng đáy.

Một số trường hợp đặc biệt

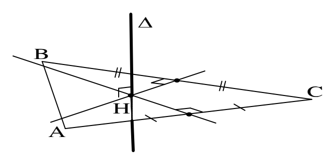
- Đáy là tam giác vuông



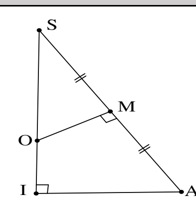
- Đáy là tam giác đều



- Đáy là tam giác thường



5.3.2. Kỹ năng tam giác đồng dạng

Nội dung	Hình vẽ
ΔSMO đồng dạng với $\Delta SIA \Rightarrow \dfrac{SO}{SA} = \dfrac{SM}{SI}$.	

5.3.3. Nhận xét quan trọng

$$\exists M, S: \begin{cases} MA = MB = MC \\ SA = SB = SC \end{cases} \Rightarrow SM \text{ là trục đường tròn ngoại tiếp } \Delta ABC.$$

5.4. Kỹ thuật sử dụng hai trục xác định tâm mặt cầu ngoại tiếp đa diện

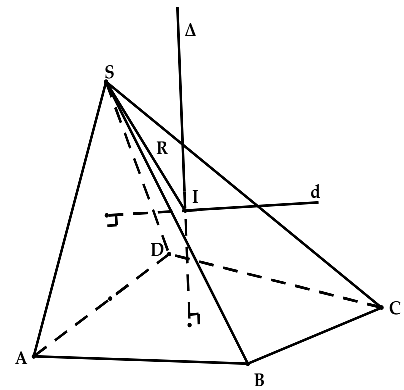
Nội dung	Hình vẽ

Cho hình chóp $S.A_1A_2...A_n$ (thõa mãn điều kiện tồn tại mặt cầu ngoại tiếp). **Thông thường, để xác định mặt cầu ngoại tiếp hình chóp ta thực hiện theo hai bước:**

- Bước 1:
  Xác định tâm của đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy. Dựng Δ: trục đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy.
- Bước 2:
  Xác định trục d của đường tròn ngoại tiếp một mặt bên (dễ xác định) của khối chóp.

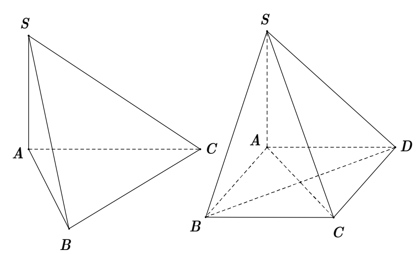
Lúc đó:

- Tâm I của mặt cầu: $\Delta \cap d = \{I\}$
- Bk: $R = IA(= IS)$. Tuỳ vào từng trường hợp.

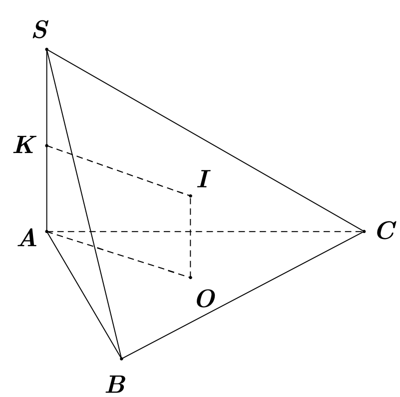


5.5. Tổng kết các dạng tìm tâm và bán kính mặt cầu

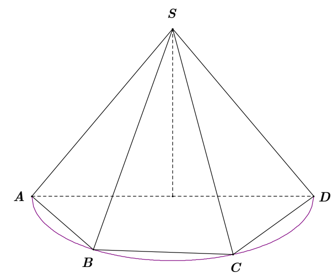
5.5.1. Dạng 1

Nội dung	Hình vẽ
Cạnh bên SA vuông góc đáy và $\widehat{ABC} = 90^0$ khi đó $\boxed{R = \frac{SC}{2}}$ và tâm là trung điểm SC.	

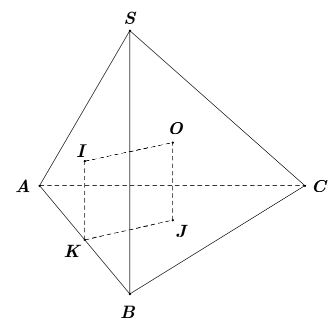
5.5.2. Dạng 2

Nội dung	Hình vẽ
Cạnh bên SA vuông góc đáy và bất kể đáy là hình gì, chỉ cần tìm được bán kính đường tròn ngoại tiếp của đáy là R_D, khi đó : $\boxed{R^2 = R_D^2 + \frac{SA^2}{4}}$ • $\boxed{R_D = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}}$ (p: nửa chu vi). • Nếu ΔABC vuông tại A thì: $\boxed{R_D = \frac{1}{4}\left(AB^2 + AC^2 + AS^2\right)}$. • Đáy là hình vuông cạnh a thì $R_D = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ • nếu đáy là tam giác đều cạnh a thì $R_D = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.	

5.5.3. Dạng 3

Nội dung	Hình vẽ
Chóp có các cạnh bên bằng nhau: $SA = SB = SC = SD$: $\boxed{R = \frac{SA^2}{2SO}}$. • $ABCD$ là hình vuông, hình chữ nhật, khi đó O là giao hai đường chéo. • ΔABC vuông, khi đó O là trung điểm cạnh huyền. • ΔABC đều, khi đó O là trọng tâm, trực tâm.	

5.5.4. Dạng 4

Nội dung	Hình vẽ
Hai mặt phẳng (SAB) và (ABC) vuông góc với nhau và có giao tuyến AB. Khi đó ta gọi R_1, R_2 lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp các tam giác SAB và ABC. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp: $\boxed{R^2 = R_1^2 + R_2^2 - \frac{AB^2}{4}}$	

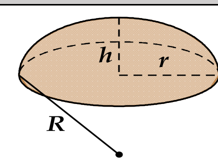
5.5.5. Dạng 5

Chóp $S.ABCD$ có đường cao SH, tâm đường tròn ngoại tiếp đáy là O. Khi đó ta giải phương trình: $(SH - x)^2 + OH^2 = x^2 + R_D^2$. Với giá trị x tìm được ta có: $\boxed{R^2 = x^2 + R_D^2}$.

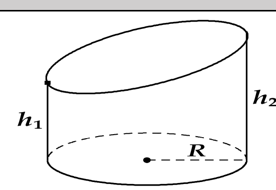
5.5.6. Dạng 6: Bán kính mặt cầu nội tiếp: $\boxed{r = \frac{3V}{S_{tp}}}$.

6. TỔNG HỢP CÁC CÔNG THỨC ĐẶC BIỆT VỀ KHỐI TRÒN XOAY

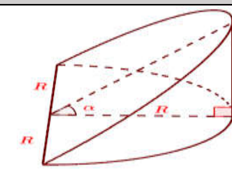
6.1. Chỏm cầu

Nội dung	Hình vẽ
$\boxed{\begin{cases} S_{xq} = 2\pi Rh = \pi\left(r^2 + h^2\right) \\ V = \pi h^2\left(R - \frac{h}{3}\right) = \frac{\pi h}{6}\left(h^2 + 3r^2\right) \end{cases}}$	

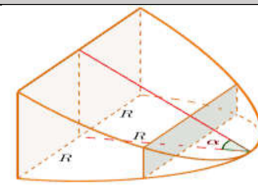
6.2. Hình trụ cụt

Nội dung	Hình vẽ
$\boxed{\begin{cases} S_{xq} = \pi R\left(h_1 + h_2\right) \\ V = \pi R^2\left(\frac{h_1 + h_2}{2}\right) \end{cases}}$	

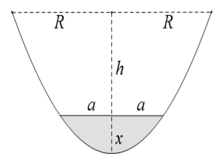
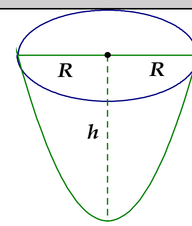
6.3. Hình nêm loại 1

Nội dung	Hình vẽ
$\boxed{V = \frac{2}{3}R^3\tan\alpha}$	

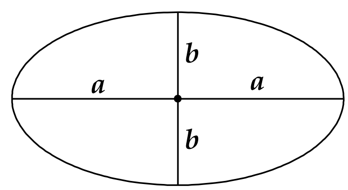
6.4. Hình nêm loại 2

Nội dung	Hình vẽ
$\boxed{V = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right)R^3\tan\alpha}$	

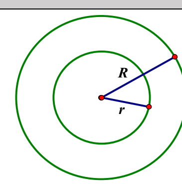
6.5. Parabol bậc hai-Paraboloid tròn xoay

Nội dung	Hình vẽ
$\boxed{\begin{cases} S_{parabol} = \frac{4}{3}Rh; \ \frac{S'}{S} = \left(\sqrt{\frac{x}{h}}\right)^3 = \left(\frac{a}{R}\right)^3 \\ V = \frac{1}{2}\pi R^2 h = \frac{1}{2}V_{trụ} \end{cases}}$	 

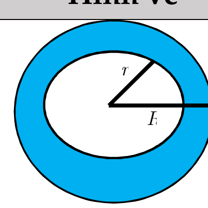
6.6. Diện tích Elip và Thể tích khối tròn xoay sinh bởi Elip

Nội dung	Hình vẽ
$\boxed{\begin{cases} S_{elip} = \pi ab \\ V_{xoay\ quanh\ 2a} = \frac{4}{3}\pi ab^2 \\ V_{xoay\ quanh\ 2b} = \frac{4}{3}\pi a^2 b \end{cases}}$	

6.7. Diện tích hình vành khăn

Nội dung	Hình vẽ
$S = \pi\left(R^2 - r^2\right)$	

6.8. Thể tích hình xuyến (phao)

Nội dung	Hình vẽ
$V = 2\pi^2\left(\frac{R+r}{2}\right)\left(\frac{R-r}{2}\right)^2$	

PHẦN 7. HỆ TRỤC TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN OXYZ

1. HỆ TỌA ĐỘ KHÔNG GIAN

1.1. Các khái niệm và tính chất

1.1.1. Khái niệm mở đầu

Trong không gian cho ba trục Ox, Oy, Oz phân biệt và vuông góc từng đôi một. Gốc tọa độ O, truc hoành Ox, trục tung Oy, trục cao Oz, các mặt tọa độ $(Oxy), (Oyz), (Ozx)$.

1.1.2. Khái niệm về hệ trục tọa độ

Khi không gian có hệ tọa độ thì gọi là không gian tọa độ $Oxyz$ hay không gian $Oxyz$.

$$\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1$$

Chú ý: $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$

$$\vec{i}\vec{j} = \vec{i}\vec{k} = \vec{j}\vec{k} = 0$$

1.1.3. Tọa độ véc tơ

$\vec{u} = (x; y; z) \Leftrightarrow \vec{u}(x; y; z) \Leftrightarrow \vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

1.1.4. Tọa độ điểm

$M(x; y; z) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

1.1.5. Các công thức tọa độ cần nhớ

Cho $\vec{u} = (a; b; c)$, $\vec{v} = (a'; b'; c')$

- $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \\ c = c' \end{cases}$
- $\vec{u} \mp \vec{v} = (a \pm a'; b \pm b'; c \pm c')$
- $k\vec{u} = (ka; kb; kc)$
- $\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos(\vec{u},\vec{v}) = aa' + bb' + cc'$
- $\cos(\vec{u},\vec{v}) = \dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}|.|\vec{v}|} = \dfrac{aa' + bb' + cc'}{|\vec{u}|.|\vec{v}|}$
- $|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u}^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$
- $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0$
- $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$
- $AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

1.1.6. Chú ý

Góc của 2 véc tơ $(\vec{u}, \vec{v})$ là góc hình học (nhỏ) giữa 2 tia mang véc tơ có, giá trị trong $[0; \pi]$ là: $\sin(\vec{u}, \vec{v}) = \sqrt{1 - \cos^2(\vec{u}, \vec{v})} \geq 0$

1.1.7. Chia tỉ lệ đoạn thẳng

M chia AB theo tỉ số k nghĩa là $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$

Công thức tọa độ của M là : $\begin{cases} x_M = \dfrac{x_A - kx_B}{1-k} \\ y_M = \dfrac{y_A - ky_B}{1-k} \\ z_M = \dfrac{z_A - kz_B}{1-k} \end{cases}$

1.1.8. Công thức trung điểm

Nếu M là trung điểm AB thì $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} \\ z_M = \dfrac{z_A + z_B}{2} \end{cases}$

1.1.9. Công thức trọng tâm tam giác

Nếu G là trọng tâm của ΔABC thì $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} \\ z_G = \dfrac{z_A + z_B + z_C}{3} \end{cases}$

1.1.10. Công thức trọng tâm tứ diện

Nếu G là trọng tâm của tứ diện $ABCD$ thì

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C + x_D}{4} \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C + y_D}{4} \\ z_G = \dfrac{z_A + z_B + z_C + z_D}{4} \end{cases}$$

1.1.11. Tích có hướng 2 véc tơ

Cho 2 véc tơ $\vec{u} = (a;b;c)$ và $\vec{v} = (a';b';c')$ ta định nghĩa tích có hướng của 2 véc tơ đó là một véc tơ, kí hiệu $\left[\vec{u},\vec{v}\right]$ hay $\vec{u} \wedge \vec{v}$ có toạ độ:

$$\left[\vec{u},\vec{v}\right] = \left(\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} c & a \\ c' & a' \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \right) = \left(bc' - b'c; ca' - ac'; ab' - ba' \right)$$

1.1.12. Tính chất tích có hướng 2 véc tơ

- $[\vec{u},\vec{v}]$ vuông góc với $\vec{u}$ và $\vec{v}$
- $\left|[\vec{u},\vec{v}]\right| = |\vec{u}|.|\vec{v}|\sin\left(\vec{u},\vec{v}\right)$
- $[\vec{u},\vec{v}] = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{u},\vec{v}$ cùng phương

1.1.13. Ứng dụng tích có hướng 2 véc tơ

- Diện tích hình bình hành $ABCD$: $S = \left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right]\right|$
- Diện tích ΔABC : $S = \frac{1}{2}.\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\right|$
- Ba véc tơ $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ đồng phẳng: $\left[\vec{u}, \vec{v}\right].\vec{w} = 0$
- Thể tích khối hộp có đáy hình bình hành $ABCD$ và cạnh bên AA':

$$V = \left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right].\overrightarrow{AA'}\right|$$

- Thể tích khối tứ diện $S.ABC$: $V = \frac{1}{6}.\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{SA}\right|$

1.2. Phương pháp giải 1 số bài toán thường gặp

1.2.1. Các phép toán về toạ độ của vectơ và của điểm

Phương pháp giải

- Sử dụng các công thức về toạ độ của vectơ và của điểm trong không gian.
- Sử dụng các phép toán về vectơ trong không gian.

1.2.2. Xác định điểm trong không gian. Chứng minh tính chất hình học. Diện tích – Thể tích

Phương pháp giải

- Sử dụng các công thức về toạ độ của vectơ và của điểm trong không gian.
- Sử dụng các phép toán về vectơ trong không gian.
- Công thức xác định toạ độ của các điểm đặc biệt.
- Tính chất hình học của các điểm đặc biệt:
  - A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ cùng phương $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = \vec{0}$
  - $ABCD$ là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$
  - Cho ΔABC có các chân E, F của các đường phân giác trong và ngoài của góc A của ΔABC trên BC.

    Ta có: $\overrightarrow{EB} = -\frac{AB}{AC}.\overrightarrow{EC}$, $\overrightarrow{FB} = \frac{AB}{AC}.\overrightarrow{FC}$
  - A, B, C, D không đồng phẳng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ không đồng phẳng

$$\Leftrightarrow \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD} \neq 0$$

2. MẶT PHẲNG

2.1. Các khái niệm và tính chất

2.1.1. Khái niệm về véc tơ pháp tuyến

$\vec{n}$ khác $\vec{0}$ và có giá vuông góc $mp(P)$ được gọi là véc tơ pháp tuyến của (P).

2.1.2. Tính chất của véc tơ pháp tuyến

Nếu $\vec{n}$ là véc tơ pháp tuyến của (P) thì $k\vec{n}$, $(k \neq 0)$ cũng là véc tơ pháp tuyến của (P).

2.1.3. Phương trình tổng quát của $mp(P)$

Phương trình tổng quát của $mp(P)$ qua $M(x_0;y_0;z_0)$ và có véc tơ pháp tuyến $\vec{n}=(A;B;C)$ là $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$

2.1.4. Khai triển của phương trình tổng quát

Dạng khai triển của phương trình tổng quát là: $Ax+By+Cz+D=0$ (trong đó A,B,C không đồng thời bằng 0)

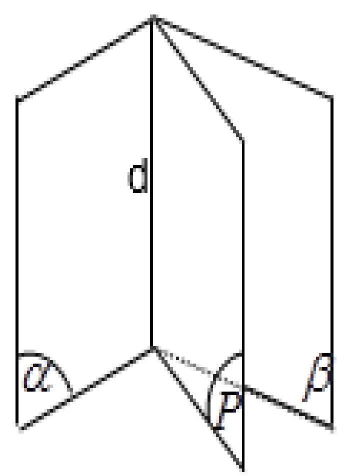
2.1.5. Những trường hợp riêng của phương trình tổng quát

- (P) qua gốc tọa độ $\Leftrightarrow D=0$
- (P) song song hoặc trùng $(Oxy)\Leftrightarrow A=B=0$
- (P) song song hoặc trùng $(Oyz)\Leftrightarrow B=C=0$
- (P) song song hoặc trùng $(Ozx)\Leftrightarrow A=C=0$
- (P) song song hoặc chứa $Ox\Leftrightarrow A=0$
- (P) song song hoặc chứa $Oy\Leftrightarrow B=0$
- (P) song song hoặc chứa $Oz\Leftrightarrow C=0$
- (P) cắt Ox tại $A(a;0;0)$, cắt Oy tại $B(0;b;0)$ và cắt Oz tại $C(0;0;c)\Leftrightarrow(P)$ có phương trình $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1\left(a,b,c\neq 0\right)$

2.1.6. Khoảng cách từ 1 điểm đến mặt phẳng

Cho $M\left(x_0;y_0;z_0\right)$ và $(P): Ax+By+Cz+D=0$; $d(M,(P))=\dfrac{\left|Ax_0+By_0+Cz_0+D\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

2.1.7. Chùm mặt phẳng

Nội dung	Hình vẽ
Tập hợp tất cả các mặt phẳng qua giao tuyến của hai mặt phẳng (α) và (β) được gọi là một chùm mặt phẳng Gọi (d) là giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha): A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ và $(\beta): A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$. Khi đó nếu (P) là mặt phẳng chứa (d) thì mặt phẳng (P) có dạng : $m(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+n(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$ Với $m^2+n^2\neq 0$	

2.2. Viết phương trình mặt phẳng

Để lập phương trình mặt phẳng (α) ta cần xác định một điểm thuộc (α) và một VTPT của nó.

2.2.1. Dạng 1

(α) đi qua điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ có VTPT $\vec{n}=(A;B;C)$ thì:

$$(\alpha):\ A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

2.2.2. Dạng 2

(α) đi qua điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ có cặp VTCP $\vec{a},\vec{b}$ thì $\vec{n}=[\vec{a},\vec{b}]$ là một VTPT của (α)

2.2.3. Dạng 3

(α) đi qua điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ và song song với $(\beta): Ax+By+Cz=0$ thì $(\alpha):\ A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$

2.2.4. Dạng 4

(α) đi qua 3 điểm không thẳng hàng A,B,C. Khi đó ta có thể xác định một VTPT của (α) là: $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]$

2.2.5. Dạng 5

(α) đi qua một điểm M và một đường thẳng (d) không chứa M:

- Trên (d) lấy điểm A và VTCP $\vec{u}$.
- Một VTPT của (α) là: $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AM},\vec{u}\right]$

2.2.6. Dạng 6

(α) đi qua một điểm M, vuông góc với đường thẳng (d) thì VTCP $\vec{u}$ của đường thẳng (d) là một VTPT của (α).

2.2.7. Dạng 7

(α) chứa đường thẳng cắt nhau $d_1,\ d_2$:

- Xác định các VTCP $\vec{a},\vec{b}$ của các đường thẳng $d_1,\ d_2$.
- Một VTPT của (α) là: $\vec{n}=[\vec{a},\vec{b}]$.
- Lấy một điểm M thuộc d_1 hoặc $d_2 \Rightarrow M\in(\alpha)$.

2.2.8. Dạng 8

(α) chứa đường thẳng d_1 và song song với đường thẳng d_2 (d_1,d_2 chéo nhau):

- Xác định các VTCP $\vec{a},\vec{b}$ của các đường thẳng $d_1,\ d_2$.
- Một VTPT của (α) là: $\vec{n}=[\vec{a},\vec{b}]$.
- Lấy một điểm M thuộc $d_1 \Rightarrow M\in(\alpha)$.

2.2.9. Dạng 9

(α) đi qua điểm M và song song với hai đường thẳng chéo nhau d_1,d_2:

- Xác định các VTCP $\vec{a},\vec{b}$ của các đường thẳng $d_1,\ d_2$.

- Một VTPT của (α) là: $\vec{n} = [\vec{a}, \vec{b}]$.

2.2.10. Dạng 10

(α) chứa một đường thẳng d và vuông góc với một mặt phẳng (β):

- Xác định VTCP $\vec{u}$ của d và VTPT $\vec{n}_\beta$ của (β).
- Một VTPT của (α) là: $\vec{n} = [\vec{u}, \vec{n}_\beta]$.
- Lấy một điểm M thuộc $d \Rightarrow M \in (\alpha)$.

2.2.11. Dạng 11

(α) đi qua điểm M và vuông góc với hai mặt phẳng cắt nhau (β), (γ):

- Xác định các VTPT $\vec{n}_\beta, \vec{n}_\gamma$ của (β) và (γ).
- Một VTPT của (α) là: $\vec{n} = [\vec{u}_\beta, \vec{n}_\gamma]$.

2.2.12. Dạng 12

(α) chứa đường thẳng d cho trước và cách điểm M cho trước một khoảng k cho trước:

- Giả sử (α) có phương trình: $Ax + By + Cz + D = 0$ $\left(A^2 + B^2 + C^2 \neq 0\right)$.
- Lấy 2 điểm $A,\ B \in (d) \Rightarrow A,\ B \in (\alpha)$ (ta được hai phương trình $(1),(2)$)
- Từ điều kiện khoảng cách $d(M,(\alpha)) = k$, ta được phương trình (3).
- Giải hệ phương trình $(1),(2),(3)$ (bằng cách cho giá trị một ẩn, tìm các ẩn còn lại).

2.2.13. Dạng 13

(α) là tiếp xúc với mặt cầu $(\mathbf{S})$ tại điểm H:

- Giả sử mặt cầu $(\mathbf{S})$ có tâm I và bán kính R.
- Một VTPT của (α) là: $\vec{n} = \overrightarrow{IH}$

2.3. Vị trí tương đối của hai mặt phẳng

Cho hai mặt phẳng $(P): Ax + By + Cz + D = 0$ và $(P'): A'x + B'y + C'z + D' = 0$.

Khi đó:

- (P) cắt (P') $\Leftrightarrow A : B : C \neq A' : B' : C'$.
- $(P)\ //\ (P')$ $\Leftrightarrow \dfrac{A}{A'} = \dfrac{B}{B'} = \dfrac{C}{C'} \neq \dfrac{D}{D'}$.
- $(P) \equiv (P')$ $\Leftrightarrow \dfrac{A}{A'} = \dfrac{B}{B'} = \dfrac{C}{C'} = \dfrac{D}{D'}$.
- $(P) \perp (P')$ $\Leftrightarrow \vec{n}_{(P)} \perp \vec{n}_{(P')} \Leftrightarrow \vec{n}_{(P)}.\vec{n}_{(P')} = 0 \Leftrightarrow AA' + BB' + CC' = 0$.

2.4. Khoảng cách và hình chiếu

2.4.1. Khoảng cách từ 1 điểm đến 1 mặt phẳng

Khoảng cách từ điểm $M_0\left(x_0;\ y_0;\ z_0\right)$ đến mặt phẳng $(\alpha):\ Ax+By+Cz+D=0$ là $d\left(M_0,(\alpha)\right)=\dfrac{\left|Ax_0+By_0+Cz_0+D\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

2.4.2. Khoảng cách giữa 2 mặt phẳng song song

Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song bằng khoảng cách từ một điểm bất kì trên mặt phẳng này đến mặt phẳng kia.

2.4.3. Hình chiếu của 1 điểm lên mặt phẳng

Điểm H là hình chiếu của điểm M trên $\left(P\right)\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{MH},\ \vec{n}\ cung\ phuong\\ H\in(P)\end{cases}$.

2.4.4. Điểm đối xứng của 1 điểm qua mặt phẳng

Điểm M' đối xứng với điểm M qua $\left(P\right)\Leftrightarrow\overrightarrow{MM'}=2\overrightarrow{MH}$

2.5. Góc giữa hai mặt phẳng

Cho hai mặt phẳng $\left(\alpha\right),\ \left(\beta\right)$ có phương trình: $\left(\alpha\right):A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$

$\left(\beta\right):A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$

Góc giữa $\left(\alpha\right),\ \left(\beta\right)$ bằng hoặc bù với góc giữa hai VTPT $\vec{n}_1,\vec{n}_2$.

$$\cos\left((\alpha),(\beta)\right)=\frac{\left|\vec{n}_1.\vec{n}_2\right|}{\left|\vec{n}_1\right|.\left|\vec{n}_2\right|}=\frac{\left|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2\right|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}.\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

Chú ý: $0^0\le\left(\widehat{(\alpha),(\beta)}\right)\le90^0$; $(\alpha)\perp(\beta)\Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$

2.6. Vị trí tương đối giữa mặt phẳng và mặt cầu. Phương trình mặt phẳng tiếp xúc mặt cầu

Cho mặt phẳng $\left(\alpha\right):Ax+By+Cz+D=0$ và mặt cầu $\left(S\right):(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ có tâm I

- $\left(\alpha\right)$ và $\left(S\right)$ không có điểm chung $\Leftrightarrow d(I,(\alpha))>R$
- $\left(\alpha\right)$ tiếp xúc với $\left(S\right)\Leftrightarrow d(I,(\alpha))=R$ với $\left(\alpha\right)$ là tiếp diện

  Để tìm toạ độ tiếp điểm ta có thể thực hiện như sau:
  - Viết phương trình đường thẳng d đi qua tâm I của $\left(S\right)$ và vuông góc với $\left(\alpha\right)$.
  - Tìm toạ độ giao điểm H của d và $\left(\alpha\right)$. H là tiếp điểm của $\left(S\right)$ với $\left(\alpha\right)$.
- $\left(\alpha\right)$ cắt $\left(S\right)$ theo một đường tròn $\Leftrightarrow d(I,(\alpha))<R$

Để xác định tâm H và bán kính r của đường tròn giao tuyến ta có thể thực hiện như sau:

- Viết phương trình đường thẳng d đi qua tâm I của $\left(S\right)$ và vuông góc với $\left(\alpha\right)$.
- Tìm toạ độ giao điểm H của d và $\left(\alpha\right)$. Với H là tâm của đường tròn giao tuyến của $\left(S\right)$ với $\left(\alpha\right)$.
- Bán kính r của đường tròn giao tuyến: $r=\sqrt{R^2-IH^2}$

3. ĐƯỜNG THẲNG

3.1. Phương trình của đường thẳng

3.1.1. Vectơ chỉ phương của đường thẳng

3.1.1.1. Định nghĩa

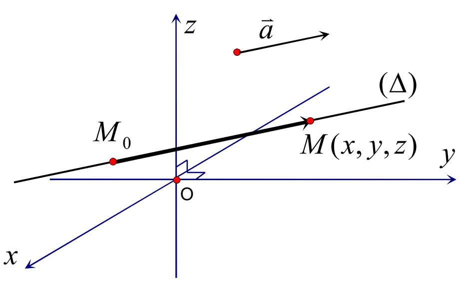
Cho đường thẳng d. Nếu vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$ và có giá song song hoặc trùng với đường phẳng d thì $\vec{a}$ được gọi là vectơ chỉ phương của đường phẳng d. Kí hiệu: $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$

3.1.1.2. Chú ý

- $\vec{a}$ là VTCP của d thì $k.\vec{a}$ $(k \neq 0)$ cũng là VTCP của d
- Nếu d đi qua hai điểm $A,\ B$ thì $\overrightarrow{AB}$ là một VTCP của d
- Trục Ox có vectơ chỉ phương $\vec{a} = \vec{i} = (1;0;0)$
- Trục Oy có vectơ chỉ phương $\vec{a} = \vec{j} = (0;1;0)$
- Trục Oz có vectơ chỉ phương $\vec{a} = \vec{k} = (0;0;1)$

3.1.2. Phương trình tham số của đường thẳng

Phương trình tham số của đường thẳng (Δ) đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và nhận $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ làm VTCP là :



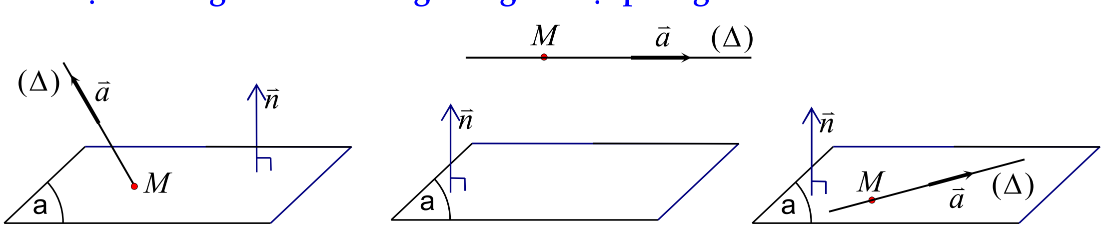
$$(\Delta): \begin{cases} x = x_0 + ta_1 \\ y = y_0 + ta_2 \\ z = z_0 + ta_3 \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

3.1.3. Phương trình chính tắc của đường thẳng

Phương trình chính tắc của đường thẳng (Δ) đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và nhận $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ làm VTCP là $(\Delta): \dfrac{x - x_0}{a_1} = \dfrac{y - y_0}{a_2} = \dfrac{z - z_0}{a_3} \left(a_1, a_2, a_3 \neq 0\right)$

3.2. Vị trí tương đối

3.2.1. Vị trí tương đối của đường thẳng và mặt phẳng



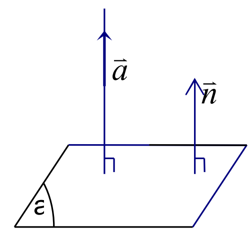
3.2.1.1. Phương pháp hình học

Định lý

Trong không gian $(Oxyz)$ cho đường thẳng $(\Delta):\begin{cases} x = x_0 + a_1t\ (1) \\ y = y_0 + a_2t\ (2) \\ z = z_0 + a_3t\ (3) \end{cases}$ có VTCP $\vec{a} = (a_1;a_2;a_3)$

và qua $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và mặt phẳng $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$ có VTPT $\vec{n} = (A;B;C)$

Khi đó :



- $(\Delta)\cap(\alpha) \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{n} \neq 0 \Leftrightarrow Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 \neq 0$
- $(\Delta)//(\alpha) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a}.\vec{n} = 0 \\ M_0 \notin (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 = 0 \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 \neq 0 \end{cases}$
- $(\Delta)\subset(\alpha) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a}.\vec{n} = 0 \\ M_0 \in (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 = 0 \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 = 0 \end{cases}$

Đặc biệt

$(\Delta) \perp (\alpha) \Leftrightarrow \vec{a}$ và $\vec{n}$ cùng phương $\Leftrightarrow a_1 : a_2 : a_3 = A : B : C$

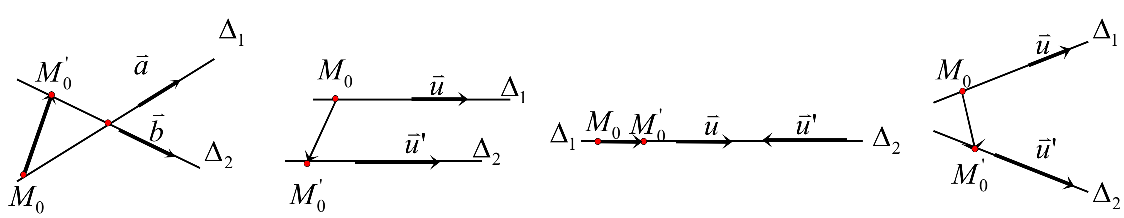
3.2.1.1. Phương pháp đại số

Muốn tìm giao điểm M của (Δ) và (α) ta giải hệ phương trình: $\begin{cases} pt(\Delta) \\ pt(\alpha) \end{cases}$ tìm x, y, z. Suy ra: $M(x, y, z)$.

Thế $(1),(2),(3)$ vào phương trình $mp(P)$ và rút gọn dưa về dạng: $at + b = 0\ (*)$

- d cắt $mp(P)$ tại một điểm $\Leftrightarrow pt(*)$ có một nghiệm t.
- d song song với $(P) \Leftrightarrow pt(*)$ vô nghiệm.
- d nằm trong $(P) \Leftrightarrow Pt\ (*)$ có vô số nghiệm t.
- d vuông góc $(P) \Leftrightarrow \vec{a}$ và $\vec{n}$ cùng phương

3.2.2. Vị trí tương đối của hai đường thẳng



3.2.2.1. Phương pháp hình học

Cho hai đường thẳng: Δ_1 đi qua M và có một vectơ chỉ phương $\vec{u}_1$.

Δ_2 đi qua N và có một vectơ chỉ phương $\vec{u}_2$.

- $\Delta_1 \equiv \Delta_2 \Leftrightarrow \left[\vec{u}_1, \vec{u}_2\right] = \left[\vec{u}_1, \overrightarrow{MN}\right] = \vec{0}$.
- $\Delta_1 // \Delta_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\vec{u}_1, \vec{u}_2\right] = \vec{0} \\ \left[\vec{u}_1, \overrightarrow{MN}\right] \neq \vec{0} \end{cases}$.

- Δ_1 cắt Δ_2 $\Leftrightarrow \begin{cases} [\vec{u}_1, \vec{u}_2] \neq \vec{0} \\ [\vec{u}_1, \vec{u}_2].\overrightarrow{MN} = 0 \end{cases}$.
- Δ_1 và Δ_2 chéo nhau $\Leftrightarrow [\vec{u}_1, \vec{u}_2].\overrightarrow{MN} \neq 0$.

3.2.2.2. Phương pháp đại số

Muốn tìm giao điểm M của (Δ_1) va (Δ_2) ta giải hệ phương trình : $\begin{cases} pt(\Delta_1) \\ pt(\Delta_2) \end{cases}$ tìm x, y, z. Suy ra: $M(x, y, z)$

3.2.3. Vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt cầu

Cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = x_0 + a_1 t \ (1) \\ y = y_0 + a_2 t \ (2) \\ z = z_0 + a_3 t \ (3) \end{cases}$ và mặt cầu $(S): (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ có tâm $I(a;b;c)$, bán kính R.

3.2.3.1. Phương pháp hình học

- <u>Bước 1:</u>

  Tính khoảng cách từ tâm I của mặt cầu (S) đến đường thẳng d là

  $$h = d(I, d) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{IM_0}.\vec{a}\right]\right|}{\left|\vec{a}\right|}$$

- <u>Bước 2:</u>

  So sánh $d(I,d)$ với bán kính R của mặt cầu:

  - Nếu $d(I,d) > R$ thì d không cắt (S)
  - Nếu $d(I,d) = R$ thì d tiếp xúc (S)
  - Nếu $d(I,d) < R$ thì d cắt (S) tại hai điểm phân biệt $M,\ N$ và MN vuông góc với đường kính (bán kính) mặt cầu

3.2.2.2. Phương pháp đại số

Thế (1), (2), (3) vào phương trình (S) và rút gọn đưa về phương trình bậc hai theo t $(*)$

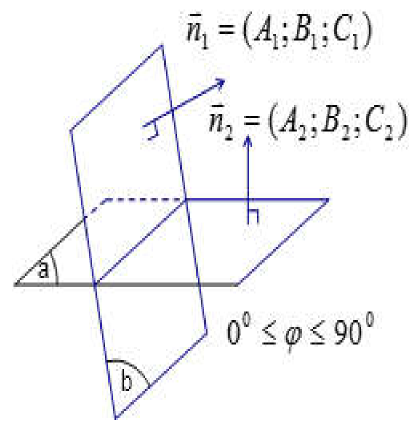
- Nếu phương trình $(*)$ vô nghiệm thì d không cắt (S)
- Nếu phương trình $(*)$ có một nghiệm thì d tiếp xúc (S)
- Nếu phương trình $(*)$ có hai nghiệm thì d cắt (S) tại hai điểm phân biệt $M,\ N$

Chú ý:

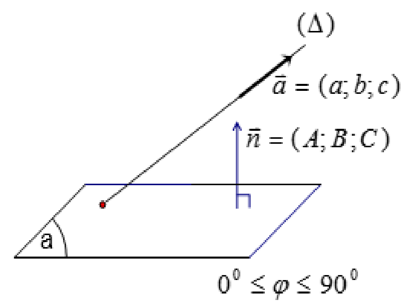
Để tìm tọa độ $M,\ N$ ta thay giá trị t vào phương trình đường thẳng d

3.3. Góc trong không gian

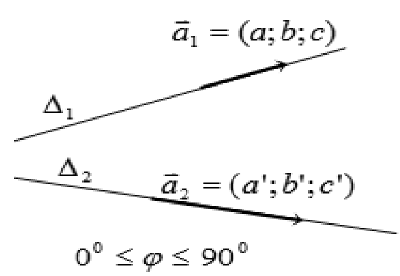
3.3.1. Góc giữa hai mặt phẳng

Nội dung	Hình vẽ
Định lý Trong không gian $(Oxyz)$ cho hai mặt phẳng α, β xác định bởi phương trình : $(\alpha): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ $(\beta): A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (α) & (β) ta có công thức: $\cos\varphi = \dfrac{\left\|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2\right\|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}.\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$	

3.3.2. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Nội dung	Hình vẽ
Cho đường thẳng $(\Delta): \dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b} = \dfrac{z - z_0}{c}$ và mặt phẳng $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$ Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (Δ) & (α) ta có công thức: $\sin\varphi = \dfrac{\left\|Aa + Bb + Cc\right\|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}.\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$	

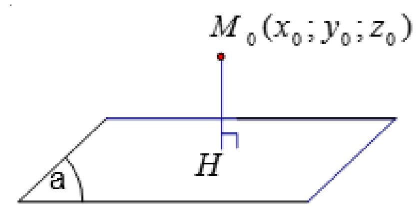
3.3.3. Góc giữa hai đường thẳng

Nội dung	Hình vẽ
Cho hai đường thẳng : $(\Delta_1): \dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b} = \dfrac{z - z_0}{c}$ $(\Delta_2): \dfrac{x - x_0'}{a'} = \dfrac{y - y_0'}{b'} = \dfrac{z - z_0'}{c'}$ Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (Δ_1) & (Δ_2) ta có công thức: $\cos\varphi = \dfrac{\left\|aa' + bb' + cc'\right\|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.\sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}}$	

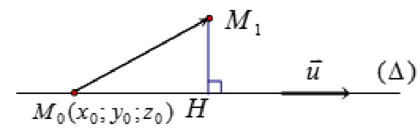
3.4. Khoảng cách

3.4.1. Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

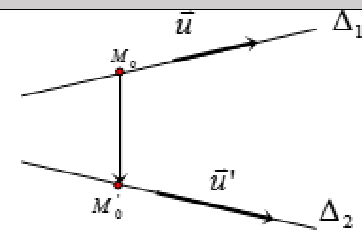
Nội dung	Hình vẽ

Cho mặt phẳng $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$ và điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ Khoảng cách từ điểm M_0 đến mặt phẳng (α) được tính bởi : $d(M_0;\Delta) = \dfrac{\lvert Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \rvert}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$	

3.4.2. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng

Nội dung	Hình vẽ
Cho đường thẳng (Δ) đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và có VTCP $\vec{u} = (a;b;c)$. Khi đó khoảng cách từ điểm M1 đến (Δ) được tính bởi công thức: $d(M_1,\Delta) = \dfrac{\left\lvert \left[\overrightarrow{M_0M_1};\vec{u}\right] \right\rvert}{\lvert \vec{u} \rvert}$	

3.4.3. Khoảng cách giữa đường thẳng chéo nhau

Nội dung	Hình vẽ
Định lý: Trong không gian $(Oxyz)$ cho hai đường thẳng chéo nhau : (Δ_1) co VTCP $\vec{u} = (a;b;c)$ va qua $M_0(x_0;y_0;z_0)$ (Δ_2) co VTCP $\vec{u'} = (a';b';c')$ va qua $M'_0(x'_0;y'_0;z'_0)$ Khi đó khoảng cách giữa (Δ_1) va (Δ_2) được tính bởi công thức $d(\Delta_1,\Delta_2) = \dfrac{\left\lvert \left[\vec{u},\vec{u'}\right].\overrightarrow{M_0M'_0} \right\rvert}{\left\lvert \left[\vec{u};\vec{u'}\right] \right\rvert}$	

3.5. Lập phương trình đường thẳng

Để lập phương trình đường thẳng d ta cần xác định 1 điểm thuộc d và một VTCP của nó.

3.5.1. Dạng 1

d đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và có VTCP $\vec{a} = (a_1;a_2;a_3)$ là $(d): \begin{cases} x = x_o + a_1 t \\ y = y_o + a_2 t \\ z = z_o + a_3 t \end{cases} \quad (t \in R)$.

3.5.2. Dạng 2

d đi qua hai điểm $A,\ B$: Một VTCP của d là $\overrightarrow{AB}$.

3.5.3. Dạng 3

d đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và song song với đường thẳng Δ cho trước: Vì $d//\Delta$ nên VTCP của Δ cũng là VTCP của d.

3.5.4. Dạng 4

d đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và vuông góc với mặt phẳng (P) cho trước: Vì $d\perp(P)$ nên VTPT của (P) cũng là VTCP của d.

3.5.5. Dạng 5

d là giao tuyến của hai mặt phẳng $(P),(Q)$:

- Cách 1:
  Tìm một điểm và một VTCP.
  - Tìm toạ độ một điểm $A\in d$: bằng cách giải hệ phương trình $\begin{cases}(P)\\(Q)\end{cases}$ (với việc chọn giá trị cho một ẩn)
  - Tìm một VTCP của d: $\vec{a}=\left[\vec{n}_P,\vec{n}_Q\right]$
- Cách 2:
  Tìm hai điểm $A,\ B$ thuộc d, rồi viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm đó.

3.5.6. Dạng 6

d đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và vuông góc với hai đường thẳng d_1,d_2:

Vì $d\perp d_1,\ d\perp d_2$ nên một VTCP của d là: $\vec{a}=\left[\vec{a}_{d_1},\vec{a}_{d_2}\right]$

3.5.7. Dạng 7

d đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$, vuông góc và cắt đường thẳng Δ.

- Cách 1:
  Gọi H là hình chiếu vuông góc của M_0 trên đường thẳng Δ. Thì $\begin{cases}H\in\Delta\\ \overrightarrow{M_0H}\perp\vec{u}_\Delta\end{cases}$. Khi đó đường thẳng d là đường thẳng đi qua $M_0,\ H$.
- Cách 2:
  Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc với d; (Q) là mặt phẳng đi qua A và chứa d. Khi đó $d\ =(P)\cap(Q)$

3.5.8. Dạng 8

d đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và cắt hai đường thẳng d_1,d_2:

- Cách 1:
  Gọi $M_1\in d_1,\ M_2\in d_2$. Từ điều kiện $M,\ M_1,\ M_2$ thẳng hàng ta tìm được $M_1,\ M_2$. Từ đó suy ra phương trình đường thẳng d.
- Cách 2:
  Gọi $(P)=(M_0,d_1)$, $(Q)=(M_0,d_2)$. Khi đó $d=(P)\cap(Q)$. Do đó, một VTCP của d có thể chọn là $\vec{a}=\left[\vec{n}_P,\vec{n}_Q\right]$.

3.5.9. Dạng 9

d nằm trong mặt phẳng (P) và cắt cả hai đường thẳng d_1, d_2 :

Tìm các giao điểm $A = d_1 \cap (P)$, $B = d_2 \cap (P)$.

Khi đó d chính là đường thẳng AB.

3.5.10. Dạng 10

Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa Δ và d_1, mặt phẳng (Q) chứa Δ và d_2.

Khi đó $d = (P) \cap (Q)$.

3.5.11. Dạng 11

d là đường vuông góc chung của hai đường thẳng d_1, d_2 chéo nhau:

- Cách 1:

  Gọi $M_1 \in d_1$, $M_2 \in d_2$. Từ điều kiện $\begin{cases} MN \perp d_1 \\ MN \perp d_2 \end{cases}$, ta tìm được M, N. Khi đó, d là đường thẳng MN.
- Cách 2:
  - Vì $d \perp d_1$ và $d \perp d_2$ nên một VTCP của d có thể là: $\vec{a} = \left[\vec{a}_{d_1}, \vec{a}_{d_2}\right]$.
  - Lập phương trình mặt phẳng (P) chứa d và d_1, bằng cách:
    - ✓ Lấy một điểm A trên d_1.
    - ✓ Một VTPT của (P) có thể là: $\vec{n}_P = \left[\vec{a}, \vec{a}_{d_1}\right]$.
  - Tương tự lập phương trình mặt phẳng (Q) chứa d và d_2. Khi đó $d = (P) \cap (Q)$.

3.5.12. Dạng 12

d là hình chiếu của đường thẳng Δ lên mặt phẳng (P) thì ta Lập phương trình mặt phẳng (Q) chứa Δ và vuông góc với mặt phẳng (P) bằng cách:

- Lấy $M \in \Delta$.
- Vì (Q) chứa Δ và vuông góc với (P) nên $\vec{n}_Q = \left[\vec{a}_\Delta, \vec{n}_P\right]$.
- Khi đó $d = (P) \cap (Q)$.

3.5.13. Dạng 13

d đi qua điểm M, vuông góc với d_1 và cắt d_2 :

- Cách 1:

  Gọi N là giao điểm của d và d_2. Từ điều kiện $MN \perp d_1$, ta tìm được N. Khi đó, d là đường thẳng MN.
- Cách 2:
  - Viết phương trình mặt phẳng (P) qua M và vuông góc với d_1.
  - Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa M và d_2.

- Khi đó $d = (P) \cap (Q)$.

3.6. Vị trí tương đối

3.6.1. Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng

Để xét VTTĐ giữa hai đường thẳng, ta có thể sử dụng một trong các phương pháp sau:

- Phương pháp hình học:
  Dựa vào mối quan hệ giữa các VTCP và các điểm thuộc các đường thẳng.
- Phương pháp đại số:
  Dựa vào số nghiệm của hệ phương trình các đường thẳng.

3.6.2. Vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt phẳng

Để xét VTTĐ giữa đường thẳng và mặt phẳng, ta có thể sử dụng một trong các phương pháp sau:

- Phương pháp hình học:
  Dựa vào mối quan hệ giữa VTCP của đường thẳng và VTPT của mặt phẳng.
- Phương pháp đại số:
  Dựa vào số nghiệm của hệ phương trình đường thẳng và mặt phẳng.

3.6.3. Vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt cầu

Để xét VTTĐ giữa đường thẳng và mặt cầu ta có thể sử dụng các phương pháp sau:

- Phương pháp hình học:
  Dựa vào khoảng cách từ tâm mặt cầu đến đường thẳng và bán kính.
- Phương pháp đại số:
  Dựa vào số nghiệm của hệ phương trình đường thẳng và mặt cầu.

3.7. Khoảng cách

3.7.1. Khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng d

- Cách 1:
  Cho đường thẳng d đi qua M_0 và có VTCP $\vec{a}$ thì $d(M,d) = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{M_0M}, \vec{a}\right]\right|}{|\vec{a}|}$
- Cách 2:
  - Tìm hình chiếu vuông góc H của M trên đường thẳng d.
  - $d(M,d) = MH$.
- Cách 3:
  - Gọi $N(x;\ y;\ z) \in d$. Tính MN^2 theo t (t tham số trong phương trình đường thẳng d).
  - Tìm t để MN^2 nhỏ nhất.
  - Khi đó $N \equiv H$. Do đó $d(M,d) = MH$.

3.7.2. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

Cho hai đường thẳng chéo nhau d_1 và d_2. Biết d_1 đi qua điểm M_1 và có VTCP $\vec{a}_1$, d_2 đi qua điểm M_2 và có VTCP $\vec{a}_2$ thì $d(d_1,d_2)=\dfrac{\left|\left[\vec{a}_1,\vec{a}_2\right].\overrightarrow{M_1M_2}\right|}{\left|\left[\vec{a}_1,\vec{a}_2\right]\right|}$

Chú ý:

Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau d_1, d_2 bằng khoảng cách giữa d_1 với mặt phẳng (α) chứa d_2 và song song với d_1.

3.7.3. Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song

Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song bằng khoảng cách từ một điểm thuộc đường thẳng này đến đường thẳng kia.

3.7.4. Khoảng cách giữa một đường thẳng và một mặt phẳng song song

Khoảng cách giữa đường thẳng d với mặt phẳng (α) song song với nó bằng khoảng cách từ một điểm M bất kì trên d đến mặt phẳng (α).

3.8. Góc

3.8.1. Góc giữa hai đường thẳng

Cho hai đường thẳng d_1, d_2 lần lượt có các VTCP $\vec{a}_1,\vec{a}_2$.

Góc giữa d_1, d_2 bằng hoặc bù với góc giữa $\vec{a}_1,\vec{a}_2$ là: $\cos\left(\vec{a}_1,\vec{a}_2\right)=\dfrac{\left|\vec{a}_1.\vec{a}_2\right|}{\left|\vec{a}_1\right|.\left|\vec{a}_2\right|}$

3.8.2. Góc giữa một đường thẳng và một mặt phẳng

Cho đường thẳng d có VTCP $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ và mặt phẳng (α) có VTPT $\vec{n}=(A;B;C)$.

Góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (α) bằng góc giữa đường thẳng d với hình chiếu d' của nó trên (α) là: $\sin\left(\widehat{d,(\alpha)}\right)=\dfrac{\left|Aa_1+Ba_2+Ca_3\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{a_1^{\,2}+a_2^{\,2}+a_3^{\,2}}}$

4. MẶT CẦU

4.1. Phương trình mặt cầu

4.1.1. Phương trình chính tắc

Phương trình của mặt cầu (S) tâm $I(a;b;c)$, bán kính R là:

$$(S):(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2 \quad (1)$$

Phương trình (1) được gọi là phương trình chính tắc của mặt cầu

Đặc biệt: Khi $I\equiv O$ thì $(C):x^2+y^2+z^2=R^2$

4.1.2. Phương trình tổng quát

Phương trình : $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ với $a^2+b^2+c^2-d>0$ là phương trình của mặt cầu (S) có tâm $I(a;b;c)$, bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$.

4.2. Giao của mặt cầu và mặt phẳng

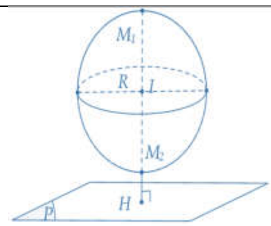
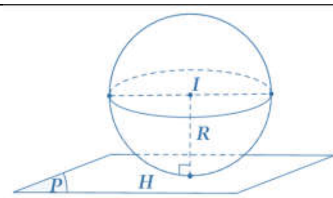
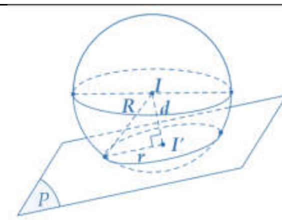
Cho mặt phẳng (α) và mặt cầu (S) có phương trình :

$$(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$$
$$(S): (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$$

Gọi $d(I;\alpha)$ là khoảng cách từ tâm mặt cầu (S) đến mặt phẳng α

Cho mặt cầu $S(I;R)$ và mặt phẳng (P).

Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên $(P) \Rightarrow d = IH = d(I,(P))$.

$d > R$	$d = R$	$d < R$
Mặt cầu và mặt phẳng không có điểm chung.	Mặt phẳng tiếp xúc mặt cầu: (P) là mặt phẳng **tiếp diện** của mặt cầu và H : **tiếp điểm.**	Mặt phẳng cắt mặt cầu theo thiết diện là đường tròn có tâm I' và bán kính $r = \sqrt{R^2 - IH^2}$
		

4.3. Một số bài toán liên quan

4.3.1. Dạng 1

(S) có tâm $I(a;b;c)$ và bán kính R thì $(S): (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$

4.3.2. Dạng 2

(S) có tâm $I(a;b;c)$ và đi qua điểm A thì bán kính $R = IA$.

4.3.3. Dạng 3

(S) nhận đoạn thẳng AB cho trước làm đường kính:

- Tâm I là trung điểm của đoạn thẳng

  $AB: \ x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2}; \ y_I = \dfrac{y_A + y_B}{2}; \ z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2}$

- Bán kính $R = IA = \dfrac{AB}{2}$.

4.3.4. Dạng 4

(S) đi qua bốn điểm A, B, C, D (mặt cầu ngoại tiếp tứ diện)

- Giả sử phương trình mặt cầu (S) có dạng:

  $x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0 \ (*)$.

- Thay lần lượt toạ độ của các điểm A, B, C, D vào $(*)$, ta được 4 phương trình.

- Giải hệ phương trình đó, ta tìm được $a,b,c,d \Rightarrow$ Phương trình mặt cầu (S).

4.3.5. Dạng 5

(S) đi qua ba điểm A,B,C và có tâm I nằm trên mặt phẳng (P) cho trước thì giải tương tự dạng 4

4.3.6. Dạng 6

(S) có tâm I và tiếp xúc với mặt cầu (T) cho trước:

- Xác định tâm I và bán kính R' của mặt cầu (T).
- Sử dụng điều kiện tiếp xúc của hai mặt cầu để tính bán kính R của mặt cầu (S). (Xét hai trường hợp tiếp xúc trong và ngoài)

Chú ý:

Với phương trình mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2+2ax+2by+2cz+d=0$

với $a^2+b^2+c^2-d>0$ thì (S) có tâm $I(-a;-b;-c)$ và bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$.

Đặc biệt:

Cho hai mặt cầu $S_1(I_1,\ R_1)$ và $S_2(I_2,\ R_2)$.

- $I_1I_2<|R_1-R_2| \Leftrightarrow (S_1),\ (S_2)$ trong nhau
- $I_1I_2>R_1+R_2 \Leftrightarrow (S_1),\ (S_2)$ ngoài nhau
- $I_1I_2=|R_1-R_2| \Leftrightarrow (S_1),\ (S_2)$ tiếp xúc trong
- $I_1I_2=R_1+R_2 \Leftrightarrow (S_1),\ (S_2)$ tiếp xúc ngoài
- $|R_1-R_2|<I_1I_2<R_1+R_2 \Leftrightarrow (S_1),\ (S_2)$ cắt nhau theo một đường tròn (đường tròn giao tuyến).

4.3.7. Dạng 7

Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(a;b;c)$, tiếp xúc với mặt phẳng (P) cho trước thì bán kính mặt cầu $R=d(I;(P))$

4.3.8. Dạng 8

Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(a;b;c)$, cắt mặt phẳng (P) cho trước theo giao tuyến là một đường tròn thoả điều kiện .

- Đường tròn cho trước (bán kính hoặc diện tích hoặc chu vi) thì từ công thức diện tích đường tròn $S=\pi r^2$ hoặc chu vi đường tròn $P=2\pi r$ ta tìm được bán kính đường tròn giao tuyến r.
- Tính $d=d(I,(P))$
- Tính bán kính mặt cầu $R=\sqrt{d^2+r^2}$
- Kết luận phương trình mặt cầu.

4.3.9. Dạng 9

Viết phương trình mặt cầu (S) tiếp xúc với một đường thẳng Δ cho trước và có tâm $I(a;b;c)$ cho trước thì đường thẳng Δ tiếp xúc với mặt cầu (S) ta có $R = d(I,\Delta)$.

4.3.10. Dạng 10

Viết phương trình mặt cầu (S) tiếp xúc với một đường thẳng Δ tại tiếp điểm $M(x_o, y_o, z_o)$ thuộc Δ và có tâm I thuộc đường thẳng d cho trước thì ta làm như sau:

- Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm M và vuông góc với đường thẳng Δ.
- Toạ độ tâm $I = (P) \cap \Delta$ là nghiệm của phương trình.
- Bán kính mặt cầu $R = IM = d(I,\Delta)$.
- Kết luận về phương trình mặt cầu (S)

4.3.10. Dạng 10

Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(a;b;c)$ và cắt đường thẳng Δ tại hai điểm A,B thoả mãn điều kiện:

- Độ dài AB là một hằng số.
- Tam giác IAB là tam giác vuông.
- Tam giác IAB là tam giác đều.

Thì ta xác định $d(I,\Delta) = IH$, vì ΔIAB cân tại I nên $HB = \dfrac{AB}{2}$ và bán kính mặt cầu R được tính như sau:

- $R = \sqrt{IH^2 + HB^2}$
- $R = \dfrac{IH}{\sin 45^o}$
- $R = \dfrac{IH}{\sin 60^o}$

4.3.11. Dạng 11

Tập hợp điểm là mặt cầu. Giả sử tìm tập hợp điểm M thoả tính chất (P) nào đó.

- Tìm hệ thức giữa các toạ độ $x,\ y,\ z$ của điểm M.

  $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ hoặc: $x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0$
- Tìm giới hạn quĩ tích (nếu có).

4.3.12. Dạng 12

Tìm tập hợp tâm mặt cầu

- Tìm toạ độ của tâm I, chẳng hạn: $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t) \end{cases} \ (*)$
- Khử t trong $(*)$ ta có phương trình tập hợp điểm.
- Tìm giới hạn quĩ tích (nếu có).

5. MỘT SỐ DẠNG GIẢI NHANH CỰC TRỊ KHÔNG GIAN

5.1. Dạng 1

Cho (P) và hai điểm A,B. Tìm $M \in (P)$ để $(MA + MB)_{\min}$?

Phương pháp

- Nếu A và B trái phía so với $(P) \Rightarrow M, A, B$ thẳng hàng $\Rightarrow M = AB \cap (P)$
- Nếu A và B cùng phía so với (P) thì tìm B' là đối xứng của B qua (P)

5.2. Dạng 2

Cho (P) và hai điểm A,B. Tìm $M \in (P)$ để $|MA - MB|_{\max}$?

Phương pháp

- Nếu A và B cùng phía so với $(P) \Rightarrow M, A, B$ thẳng hàng $\Rightarrow M = AB \cap (P)$
- Nếu A và B trái phía so với (P) thì tìm B' là đối xứng của B qua (P)

  $\Rightarrow |MA - MB'| = AB'$

5.3. Dạng 3

Cho điểm $M(x_M; y_M; z_M)$ không thuộc các trục và mặt phẳng tọa độ. Viết phương trình (P) qua M và cắt 3 tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C sao cho $V_{O.ABC}$ nhỏ nhất?

Phương pháp $\quad (P): \dfrac{x}{3x_M} + \dfrac{y}{3y_M} + \dfrac{z}{3z_M} = 1$

5.4. Dạng 4

Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d, sao cho khoảng cách từ điểm $M \notin d$ đến (P) là lớn nhất?

Phương pháp $\quad (P): \begin{cases} Qua\ A \in d \\ \vec{n}_{(P)} = \left[\left[\vec{u}_d, \overrightarrow{AM}\right], \vec{u}_d\right] \end{cases}$

5.5. Dạng 5

Viết phương trình mặt phẳng (P) qua A và cách M một khảng lớn nhất ?

Phương pháp $\quad (P): \begin{cases} Qua\ A \\ \vec{n}_{(P)} = \overrightarrow{AM} \end{cases}$

5.6. Dạng 6

Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d, sao cho (P) tạo với Δ (Δ không song song với d) một góc lớn nhất là lớn nhất ?

Phương pháp

$$(P):\begin{cases} Qua\, A \in d \\ \vec{n}_{(P)} = \left[\left[\vec{u}_d, \vec{u}_\Delta\right], \vec{u}_d\right] \end{cases}$$

5.7. Dạng 7

Cho $\Delta // (P)$. Viết phương trình đường thẳng d nằm trong (P) song song với Δ và cách Δ một khoảng nhỏ nhất ?

Phương pháp

Lấy $A \in \Delta$, gọi A' là hình chiếu vuông góc của A trên (P) thì $d:\begin{cases} Qua\, A' \\ \vec{u}_d = \vec{u}_\Delta \end{cases}$.

5.8. Dạng 8

Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm A cho trước và nằm trong mặt phẳng (P) cho trước sao cho khoảng cách từ điểm M cho trước đến d là lớn nhất (AM không vuông góc với (P)) ?

Phương pháp

$$d:\begin{cases} Qua\, A \in d \\ \vec{u}_d = \left[\vec{n}_{(P)}, \overrightarrow{AM}\right] \end{cases}$$

5.9. Dạng 9

Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm A cho trước và nằm trong mặt phẳng (P) cho trước sao cho khoảng cách từ điểm M cho trước đến d là nhỏ nhất (AM không vuông góc với (P)) ?

Phương pháp

$$d:\begin{cases} Qua\, A \in d \\ \vec{u}_d = \left[\left[\vec{n}_{(P)}, \overrightarrow{AM}\right], \vec{n}_{(P)}\right] \end{cases}$$

5.10. Dạng 10

Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm $A \in (P)$ cho trước, sao cho d nằm trong (P) và tạo với đường thẳng Δ một góc nhỏ nhất (Δ cắt nhưng không vuông góc với (P))?

Phương pháp

$$d:\begin{cases} Qua\, A \in d \\ \vec{u}_d = \left[\left[\vec{n}_{(P)}, \overrightarrow{AM}\right], \vec{n}_{(P)}\right] \end{cases}$$