

THỂ TÍCH TRONG PHÂN CHIA KHỐI ĐA DIỆN

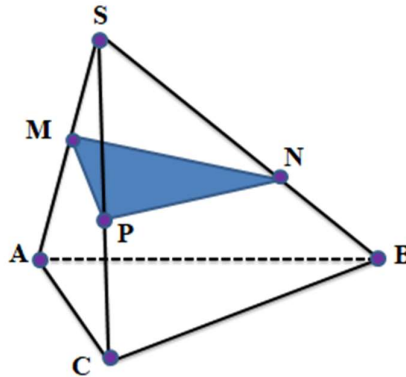
Trong các bài toán thể tích khối đa diện diện, một số bài toán vận dụng hoặc vận dụng cao thường đề cập đến việc phân chia đa diện, tính thể tích khối đa diện mới theo thể tích khối đa diện đã cho.

Thầy cô cần tạo tình huống cho học trò có tư duy về việc so sánh thể tích các khối chóp, khối lăng trụ từ những tư duy đơn giản như so sánh đường cao, so sánh diện tích đáy để đi đến quyết định chuyển những khối đa diện khó tính thể tích thành những khối dễ hơn, dễ so sánh với khối ban đầu. Cũng cần tạo cho học sinh quen với các bài toán tính thể tích các khối không cơ bản như chóp hoặc lăng trụ bằng cách phân chia thể tích với yêu cầu học sinh quan sát tốt để phân chia khối đa diện thành những khối dễ tính hơn với giả thiết được cho, từ đó hình thành các kỹ năng tổng hợp và có phản xạ tốt trong những bài phân chia đa diện.

Trong phần thể tích khối đa diện việc ra đề và ôn tập cho học sinh thường được chú trọng đến các bài toán về phân chia khối đa diện thành các phần khác nhau. Việc phân chia và tính toán khối đa diện thường dựa vào tỷ số thể tích, dựa vào việc dựng thiết diện, dựa vào việc lấy thêm điểm thỏa mãn các hệ thức tỷ số hoặc vectơ...

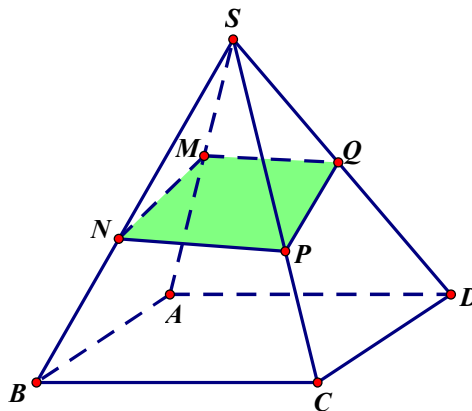
A. CÁC CÔNG THỨC TỶ SỐ THỂ TÍCH ÁP DỤNG

Bài toán 1. Cho hình chóp $S.ABC$. Một mặt phẳng (P) cắt các cạnh SA, SB, SC lần lượt tại M, N, P như hình vẽ bên.



Khi đó ta có các kết quả sau: $\frac{V_{S.MNP}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SA} \cdot \frac{SN}{SB} \cdot \frac{SP}{SC}$

Bài toán 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành, một mặt phẳng (P) cắt các cạnh SA, SB, SC, SD lần lượt tại M, N, P, Q như hình vẽ bên.

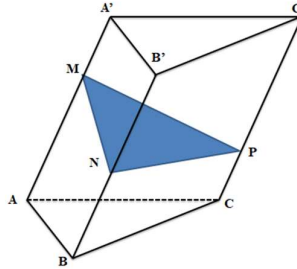


Đặt $\frac{SA}{SM} = x, \frac{SB}{SN} = y, \frac{SC}{SP} = z, \frac{SD}{SQ} = t$. Khi đó ta có các kết quả sau:

$$+ x + z = y + t$$

$$+ \frac{V_{S.MNPQ}}{V_{S.ABCD}} = \frac{x + y + z + t}{4xyz}$$

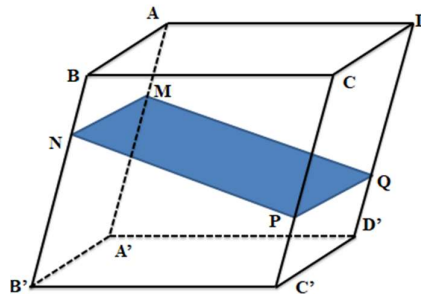
Bài toán 3. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Một mặt phẳng (P) cắt các cạnh bên AA', BB', CC' lần lượt tại M, N, P như hình vẽ bên.



$$\text{Đặt } \frac{A'M}{AA'} = x, \frac{B'N}{BB'} = y, \frac{C'P}{CC'} = z$$

$$\text{Khi đó ta có } \frac{V_{MNP.A'B'C'}}{V_{ABC.A'B'C'}} = \frac{x + y + z}{3}$$

Bài toán 4. Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$. Một mặt phẳng (P) cắt các cạnh bên AA', BB', CC', DD' lần lượt tại M, N, P, Q như hình vẽ bên.



$$\text{Đặt } \frac{AM}{AA'} = x, \frac{BN}{BB'} = y, \frac{CP}{CC'} = z, \frac{DQ}{DD'} = t.$$

Khi đó ta có

$$+ x + z = y + t.$$

$$+ \frac{V_{ABCDMNQP}}{V_{ABCD.A'B'C'D'}} = \frac{x + y + z + t}{4} = \frac{x + z}{2} = \frac{y + t}{2}$$

B. CÁC DẠNG BÀI VÀ VÍ DỤ MINH HỌA

Bài toán 1. CHIA HÌNH CHÓP, HÌNH LĂNG TRỤ THÀNH 2 PHẦN BỞI MỘT MẶT PHẶNG CHO TRƯỚC. TÍNH THỂ TÍCH MỘT TRONG HAI PHẦN HAY TỈ SỐ THỂ TÍCH

Ví dụ minh họa 1: Cho hình chóp $S.ABC$ và G là trọng tâm tam giác ABC . Với hai số thực x, y thay đổi và tập hợp các điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{GM} = x\overrightarrow{SB} + y\overrightarrow{AC}$ là mặt phẳng (P) . Tính tỉ số thể tích hai phần của khối chóp $S.ABC$ được phân chia bởi $mp(P)$.

A. $\frac{7}{20}$.

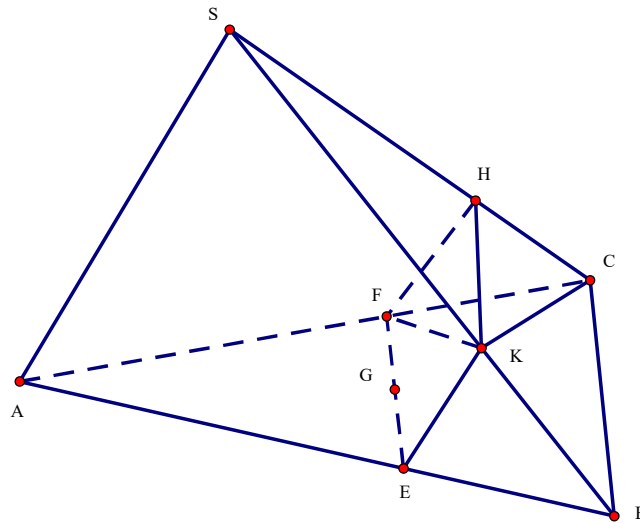
B. $\frac{1}{3}$.

C. $\frac{8}{27}$.

D. $\frac{2}{5}$.

Lời giải

Chọn A



Với hai số thực x, y thay đổi và tập hợp các điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{GM} = x\overrightarrow{SB} + y\overrightarrow{AC}$ là mặt phẳng (P) đi qua G và song song với $SA; BC$. Nên thiết diện khi cắt hình chóp $S.ABC$ bởi (P) là hình bình hành $EFHK$ như hình vẽ.

Gọi V, V_1, V_2 lần lượt là thể tích của khối chóp $S.ABC$, khối đa diện $SAEFHK$ và $BCEFHK$

$$\text{Ta có } V_2 = V_{H.BCEF} + V_{K.HCF} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} d_{(S, (ABC))} \cdot \frac{5}{9} S_{ABC} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} d_{(B, (SAC))} \cdot \frac{1}{9} S_{SAC}$$

$$= \frac{5}{27} V + \frac{2}{27} V = \frac{7}{27} V \Rightarrow \begin{cases} V_1 = \frac{20}{27} V \\ V_2 = \frac{7}{27} V \end{cases} \text{ . Chọn A.}$$

Ví dụ minh họa 2: Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi E là trọng tâm tam giác $A'B'C'$ và F là trung điểm BC . Tính tỉ số thể tích giữa khối $B'.EAF$ và khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $\frac{1}{4}$.

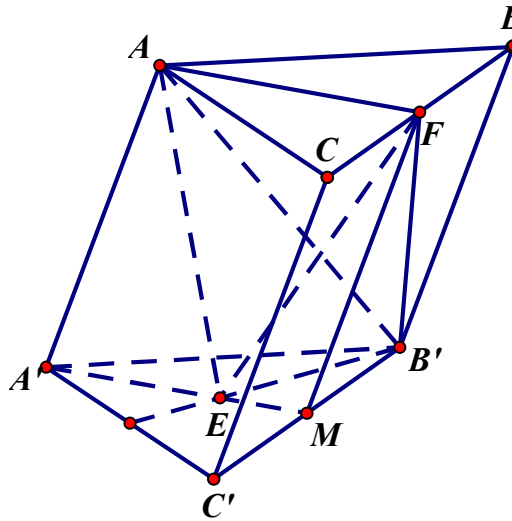
B. $\frac{1}{8}$.

C. $\frac{1}{5}$.

D. $\frac{1}{6}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có M là trung điểm của $B'C'$ khi đó $S_{EAF} = \frac{1}{2} S_{AA'MF}$ và $d(B', (AA'MF)) = d(B', (AEF))$.

$$\text{Vì } V_{B'.AA'MF} = V_{ABF.A'B'M} - V_{B'.ABF} = V_{ABF.A'B'M} - \frac{1}{3} V_{ABF.A'B'M} = \frac{2}{3} V_{ABF.A'B'M}$$

$$\text{Suy ra } V_{B'EAF} = \frac{1}{2} V_{B'.AA'MF} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot V_{ABF.A'B'M} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot V_{ABC.A'B'C'} = \frac{1}{6} \cdot V_{ABC.A'B'C'}.$$

Ví dụ minh họa 3: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a , cạnh bên hợp với đáy một góc 60° . Gọi M là điểm đối xứng của C qua D , N là trung điểm SC . Mặt phẳng (BMN) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai phần. Tỉ số thể tích giữa hai phần (phần lớn trên phần bé) bằng

A. $\frac{7}{5}$.

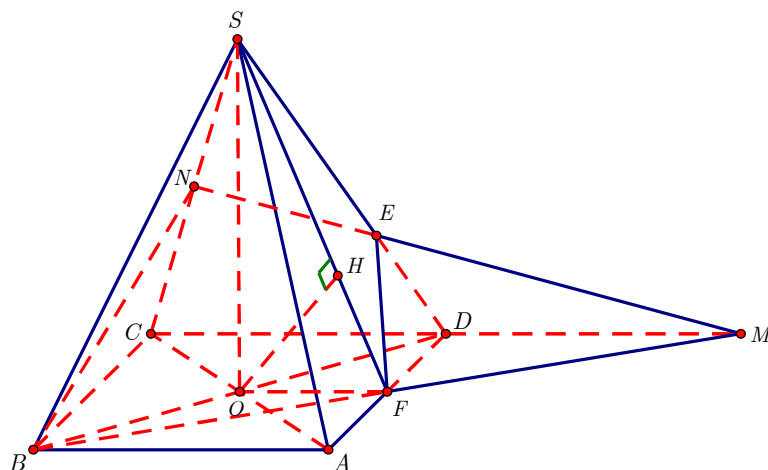
B. $\frac{1}{7}$.

C. $\frac{7}{3}$.

D. $\frac{6}{5}$.

Lời giải

Chọn A



Giả sử các điểm như hình vẽ.

$E = SD \cap MN \Rightarrow E$ là trọng tâm tam giác SCM , $DF \parallel BC \Rightarrow F$ là trung điểm BM .

$$\text{Ta có: } \left(\widehat{SD, (ABCD)} \right) = \widehat{SDO} = 60^\circ \Rightarrow SO = \frac{a\sqrt{6}}{2}, SF = \sqrt{SO^2 + OF^2} = \frac{a\sqrt{7}}{2}$$

$$\Rightarrow d(O, (SAD)) = OH = h = \frac{a\sqrt{6}}{2\sqrt{7}}; S_{SAD} = \frac{1}{2} SF \cdot AD = \frac{a^2\sqrt{7}}{4}$$

$$\frac{V_{MEFD}}{V_{MNBC}} = \frac{ME}{MN} \cdot \frac{MF}{MB} \cdot \frac{MD}{MC} = \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow V_{BFDCNE} = \frac{5}{6} V_{MNBC} = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{3} \cdot d(M, (SAD)) \cdot \frac{1}{2} S_{SBC} = \frac{5}{18} \cdot 4h \cdot \frac{1}{2} S_{SAD} = \frac{5a^3\sqrt{6}}{72}$$

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SO \cdot S_{ABCD} = \frac{a^3\sqrt{6}}{6} \Rightarrow V_{SABFEN} = V_{S.ABCD} - V_{BFDCNE} = \frac{7a^3\sqrt{6}}{36}$$

$$\text{Suy ra: } \frac{V_{SABFEN}}{V_{BFDCNE}} = \frac{7}{5}.$$

Ví dụ minh họa 4: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng V . Gọi A_1, B_1 lần lượt là hai điểm nằm trên hai cạnh AA' và BB' sao cho A_1 là trung điểm của AA' và $5.B_1B' = 3.BB'$. Tia CA_1 cắt tia $C'A'$ tại Q và tia CB_1 cắt tia $C'B'$ tại P . Thể tích khối đa diện lồi $A'A_1QB'B_1P$ bằng:

A. $\frac{29}{30}V$.

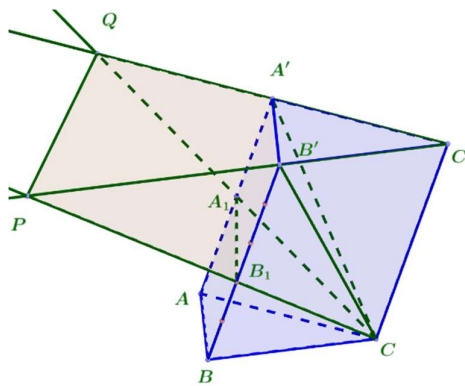
B. $\frac{7}{10}V$.

C. $\frac{37}{90}V$.

D. $\frac{10}{9}V$.

Lời giải

Chọn A



• Ta có: $\frac{V_{C'.A'B'C}}{V_{C'.QPC}} = \frac{C'A'}{C'Q} \cdot \frac{C'B'}{C'P} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{5} \Rightarrow V_{C'.QPC} = 5.V_{C'.A'B'C} = 5 \cdot \left(\frac{1}{3}V \right) = \frac{5}{3}V$.

• Mặt khác: $\frac{A_1A'}{AA'} = \frac{1}{2}, \frac{B_1B'}{BB'} = \frac{3}{5} \rightarrow \frac{V_{A'B'C'A_1B_1C}}{V_{A'B'C'ABC}} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{A_1A'}{AA'} + \frac{B_1B'}{BB'} + \frac{CC'}{CC'} \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{5} + 1 \right) = \frac{7}{10}$

$$\Rightarrow V_{A'B'C'A_1B_1C} = \frac{7}{10} V_{A'B'C'ABC} = \frac{7}{10} V.$$

$$\bullet V_{A'A_QB'B_1P} = V_{C'.QPC} - V_{A'B'C'A_1B_1C} = \frac{5}{3}V - \frac{7}{10}V = \frac{29}{30}V.$$

Bài toán 2 : TÍNH THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN ĐƯỢC PHÁT TRÊN TỪ CÁC KHỐI CHO TRƯỚC BẰNG CÁCH LẤY THÊM CÁC ĐIỂM .

Phương pháp : với các khối có đáy như chóp , lăng trụ ta chuyển đáy của các khối này về mặt đáy của các khối ban đầu , sau đó so sánh đường cao của khối này với đường cao của khối ban đầu.

Với các khối không phải là chóp hoặc lăng trụ ta có thể dùng phân chia đa diện để tạo ra các khối chóp hoặc lăng trụ ,

Cũng có thể căn cứ vào khối đã cho cộng trừ đi các khối không thuộc , hoặc cộng thêm khối thuộc khối đa diện yêu cầu tính thể tích .

Ví dụ minh họa 1: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng V . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của $A'B', AC$ và P là điểm thuộc cạnh CC' sao cho $CP = 2C'P$. Tính thể tích khối tứ diện $BMNP$ theo V .

A. $\frac{2V}{9}$.

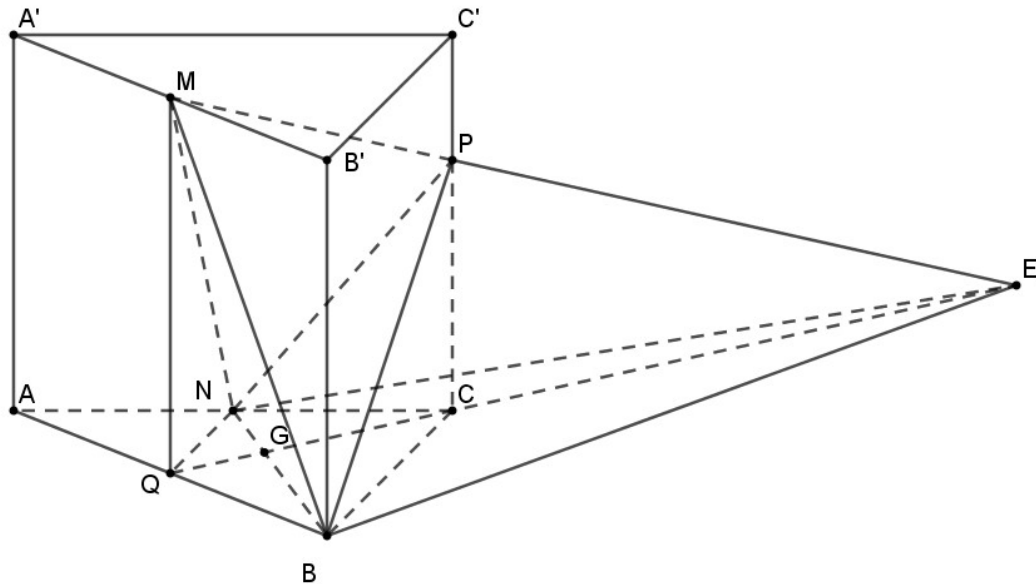
B. $\frac{V}{3}$.

C. $\frac{5V}{24}$.

D. $\frac{4V}{9}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi B là diện tích tam giác ABC , h là độ dài đường cao của hình lăng trụ, suy ra $V = B.h$. Gọi Q là trung điểm AB , G là trọng tâm tam giác ABC . Gọi V_1 là thể tích khối chóp $BMNP$, V_2 là thể tích khối chóp $MBNE$ với $E = QC \cap MP$.

Ta có $\frac{PE}{ME} = \frac{CE}{QF} = \frac{PC}{MQ} = \frac{2}{3}$ do $PC \parallel MQ$ và $PC = 2PC'$ nên $\frac{PC}{MQ} = \frac{PC}{CC'} = \frac{2}{3}$.

Ta có $\frac{V_1}{V_2} = \frac{MP}{ME} = \frac{1}{3} \Rightarrow V_1 = \frac{1}{3}V_2$.

$$\text{Do } GC = \frac{2}{3}QC, CE = 2QC \Rightarrow GE = GC + CE = \frac{8}{3}QC.$$

Ta lại có $V_2 = \frac{1}{3}S_{BNE}.h$. Ta tính diện tích tam giác BNE theo diện tích tam giác ABC ta có

$$S_{BNE} = S_{BGE} + S_{NGE} = \frac{8}{3}(S_{NQC} + S_{BQC}) = \frac{8}{3}S_{QBCN}.$$

$$\text{Mà } \frac{S_{AQN}}{S_{ABC}} = \frac{AQ}{AB} \cdot \frac{AN}{AC} = \frac{1}{4} \Rightarrow S_{QBCN} = \frac{3}{4}S_{ABC} \text{ do đó } S_{BNE} = \frac{8}{3}S_{QBCN} = 2S_{ABC}.$$

$$\text{Nên } V_2 = \frac{1}{3}S_{BNE}.h = \frac{1}{3}.2S_{ABC}.h = \frac{2V}{3} \Rightarrow V_1 = \frac{1}{3}V_2 = \frac{2V}{9}.$$

Ví dụ minh họa 3: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích bằng V . Gọi M, N, P, Q, E, F lần lượt là tâm các hình bình hành $ABCD, A'B'C'D', ABB'A', BCC'B', CDD'C', DAA'D'$. Thể tích khối đa diện có các đỉnh M, P, Q, E, F, N bằng

A. $\frac{V}{4}$.

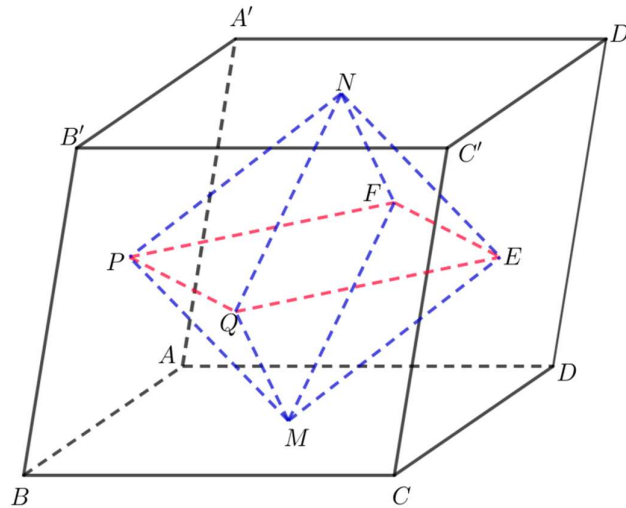
B. $\frac{V}{2}$.

C. $\frac{V}{6}$.

D. $\frac{V}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi h là chiều cao của hình hộp $ABCD.A'B'C'D' \Rightarrow V = h.S_{ABCD}$.

Thấy hình đa diện $MPQEFN$ là một bát diện nên

$$V_{MPQEFN} = 2.V_{N.PQEF} = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot h.S_{PQEF} = \frac{1}{3} \cdot h.S_{PQEF}.$$

Lại có: $PQEF$ là hình bình hành và có $PQ = EF = \frac{1}{2}AC$; $QE = PF = \frac{1}{2}BD$ nên

$$S_{PQEF} = \frac{1}{2}S_{ABCD}. \text{ Do đó: } V_{MPQEFN} = \frac{1}{3}h.S_{PQEF} = \frac{1}{3}h \cdot \frac{1}{2}S_{ABCD} = \frac{1}{6}h.S_{ABCD} = \frac{V}{6}.$$

Ví dụ minh họa 4: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có chiều cao bằng 8 và diện tích đáy bằng 9. Gọi M, N, P và Q lần lượt là tâm của các mặt bên $ABB'A', BCC'B', CDD'C'$ và $DAA'D'$. Thể tích của khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm A, B, C, D, M, N, P và Q bằng

A. 27.

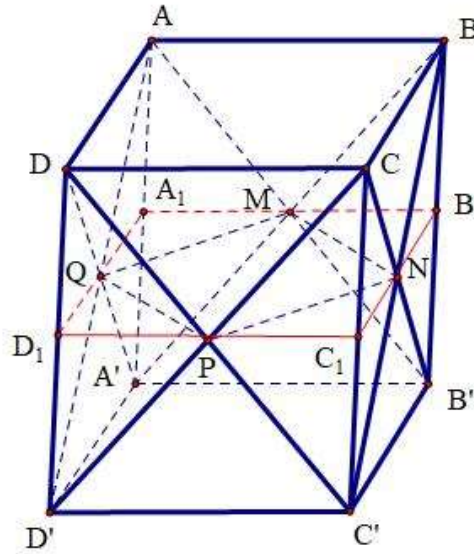
B. 30.

C. 18.

D. 36

Lời giải

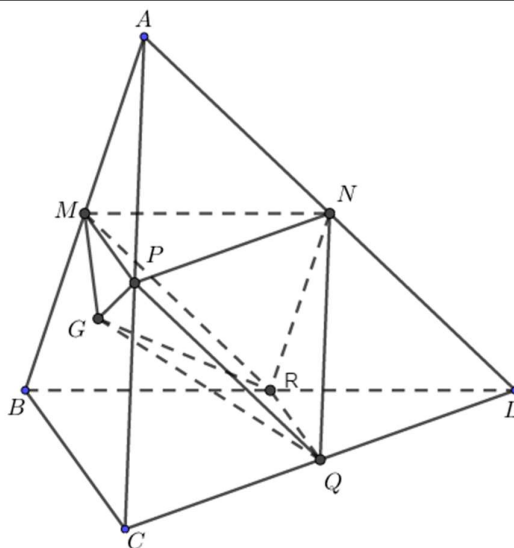
Chọn B



Mặt $(MNPQ)$ cắt các cạnh AA', BB', CC', DD' tại A_1, B_1, C_1, D_1 . Thể tích khối đa diện cần tìm là V , thì:

$$\begin{aligned} V &= V_{A_1B_1C_1D_1.A'B'C'D'} - V_{A'.QMA_1} - V_{B'.MNB_1} - V_{C'.PNC_1} - V_{D'.QPD_1} \\ &= \frac{8 \cdot 9}{2} - 4 \times \frac{V}{24} \\ \Rightarrow V &= 30 \end{aligned}$$

Ví dụ minh họa 5: Cho tứ diện $ABCD$ có thể tích là V . Gọi M, N, P, Q, R lần lượt là trung điểm các cạnh AB, AD, AC, DC, BD và G là trọng tâm tam giác ABC (như hình vẽ). Tính thể tích khối đa diện lồi $MNPQRG$ theo V .



A. $\frac{2V}{5}$.

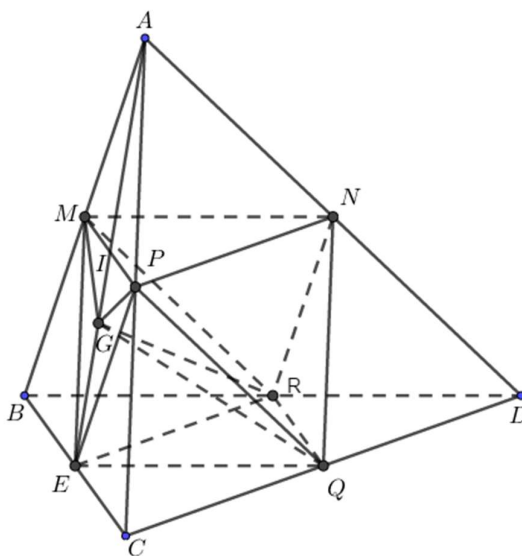
B. $\frac{V}{3}$.

C. $\frac{V}{2}$.

D. $\frac{V}{6}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi E là trung điểm BC .

Gọi I là giao AE với MP thì $\frac{GI}{EI} = \frac{1}{3}$ nên $\frac{d(G, (MPQR))}{d(E, (MPQR))} = \frac{1}{3} \Rightarrow V_{G.MPQR} = \frac{1}{3} V_{E.MPQR}$.

Gọi $V_1 = V_{EMPQRN}$ thì $V_1 = V - 4.V_{AMNP} = V - 4.\frac{1}{8}V = \frac{V}{2}$.

Mặt khác do $MNQE$ là hình bình hành nên EN cắt MQ tại trung điểm nên

$$V_{N.MPQR} = V_{E.MPQR} = \frac{1}{2} V_1 = \frac{V}{4}.$$

$$\text{Mà } V_{G.MPQR} = \frac{1}{3} V_{E.MPQR} = \frac{V}{12}.$$

$$\text{Vậy } V_{MNPQR} = V_{N.MPQR} + V_{G.MPQR} = \frac{V}{4} + \frac{V}{12} = \frac{V}{3}.$$

Ví dụ minh họa 6: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a , đường cao $SH = 2a$. Gọi I, J, K lần lượt là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.HAB, S.HBC, S.HCA$.

Tính thể tích khối bát diện $ABC IJK$

A. $a^3 \sqrt{3}$.

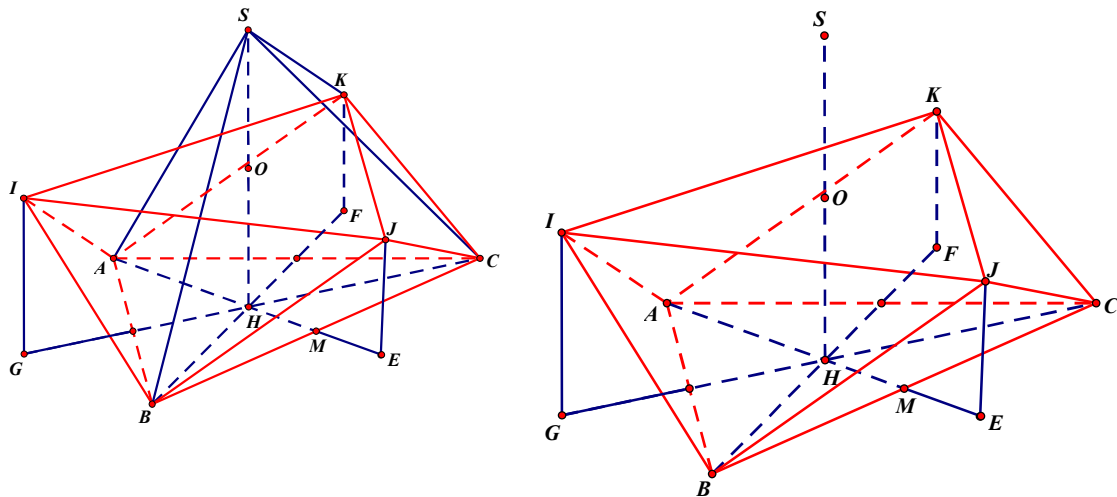
B. $\frac{a^3 \sqrt{3}}{2}$.

C. $\frac{a^3 \sqrt{3}}{3}$.

D. $\frac{4a^3 \sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi G, E, F lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác HAB, HBC, HAC . Suy ra G, E, F đối xứng với H qua AB, BC, CA . Suy ra tam giác GEF đều cạnh a .

Gọi O là trung điểm SH , theo bài ra I, J, K lần lượt là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.HAB, S.HBC, S.HCA$ nên ta có $\overline{GI} = \overline{EJ} = \overline{FK} = \overline{HO}$ suy ra $(IJK) \parallel (ABC)$

Mặt khác có $ABJK, ACJI$ là hình bình hành nên $IC \cap AJ$ tại trung điểm của AJ

$$\text{Suy ra } d(I, (ABJK)) = d(C, (ABJK))$$

$$\text{Vậy } V_{ABC IJK} = 2V_{C.ABJK} = 4V_{C.ABJ} = 2V_{SABC} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{3}$$

Dạng 3. MAX- MIN THỂ TÍCH CÁC KHỐI KHI PHÂN CHIA

Ví dụ minh họa 1: Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Một mặt phẳng thay đổi nhưng luôn song song với đáy và cắt các cạnh bên SA, SB, SC, SD lần lượt tại $M,$

N, P, Q . Gọi M', N', P', Q' lần lượt là hình chiếu vuông góc của M, N, P, Q lên mặt phẳng $(ABCD)$. Tính tỉ số $\frac{SM}{SA}$ để thể tích khối đa diện $MNPQ.MN'P'Q'$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $\frac{2}{3}$.

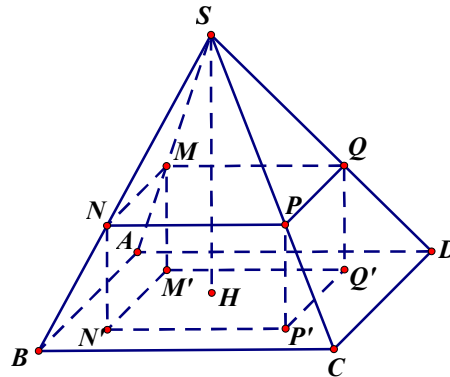
B. $\frac{1}{2}$.

C. $\frac{1}{3}$.

D. $\frac{3}{4}$.

Lời giải

Chọn A



Đặt $\frac{SM}{SA} = k$ với $k \in [0; 1]$.

Xét tam giác SAB có $MN \parallel AB$ nên $\frac{MN}{AB} = \frac{SM}{SA} = k \Rightarrow MN = k.AB$

Xét tam giác SAD có $MQ \parallel AD$ nên $\frac{MQ}{AD} = \frac{SM}{SA} = k \Rightarrow MQ = k.AD$

Kẻ đường cao SH của hình chóp. Xét tam giác SAH có:

$$MM' \parallel SH \text{ nên } \frac{MM'}{SH} = \frac{AM}{SA} = \frac{SA - SM}{SA} = 1 - \frac{SM}{SA} = 1 - k \Rightarrow MM' = (1 - k).SH.$$

Ta có $V_{MNPQ.MN'P'Q'} = MN.MQ.MM' = AB.AD.SH.k^2.(1 - k)$.

Mà $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SH.AB.AD \Rightarrow V_{MNPQ.MN'P'Q'} = 3.V_{S.ABCD}.k^2.(1 - k)$.

Thể tích khối chóp không đổi nên $V_{MNPQ.MN'P'Q'}$ đạt giá trị lớn nhất khi $k^2.(1 - k)$ lớn nhất.

$$\text{Ta có } k^2.(1 - k) = \frac{2(1 - k).k.k}{2} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{2 - 2k + k + k}{3} \right)^3 = \frac{4}{27}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $2(1 - k) = k \Leftrightarrow k = \frac{2}{3}$. Vậy $\frac{SM}{SA} = \frac{2}{3}$.

Ví dụ minh họa 2: Cho tứ diện $ABCD$. Hai điểm M, N lần lượt di động trên hai đoạn thẳng BC và BD sao cho $2\frac{BC}{BM} + 3\frac{BD}{BN} = 10$. Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích của các khối tứ diện $ABMN$ và $ABCD$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $\frac{V_1}{V_2}$.

A. $\frac{13}{16}$.

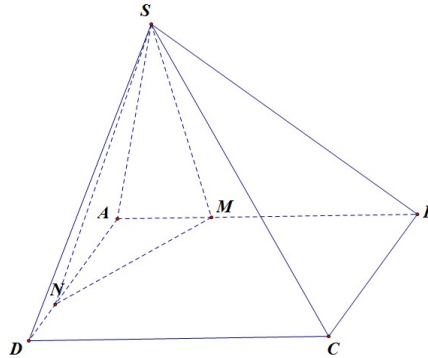
B. $\frac{11}{12}$.

C. $\frac{1}{6}$.

D. $\frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Đặt $\frac{AB}{AM} = x; \frac{AD}{AN} = y, x, y \geq 1$.

Ta có $\frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABCD}} = \frac{S_{AMN}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{1}{2} AM \cdot AN \cdot \sin \widehat{DAB}}{AB \cdot AD \cdot \sin \widehat{DAB}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{AM}{AB} \cdot \frac{AN}{AD} = \frac{1}{2yx}$.

Theo bài ra $2\frac{AB}{AM} + 3\frac{AD}{AN} = 8 \Rightarrow 2x + 3y = 8 \Rightarrow x = 4 - \frac{3}{2}y$.

Suy ra $\frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{2y\left(4 - \frac{3}{2}y\right)}; 1 \leq y \leq 2$ (do $x \geq 1$).

Ta có $\frac{V_1}{V} = 1 - \frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABCD}} = 1 - \frac{1}{y(8-3y)}; 1 \leq y \leq 2$.

Áp dụng BĐT Côsi ta có $3y(8-3y) \leq \left(\frac{3y+8-3y}{2}\right)^2 = 16$

Suy ra $\frac{V_1}{V} \leq 1 - \frac{3}{16} = \frac{13}{16} \Rightarrow \max \frac{V_1}{V} = \frac{13}{16}$. Dấu bằng xảy ra khi $y = \frac{4}{3}, x = 2$.

Ví dụ minh họa 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành và có thể tích là V . Điểm P là trung điểm của SC . Một mặt phẳng qua AP cắt hai cạnh SB và SD lần lượt tại M và N . Gọi V_1 là thể tích của khối chóp $S.AMPN$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $\frac{V_1}{V}$?

A. $\frac{3}{8}$.

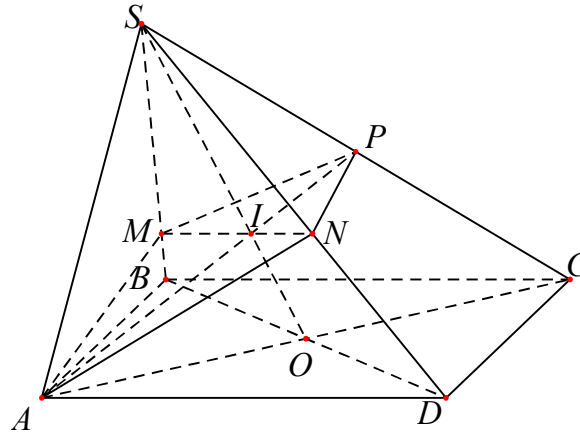
B. $\frac{1}{3}$.

C. $\frac{2}{3}$.

D. $\frac{1}{8}$.

Lời giải

Chọn B



Do (α) đi qua A, P, M, N nên bốn điểm này đồng phẳng.

Áp dụng công thức $\frac{V_{S.AMPN}}{V_{S.ABCD}} = \frac{a+b+c+d}{4.a.b.c.d}$ với $\frac{SA}{SA} = a, \frac{SC}{SP} = c, \frac{SD}{SM} = d, \frac{SB}{SN} = b$ thỏa mãn $a+c=b+d$.

Theo đề bài ta có: $\frac{SA}{SA} = 1, \frac{SC}{SP} = 2$ và đặt $\frac{SD}{SM} = d > 0, \frac{SB}{SN} = b > 0$.

Khi đó: $\frac{V'}{V} = \frac{1+2+b+d}{4.1.2.b.d}$ với $1+2=b+d \Leftrightarrow b+d=3$.

Vậy ta có: $\frac{V'}{V} = \frac{1+2+b+d}{4.1.2.b.d} \Leftrightarrow \frac{V'}{V} = \frac{1+2+3}{4.2.b.d} \Leftrightarrow \frac{V'}{V} = \frac{3}{4bd}$.

Theo bất đẳng thức cơ bản: $bd \leq \frac{(b+d)^2}{4} = \frac{9}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{bd} \geq \frac{4}{9}$ suy ra $\frac{V'}{V} = \frac{3}{4bd} \geq \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{9} = \frac{1}{3}$.

Dấu “=” xảy ra $b=d \Leftrightarrow b=d=\frac{3}{2}$.

Vậy $\frac{V'}{V}$ có giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{1}{3}$.

Ví dụ minh họa 4: Cho tứ diện $ABCD$ có thể tích là V . Điểm M thay đổi trong tam giác BCD . Các đường thẳng qua M và song song với AB, AC, AD lần lượt cắt các mặt phẳng $(ACD), (ABD), (ABC)$ tại N, P, Q . Giá trị lớn nhất của khối $MNPQ$ là:

A. $\frac{V}{27}$.

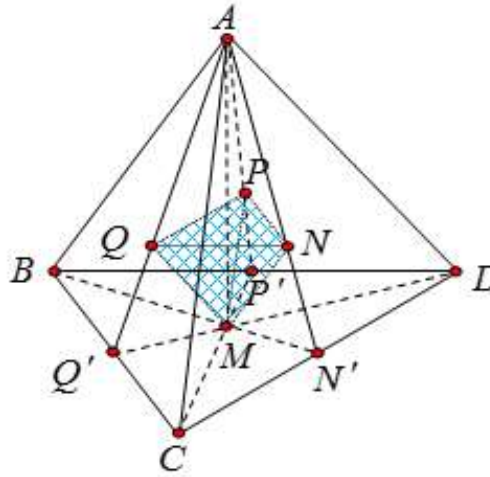
B. $\frac{V}{16}$.

C. $\frac{V}{8}$.

D. $\frac{V}{54}$.

Lời giải

Chọn A



+ Tam giác ABN' có $MN \parallel AB \Rightarrow \frac{MN}{AB} = \frac{N'M}{N'B}$.

+ Tam giác ACP' có $MP \parallel AC \Rightarrow \frac{MP}{AC} = \frac{P'M}{P'C}$.

+ Tam giác ADQ' có $QM \parallel AD \Rightarrow \frac{MQ}{AD} = \frac{Q'M}{Q'D}$.

Khi đó: $\frac{MN}{AB} + \frac{MP}{AC} + \frac{MQ}{AD} = \frac{N'M}{N'B} + \frac{P'M}{P'C} + \frac{Q'M}{Q'D}$

Mà $\frac{N'M}{N'B} + \frac{P'M}{P'C} + \frac{Q'M}{Q'D} = \frac{S_{MCD}}{S_{BCD}} + \frac{S_{MBD}}{S_{BCD}} + \frac{S_{MBC}}{S_{BCD}} = 1$ nên $\frac{MN}{AB} + \frac{MP}{AC} + \frac{MQ}{AD} = 1$

Lại có $1^3 = \left(\frac{MN}{AB} + \frac{MP}{AC} + \frac{MQ}{AD} \right)^3 \geq \left(3^3 \frac{MN}{AB} \cdot \frac{MP}{AC} \cdot \frac{MQ}{AD} \right)$ (Cauchy)

$\Leftrightarrow MN \cdot MP \cdot MQ \leq \frac{1}{27} AB \cdot AC \cdot AD \Rightarrow MN \cdot MP \cdot MQ$ lớn nhất khi $\frac{MN}{AB} = \frac{MP}{AC} = \frac{MQ}{AD}$

$$\Rightarrow M \text{ là trọng tâm tam giác } BCD \Rightarrow \frac{MN}{AB} = \frac{MP}{AC} = \frac{MQ}{AD} = \frac{1}{3} \Rightarrow (NPQ) \parallel (BCD),$$

$$\frac{S_{NPQ}}{S_{N'P'Q'}} = \left(\frac{2}{3}\right)^2, \text{ Mà } S_{N'P'Q'} = \frac{1}{4} S_{BCD} \text{ nên } S_{NPQ} = \frac{1}{9} S_{BCD} \text{ và } d(M, (NPQ)) = \frac{1}{2} d(A, (BCD))$$

$$\text{Vậy giá trị lớn nhất của khối tứ diện } MNPQ \text{ là } V_{MNPQ} = \frac{1}{3} S_{NPQ} \cdot d(M, (NPQ))$$

$$\Leftrightarrow V_{MNPQ} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9} S_{BCD} \cdot \frac{1}{3} d(A, (BCD)) = \frac{V}{27}, \text{ với } V_{ABCD} = \frac{1}{3} S_{BCD} \cdot d(A, (BCD)) = V$$

Ví dụ minh họa 5: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh 1. Điểm M, N lần lượt nằm trên đoạn thẳng AC' và CD' sao cho $\frac{C'M}{C'A} = \frac{D'N}{D'C} = x$. Khi tứ diện $CC'NM$ có thể tích lớn nhất thì giá trị của x bằng

A. $\frac{1}{2}$.

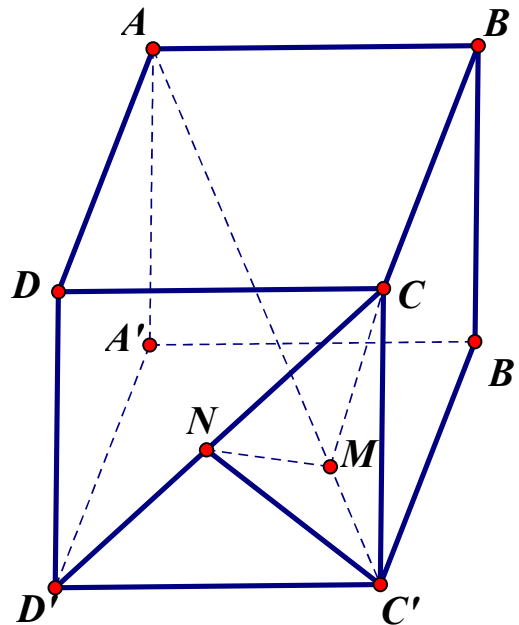
B. $\frac{1}{3}$.

C. $\frac{1}{4}$.

D. $\frac{1}{6}$.

Lời giải

Chọn C



$$\text{Ta có. } CD' = \sqrt{2} \Rightarrow D'N = 2x\sqrt{2} \Rightarrow CN = \sqrt{2} - 2x\sqrt{2} = \sqrt{2}(1 - 2x), \text{ đk : } 0 < x < \frac{1}{2}$$

$$\text{Ta có } AC' = \sqrt{3} \Rightarrow C'M = x\sqrt{3}$$

$$V_{CC'NM} = \frac{1}{6} \cdot C'M \cdot CN \cdot d(C'M, CN) \cdot \sin(C'M, CN) = \frac{1}{6} \cdot \sqrt{6} \cdot x(1-2x) \cdot d(C'A, CD') \cdot \sin(C'A, CD')$$

Do $d(C'A, CD') \cdot \sin(C'A, CD')$ không đổi nên tứ diện $CC'NM$ có lớn nhất khi $g(x) = x(1-2x)$ lớn nhất.

$$\text{Ta có } g(x) = \frac{1}{2} \cdot 2x(1-2x) \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{(2x+1-2x)^2}{4} = \frac{1}{8}$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra } \Leftrightarrow 2x = 1-2x \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}.$$

C. BÀI TẬP THEO CÁC DẠNG

Dạng 1. CHIA HÌNH CHÓP, HÌNH LĂNG TRỤ THÀNH 2 PHẦN BỞI MỘT MẶT PHẶNG CHO TRƯỚC. TÍNH THỂ TÍCH MỘT TRONG HAI PHẦN HAY TỈ SỐ THỂ TÍCH

Câu 1: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, gọi M và N lần lượt là tâm của các hình vuông $ABCD$ và $CDD'C'$. Mặt phẳng $(A'MN)$ chia khối lập phương thành hai phần có thể tích là V_1 và V_2

$(V_1 < V_2)$. Tính tỷ số $\frac{V_1}{V_2}$.

A. $\frac{1}{3}$.

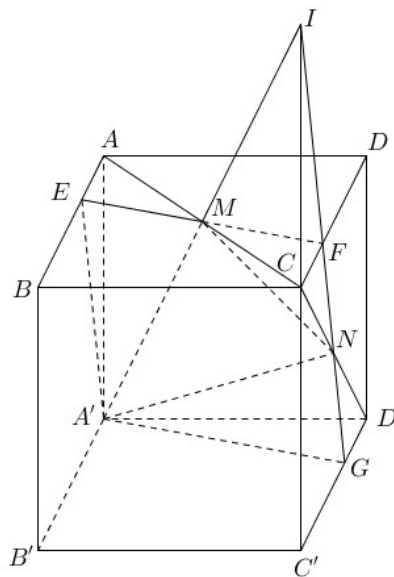
B. $\frac{1}{2}$.

C. $\frac{2}{3}$.

D. 2.

Lời giải

Chọn B



Gọi $I = A'M \cap CC'$; $F = IN \cap CD$; $G = IN \cap C'D'$; $E = FM \cap AB$.

Vậy thiết diện của hình hộp cắt bởi mặt phẳng $(A'MN)$ là hình bình hành $A'EFG$.

$$\text{Ta có: } \frac{AE}{CF} = \frac{MA}{MC} = 1 \Rightarrow AE + FD = CF + FD = CD.$$

Tương tự: $FD + GD' = CD$.

$$V_{AEFDA'GD'} = V_{A'.AEFD} + V_{A'.FDD'G}$$

$$= \frac{1}{3} A'A \cdot \frac{1}{2} (AE + DF) \cdot AD + \frac{1}{3} A'D' \cdot \frac{1}{2} (FD + GD') \cdot DD'$$

$$= \frac{CD^3}{6} + \frac{CD^3}{6} = \frac{V_{hh}}{3}$$

$$\Rightarrow V_1 = \frac{V_{hh}}{3} \Rightarrow V_2 = \frac{2V_{hh}}{3} \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{2}.$$

Câu 2: Cho khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$. M là trung điểm $C'D'$. N là điểm trên cạnh AD sao cho $DN = 3AN$. Mặt phẳng $(B'MN)$ chia khối hộp thành hai phần có thể tích là V_1, V_2 thỏa mãn

$V_1 < V_2$. Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng

A. $\frac{1}{4}$.

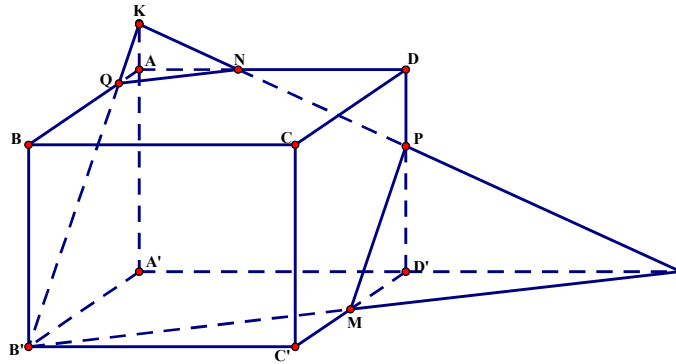
B. $\frac{149}{299}$.

C. $\frac{448}{1344}$.

D. $\frac{299}{448}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi V là thể tích khối hộp. Gọi: $I = BM \cap A'D'$; $P = RN \cap DD'$; $K = RN \cap AA'$;

$$Q = B'K \cap AB.$$

$$\text{Ta có } V_{AQNA'B'MD'P} = V_{K.A'B'I} - V_{I.D'PM} - V_{K.ANQ}.$$

Do M là trung điểm của $C'D'$ suy ra D' là trung điểm của $A'I$. Mặt khác $PM \parallel B'K$ nên P là trung điểm của IK .

$$\text{Ta có } \frac{AK}{DP} = \frac{KN}{NP} = \frac{AN}{ND} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{KN}{KI} = \frac{1}{8} \Rightarrow \frac{KA}{KA'} = \frac{KQ}{KB'} = \frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow 3 = \frac{DP}{KA} = \frac{DP}{\frac{1}{7}AA'} = \frac{7DP}{DD'} \Rightarrow \frac{DP}{DD'} = \frac{3}{7} \Rightarrow \frac{D'P}{DD'} = \frac{4}{7}.$$

$$\text{Khi đó ta có: } V_{I.D'PM} = \frac{1}{3} d(I; (CDD'C')) \cdot S_{\Delta D'PM} = \frac{1}{3} d(I; (CDD'C')) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{7} S_{CDD'C'} = \frac{1}{21} V.$$

$$V_{K.ANQ} = \frac{1}{3} d(K; (ABCD)) \cdot S_{\Delta ANQ} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{7} d(A'; (ABCD)) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} S_{ABCD} = \frac{1}{1344} V.$$

$$V_{K.A'B'I} = \frac{1}{3} d(K; (A'B'C'D')) \cdot S_{\Delta A'B'I} = \frac{1}{3} \cdot \frac{8}{7} d(A; (A'B'C'D')) \cdot S_{A'B'C'D'} = \frac{8}{21} V.$$

$$\text{Suy ra } V_{AQNA'B'MD'P} = V_{K.A'B'I} - V_{I.D'PM} - V_{K.ANQ} = \left(\frac{8}{21} - \frac{1}{21} - \frac{1}{1344} \right) V = \frac{149}{448} V$$

Khi đó $V_1 = \frac{149}{448}V$, $V_2 = \left(1 - \frac{149}{448}\right)V = \frac{299}{448}V$. Vậy $\frac{V_1}{V_2} = \frac{149}{299}$.

Câu 3: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích V . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, BB' và $A'C'$. Tính theo V thể tích của khối tứ diện $CMNP$.

A. $\frac{5}{24}V$.

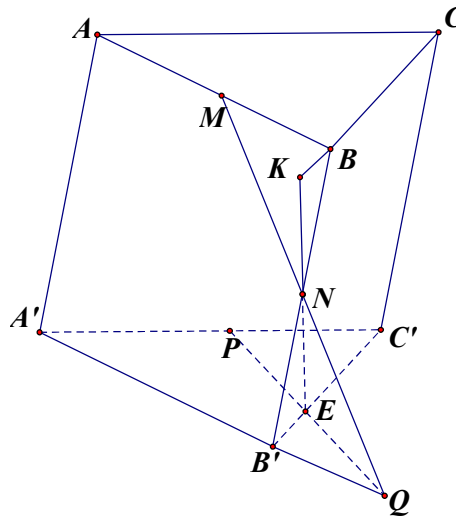
B. $\frac{V}{4}$.

C. $\frac{5V}{27}$.

D. $\frac{7V}{24}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi Q là giao điểm của MN và $A'B'$.

Khi đó: $\frac{B'Q}{AB} = \frac{1}{2}$ và N là trung điểm của MQ .

Gọi E là giao điểm của $B'C'$ và PQ .

Khi đó: $\frac{B'E}{B'C'} = \frac{1}{4}$ và E là trung điểm của PQ .

Gọi K là giao điểm của BC và NE . Khi đó $BK = \frac{1}{4}BC$.

Ta có: EN là đường trung bình của $\triangle MPQ$

$$\Rightarrow NE \parallel MP$$

$$\Rightarrow NE \parallel (CMP) \text{ hay } NK \parallel (CMP)$$

$$\Rightarrow d(N; (CMP)) = d(K; (CMP))$$

$$\Rightarrow V_{CMNP} = V_{CMPK} = \frac{1}{3}S_{CMK} \cdot d(P; (ABC))$$

Trong đó: $d(P; (ABC)) = h$ là chiều cao của lăng trụ.

$$S_{CMK} = S_{MBC} + S_{BMK} = \frac{1}{2}S_{ABC} + \frac{1}{2}BM \cdot BK \cdot \sin \widehat{ABC} = \frac{1}{2}S_{ABC} + \frac{1}{2} \cdot \frac{AB}{2} \cdot \frac{BC}{4} \sin \widehat{ABC}$$

$$= \frac{1}{2}S_{ABC} + \frac{1}{8}S_{ABC} = \frac{5}{8}S_{ABC}.$$

$$\Rightarrow V_{CMNP} = \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{8} S_{ABC} h = \frac{5}{24} V.$$

Câu 4: Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Trên AC , BC lần lượt lấy M , N sao cho $\overline{CM} = \frac{2}{3} \overline{CB}$

$\overline{CN} = \frac{1}{2} \overline{CB}$. Gọi K là giao điểm của MN và đường trung tuyến hạ từ đỉnh C của tam giác

ABC , I là giao điểm của BK và AC , E là giao điểm của $C'I$ và CA' , F là giao điểm của BC' và $B'C$. Tính tỉ số thể tích của khối đa diện $C.EFBI$ và khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $\frac{1}{21}$.

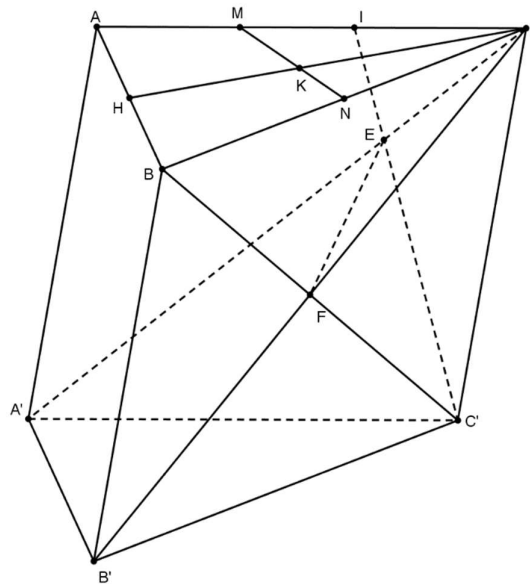
B. $\frac{3}{35}$.

C. $\frac{1}{7}$.

D. $\frac{26}{105}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi thể tích khối lăng trụ là V

$$\text{Gọi } H \text{ là trung điểm } AB \Rightarrow \frac{CA}{CM} + \frac{CB}{CN} = 2 \cdot \frac{CH}{CK} \Rightarrow \frac{CH}{CK} = \frac{7}{4} \Rightarrow \frac{CK}{CH} = \frac{4}{7}$$

$$\text{Áp dụng định lí Menelaus ta có: } \frac{CI}{IA} \cdot \frac{HK}{CK} \cdot \frac{BA}{BH} = 1 \Leftrightarrow \frac{CI}{IA} \cdot \frac{3}{4} \cdot 2 = 1 \Rightarrow \frac{CI}{IA} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{CI}{CA} = \frac{2}{5}$$

$$\text{Ta có: } \frac{IE}{EC'} = \frac{IC}{A'C'} = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{C'E}{C'I} = \frac{5}{7}, \text{ mà } \frac{C'F}{C'B} = \frac{1}{2} \Rightarrow V_{C'.CEF} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{7} V_{C'.CIB} = \frac{5}{14} V_{C'.CIB}$$

$$\Rightarrow V_{C'.EFBI} = \frac{9}{14} V_{C'.CIB} = \frac{9}{14} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} V = \frac{3}{35} V \Rightarrow \frac{V_{C'.EFBI}}{V} = \frac{3}{35}$$

Câu 5: Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a cạnh bên $3a$. Gọi M là trung điểm của AA' . Mặt phẳng (α) đi qua M và song song với BC đồng thời tạo với mặt phẳng đáy (ABC) một góc 30° . Mặt phẳng (α) chia khối chóp làm 2 phần có thể tích lần lượt là V_1 và V_2 biết $(V_1 < V_2)$

. Tỉ số thể tích $\frac{V_1}{V_2}$ bằng

A. $\frac{4}{5}$.

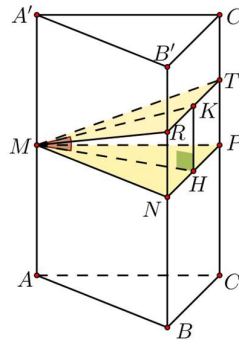
B. $\frac{7}{8}$.

C. $\frac{7}{11}$.

D. $\frac{7}{9}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi $N; P$ lần lượt là trung điểm của BB' và CC' suy ra $(MNP) \parallel (ABC)$.

Mặt phẳng (α) cắt các cạnh BB' và CC' lần lượt tại R và T . Gọi $H; K$ lần lượt là trung điểm của NP và RT . Mặt phẳng (α) tạo với (ABC) một góc 30° suy ra $\widehat{KMH} = 30^\circ$.

Tam giác MNP đều cạnh a suy ra $MH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ và $HK = MH \cdot \tan 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{a}{2}$.

Ta có $V_{M.NPTR} = \frac{1}{3} \cdot MH \cdot S_{NPTR} = \frac{1}{3} \cdot MH \cdot HK \cdot NP = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot a = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Thể tích lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot 3a = \frac{3\sqrt{3}a^3}{4}$.

Vậy $V_1 = \frac{V}{2} - V_{M.NPTR} = \frac{3\sqrt{3}a^3}{8} - \frac{a^3\sqrt{3}}{12} = \frac{7\sqrt{3}}{24}a^3$

$V_2 = \frac{V}{2} + V_{M.NPTR} = \frac{3\sqrt{3}a^3}{8} + \frac{a^3\sqrt{3}}{12} = \frac{11\sqrt{3}}{24}a^3$.

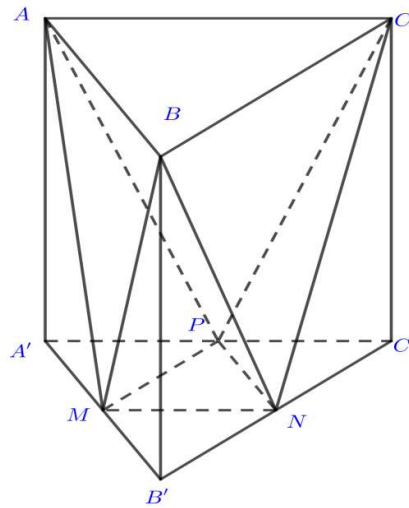
Suy ra $\frac{V_1}{V_2} = \frac{7}{11}$.

Câu 6: Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N và P lần lượt là trung điểm của $A'B'$; $B'C'$ và $C'A'$. Thể tích của khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm A, B, C, M, N, P là V_1 và thể tích của khối lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ là V . Tính tỷ số $\frac{V_1}{V}$?

A. $\frac{4}{5}$.B. $\frac{1}{4}$.C. $\frac{2}{3}$.D. $\frac{3}{4}$.

Lời giải

Chọn D



Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V = AA'.S_{\Delta A'B'C'}$.

Gọi thể tích của khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm A, B, C, M, N, P là V_1 .

Ta có $V_1 = V - V_{AA'MP} - V_{BB'MN} - V_{CC'NP}$.

$$V_{AA'MP} = \frac{1}{3} AA'.S_{\Delta A'MP} = \frac{1}{3} AA'.\frac{1}{4} S_{\Delta A'B'C'} = \frac{1}{12} V.$$

$$V_{BB'MN} = \frac{1}{3} BB'.S_{\Delta B'MN} = \frac{1}{3} BB'.\frac{1}{4} S_{\Delta A'B'C'} = \frac{1}{12} V.$$

$$V_{CC'NP} = \frac{1}{3} CC'.S_{\Delta C'NP} = \frac{1}{3} CC'.\frac{1}{4} S_{\Delta A'B'C'} = \frac{1}{12} V.$$

$$\text{Vậy } V_1 = V - V_{AA'MP} - V_{BB'MN} - V_{CC'NP} = V - \frac{3}{12} V = \frac{3}{4} V.$$

$$\text{Do đó } \frac{V_1}{V} = \frac{3}{4}$$

Câu 7: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$, đáy là tam giác đều cạnh a , $AA' = a\sqrt{2}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh $AB; A'C'$. Gọi (α) là mặt phẳng qua MN vuông góc với $(BB'C'C)$. Giả sử (α) chia lăng trụ $ABC.A'B'C'$ thành 2 phần có thể tích $V_1; V_2$ với V_1 là thể tích khối đa diện chứa A . Đặt $k = \frac{V_1}{V_2}$, mệnh đề nào dưới đây đúng

A. $k \in (0,6; 0,9)$.

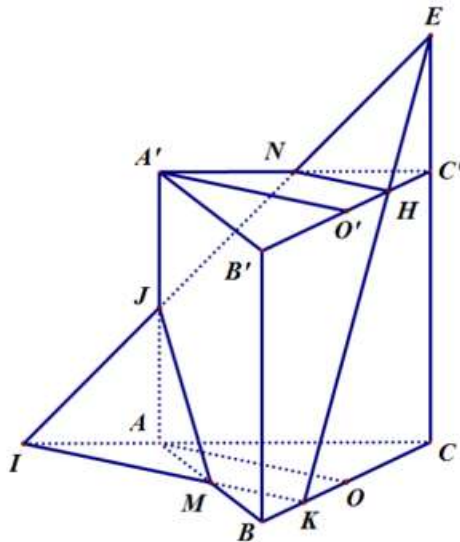
B. $k \in (0,9; 1,2)$.

C. $k \in (1,2; 1,5)$.

D. $k \in (1,5; 1,8)$.

Lời giải

Chọn B



Gọi $O; O'$ lần lượt là trung điểm của $BC; B'C'$, ta có $AO; A'O' \perp (BCC'B') \Rightarrow (\alpha) // AO; A'O'$.

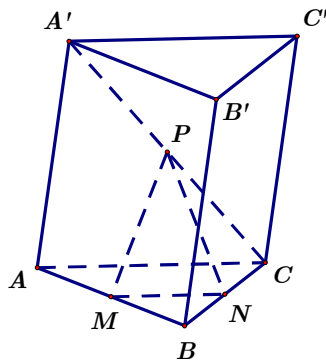
Gọi K, H lần lượt là trung điểm $BO; O'C'$. Gọi $MK \cap AC = I; IN \cap AA' = J$.

Ta có $IN; KH; CC'$ đồng quy tại E .

Gọi $h = AA'; S = S_{ABC}; V_{ABCA'B'C'} = V$.

$$\begin{aligned} V_1 &= V_{IKEC} - V_{ENHC'} - V_{ALIM} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} h \cdot (S - \frac{1}{8}S + \frac{1}{4}S) - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} h \cdot \frac{1}{8}S - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} h \cdot \frac{1}{4}S = \frac{1}{2}V. \\ &\Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = 1. \end{aligned}$$

Câu 8: Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh $AB, BC, A'C$. Mặt phẳng (MNP) cắt các cạnh AA', CC' tại các điểm I, J . Tỷ số thể tích của khối đa diện $AIMCJN$ và khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là



A. $\frac{7}{24}$.

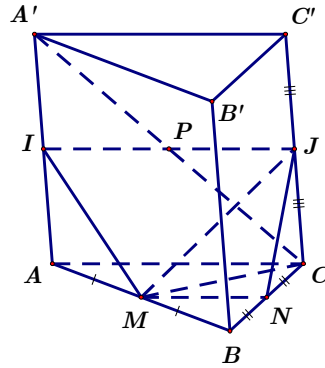
B. $\frac{1}{4}$.

C. $\frac{1}{3}$.

D. $\frac{5}{24}$.

Lời giải

Chọn D



Xét mặt phẳng (MNP) và $(ACC'A')$ có $AC \parallel MN$, điểm P chung. Suy ra giao tuyến của (MNP) và $(ACC'A')$ là đường thẳng d qua P song song với AC

Trong mặt phẳng $(ACC'A')$ đường thẳng d cắt AA', CC' tại các điểm I, J . Do đó I, J là giao điểm của (MNP) với AA', CC' .

Mặt khác P là trung điểm của AC suy ra I, J là trung điểm của AA', CC' .

Gọi V là thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$

Ta có $V_{AIMCJN} = V_{J.MNC} + V_{M.ACJI}$

$$V_{J.MNC} = \frac{1}{3} S_{MNC} \cdot d(J, (ABC)) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} S_{ABC} \cdot \frac{1}{2} d(C', (ABC)) = \frac{V}{24}$$

$$V_{M.ACJI} = \frac{1}{3} S_{ACJI} \cdot d(M, (ACC'A')) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} S_{ACC'A'} \cdot \frac{1}{2} d(B, (ACC'A')) = \frac{1}{12} S_{ACC'A'} \cdot d(B, (ACC'A'))$$

$$\text{Mà } \frac{1}{3} S_{ACC'A'} \cdot d(B, (ACC'A')) = V_{B.ACC'A'} = \frac{2V}{3} \Rightarrow V_{M.ACJI} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2V}{3} = \frac{V}{6}$$

$$\text{Vậy } V_{AIMCJN} = \frac{V}{24} + \frac{V}{6} = \frac{5V}{24} \Rightarrow \frac{V_{AIMCJN}}{V} = \frac{5}{24}.$$

Câu 9: Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có $AA' = 2a$, đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B có $AB = BC = a, AD = 2a$. Gọi M, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AD, BB' . Mặt phẳng (P) chứa MQ và vuông góc với $(CDD'C')$ chia khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ thành hai khối đa diện, trong đó V_1 là thể tích khối đa diện chứa đỉnh A . Tính V_1 ?

A. $V_1 = \frac{5}{9}a^3$.

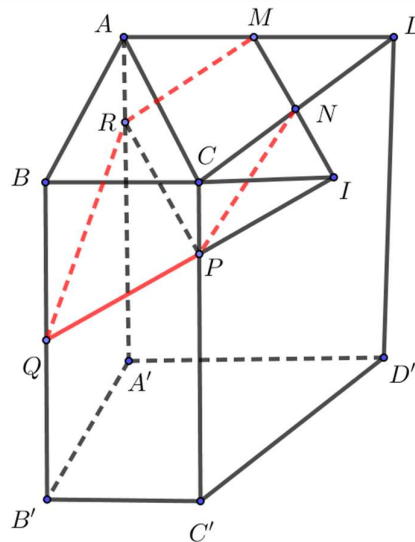
B. $V_1 = \frac{7}{9}a^3$.

C. $V_1 = \frac{11}{24}a^3$.

D. $V_1 = \frac{13}{24}a^3$.

Lời giải

Chọn D



Tứ giác $ABCM$ là hình vuông $\Rightarrow CM = AB = a = \frac{1}{2}AD \Rightarrow \Delta ACD$ vuông tại C .

Ta có $\begin{cases} AC \perp CD \\ AC \perp CC' \end{cases} \Rightarrow AC \perp (CDD'C') \text{ mà } (P) \perp (CDD'C') \Rightarrow AC \parallel (P)$

$\Rightarrow (P) \cap (ABCD) = MN, (N \in CD)$ sao cho $MN \parallel AC$.

Gọi $MN \cap BC = I, IQ \cap CC' = P$.

$AC \parallel (P) \Rightarrow (P) \cap (ACC'A') = PR, (R \in AA')$ sao cho $PR \parallel AC$.

Thiết diện của hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ cắt bởi (P) là ngũ giác $MNPQR$.

$$V_1 = V_{Q.ACPR} + V_{Q.ABC} + V_{M.ACPR} + V_{P.MCN}$$

$$= \frac{1}{3}d(B, (ACPR)) \cdot AC \cdot CP + \frac{1}{3}QB \cdot \frac{1}{2}AB \cdot BC + \frac{1}{3}d(M, AC) \cdot AC \cdot CP + \frac{1}{3}CP \cdot \frac{1}{2}MN \cdot CN$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \frac{a}{2} \cdot a\sqrt{2} + \frac{1}{6}a^3 + \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot a\sqrt{2} \cdot \frac{a}{2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{a}{2} \cdot \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{13}{24}a^3.$$

Câu 10: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh $2a$, $\widehat{(SB, (ABC))} = 60^\circ$, $SA \perp (ABC)$. Mặt phẳng (α) qua B và vuông góc với SC phân chia khối chóp $S.ABC$ thành hai khối đa diện.

Gọi V_1 là thể tích của khối đa diện mà chứa đỉnh S . Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_{S.ABC}}$.

A. $\frac{15}{16}$

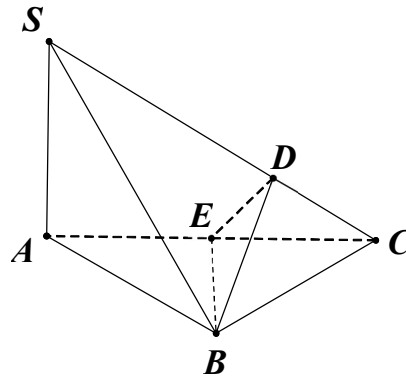
B. $\frac{5}{8}$

C. $\frac{3}{4}$

D. $\frac{2}{3}$

Lời giải

Chọn A



Gọi E là trung điểm AC , kẻ $ED \perp SC (D \in SC)$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} BE \perp AC \\ BE \perp SA \end{cases} \Rightarrow BE \perp (SAC) \Rightarrow BE \perp SC$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} SC \perp ED \\ SC \perp BE \end{cases} \Rightarrow SC \perp (BED) \text{ suy ra } (\alpha) \equiv (BED).$$

$$\text{Ta có } (\widehat{SB, (ABC)}) = \widehat{SBA} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{SCA} = 60^\circ \text{ (vì } \triangle SAB = \triangle SAC)$$

$$\Rightarrow SC = 4a, CD = EC \cdot \cos 60^\circ = \frac{a}{2}.$$

$$\Rightarrow \frac{CD}{CS} = \frac{1}{8}.$$

$$\text{Ta lại có } \frac{V_{C.BED}}{V_{S.ABC}} = \frac{CD}{CS} \cdot \frac{CE}{CA} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16} \Rightarrow \frac{V_{SABED}}{V_{S.ABC}} = \frac{15}{16}.$$

Câu 11: Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC và E là điểm đối xứng với B qua D . Mặt phẳng (MNE) chia khối tứ diện thành hai phần, trong đó khối đa diện chứa đỉnh A có thể tích là V_1 , khối đa diện còn lại có thể tích V_2 . Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ là:

A. $\frac{7}{11}$.

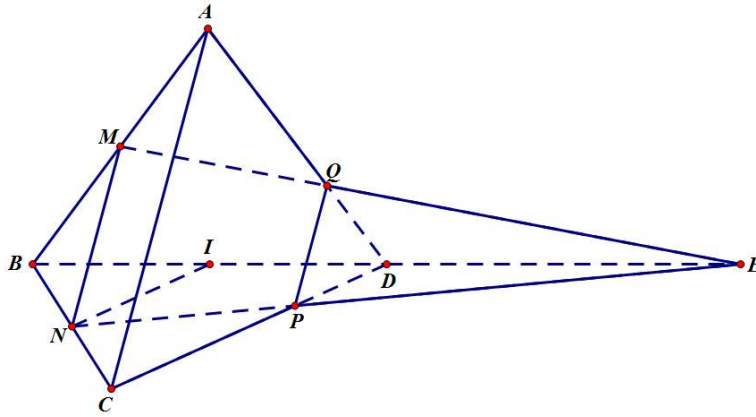
B. $\frac{11}{7}$.

C. $\frac{13}{5}$.

D. 2.

Lời giải

Chọn B



Ta có: Thể tích khối tứ diện $ABCD$ là $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12} = \frac{1}{3}Sh$ với $S = S_{\triangle BCD}$, $h = d(A, (BCD))$.

Gọi $P = EN \cap CD$, $Q = EM \cap AD$, I là trung điểm đoạn thẳng BD .

Dễ thấy, $S_{\triangle PDE} = \frac{4}{9}S_{\triangle NEI} \Rightarrow S_{\triangle NEI} = \frac{9}{4}S_{\triangle PDE}$.

Mà $S_{\triangle BNI} = \frac{1}{4}S_{\triangle BCD} = \frac{1}{4}S \Rightarrow S_{\triangle NEI} = \frac{3}{4}S$. Do đó $S_{\triangle PDE} = \frac{1}{3}S$.

Lại có, $d(M, (BCD)) = \frac{h}{2}$, $d(Q, (BCD)) = \frac{h}{3}$

$\Rightarrow V_{MBNE} = \frac{1}{3}S_{\triangle BNE}d(M, (BCD)) = \frac{V}{2}$, $V_{QPDE} = \frac{1}{3}S_{\triangle PDE}d(Q, (BCD)) = \frac{V}{9}$.

Từ đó suy ra $V_{QPDNMB} = \frac{V}{2} - \frac{V}{9} = \frac{7V}{18} = V_2$, $V_1 = V - \frac{7V}{18} = \frac{11V}{18}$.

Vậy $\frac{V_1}{V_2} = \frac{11}{7}$.

Câu 12: Cho khối chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $a\sqrt{2}$, biết khoảng cách từ tâm O của đáy đến mặt bên bằng $\frac{a}{2}$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh SB, SC ; M là điểm trên cạnh

SD sao cho $MS = 2MD$. Mặt phẳng (MEF) cắt SA tại N . Tính theo a thể tích khối chóp $S.EFMN$.

A. $\frac{7a^3\sqrt{2}}{108}$.

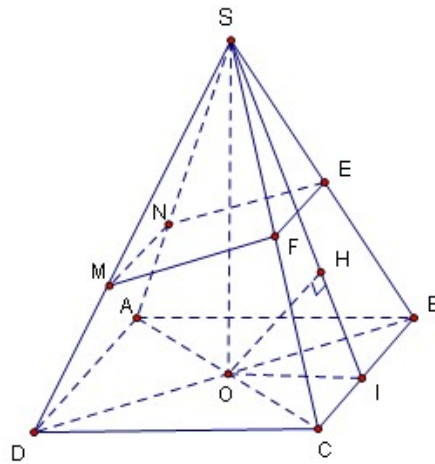
B. $\frac{a^3\sqrt{2}}{9}$.

C. $\frac{a^3\sqrt{2}}{36}$.

D. $\frac{7a^3\sqrt{2}}{36}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi I là trung điểm BC . Dựng $OH \perp SI, (H \in SI) \Rightarrow OH \perp (SBC)$

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OS^2} + \frac{1}{OI^2} \Rightarrow OS = \frac{a\sqrt{2}}{2}. V = V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot 2a^2 = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}.$$

$$\frac{V_{S.MNF}}{V_{S.DAC}} = \frac{2}{9} \Rightarrow V_{S.MNF} = \frac{2}{9} V_{S.DAC} = \frac{1}{9} V$$

$$; \text{ Suy ra } V_{S.MNEF} = \frac{7}{36} V = \frac{7}{36} \cdot \frac{a^3\sqrt{2}}{3} = \frac{7a^3\sqrt{2}}{108}$$

$$\frac{V_{S.NEF}}{V_{S.ABC}} = \frac{1}{6} \Rightarrow V_{S.NEF} = \frac{1}{6} V_{S.ABC} = \frac{1}{12} V$$

Câu 13: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành và có thể tích là V . Điểm E thuộc cạnh SC sao cho $SE = \frac{1}{3}SC$, một mặt phẳng qua AE cắt các cạnh SD và SB lần lượt tại M và N . Gọi

V_1 là thể tích khối chóp $S.AMEN$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $\frac{V_1}{V}$?

A. $\frac{1}{9}$.

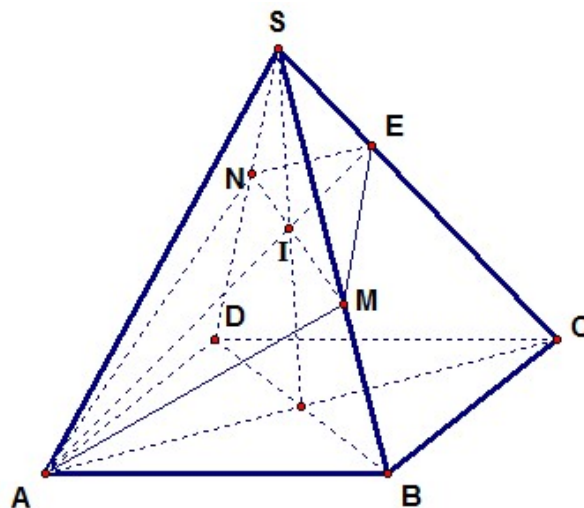
B. $\frac{1}{6}$.

C. $\frac{1}{3}$.

D. $\frac{1}{12}$.

Lời giải

Chọn B



Đặt $\frac{SM}{SB} = x, \frac{SN}{SD} = y, 0 < x, y \leq 1$.

$$\text{Vì } \frac{SA}{SA} + \frac{SC}{SE} = \frac{SB}{SM} + \frac{SD}{SN} \text{ nên } 1+3 = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \Rightarrow y = \frac{x}{4x-1}.$$

$$\text{Khi đó } \frac{V_1}{V} = \frac{V_{S.ANE}}{2V_{S.ADC}} + \frac{V_{S.AME}}{2V_{S.ABC}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{SA}{SA} \cdot \frac{SN}{SD} \cdot \frac{SE}{SC} + \frac{1}{2} \cdot \frac{SA}{SA} \cdot \frac{SM}{SB} \cdot \frac{SE}{SC} = \frac{1}{2} \cdot y \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot x \cdot \frac{1}{3}.$$

$$= \frac{1}{6}(x+y) = \frac{1}{6}\left(x + \frac{x}{4x-1}\right).$$

$$\text{Vì } x > 0, y > 0 \text{ nên } \frac{1}{4} < x \leq 1.$$

$$\text{Xét hàm số } f(x) = \frac{1}{6}\left(x + \frac{x}{4x-1}\right) \text{ trên } \left(\frac{1}{4}; 1\right].$$

$$\text{Ta có } f'(x) = \frac{1}{6}\left(1 - \frac{1}{(4x-1)^2}\right).$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Bảng biến thiên

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{9}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $\frac{V_1}{V}$ bằng $\frac{1}{6}$.

Câu 14: Cho khối tứ diện $ABCD$ có thể tích bằng 1. Trên cạnh AB lấy điểm M sao cho $BM = 2AM$, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CD . Biết (MNP) cắt AD tại Q . Khối đa diện $MAQNCP$ có thể tích bằng

A. $\frac{7}{9}$.

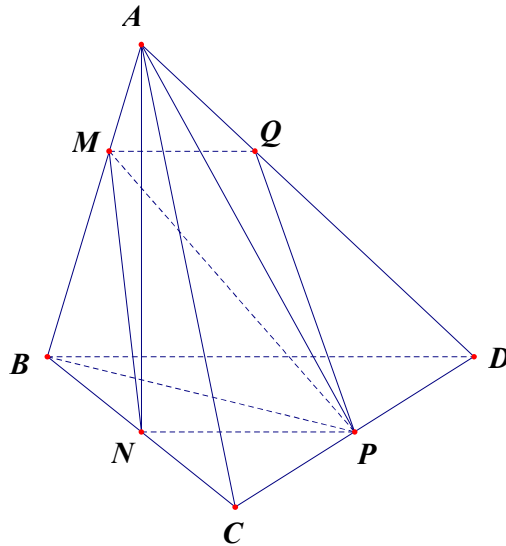
B. $\frac{5}{16}$.

C. $\frac{7}{18}$.

D. $\frac{5}{8}$.

Lời giải

Chọn C



$$\text{Ta thấy } \begin{cases} NP \subset (MNP) \\ BD \subset (ABD) \\ M \in (MNP) \cap (ABD) \end{cases} \Rightarrow (MNP) \cap (ABD) = MQ // BD (Q \in AD).$$

Chia khối đa diện $MAQNCP$ thành các khối chóp tam giác : $A.NCP, A.MNP, A.MPQ$.

$$\text{Ta có : } V_{A.NCP} = \frac{S_{NCP}}{S_{BCD}} \cdot V_{ABCD} = \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{4}.$$

$$V_{A.MNP} = \frac{AM}{AB} \cdot V_{A.BNP} = \frac{1}{3} \cdot V_{A.BNP} = \frac{1}{3} \cdot \frac{S_{BNP}}{S_{BCD}} \cdot V_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

$$V_{A.MPQ} = \frac{AM}{AB} \cdot \frac{AQ}{AD} \cdot V_{A.BPD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{S_{BPD}}{S_{BCD}} \cdot V_{ABCD} = \frac{1}{18}.$$

$$\text{Vậy } V_{MAQNCP} = \frac{1}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{18} = \frac{7}{18}.$$

Câu 15: Cho hình chóp $S.ABCDEF$ có đáy $ABCDEF$ là hình lục giác đều tâm O . Gọi M là trung điểm của cạnh SD . Mặt phẳng (AMF) cắt các cạnh SB, SC, SE lần lượt tại H, K, N . Gọi V_1, V lần

lượt là thể tích của các khối chóp $S.AHKMNF$ và $S.ABCDEF$. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V}$

A. $\frac{V_1}{V} = \frac{1}{3}.$

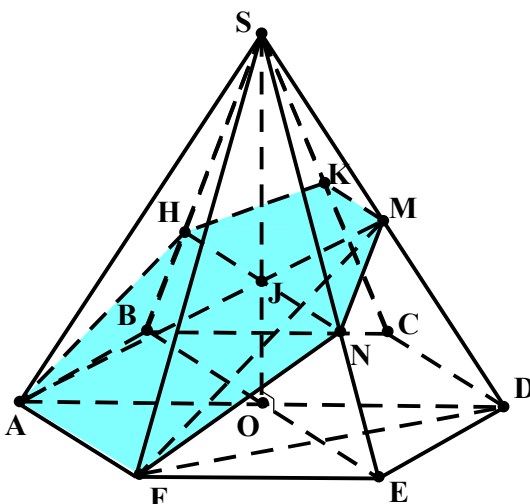
B. $\frac{V_1}{V} = \frac{1}{9}.$

C. $\frac{V_1}{V} = \frac{13}{36}.$

D. $\frac{V_1}{V} = \frac{14}{27}.$

Lời giải

Chọn C



Go to $J = AM \cap SO$.

Vì $AF \parallel CD$ nên $(AMF) \cap (SCD) = MK$ với $MK \parallel CD$

Vì $AF // BE$ nên $(AMF) \cap (SBE) = HN$ với $HN // BE$

Ta có J là trọng tâm của tam giác SAD nên $\frac{SJ}{SO} = \frac{2}{3}$

Mà $HN // BE$ suy ra $\frac{SH}{SB} = \frac{SN}{SE} = \frac{SJ}{SQ} = \frac{2}{3}$

Lại có $MK \parallel CD$ suy ra $\frac{SK}{SC} = \frac{SM}{SD} = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó: } \frac{V_1}{V} &= \frac{V_{S.AHKMNf}}{V_{S.ABCDEF}} = \frac{V_{S.AHK} + V_{S.AKM} + V_{S.AMf} + V_{S.FMN}}{V_{S.ABCDEF}} \\ &= \frac{V_{S.AHK}}{V_{S.ABCDEF}} + \frac{V_{S.AKM}}{V_{S.ABCDEF}} + \frac{V_{S.AMf}}{V_{S.ABCDEF}} + \frac{V_{S.FMN}}{V_{S.ABCDEF}} \\ &= \frac{V_{S.AHK}}{6V_{S.ABC}} + \frac{V_{S.AKM}}{3V_{S.ACD}} + \frac{V_{S.AMf}}{3V_{S.ADF}} + \frac{V_{S.FMN}}{6V_{S.FDE}} \quad (\text{vì } V_{S.ABCDEF} = 6V_{S.ABC} = 3V_{S.ACD} = 3V_{S.ADF} = 6V_{S.FDE}) \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{SH}{SB} \cdot \frac{SK}{SC} + \frac{1}{3} \cdot \frac{SK}{SC} \cdot \frac{SM}{SD} + \frac{1}{3} \cdot \frac{SM}{SD} + \frac{1}{6} \cdot \frac{SM}{SD} \cdot \frac{SN}{SE} \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \\ &= \frac{1}{18} + \frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{18} = \frac{13}{36}. \end{aligned}$$

Câu 16: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có các cạnh bên tạo với đáy góc 45° và thể tích bằng $\frac{8a^3\sqrt{2}}{6}$. Mặt phẳng (α) thay đổi song song với mặt phẳng $(ABCD)$ lần lượt cắt các cạnh SA, SB, SC, SD tại M, N, P, Q . Qua M, N, P, Q kẻ các đường thẳng song song với nhau, lần lượt cắt mặt đáy $(ABCD)$ tại M', N', P', Q' . Biết tỉ số thể tích giữa khối hộp $MNPQ.M'N'P'Q'$ và khối chóp cắt $MNPQ.ABCD$ bằng $\frac{3}{7}$. Tính chiều cao của hình chóp cắt $MNPQ.ABCD$?

A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

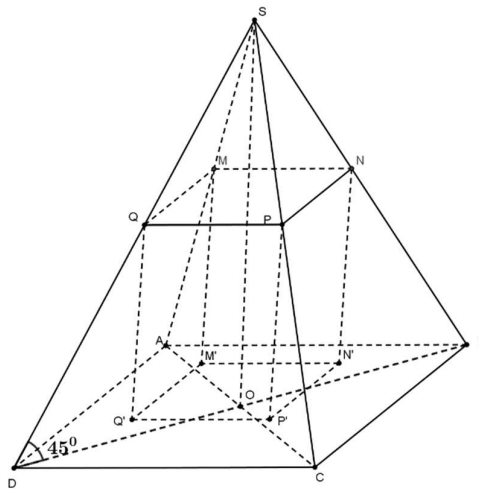
B. $a\sqrt{2}$.

C. $\frac{a\sqrt{2}}{4}$.

D. a .

Lời giải

Chọn A



Đặt $AB = x$ thì $S_{ABCD} = x^2$ và $DO = \frac{x\sqrt{2}}{2}$.

Ta có $\left(\widehat{SD, (ABCD)}\right) = \widehat{SDO} = 45^\circ$, do đó: $SO = DO = \frac{x\sqrt{2}}{2}$.

Mà $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot x^2 \cdot \frac{x\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{x^3\sqrt{2}}{6} = \frac{8a^3\sqrt{2}}{6} \Leftrightarrow x = 2a$.

Đặt $MN = y$ và h là chiều cao của hình chóp cắt $MNPQ.ABCD$.

Suy ra $V_{MNPQ.M'N'P'Q'} = y^2h$ và

$$V_{MNPQ.ABCD} = \frac{S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2}{3} \cdot h = \frac{(x^2 + xy + y^2)h}{3}$$

Theo bài: $\frac{V_{MNPQ.M'N'P'Q'}}{V_{MNPQ.ABCD}} = \frac{3y^2}{x^2 + xy + y^2}$

$$\Leftrightarrow \frac{3y^2}{4a^2 + 2ay + y^2} = \frac{3}{7}$$

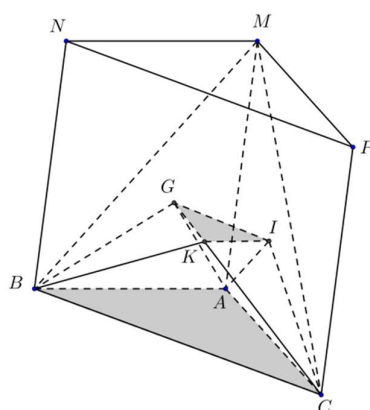
$$\Leftrightarrow 6y^2 - 2ay - 4a^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow y = a$$

$$\text{Khi đó: } \frac{y}{x} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{SO-h}{SO} = \frac{1}{2} \Rightarrow h = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Dạng 2. CHIA HÌNH CHÓP, HÌNH LĂNG TRỤ THÀNH CÁC KHỐI ĐA DIỆN KHÁC NHAU BỞI VIỆC LẤY THÊM CÁC ĐIỂM THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC. TÍNH THỂ TÍCH MỘT TRONG HAI KHỐI ĐÓ

Câu 1: Cho hình lăng trụ $ABC.MNP$ có chiều cao $h = 3$ và diện tích đáy $S = 27$. Gọi G, I, K lần lượt là trọng tâm các tam giác ABM, ACM, BCM . Tính thể tích khối đa diện tạo bởi các điểm G, I, K, A, B, C .



A. 15.

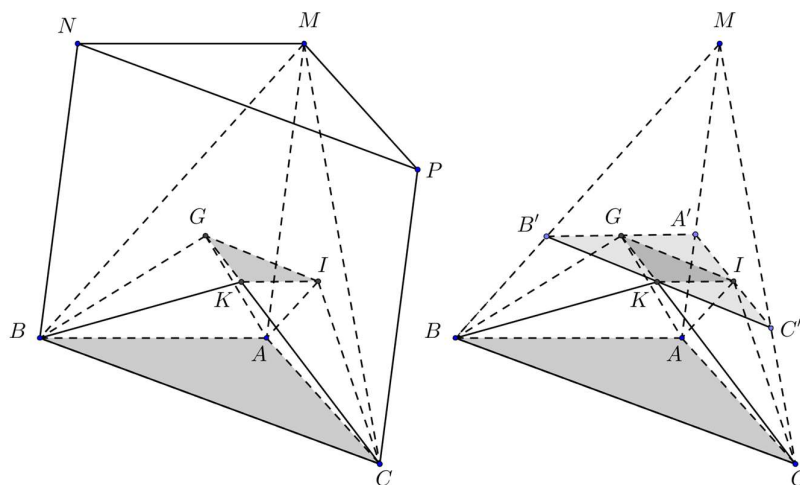
B. 16.

C. 18.

D. 21.

Lời giải

Chọn B



Ta xét khối tứ diện $M.ABC$, vẽ mặt phẳng $(A'B'C') \parallel (ABC)$ và đi qua các điểm G, I, K như hình vẽ.

$$\text{Nhận xét: } V_{M.A'B'C'} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot V_{MABC} \Rightarrow V_{A'B'C'.ABC} = \frac{19}{27} V_{M.ABC}.$$

$$V_{B.B'GK} = \frac{1}{2} V_{M.B'GK} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot V_{M.A'B'C'} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 V_{M.ABC} = \frac{1}{27} V_{M.ABC}$$

$$\text{Vậy } V_{GKI.ABC} = V_{A'B'C'.ABC} - 3V_{B.B'GK} = \frac{16}{27} V_{M.ABC} = \frac{16}{27} \cdot \frac{1}{3} V_{ABC.MNP} = 16.$$

Câu 2: Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có độ dài tất cả các cạnh bằng 2. Gọi M là trung điểm AB và N là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AN}$. Thể tích của khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm A, M, N, A', B' và C' bằng

A. $\frac{10\sqrt{3}}{3}$.

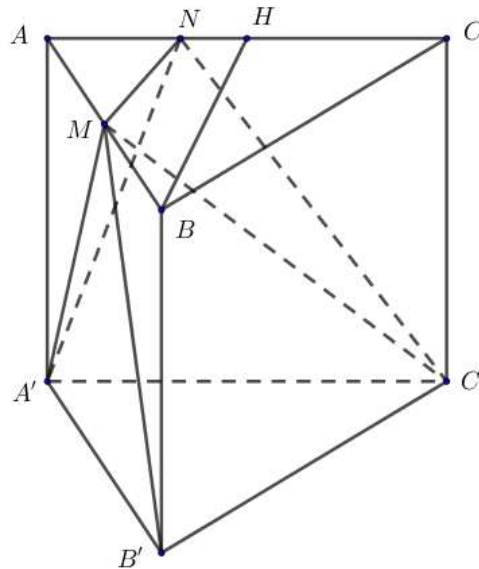
B. $\frac{2\sqrt{3}}{9}$.

C. $\frac{10\sqrt{3}}{9}$.

D. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi V là thể tích của khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm A, M, N, A', B' và C' .

Khi đó ta có: $V = V_{M.AA'C'N} + V_{M.A'B'C'}$.

$$\text{Ta có } S_{AA'C'N} = \frac{1}{2} AA' (AN + A'C') = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \left(\frac{2}{3} + 2\right) = \frac{8}{3}.$$

Gọi H là trung điểm của AC thì $BH \perp (ACC'A')$ và $BH = \sqrt{3}$ (do ABC là tam giác đều cạnh

$$\text{bằng } 2), \text{ suy ra } d(M, (ACC'A')) = \frac{1}{2} d(B, (ACC'A')) = \frac{1}{2} BH = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Suy ra } V_{M.AA'C'N} = \frac{1}{3} d(M, (ACC'A')) \cdot S_{AA'C'N} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{8}{3} = \frac{4\sqrt{3}}{9}.$$

$$V_{M.A'B'C'} = \frac{1}{3} d(M, (A'B'C')) \cdot S_{\Delta A'B'C'} = \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot \frac{4\sqrt{3}}{4} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{Vậy } V = V_{M.AA'C'N} + V_{M.A'B'C'} = \frac{4\sqrt{3}}{9} + \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{10\sqrt{3}}{9}.$$

Câu 3: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AA' = 2a$, $AB = BC = a$, $\widehat{ABC} = 90^\circ$. Gọi D, E, F lần lượt là trọng tâm của các tam giác $BA'B'$, $CC'B'$, $A'AC$. Tính thể tích khối đa diện $AEBDF$

A. $\frac{14a^3}{81}$.

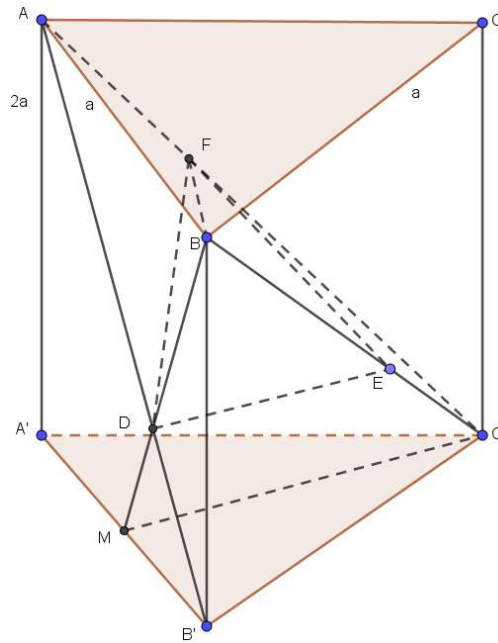
B. $\frac{16a^3}{81}$.

C. $\frac{14a^3}{49}$.

D. $\frac{16a^3}{27}$.

Lời giải

Chọn A



+) Ta có $V_{AEBDF} = V_{A.BDF} + V_{E.BDF}$

$$+) V_{A.BDF} = \frac{AD}{AB'} \cdot \frac{AB}{AB} \cdot \frac{AF}{AC'} \cdot V_{A.B'BC'} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} AB \cdot S_{BB'C'} = \frac{2}{27} \cdot a \cdot \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot a = \frac{2}{27} a^3$$

$$+) V_{E.BDF} = \frac{1}{3} d(F; (BDE)) \cdot S_{\Delta BDE}$$

$$+) \text{Ta có } d(F; (BDE)) = d(F; (BMC')) = \frac{2}{3} d(A; (BMC'))$$

$$= \frac{2}{3} \cdot 2 \cdot d(B'; (BMC')) = \frac{4}{3} d(B'; (BMC')).$$

+) Mặt khác tứ diện $B'BMC'$ có 3 góc đỉnh B' vuông nên:

$$\frac{1}{d^2(B'; (BMC'))} = \frac{1}{B'B^2} + \frac{1}{B'M^2} + \frac{1}{B'C'^2} = \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{21}{4a^2}.$$

$$\text{Suy ra } d(B';(BMC')) = \frac{2a\sqrt{21}}{21} \Rightarrow d(F;(BDE)) = \frac{4}{3} \cdot \frac{2a\sqrt{21}}{21} = \frac{8a\sqrt{21}}{63}.$$

$$+) S_{\triangle BDE} = \frac{4}{9} S_{\triangle BMC'}, \text{ tam giác } BMC' \text{ có: } BC' = a\sqrt{5}, BM = \sqrt{4a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{17}}{2}, MC' = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

$$\text{Từ đó suy ra } S_{\triangle BMC'} = \frac{a^2\sqrt{21}}{4} \Rightarrow S_{\triangle BDE} = \frac{a^2\sqrt{21}}{9}.$$

$$\text{Nên } V_{E.BDF} = \frac{1}{3} \cdot \frac{8a\sqrt{21}}{63} \cdot \frac{a^2\sqrt{21}}{9} = \frac{8a^3}{81}.$$

$$\text{Vậy } V_{AE BDF} = V_{A.BDF} + V_{E.BDF} = \frac{2}{27} a^3 + \frac{8a^3}{81} = \frac{14a^3}{81}$$

Câu 4: Cho khối lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có diện tích đáy bằng 6 và chiều cao bằng 8. Gọi I là tâm của hình bình hành $ABB'A'$ và G là trọng tâm tam giác ABC . Thể tích tứ diện $BIGC'$ bằng

A. $\frac{8}{3}$.

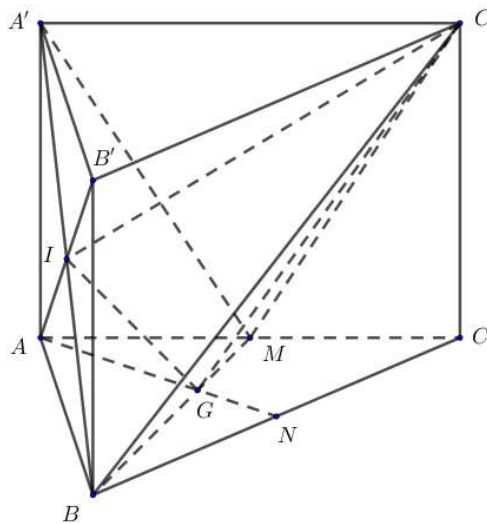
B. $\frac{16}{9}$.

C. $\frac{16}{3}$.

D. $\frac{8}{9}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có $V_{ABC.A'B'C'} = 48$.

Gọi M là trung điểm của AC .

$$\text{Ta có: } \frac{V_{B.GIC'}}{V_{B.MA'C'}} = \frac{BG}{BM} \cdot \frac{BI}{BA'} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \Rightarrow V_{B.GIC'} = \frac{1}{3} V_{B.MA'C'} \quad (1).$$

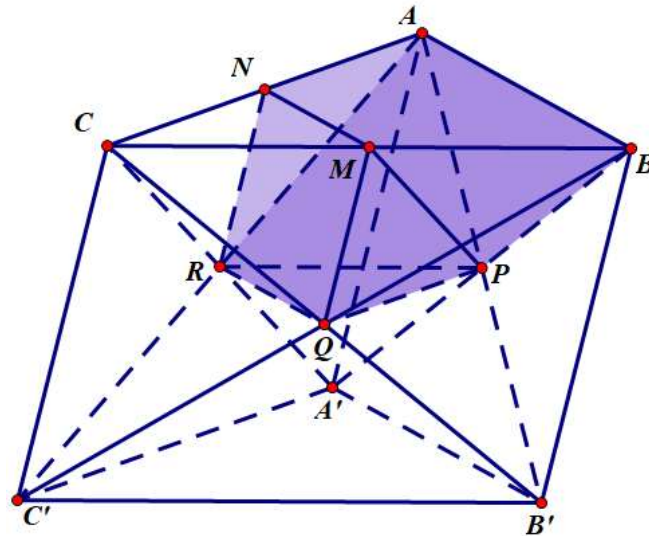
$$\text{Mặt khác } S_{\triangle MA'C'} = \frac{1}{2} d_{(M,A'C')} \cdot A'C' = \frac{1}{2} d_{(A,A'C')} \cdot A'C' = S_{\triangle AA'C'} = \frac{1}{2} S_{\triangle ACC'A'}.$$

$$\text{Mà } \frac{V_{B.MA'C'}}{V_{B.ACC'A'}} = \frac{S_{\triangle MA'C'}}{S_{\triangle ACC'A'}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow V_{B.MA'C'} = \frac{1}{2} V_{B.ACC'A'} \quad (2).$$

$$\text{Lại có } V_{B.ACC'A'} = \frac{2}{3} \cdot V_{ABC.A'B'C'} = \frac{2}{3} \cdot 48 = 32 \quad (3).$$

$$\text{Từ (1), (2) và (3) suy ra } V_{B.GIC'} = \frac{16}{3}.$$

Câu 5: Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có diện tích đáy bằng 12 và chiều cao bằng 6. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của CB, CA và P, Q, R lần lượt là tâm các hình bình hành $ABB'A', BCC'B', CAA'C'$. Thể tích của khối đa diện $PQRABMN$ bằng



A. 21.

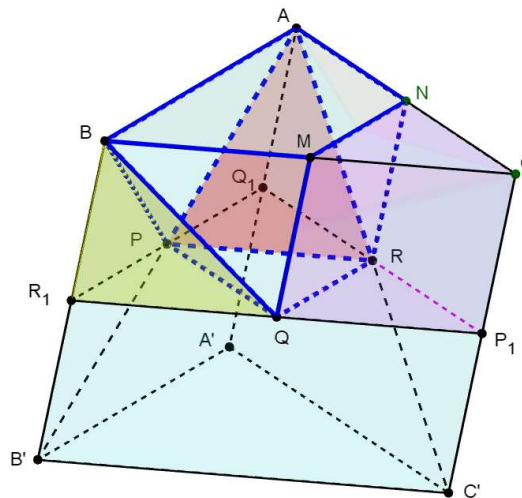
B. 42.

C. 14.

D. 18.

Lời giải

Chọn A



- Gọi P_1, Q_1, R_1 lần lượt là các giao điểm của CC', AA', BB' và mặt phẳng (PQR) .
- Đặt $V = V(ABC.A'B'C')$ và $V_1 = V(PQRABMN)$, ta có $V = 72$.
- Lại có: $V_{ABCP_1Q_1R_1} = \frac{1}{2}V = 36$ và $V_{ABCP_1Q_1R_1} = V_1 + V_{AQ_1RP} + V_{BR_1PQ} + V_{CMNP_1QR} \quad (*)$.

- $$\bullet \text{ V}_1 \frac{V_{AQ_1PR}}{V_{AA'C'B'}} = \frac{AQ_1 \cdot AR \cdot AP}{AA' \cdot AC' \cdot AB'} = \frac{1}{8} \text{ mà } V_{AA'C'B'} = \frac{1}{3}V = 24 \text{ nên } V_{AQ_1PR} = 3.$$

Tương tự có $V_{BR_1PO} = 3$.

- Do $CMNP_1QR$ là hình lăng trụ tam giác nên $V_{CMNP_1QR} = S_{\Delta CMN} \cdot d(P_1, (ABC)) = \frac{1}{8}V = 9$.
- Thay vào (*) $\Leftrightarrow 36 = V_1 + 3 + 3 + 9 \Leftrightarrow V_1 = 21$.

Câu 6: Cho lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N, P, Q là các điểm lần lượt thuộc các cạnh $AA', BB', CC', B'C'$ thỏa mãn $\frac{AM}{AA'} = \frac{1}{2}, \frac{BN}{BB'} = \frac{1}{3}, \frac{C'Q}{B'C'} = \frac{1}{5}$. Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích khối tứ diện $MNPQ$ và khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Tính tỷ số $\frac{V_1}{V_2}$.

A. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{11}{30}$.

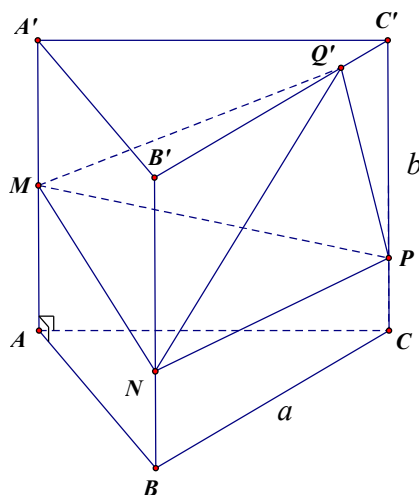
B. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{11}{45}$.

C. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{19}{45}$.

D. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{22}{45}$.

Lời giải

Chon B



Đặt $BC = a, CC' = b, (a, b > 0)$.

Diện tích tam giác NPQ' là: $S_{NPQ'} = S_{BCC'B'} - (S_{NB'Q'} + S_{PC'Q'} + S_{BCPN}) = \frac{11ab}{30}$

Suy ra: $\frac{V_{M.NPQ'}}{V_{A'BCC'B'}} = \frac{11}{30}$. Tức là: $\frac{V_1}{V_{A'BCC'B'}} = \frac{11}{30}$.

Mặt khác: $V_{A'.BCC'B'} + V_{A'.ABC} = V_{ABC.A'B'C'} \Leftrightarrow V_{A'.BCC'B'} + \frac{1}{3}V_2 = V_2 \Leftrightarrow V_{A'.BCC'B'} = \frac{2}{3}V_2$

$$\text{Do đó: } \frac{V_1}{\frac{2}{3}V_2} = \frac{11}{30} \Leftrightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{11}{45}.$$

Câu 7: Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$, gọi M, N, P là tâm của ba mặt bên $ABA'B'$, $ACA'C'$, $BCB'C'$ và G, G' là trọng tâm của hai đáy $ABC, A'B'C'$ biết thể tích khối lăng trụ bằng 24. Tính thể tích khối đa diện lồi có các đỉnh là G_1G_2MNP .

A. 2.

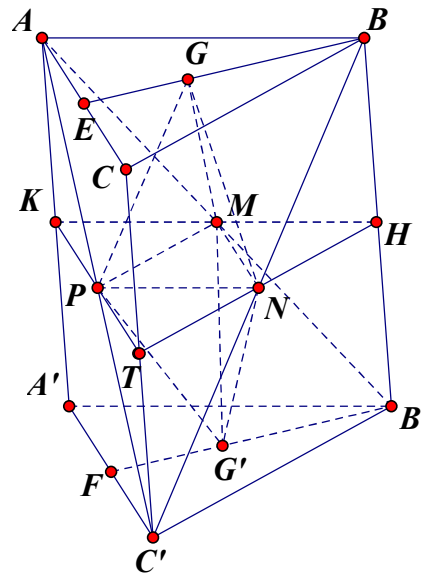
B. 6.

C. 4.

D. 3.

Lời giải

Chọn A



Gọi h, S là chiều cao và diện tích đáy của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$

Qua M, N, P kẻ các đường thẳng song song với $A'B', B'C', A'C'$

$$\text{Ta có } S_{MNP} = \frac{1}{4}S_{HTK} = \frac{S}{4}, d(G, (MNP)) = \frac{h}{2}$$

$$\text{Mà } V_{GG'MNP} = 2V_{G.MNP} = 2 \cdot \frac{1}{3}d(G, (MNP)) \cdot S_{MNP} = \frac{2}{3} \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{S}{4} = \frac{1}{12}V_{ABC.A'B'C'} = 2$$

Câu 8: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm của các cạnh $AB, A'B', AA', BC, B'C', CC'$. Biết thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng V . Tính thể tích khối đa diện $MNPQRS$.

A. $\frac{1}{3}V$.

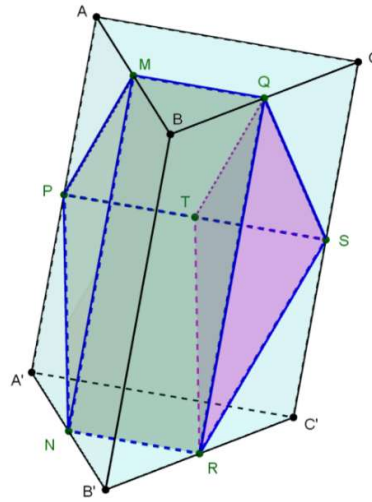
B. $\frac{1}{4}V$.

C. $\frac{2}{9}V$.

D. $\frac{3}{10}V$.

Lời giải

Chọn A



NHÓM TOÁN VD - VDC

NHÓM TOÀN VD - VDC

- Gọi T là trung điểm của PS thì $MNP.QRT$ là hình lăng trụ. Lúc đó:

$$V_{MNPQRS} = V_{MNP.QRT} + V_{T.QRS} \quad (1)$$

$$\bullet \text{ Vi: } \begin{cases} S_{MNP} = \frac{1}{4} \cdot S_{ABB'A'} \\ V_{C,A'B'C'} = \frac{1}{3} V \end{cases} \quad \text{nên} \quad \begin{cases} V_{C.ABB'A'} = \frac{2}{3} V \\ V_{MNP.QRT} = 3 \cdot V_{Q.MNP} \end{cases} \quad (2)$$

$$\bullet (2) \Rightarrow V_{MNP.QRT} = 3.V_{Q.MNP} = \frac{3}{4}V_{Q.ABB'.A'} = \frac{3}{8}V_{C.ABB'.A'} = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{3}V = \frac{1}{4}V \quad (3)$$

• Lúc đó: $V_{T.QRS} = \frac{1}{2}V_{P.QRS} = \frac{1}{2}V_{A.QRS} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}V_{A.BCC'B'} = \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{3}V = \frac{1}{12}V$ (4)

- (1), (3) và (4) suy ra: $V_{MNPQRS} = \frac{1}{4}V + \frac{1}{12}V = \frac{1}{3}V$.

- Vậy $V_{MNPQRS} = \frac{1}{3}V$.

$$= \frac{5}{36} V_{ABCD.A'B'C'D'} = \frac{5}{36}$$

Câu 9: Cho hình lăng trụ tứ giác $ABCD.A'B'C'D'$ có hai đáy $ABCD$ và $A'B'C'D'$ là các hình bình hành. Gọi M, N, P, Q lần lượt là các điểm thoả mãn $2\overrightarrow{MB} = -\overrightarrow{MA'}$; $3\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BC'}$; $3\overrightarrow{CP} = 2\overrightarrow{CD'}$ và $3\overrightarrow{AQ} = 2\overrightarrow{AD'}$. Biết rằng V, V_1 lần lượt là thể tích khối lăng trụ đã cho và khối đa diện lồi có các đỉnh A, B, C, D, M, N, P, Q . Tỉ số $\frac{V_1}{V}$ bằng

A. $\frac{16}{27}$.

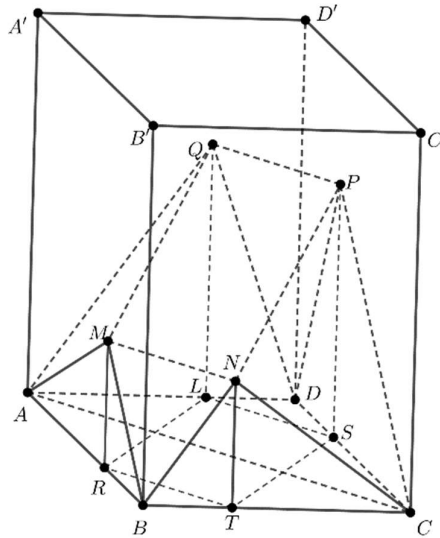
B. $\frac{7}{12}$.

C. $\frac{5}{12}$.

D. $\frac{11}{27}$.

Lời giải

Chọn D



Đặc biệt hóa $ABCD.A'B'C'D'$ thành hình lập phương có cạnh bằng 6 $\Rightarrow V = 216$.

Ta có $V_1 = V_{A.MRLQ} + V_{C.TSPN} + V_{B.RMNT} + V_{D.LSPQ} + V_{BLQM.TSPN}$

$$V_{A.MRLQ} = \frac{1}{3} S_{MRLQ} \cdot d(A; (MRLQ)) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} (2+4) \cdot 4\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} = 16$$

$$V_{B.RMNT} = \frac{1}{3} S_{RMNT} \cdot d(B; (RMNT)) = \frac{1}{3} \cdot 2\sqrt{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{2} = \frac{8}{3};$$

$$V_{D.LSPQ} = \frac{1}{3} S_{LSPQ} \cdot d(D; (LSPQ)) = \frac{1}{3} \cdot 2\sqrt{2} \cdot 4 \cdot \sqrt{2} = \frac{16}{3};$$

$$V_{RLQM.TSPN} = S_{RLQM} \cdot RT = \frac{1}{2} (4+2) \cdot 4\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} = 48.$$

$$\text{Suy ra } V_1 = 16 \cdot 2 + \frac{8}{3} + \frac{16}{3} + 48 = 88 \Rightarrow \frac{V_1}{V} = \frac{11}{27}.$$

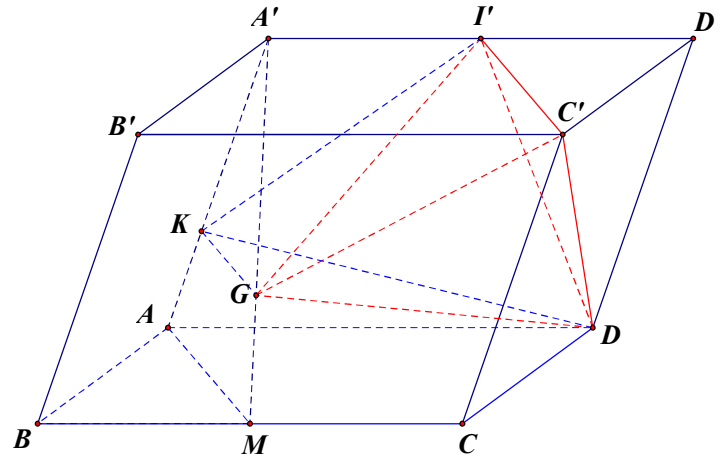
Câu 10: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích bằng 1. Gọi G là trọng tâm tam giác $A'BC$ và I' là trung điểm của $A'D'$. Thể tích khối tứ diện $GDC'I'$ bằng:

A. $\frac{7}{24}$.

B. $\frac{5}{24}$.

C. $\frac{7}{36}$.

D. $\frac{5}{36}$.



Qua G kẻ đường thẳng song song với AM , cắt AA' tại K . Khi đó: $GK \parallel AM \parallel I'C' \Rightarrow GK \parallel (DI'C')$.

$$\Rightarrow V_{GI'C'D} = \frac{1}{3} d(G, (I'C'D)) \cdot S_{I'C'D} = \frac{1}{3} d(K, (I'C'D)) \cdot S_{I'C'D} = V_{KI'C'D}$$

$$\text{Và } \frac{A'K}{A'A} = \frac{A'G}{A'M} = \frac{GK}{AM} = \frac{2}{3}$$

$$\text{Ta có: } S_{I'KD} = S_{ADA'D'} - S_{A'I'K} - S_{I'D'D} - S_{KAD} = S_{ADA'D'} \left(1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right) = \frac{5}{12} S_{ADA'D'}$$

$$\text{Suy ra } V_{GI'C'D} = V_{KI'C'D} = \frac{1}{3} d(D, (I'C'D)) \cdot S_{I'KD} = \frac{1}{3} d(D, (ADD'A')) \cdot \frac{5}{12} S_{ADA'D'}$$

Câu 11: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình chữ nhật. $AB = 1$, $AD = 2$. SA vuông góc với đáy và $SA = 3$. Gọi M, N, P lần lượt là chân đường cao hạ từ A lên các cạnh SB, SD, DB . Thể tích khối đa diện $ABMNP$ bằng

A. $\frac{17}{130}$.

B. $\frac{113}{130}$.

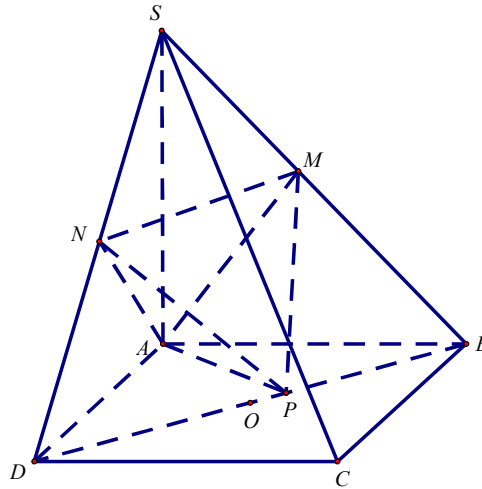
C. $\frac{81}{130}$.

D. $\frac{147}{130}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } SD^2 = SA^2 + AD^2 = 13, SB^2 = SA^2 + AB^2 = 10, BD^2 = AB^2 + AD^2 = 5$$



Ta có

$$\frac{SN}{SD} = \frac{SN \cdot SD}{SD^2} = \frac{SA^2}{SD^2} = \frac{9}{13} \Rightarrow \frac{SN}{SD} = \frac{9}{13},$$

$$\text{Tương tự ta có } \frac{SM}{SB} = \frac{SA^2}{SB^2} = \frac{9}{10} \Rightarrow \frac{SM}{SB} = \frac{9}{10}, \quad \frac{DP}{DB} = \frac{DA^2}{DB^2} = \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{DP}{DB} = \frac{4}{5}.$$

Ta có thể tích khối đa diện $V_{ABMNP} = V_{S.ABD} - V_{S.AMN} - V_{D.ANP}$.

$$+) \text{ Ta có thể tích khối tứ diện } V_{S.ABD} = \frac{1}{6} AS \cdot AB \cdot AD = 1.$$

$$+) \frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABD}} = \frac{SM \cdot SN}{SB \cdot SD} = \frac{9}{10} \cdot \frac{9}{13} = \frac{81}{130} \Rightarrow V_{S.AMN} = \frac{81}{130} V_{S.ABD}.$$

$$+) \frac{V_{D.ANP}}{V_{D.ASB}} = \frac{DN \cdot DP}{DS \cdot DB} = \left(\frac{SD - SN}{SD} \right) \cdot \frac{DP}{DB} = \left(1 - \frac{9}{13} \right) \cdot \frac{4}{5} = \frac{16}{65} \Rightarrow V_{D.ANP} = \frac{16}{65} V_{S.ABD}$$

$$\text{Vậy } V_{ABMNP} = V_{S.ABD} - V_{S.AMN} - V_{D.ANP} = \left(1 - \frac{81}{130} - \frac{16}{65} \right) V_{S.ABD} = \frac{17}{130} \cdot 1 = \frac{17}{130}.$$

Câu 12: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O . Gọi M, N lần lượt là trọng tâm các tam giác SAB và SCD ; I là trung điểm của SO . Biết thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng 2020, tính thể tích khối đa diện $IMNABCD$.

A. 1010.

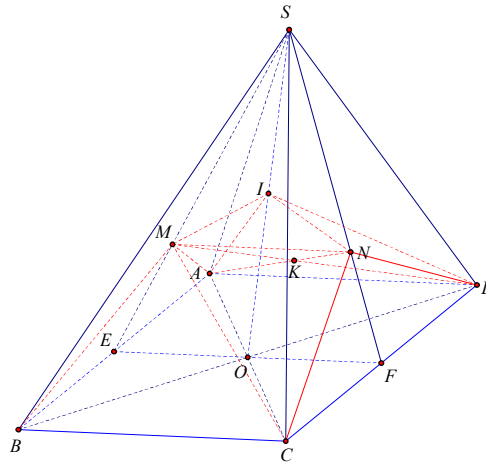
B. $\frac{18685}{18}$.

C. $\frac{17675}{18}$.

D. $\frac{4040}{3}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi E, F lần lượt là trung điểm của $AB, CD \Rightarrow MN \parallel EF \Rightarrow MN \parallel AD \parallel BC$.

Gọi V là thể tích của khối chóp $S.ABCD$ và V' là thể tích khối đa diện $IMNABCD$.

Ta có: $V' = V_{MNABCD} + V_{I.ADNM}$.

$$V_{MNABCD} = V_{M.ABCD} + V_{MNCD}$$

$$\text{Vì } M \text{ là trọng tâm } \triangle SAB \Rightarrow d(M; (ABCD)) = \frac{1}{3}d(S; (ABCD)) \Rightarrow V_{M.ABCD} = \frac{1}{3}V.$$

$$\text{Vì } N \text{ là trọng tâm } \triangle SCD \Rightarrow S_{\triangle NCD} = \frac{1}{3}S_{\triangle SCD}$$

$$\text{Lại có } d(M; (SCD)) = \frac{2}{3}d(E; (SCD)) = \frac{2}{3}d(A; (SCD))$$

$$\text{Từ đó suy ra } V_{MNCD} = \frac{2}{9}V_{A.SCD} = \frac{1}{9}V$$

$$V_{I.ADNM} = V_{AMNI} + V_{BAIN}$$

$$S_{\triangle SMN} = \frac{4}{9}S_{\triangle SEF}; S_{\triangle SMI} = \frac{1}{3}S_{\triangle SEO} = \frac{1}{6}S_{\triangle SEF}; S_{\triangle SNI} = \frac{1}{3}S_{\triangle SFO} = \frac{1}{6}S_{\triangle SEF}$$

$$\text{Suy ra } S_{\triangle IMN} = \frac{1}{9}S_{\triangle SEF} \Rightarrow V_{AMNI} = \frac{1}{9}V_{ASEF} = \frac{1}{36}V$$

Gọi K là giao điểm của AN và MD

$$\text{Vì } MN = \frac{2}{3}EF = \frac{2}{3}AD \Rightarrow \frac{KM}{KD} = \frac{2}{3} \Rightarrow V_{DANI} = \frac{3}{2}V_{MANI} = \frac{1}{24}V$$

$$\text{Vậy } V' = \frac{1}{3}V + \frac{1}{9}V + \frac{1}{36}V + \frac{1}{24}V = \frac{37}{72}V = \frac{18685}{18}$$

Câu 13: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có các cạnh bên tạo với đáy góc 45° và thể tích bằng $\frac{8a^3\sqrt{2}}{6}$. Mặt phẳng (α) thay đổi song song với mặt phẳng $(ABCD)$ lần lượt cắt các cạnh SA, SB, SC, SD tại M, N, P, Q . Qua M, N, P, Q kẻ các đường thẳng song song với nhau, lần lượt cắt mặt đáy $(ABCD)$ tại M', N', P', Q' . Biết tỉ số thể tích giữa khối hộp $MNPQ.M'N'P'Q'$ và khối chóp cắt $MNPQ.ABCD$ bằng $\frac{3}{7}$. Tính chiều cao của hình chóp cắt $MNPQ.ABCD$?

A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

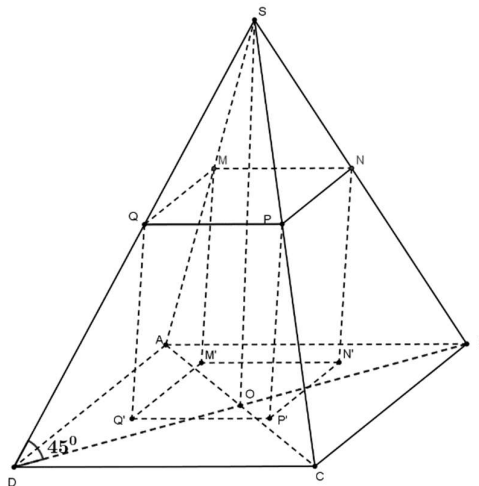
B. $a\sqrt{2}$.

C. $\frac{a\sqrt{2}}{4}$.

D. a .

Lời giải

Chọn A



Đặt $AB = x$ thì $S_{ABCD} = x^2$ và $DO = \frac{x\sqrt{2}}{2}$.

Ta có $\left(\widehat{SD, (ABCD)}\right) = \widehat{SDO} = 45^\circ$, do đó: $SO = DO = \frac{x\sqrt{2}}{2}$.

Mà $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot x^2 \cdot \frac{x\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{x^3\sqrt{2}}{6} = \frac{8a^3\sqrt{2}}{6} \Leftrightarrow x = 2a$.

Đặt $MN = y$ và h là chiều cao của hình chóp cắt $MNPQ.ABCD$.

Suy ra $V_{MNPQ.M'N'P'Q'} = y^2 h$ và

$$V_{MNPQ.ABCD} = \frac{S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2}{3} \cdot h = \frac{(x^2 + xy + y^2)h}{3}.$$

Theo bài: $\frac{V_{MNPQ.M'N'P'Q'}}{V_{MNPQ.ABCD}} = \frac{3y^2}{x^2 + xy + y^2}$

$$\Leftrightarrow \frac{3y^2}{4a^2 + 2ay + y^2} = \frac{3}{7}$$

$$\Leftrightarrow 6y^2 - 2ay - 4a^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow y = a$$

Khi đó: $\frac{y}{x} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{SO-h}{SO} = \frac{1}{2} \Rightarrow h = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 14: Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình bình hành tâm O có thể tích bằng V . Lấy điểm S' đối xứng với S qua O . Trên các cạnh $SA, S'A$ lần lượt lấy các điểm M, E sao cho $AM = 2MS, AE = 2ES'$. Mặt phẳng (α) đi qua M và song song với $(ABCD)$ cắt các cạnh SB, SC, SD lần lượt tại N, P, Q . Mặt phẳng (β) đi qua E và song song với $(ABCD)$ cắt các cạnh $S'B, S'C, S'D$ lần lượt tại F, G, H . Thể tích của khối đa diện có các đỉnh M, N, P, Q, E, F, G, H là

A. $\frac{4V}{9}$.

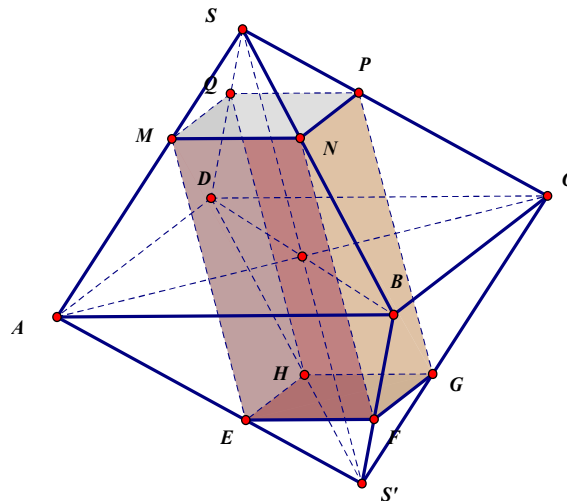
B. $\frac{2V}{9}$.

C. $\frac{4V}{3}$.

D. $\frac{4V}{27}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có khối đa diện có các đỉnh M, N, P, Q, E, F, G, H là khối lăng trụ có đáy là $MNPQ$ và $EFGH$

$$\text{Do đó } \frac{V_{MNPQ.EFGH}}{V_{S.ABCD}} = \frac{S_{MNPQ} \cdot d_{(M, (EFGH))}}{\frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot d_{(S, (ABCD))}}$$

Ta thấy $MNPQ$ và $ABCD$ đồng dạng với nhau theo tỷ số $k = \frac{MN}{AB} = \frac{SM}{SA} = \frac{1}{3}$

$$\text{Suy ra } \frac{S_{MNPQ}}{S_{ABCD}} = k^2 = \frac{1}{9}$$

$$\text{Mặt khác } \frac{d_{(M, (EFGH))}}{d_{(S, (ABCD))}} = \frac{2d_{(M, (ABCD))}}{d_{(S, (ABCD))}} = 2 \cdot \frac{MA}{SA} = 2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

$$\text{Vậy } \frac{V_{MNPQ.EFGH}}{V_{S.ABCD}} = \frac{S_{MNPQ} \cdot d_{(M,(EFGH))}}{\frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot d_{(S,(ABCD))}} = 3 \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{4}{3} = \frac{4}{9} \Rightarrow V_{MNPQ.EFGH} = \frac{4V}{9}$$

Dạng 3. MAX- MIN THỂ TÍCH CÁC KHỐI KHI PHÂN CHIA

Câu 1: Cho hình chóp tứ giác SABCD đáy là hình bình hành, các điểm A', C' thỏa mãn $\overrightarrow{SA'} = \frac{1}{3} \overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SC'} = \frac{1}{5} \overrightarrow{SC}$. Mặt phẳng (P) chứa A', C' cắt các cạnh SB, SD lần lượt tại B', D' . Đặt $k = \frac{V_{SA'B'C'D'}}{V_{SABCD}}$, giá trị nhỏ nhất của k là bao nhiêu?

A. $\frac{\sqrt{15}}{6}$.

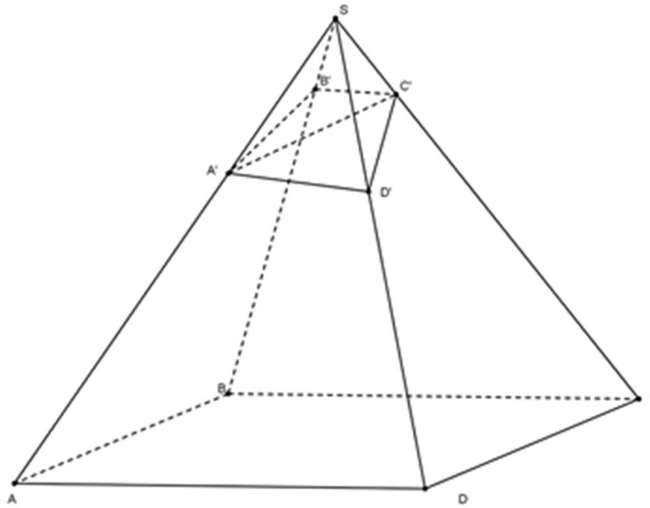
B. $\frac{4}{15}$.

C. $\frac{1}{60}$.

D. $\frac{1}{30}$.

Lời giải

Chọn C



$$\text{Đặt } \frac{SA}{SA'} = a \quad \frac{SB}{SB'} = b$$

$$\frac{SC}{SC'} = c \quad \frac{SD}{SD'} = d \quad (b, d \geq 1)$$

$$\text{Ta có } a + c = 8$$

Áp dụng công thức tính nhanh tỉ lệ thể tích ta có:

$$K = \frac{V_{SA'B'C'D'}}{V_{SABCD}} = \frac{a+b+c+d}{4abcd} = \frac{16}{60bd}, \text{ với } a+c = b+d = 8$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 2 số dương b, d

$$\text{Ta có: } \frac{16}{60bd} \geq \frac{16}{60 \cdot \left(\frac{b+d}{2}\right)^2} = \frac{1}{60}$$

Vậy $k_{\min} = \frac{1}{60}$. Dấu = xảy ra $\Leftrightarrow b = d = 4$.

Câu 2: Cho tứ diện $ABCD$ có thể tích bằng V . Trên AB lấy hai điểm M, N , trên CD lấy hai điểm

P, Q thỏa mãn $2\frac{MN}{CD} + 3\frac{PQ}{AB} = 1$. Thể tích khối $MNPQ$ đạt giá trị lớn nhất bằng

A. $\frac{V}{8}$.

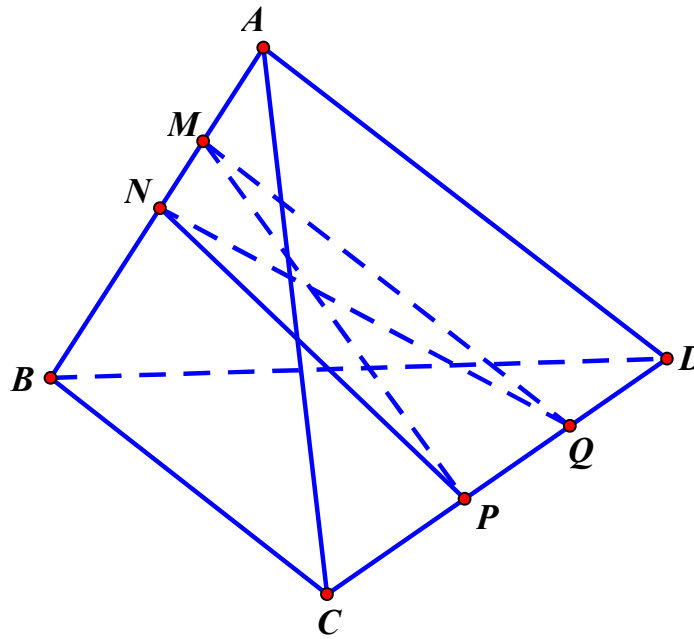
B. $\frac{V}{16}$.

C. $\frac{V}{24}$.

D. $\frac{V}{32}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi d_1, α lần lượt là khoảng cách và góc giữa AB và CD .

Gọi d_2, β lần lượt là khoảng cách và góc giữa MN và PQ .

Ta có $V_{ABCD} = \frac{1}{6} AB \cdot CD \cdot d_1 \cdot \sin \alpha$, $V_{MNPQ} = \frac{1}{6} MN \cdot PQ \cdot d_2 \cdot \sin \beta$

Do $d_1 = d_2$ và $\sin \alpha = \sin \beta \Rightarrow \frac{V_{MNPQ}}{V_{ABCD}} = \frac{MN \cdot PQ}{AB \cdot CD}$

Ta có $2\frac{MN}{CD} + 3\frac{PQ}{AB} \geq 2\sqrt{2\frac{MN}{CD} \cdot 3\frac{PQ}{AB}}$

$2\frac{MN}{CD} + 3\frac{PQ}{AB} \geq 2\sqrt{6\frac{MN}{CD} \cdot \frac{PQ}{AB}} \Rightarrow \sqrt{6\frac{MN}{CD} \cdot \frac{PQ}{AB}} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{MN}{CD} \cdot \frac{PQ}{AB} \leq \frac{1}{24} \Rightarrow \frac{V_{MNPQ}}{V_{ABCD}} \leq \frac{1}{24}$

Vậy $V_{MNPQ} \leq \frac{V}{24} \Rightarrow \text{Max} V_{MNPQ} = \frac{V}{24}$.

Câu 3: Trên các cạnh AB, BC, CD, DA, AC và BD của tứ diện $ABCD$ lần lượt lấy các điểm M, N, P, Q, S và R . Gọi V_1, V_2, V_3, V_4 và V lần lượt là thể tích của các khối tứ diện $AMSQ, BMNR, CNPR, DPQR$ và $ABCD$. Giá trị nhỏ nhất của tỉ số $\frac{V^4}{V_1 V_2 V_3 V_4}$ là

A. 4096.

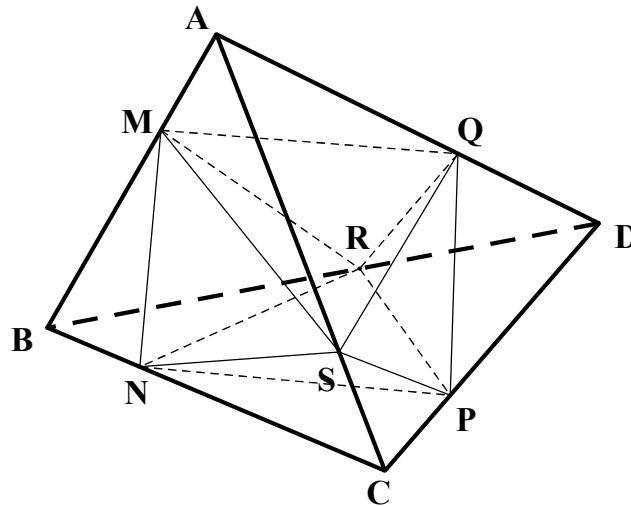
B. 256.

C. 64.

D. 1024.

Lời giải

Chọn A



$$\text{Ta có } \frac{V_1}{V} = \frac{AM \cdot AS \cdot AQ}{AB \cdot AC \cdot AD}; \frac{V_2}{V} = \frac{BM \cdot BN \cdot BR}{BA \cdot BC \cdot BD}; \frac{V_3}{V} = \frac{CN \cdot CP \cdot CS}{CB \cdot CD \cdot CA}; \frac{V_4}{V} = \frac{DQ \cdot DR \cdot DP}{DA \cdot DB \cdot DC}.$$

$$\text{Suy ra } \frac{V_1 V_2 V_3 V_4}{V^4} = \frac{AM \cdot BM}{AB^2} \cdot \frac{BN \cdot CN}{BC^2} \cdot \frac{CP \cdot DP}{CD^2} \cdot \frac{DQ \cdot AQ}{DA^2} \cdot \frac{AS \cdot CS}{AC^2} \cdot \frac{BR \cdot DR}{BD^2}.$$

$$\text{Do đó } \frac{V^4}{V_1 V_2 V_3 V_4} = \frac{AB^2}{AM \cdot BM} \cdot \frac{BC^2}{BN \cdot CN} \cdot \frac{CD^2}{CP \cdot DP} \cdot \frac{DA^2}{DQ \cdot AQ} \cdot \frac{AC^2}{AS \cdot CS} \cdot \frac{BD^2}{BR \cdot DR}.$$

$$\text{Mặt khác, ta có } \sqrt{AM \cdot BM} \leq \frac{AM + BM}{2} = \frac{AB}{2} \Rightarrow AM \cdot BM \leq \frac{AB^2}{4} \Rightarrow \frac{AB^2}{AM \cdot BM} \geq 4.$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $AM = BM$.

$$\text{Tương tự ta có } \frac{BC^2}{BN \cdot CN} \geq 4; \frac{CD^2}{CP \cdot DP} \geq 4; \frac{DA^2}{DQ \cdot AQ} \geq 4; \frac{AC^2}{AS \cdot CS} \geq 4; \frac{BD^2}{BR \cdot DR} \geq 4$$

$$\text{Từ đó suy ra } \frac{V^4}{V_1 V_2 V_3 V_4} = \frac{AB^2}{AM \cdot BM} \cdot \frac{BC^2}{BN \cdot CN} \cdot \frac{CD^2}{CP \cdot DP} \cdot \frac{DA^2}{DQ \cdot AQ} \cdot \frac{AC^2}{AS \cdot CS} \cdot \frac{BD^2}{BR \cdot DR} \geq 4^6.$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi M, N, P, Q, S và R lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA, AC và BD .

$$\text{Vậy giá trị nhỏ nhất của } \frac{V^4}{V_1 V_2 V_3 V_4} \text{ là } 4^6 = 4096.$$

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = 4$, $SA \perp (ABC)$. Tam giác ABC vuông tại B và $AC = 2$. H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB, SC . Tìm GTLN của thể tích chóp $S.AHK$.

A. $\frac{32\sqrt{5}}{75}$.

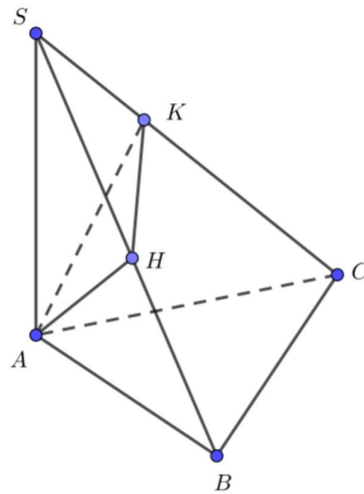
B. $\frac{16\sqrt{5}}{75}$.

C. $\frac{24\sqrt{5}}{75}$.

D. $\frac{40\sqrt{5}}{75}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi cạnh $AB = x \Rightarrow BC = \sqrt{4-x^2}$. Điều kiện $0 < x < 2$.

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot \frac{1}{2} BC \cdot BA = \frac{2}{3} x \sqrt{4-x^2}.$$

$$\frac{V_{S.AHK}}{V_{S.ABC}} = \frac{SH}{SB} \cdot \frac{SK}{SC} = \frac{SH \cdot SB}{SB^2} \cdot \frac{SK \cdot SC}{SC^2} = \frac{SA^2}{SB^2} \cdot \frac{SA^2}{SC^2} = \frac{256}{(16+x^2)20} = \frac{64}{5(16+x^2)}$$

$$\Rightarrow V_{S.AHK} = \frac{64}{5(16+x^2)} \cdot V_{S.ABC} = \frac{128}{15} \cdot \frac{x\sqrt{4-x^2}}{16+x^2} = \frac{\sqrt{5}x \cdot 2\sqrt{4-x^2}}{16+x^2} \cdot \frac{64\sqrt{5}}{75}$$

$$V_{S.AHK} = \frac{64\sqrt{5}}{75} \cdot \frac{\sqrt{5}x \cdot \sqrt{16-4x^2}}{16+x^2} \leq \frac{64\sqrt{5}}{75} \cdot \frac{5x^2+16-4x^2}{2(16+x^2)} = \frac{32\sqrt{5}}{75}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $5x^2 = 16-4x^2 \Leftrightarrow 9x^2 = 16 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3} \in (0;2)$.

Câu 5: Cho tứ diện $S.ABC$ và G là trọng tâm của tứ diện. Một $mp(\alpha)$ quay quanh AG , cắt các cạnh SB, SC lần lượt tại M và N (M, N không trùng S). Gọi V là thể tích tứ diện $S.ABC$, V_1 là thể tích tứ diện $SAMN$ và gọi m, n lần lượt là GTLN và GTNN của $\frac{V_1}{V}$. Hãy tính $m+n$.

A. $m+n=1$.

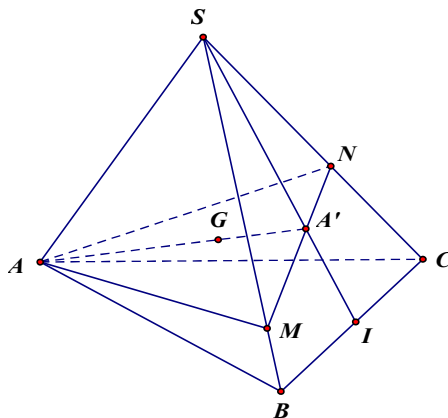
B. $m+n = \frac{17}{18}$.

C. $m+n = \frac{18}{19}$.

D. $m+n = \frac{19}{20}$.

Lời giải

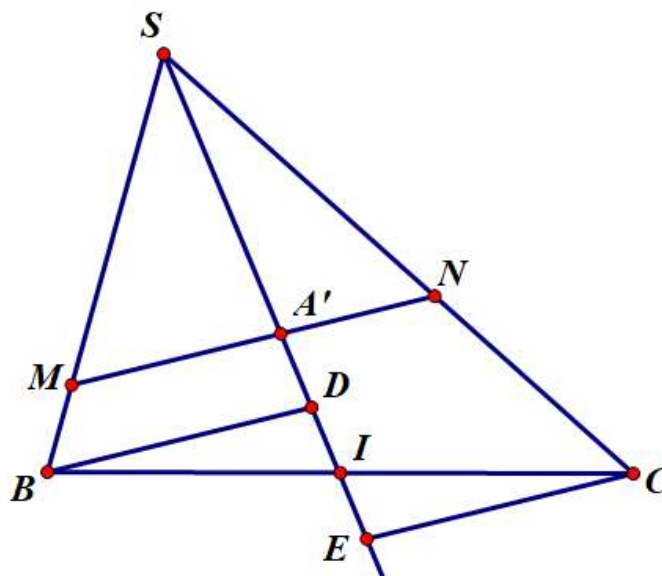
Chọn B



+) Gọi A' là trọng tâm $\triangle SBC$, I là trung điểm BC Ta có A, G, A' thẳng hàng và S, A', I thẳng hàng.

+) Đặt $\frac{SM}{SB} = x, \frac{SN}{SC} = y$ với $0 < x, y \leq 1$.

+) Ta có: $\frac{V_1}{V} = \frac{SM}{SB} \cdot \frac{SN}{SC} = xy$.



+) Mặt khác: $\frac{SB}{SM} + \frac{SC}{SN} = 2 \frac{SI}{SA'} \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 3 \Rightarrow y = \frac{x}{3x-1}$.

+) Vì $0 < y \leq 1$ nên ta có: $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$.

+) Khi đó: $\frac{V_1}{V} = xy = \frac{x^2}{3x-1}$. Xét $f(x) = \frac{x^2}{3x-1}, \frac{1}{2} \leq x \leq 1$.

$$f'(x) = \frac{3x^2 - 2x}{(3x-1)^2}, f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}.$$

+) Bảng biến thiên:

x	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	1
$f'(x)$		$-$	$+$
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{2}$

+) Từ bảng biến thiên suy ra: $m = \frac{1}{2}$, $n = \frac{4}{9} \Rightarrow m + n = \frac{17}{18}$.

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và có thể tích là V . Gọi P là trung điểm của SC . Mặt phẳng (α) chứa AP và cắt hai cạnh SD, SB lần lượt tại M và N . Gọi V' là thể tích của khối chóp $S.AMPN$. Tìm giá trị nhỏ nhất của tỉ số $\frac{V'}{V}$.

A. $\frac{3}{8}$.

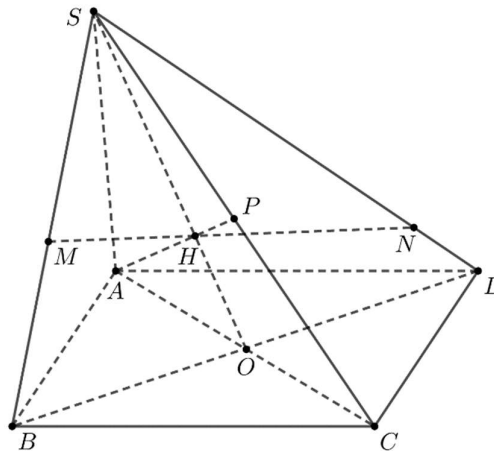
B. $\frac{1}{3}$.

C. $\frac{2}{3}$.

D. $\frac{1}{8}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi O là tâm hình bình hành $ABCD$ và $H = SO \cap AP$.

Khi đó ta cũng có $MN \cap SO = H$. Tam giác SAC có H là trọng tâm nên $\frac{SO}{SH} = \frac{3}{2}$.

Trong tam giác SBD có $\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = 2\overrightarrow{SO}$

$$\Leftrightarrow \frac{SB}{SM} \cdot \overrightarrow{SM} + \frac{SD}{SN} \cdot \overrightarrow{SN} = 2 \cdot \frac{SO}{SH} \cdot \overrightarrow{SH} \Rightarrow \frac{SB}{SM} + \frac{SD}{SN} = 2 \cdot \frac{SO}{SH} = 3.$$

Đặt $\frac{SB}{SM} = x \Rightarrow \frac{SD}{SN} = 3 - x$ với $x \in [1; 2]$.

Ta có $\frac{V_{S.AMP}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SB} \cdot \frac{SP}{SC} = \frac{1}{2x}$ và $\frac{V_{S.APN}}{V_{S.ACD}} = \frac{SP}{SC} \cdot \frac{SN}{SD} = \frac{1}{2(3-x)}$.

Khi đó $V_{S.AMP} = \frac{1}{4x} V_{S.ABCD}$ và $V_{S.APN} = \frac{1}{4(3-x)} V_{S.ABCD} \Rightarrow \frac{V_{S.AMPN}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{4x} + \frac{1}{4(3-x)}$

$$= \frac{1}{4} \left[\frac{1}{x} + \frac{1}{3-x} \right] = \frac{3}{4x(3-x)} \geq \frac{3}{4 \cdot \frac{[x+(3-x)]^2}{4}} = \frac{1}{3}.$$

Vậy $\frac{V'}{V} \geq \frac{1}{3}$. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x = 3-x \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$. Khi đó $MN \parallel BD$.

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có thể tích là V , $ABCD$ là hình bình hành có tâm O . Gọi I là trung điểm của SO , (P) là mặt phẳng qua I sao cho (P) cắt cạnh SA, SB, SC, SD lần lượt tại các điểm M, N, P, Q . Tìm giá trị nhỏ nhất của thể tích của khối chóp $S.MNPQ$.

A. $\frac{V}{4}$.

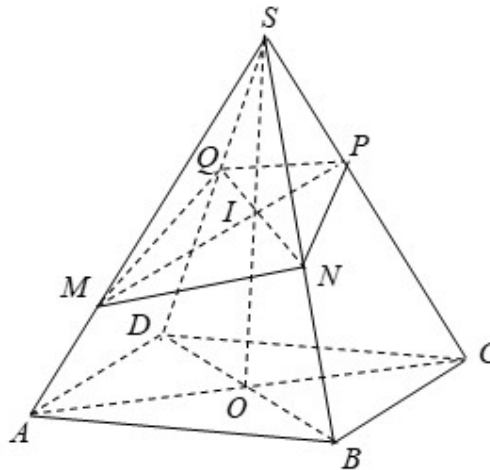
B. $\frac{V}{2}$.

C. $\frac{V}{12}$.

D. $\frac{V}{8}$.

Lời giải

Chọn D



Đặt $a = \frac{SA}{SM}, b = \frac{SB}{SN}, c = \frac{SC}{SP}, d = \frac{SD}{SQ}$

$V_{SABD} = V_{SBCD} = V_0 = \frac{1}{2}V; V_{SMNQ} = V_1, V_{SNPQ} = V_2$

Ta có kết quả $a + c = b + d = 2 \frac{SO}{SI} = 4$

$\frac{V_0}{V_1} = a.b.d; \frac{V_0}{V_2} = c.b.d \Rightarrow \frac{V_0}{V_1} + \frac{V_0}{V_2} = b.d(a+c) = 4b(4-b) \leq 16$ với $0 < b \leq 3$

$$\text{Mặc khác: } \Rightarrow \frac{V_0}{V_1} + \frac{V_0}{V_2} \geq 2\sqrt{\frac{V_0}{V_1} \cdot \frac{V_0}{V_2}} = \frac{V}{\sqrt{V_1 V_2}} \geq \frac{2V}{V_1 + V_2} = \frac{2V}{V_{S.MNPQ}}$$

$$\text{Do đó: } \frac{2V}{V_{S.MNPQ}} \leq 16 \Rightarrow V_{S.MNPQ} \geq \frac{V}{8}. \text{ Vậy giá trị nhỏ nhất của khối chóp } S.MNPQ \text{ là } \frac{V}{8}.$$

Câu 8: Cho tứ diện $ABCD$ có DA, DB, DC đôi một vuông góc với nhau và có thể tích bằng 36, M là điểm thay đổi trong tam giác ABC . Các đường thẳng qua M song song với DA, DB, DC theo thứ tự cắt các mặt phẳng $(BCD), (CAD), (ABD)$ lần lượt tại A_1, B_1, C_1 . Tìm thể tích lớn nhất của khối nhất của khối tứ diện $MA_1B_1C_1$ khi M thay đổi.

A. $\frac{1}{3}$.

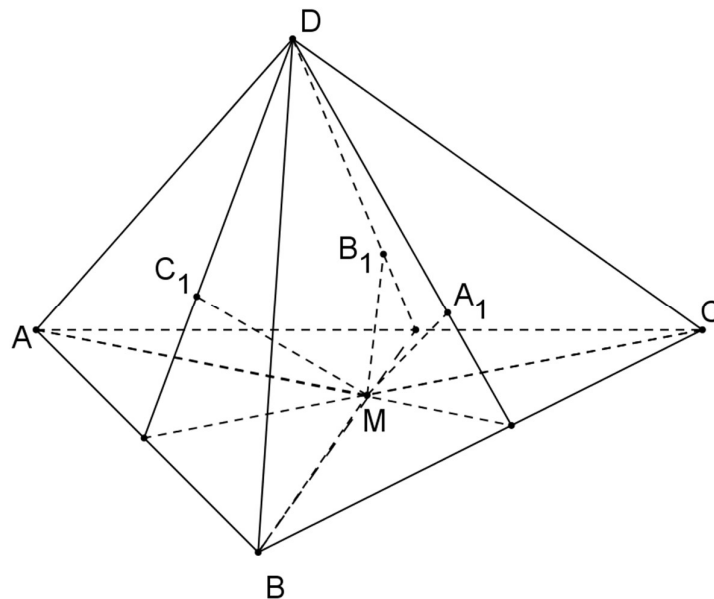
B. $\frac{2}{3}$.

C. 1.

D. $\frac{4}{3}$.

Lời giải

Chọn D



$$\text{Ta có } \frac{V_{MBCD}}{V_{ABCD}} = \frac{d(M, (BCD))}{d(A, (BCD))} = \frac{MA_1}{AD}$$

$$\text{Tương tự } \frac{V_{MADC}}{V_{ABCD}} = \frac{MB_1}{AD}, \frac{V_{MABD}}{V_{ABCD}} = \frac{MC_1}{AD}$$

$$\Rightarrow \frac{MA_1}{AD} + \frac{MB_1}{AD} + \frac{MC_1}{AD} = \frac{V_{MBCD}}{V_{ABCD}} + \frac{V_{MADC}}{V_{ABCD}} + \frac{V_{MABD}}{V_{ABCD}} = 1$$

Do DA, DB, DC đôi một vuông suy ra MA_1, MB_1, MC_1 đôi một vuông. Như vậy:

$$\frac{V_{MA_1B_1C_1}}{V_{ABCD}} = \frac{MA_1}{AD} \cdot \frac{MB_1}{AD} \cdot \frac{MC_1}{AD} \leq \left(\frac{MA_1}{AD} + \frac{MB_1}{AD} + \frac{MC_1}{AD} \right)^3 \cdot \frac{1}{3^3} = \frac{1}{3^3}$$

$$\Rightarrow \frac{V_{MA_1B_1C_1}}{V_{ABCD}} \leq \frac{1}{3^3} \Leftrightarrow V_{MA_1B_1C_1} \leq \frac{V_{ABCD}}{3^3} = \frac{36}{3^3} = \frac{4}{3}$$

Dấu "=" xảy ra khi M là trọng tâm tam giác ABC .

Vậy thể tích lớn nhất của khối nhất của khối tứ diện $MA_1B_1C_1$ bằng $\frac{4}{3}$ khi M là trọng tâm tam giác ABC .

NHÓM TOÁN VD - VDC

NHÓM TOÁN VD - VDC