

CHUYÊN ĐỀ: THỂ TÍCH – GÓC – KHOẢNG CÁCH

Chuyên đề: Thể tích khối đa diện

Vấn đề 1: Thể tích khối chóp

A. Kiến thức cần nhớ.

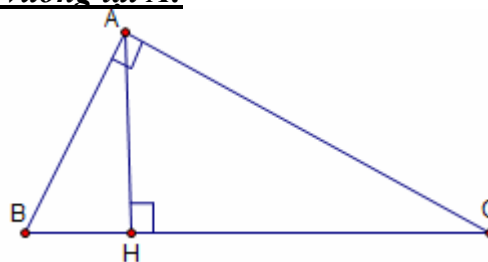
I. Hệ thức lượng trong tam giác vuông ABC vuông tại A:

$$1. \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$$

$$2. AB^2 = BH.BC$$

$$3. AC^2 = HC.BC$$

$$4. S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AH.BC = \frac{1}{2} AB.AC$$



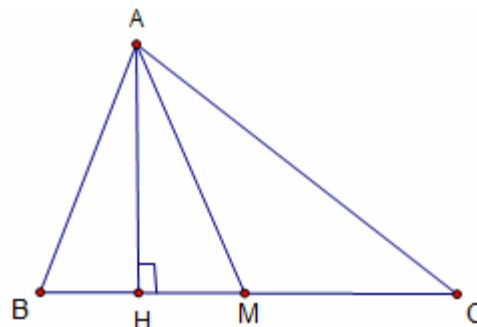
II. Các công thức trong tam giác thường:

1. Định lý cô sin:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC \cos \widehat{BAC}$$

2. Công thức đường trung tuyến:

$$AM^2 = \frac{2(AB^2 + AC^2) - BC^2}{4}$$



3. Công thức diện tích:

$$\begin{aligned} S_{\triangle ABC} &= \frac{1}{2} AH.BC = \frac{1}{2} AB.AC \sin \widehat{BAC} \\ &= pr = \frac{AB.BC.CA}{4R} \end{aligned}$$

4. Công thức thể tích:

* Thể tích khối chóp:

$$V = \frac{1}{3} \beta.h \quad (\beta \text{ là diện tích đáy, } h \text{ là chiều cao})$$

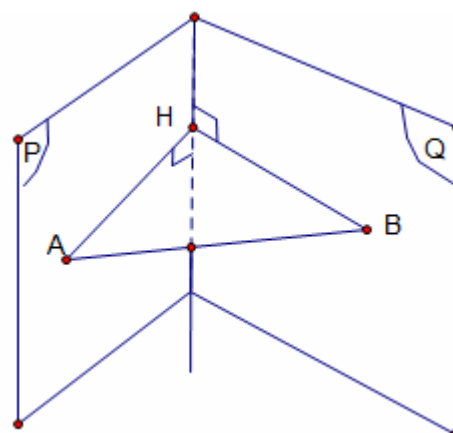
* Thể tích khối lăng trụ :

$$V = \beta.h \quad (\beta \text{ là diện tích đáy, } h \text{ là chiều cao})$$

5. Góc giữa hai đường thẳng, góc giữa hai mặt phẳng :

- Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng (P) : là góc giữa đường thẳng đó và hình chiếu của nó lên mặt phẳng (P)

- Góc giữa hai mặt phẳng : là góc giữa hai đường thẳng nằm trong hai mặt phẳng đó và cùng vuông góc với giao tuyến (xác định như hình vẽ)



CHUYÊN ĐỀ: THỂ TÍCH – GÓC – KHOẢNG CÁCH

B. Các phương pháp tính thể tích.

I. Tính thể tích trực tiếp bằng cách xác định chân đường cao :

Một số dấu hiệu xác định chân đường cao

1. Khối chóp có một cạnh bên vuông góc với đáy thì cạnh bên đó chính là đường cao của khối chóp.
2. Hình chóp có một mặt bên hoặc mặt chéo vuông góc với đáy thì đường cao chính là đường kẻ trong mặt bên (hoặc mặt chéo) vuông góc với giao tuyến.
3. Hình chóp có 2 mặt mặt cùng vuông góc với mặt phẳng đáy thì đoạn giao tuyến của 2 mặt nói trên là đường cao của hình chóp.
4. Hình chóp có các cạnh bên bằng nhau hoặc các cạnh bên tạo với mặt đáy những góc bằng nhau thì chân đường cao là tâm đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy.
5. Hình chóp có các mặt bên tạo với mặt đáy những góc bằng nhau thì chân đường cao trùng với tâm đường tròn nội tiếp đa giác đáy.
6. Hình chóp $S.ABCD$ có $SA=SB$, hoặc SA,SB cùng tạo với đáy một góc bằng nhau thì chân đường cao hạ từ S xuống mặt đáy nằm trên đường trung trực của AB
7. Hình chóp $S.ABCD$ có hai mặt (SAB) , (SAC) cùng tạo với mặt đáy một góc bằng nhau, thì chân đường cao hạ từ S xuống mặt đáy sẽ nằm trên đường phân giác trong của góc $\widehat{BAC}$

Bài tập minh họa:

1. Hình chóp khi biết chân đường cao.

1.1.1 Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật $AB=a$, $AD=2a$ và cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 45° . Gọi E là trung điểm của BC , H là hình chiếu vuông góc của A trên SB . Tính thể tích của khối chóp $S.BDE$ theo a .

1.1.2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $2a$. Gọi E là trung điểm của AB . Hình chiếu vuông góc của đỉnh S lên mặt đáy trùng với trung điểm của DE . Biết góc giữa SA và mặt đáy $(ABCD)$ bằng 60° . Tính theo a thể tích của khối chóp.

1.1.3. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A và $SC = 2a\sqrt{5}$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm M của cạnh AB . Góc giữa SC và đáy (ABC) bằng 60° . Tính thể tích của khối chóp theo a .

2. Hình chóp có một mặt vuông góc với mặt phẳng đáy.

1.2.1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $BA = 3a$, $BC = 4a$; Mặt phẳng (SBC) vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Biết $SB = 2a\sqrt{3}$ và $\widehat{SBC} = 30^\circ$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

(Trích đề thi ĐH khối D – 2011)

Giải:

+ Hạ $SH \perp BC (H \in BC); (SBC) \perp (ABC)$

$\Rightarrow SH \perp (ABC)$. Vậy SH chính là đường cao của khối chóp.

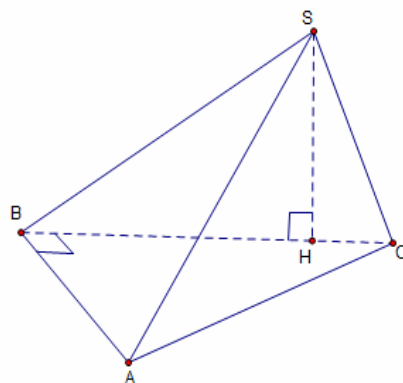
CHUYÊN ĐỀ: THỂ TÍCH – GÓC – KHOẢNG CÁCH

Ta có: $SH = SB \sin \widehat{SBC} = a\sqrt{3}$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} BA \cdot BC = 6a^2 \quad (\text{đvdt})$$

+ Vậy thể tích khối chóp

$$\text{là: } V_{C.ABCD} = \frac{1}{3} SH \cdot S_{\Delta ABC} = 2a^3 \sqrt{3} \quad (\text{đvtt})$$



1.2.2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B . $AB = SD = 3a$, $AD = SB = 4a, a > 0$. Đường chéo $AC \perp (SBD)$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$

Giải:

Ta có $AC \perp (SBD) \Rightarrow (SBD) \perp (ABCD)$

Do vậy chân đường cao hạ từ S nằm trên BD .

Từ giả thiết ta

có: $AD^2 + AB^2 = SB^2 + SD^2 = BD^2$ nên tam

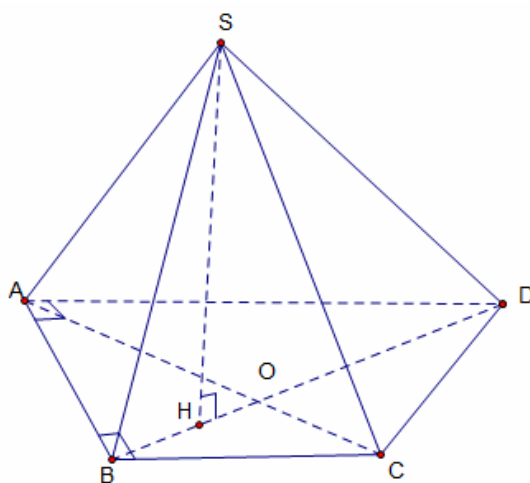
giác $\Delta SBD \perp$ tại $S \Rightarrow SH = \frac{SB \cdot SD}{BD} = \frac{12a}{5}$

với H là hình chiếu vuông góc của S lên BD .

Dễ dàng tính được:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} (AD + BC) \cdot AB = \frac{75a^2}{8}$$

$$\text{Vậy } V_{C.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{12a}{5} \cdot \frac{75a^2}{8} = \frac{15}{2} a^3 \quad (\text{đvtt})$$



1.2.3. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại A , $\widehat{ABC} = 30^\circ$, SBC là tam giác đều cạnh a và mặt bên SBC vuông góc với đáy. Tính theo a thể tích của khối chóp $S.ABC$.

(Trích đề thi ĐH khối A – 2013)

1.2.4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính theo a thể tích của khối chóp $S.ABCD$

1.2.5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh $2a$, $SA = a$, $SB = a\sqrt{3}$, và $\widehat{BAD} = 60^\circ$, $(SAB) \perp (ABCD)$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

1.2.6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh bằng a , $SA = SB = a$, $SD = a\sqrt{2}$, và mặt phẳng (SBD) vuông góc với đáy $(ABCD)$. Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABCD$.

1.2.7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = a, AD = a\sqrt{3}$ góc giữa (SAC) và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60° , tam giác SAB cân tại

CHUYÊN ĐỀ: THỂ TÍCH – GÓC – KHOẢNG CÁCH

S và thuộc mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy (ABCD). gọi H, M lần lượt là trung điểm của AB và BC. Tính thể tích khối chóp S.DHM

3. Hình chóp có hai mặt cùng vuông góc với mặt phẳng đáy.

Đối với dạng toán này, đề bài thường gắn giả thiết góc giữa cạnh bên và mặt đáy hoặc góc giữa mặt bên và mặt đáy hoặc việc tính độ dài đường cao, diện tích đáy khá phức tạp. Do vậy cần nắm vững cách xác định góc và một số kỹ năng tính diện tích tam giác, tứ giác.

1.3.1. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và D, $AB = AD = 2a, CD = a$; góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và đáy (ABCD) bằng 60° . Gọi I là trung điểm của cạnh AB. Biết (SBI) và (SCI) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Tính thể tích khối chóp S.ABCD theo a.

(Trích đề thi ĐH khối A – 2009)

Giải

* $(SIB) \perp (ABCD), (SIC) \perp (ABCD)$ suy ra $SI \perp (ABCD)$. Gọi K là hình chiếu của I trên BC.

Ta có

$$IK \perp BC, SI \perp BC \Rightarrow BC \perp (SIK) \Rightarrow BC \perp SK$$

Vậy góc giữa (SBC) và mặt đáy chính là

$$\widehat{SKI} = 60^\circ.$$

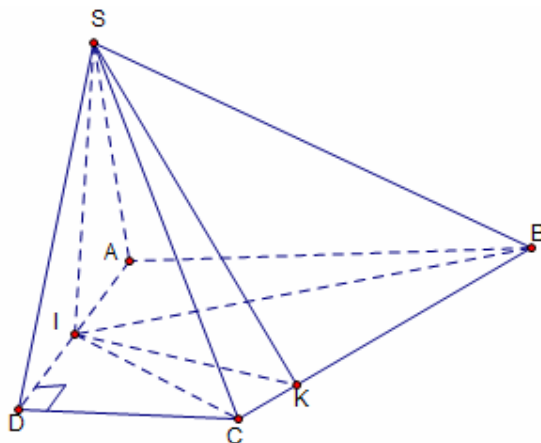
* Diện tích hình thang: $S_{ABCD} = 3a^2$

$$S_{ABCD} = S_{\triangle ABI} + S_{\triangle CDI} + S_{\triangle IBC} = \frac{3a^2}{2} + S_{\triangle IBC}$$

$$S_{\triangle IBC} = \frac{3a^2}{2} = \frac{1}{2} BC \cdot IK, BC = \sqrt{(AB - CD)^2 + AD^2} = a\sqrt{5} \Rightarrow IK = \frac{3\sqrt{5}a}{5}$$

$$\text{Ta có } \tan \widehat{SKI} = \frac{SI}{IK} \Rightarrow SI = \frac{3\sqrt{15}a}{5}$$

$$\text{* Vậy thể tích của khối chóp S.ABCD: } V = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SI = \frac{3\sqrt{15}a^3}{5}$$



1.3.2. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang cân, $AB \parallel CD$, $AB = 2CD = 4a$, $BC = a\sqrt{10}$, biết mặt phẳng (SAC) và mặt phẳng (SBD) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy, mặt bên (SAB) là tam giác đều. Tính thể tích khối chóp S.ABCD.

Giải:

Ta có $(SAC) \cap (SBD) = SO$, theo giả thiết (SAC), (SBD) cùng vuông góc với mặt đáy (ABCD) nên suy ra: $SO \perp (ABCD)$. Vậy SO là đường cao của hình chóp S.ABCD

CHUYÊN ĐỀ: THỂ TÍCH – GÓC – KHOẢNG CÁCH

$$\text{Vậy } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SO \cdot S_{ABCD}$$

* Tính diện tích hình thang:

- Gọi H là hình chiếu của C trên AB, M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD.

- Ta có:

$$HB = \frac{AB - CD}{2} = a$$

$$\Rightarrow HC = \sqrt{CB^2 - HB^2} = 3a$$

Vậy:

$$S_{ABCD} = \frac{(AB + CD) \cdot CH}{2} = \frac{(4a + 2a)3a}{2} = 9a^2$$

* Tính độ dài đường cao:

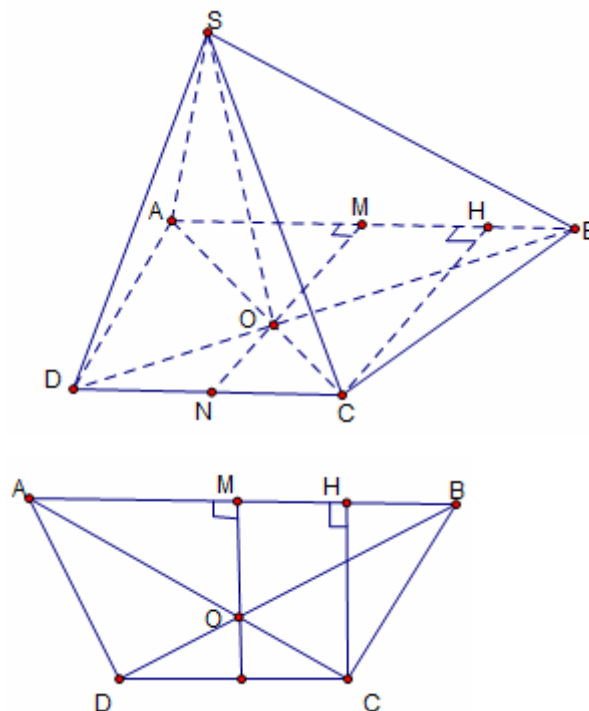
$$- OM = \frac{2}{3} CH = 2a, SM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Trong tam giác vuông SOM, ta có:

$$SO = \sqrt{SM^2 - OM^2} = 2\sqrt{2}$$

* Vậy:

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SO \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot 2\sqrt{2}a \cdot 9a^2 = 6\sqrt{2}a^3$$



1.3.3. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi tâm O, cạnh a, $BD=a$. Trên cạnh AB lấy điểm M sao cho $BM=2AM$. Biết rằng hai mặt phẳng (SAC) và (SDM) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABCD) và mặt bên (SAB) tạo với mặt đáy một góc 60° . Tính thể tích khối chóp S.ABCD theo a.

Giải:

- Gọi $H = AC \cap DM$,

Vì hai mặt phẳng (SAC) và (SDM)

cùng vuông góc với mặt (ABCD)

$$\Rightarrow SH \perp (ABCD).$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{ABCD}$$

* Tính đường cao SH:

- Từ H kẻ $HK \perp AB \Rightarrow SK \perp AB$

CHUYÊN ĐỀ: THỂ TÍCH – GÓC – KHOẢNG CÁCH

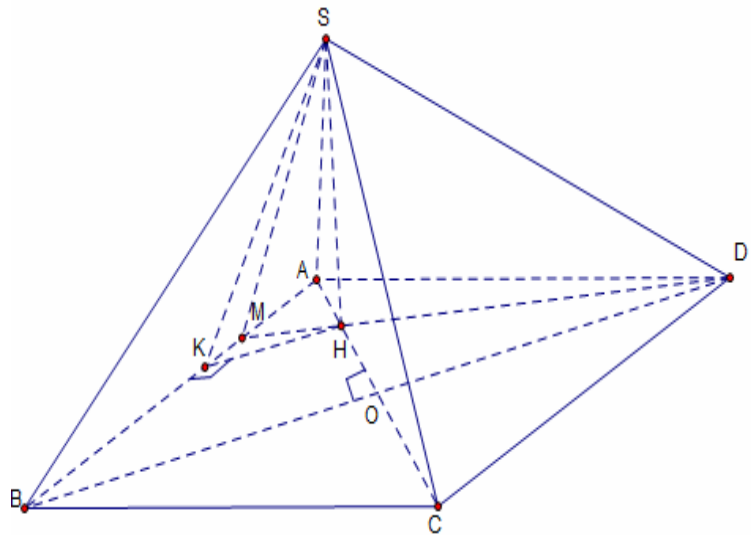
(vì dễ chứng minh: $AB \perp (SHK)$)

Vậy góc giữa (SAB) và $(ABCD)$ là góc $\widehat{SKH} = 60^\circ$.

- Do $AM // CD$ nên suy ra

$$\Rightarrow \frac{HA}{HC} = \frac{AM}{CD} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow AH = \frac{1}{4} AC = \frac{AO}{2}$$



-Mà $\triangle ABD$ đều, AO là đường cao nên:

$$\Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{4} \Rightarrow HK = AH \sin \widehat{HAK} = \frac{a\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{8} \Rightarrow SH = HK \cdot \tan 60^\circ = \frac{3a}{8}$$

*Tính diện tích hình thang ABCD:

$$S_{ABCD} = \frac{AC \cdot BD}{2} = a^2 \sqrt{3}$$

$$* \text{ Vậy } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3a}{8} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{2} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{16} \text{ (đvtt)}$$

1.3.4. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABC là tam giác đều cạnh $2a\sqrt{3}$. Mặt bên (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mặt đáy (ABC); mặt bên (SBC) tạo với đáy (ABC) một góc 30° . Tính thể tích khối chóp S.ABC.

1.3.5

4. Hình chóp có các mặt bên tạo với mặt phẳng đáy những góc bằng nhau.

Hình chóp có các cạnh bên bằng nhau hoặc các cạnh bên tạo với mặt đáy những góc bằng nhau thì chân đường cao là tâm đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy.

1.4.1. Cho hình chóp S.ABCD có $AB=5a$, $BC=6a$, $CA=7a$. Các mặt bên SAB, SBC, SCA tạo với đáy một góc 60° . Tính thể tích khối chóp.

Giải:

- xác định điểm M sao cho $AB \perp (SMH)$,

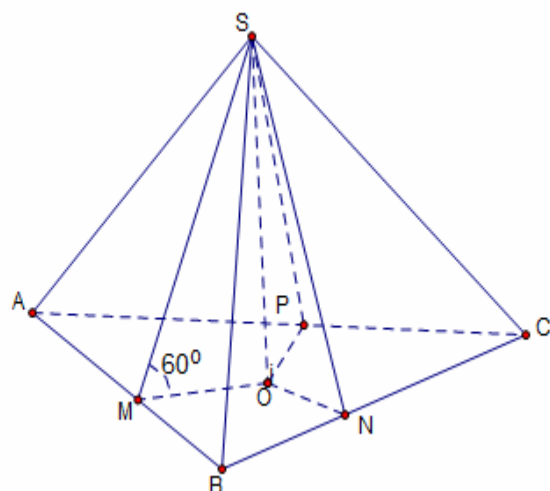
suy ra góc giữa (SAB) và đáy là $\widehat{SMH} = 60^\circ$

$$MH = SH \cdot \cot 60^\circ.$$

Tương tự như vậy: $OP=ON=SH \cdot \cot 60^\circ$.

Vậy O là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

$$OM = r = \frac{S}{p}. \text{ Theo Hêrông: } S = 6\sqrt{6}a^2, p=9a.$$



CHUYÊN ĐỀ: THỂ TÍCH – GÓC – KHOẢNG CÁCH

$$\text{Vậy } SO = OM. \tan 60^\circ = \frac{2\sqrt{6}}{3} a. \sqrt{3} = 2\sqrt{2}a$$

$$\Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SO. S_{ABC} = 8\sqrt{3}a^3$$

II. PHƯƠNG PHÁP TÍNH GIÁN TIẾP THỂ TÍCH KHỐI CHÓP

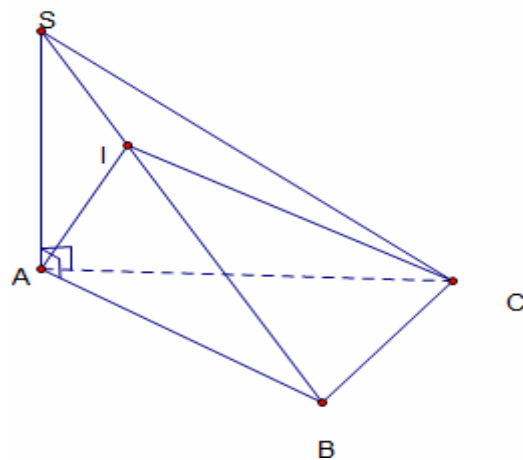
A. Cơ sở lý thuyết:

1. Nếu khối đa diện (H) chia thành hai khối (H_1) và (H_2) thì: $V_H = V_{H_1} + V_{H_2}$
2. Cho khối chóp $S.ABC$, trên các đoạn thẳng SA, SB, SC lần lượt lấy các điểm A', B', C' khác S . Khi đó: $\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'.SB'.SC'}{SA.SB.SC}$
3. Nếu khối chóp (H) và (H') có hai đa giác đáy cùng nằm trên một mặt phẳng thì đường cao của (H) và (H') hoặc song song hoặc trùng nhau.

B. Bài tập minh họa:

2.1.1. Cho khối chóp $S.ABC$ biết tam giác ABC là tam giác vuông cân tại B , $AC=2a$, $SA \perp (ABC)$, $SA=a$. Gọi I là điểm thuộc SB sao cho $SI = \frac{1}{3}SB$. Tính thể tích khối tứ diện $S.ACI$.

Giải:



- Tam giác ABC vuông cân tại B có:

$$AC = 2a \Rightarrow AB = BC = a\sqrt{2} \Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB.BC = a^2$$

- Ta có $SA \perp (ABC)$ nên SA là đường cao của hình chóp

$$S.ABC \Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SA.S_{\triangle ABC} = \frac{a^3}{3}.$$

- Ta lại có: $\frac{V_{S.AIC}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA.SI.SC}{SA.SB.SC} = \frac{1}{3} \Rightarrow V_{S.AIC} = \frac{1}{3} V_{S.ABC} = \frac{a^3}{9}$

2.1.2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh bên $SA=a$, hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là điểm H thuộc đoạn thẳng AC sao

CHUYÊN ĐỀ: THỂ TÍCH – GÓC – KHOẢNG CÁCH

cho $AH = \frac{AC}{4}$. Gọi CM là đường cao của tam giác SAC. Chứng minh rằng M là trung điểm của SA và tính thể tích khối tứ diện SMBC theo a.

Giải:

$$\text{Ta có } AH = \frac{AC}{4} = \frac{a\sqrt{2}}{4}$$

$$SH \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp AC \Rightarrow \triangle SAH, \triangle SHC$$

$$\text{vuông tại H} \Rightarrow SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \frac{a\sqrt{14}}{4}$$

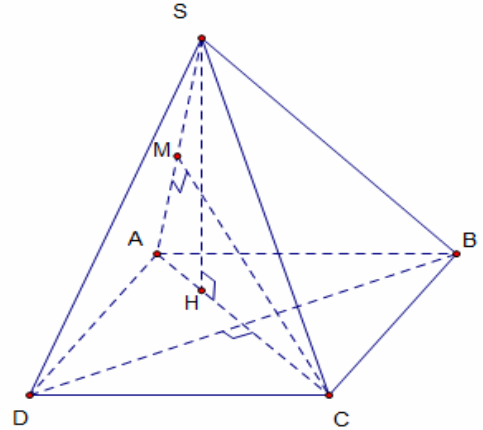
$$\Rightarrow SC = \sqrt{SH^2 + HC^2} = a\sqrt{2}$$

Vì $SC = AC = a\sqrt{2}$ nên tam giác SAC cân tại C mà CM là đường cao của tam giác nên M là trung điểm của SA.

$$\text{Ta có: } \frac{V_{S.MBC}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SA} = \frac{1}{2} \Rightarrow V_{S.MBC} = \frac{1}{2} V_{S.ABC}$$

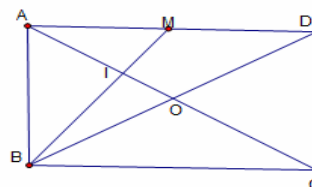
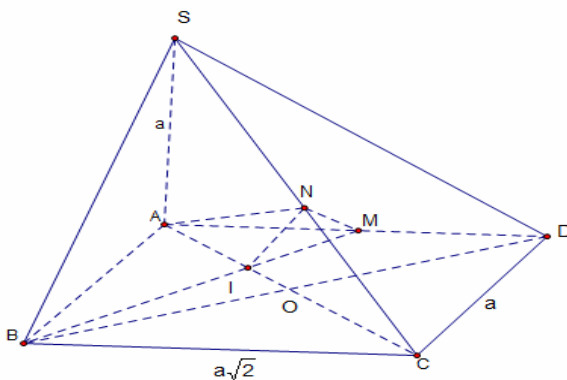
$$\text{Mà } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SH \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot \frac{a\sqrt{14}}{4} = \frac{a^3\sqrt{14}}{24} \text{ (đvtt)}$$

$$V_{S.MBC} = \frac{a^3\sqrt{14}}{48} \text{ (đvtt)}$$



2.13. Cho hình chóp S.ABCD, đáy là hình chữ nhật, $AB=SA=a$, $AD = a\sqrt{2}$. SA vuông góc với đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và SC, gọi I là giao điểm của BM và AC. Tính thể tích của khối tứ diện ANIM theo a.

Giải:



Gọi O là giao điểm của AC và BD, khi đó O là trung điểm của AC nên I là trọng tâm tam giác ABD, do đó:

$$\frac{AI}{AO} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{AI}{AC} = \frac{1}{3} \text{ nên } \frac{V_{ANIM}}{V_{ACDN}} = \frac{AI}{AC} \cdot \frac{AM}{AD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác: } \frac{V_{ACDN}}{V_{ACDS}} = \frac{NC}{SC} = \frac{1}{2} \quad (2)$$

CHUYÊN ĐỀ: THỂ TÍCH – GÓC – KHOẢNG CÁCH

Từ (1) và (2) suy ra: $\frac{V_{AIMN}}{V_{ACDS}} = \frac{1}{12}$ mà $V_{SACD} = \frac{1}{3}SA.S_{ACD} = \frac{1}{3}a \cdot \frac{a\sqrt{2}a}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$ (đvtt)

$$\text{Vậy } V_{AIMN} = \frac{1}{12}V_{ACDS} = \frac{1}{12} \cdot \frac{a^3\sqrt{2}}{6} = \frac{a^3\sqrt{2}}{72} \text{ (đvtt)}$$

2.1.4. Cho khối chóp S. ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật, $AB=2a$, $BC=a$, $SA=SB=SC=SD=a\sqrt{2}$, E là điểm thuộc cạnh SC, $SE=2EC$, F là điểm thuộc cạnh SD sao cho: $SF = \frac{1}{3}FD$. Tính thể tích khối đa diện SABSF.

Giải:

$$S_{ABCD} = AB.BC = 2a^2$$

$$BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = a\sqrt{5}$$

Gọi O là giao điểm của AC và BD,
Khi đó O là trung điểm của AC và

$$BD \Rightarrow BO = \frac{1}{2}AC = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

- Xét tam giác SBD cân tại S có
SO là đường trung tuyến, đồng
thời là đường cao của tam giác
SBD $\Rightarrow SO \perp BD$

- Tương tự, $\Rightarrow SO \perp AC$

Vậy $SO \perp (ABCD)$, suy ra SO là
đường cao của hình chóp
S.ABCD.

$$SO = \sqrt{SB^2 - BO^2} = \sqrt{(a\sqrt{2})^2 - \left(\frac{a\sqrt{5}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

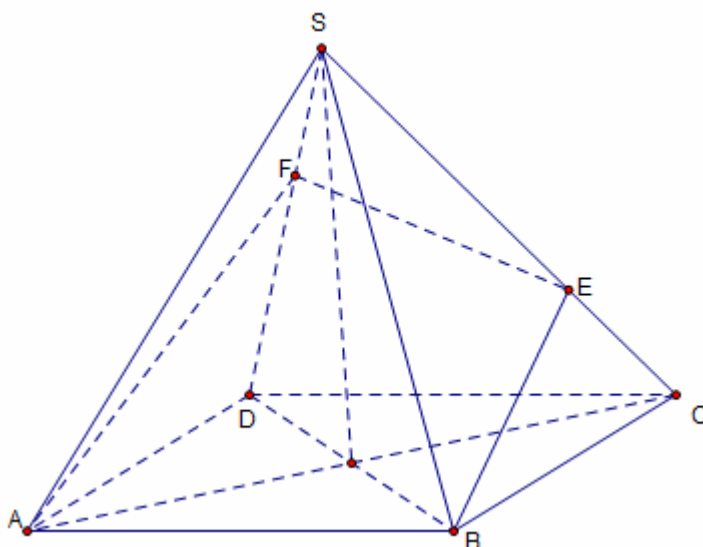
$$V_{SABCD} = \frac{1}{3}SO.S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot 2a^2 = \frac{a^3}{\sqrt{3}}$$

$$\text{Ta có: } \frac{V_{SAFE}}{V_{SADC}} = \frac{SF}{SD} \cdot \frac{SE}{SC} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{6} \Rightarrow V_{SAFE} = \frac{1}{6}V_{SADC} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a^3}{\sqrt{3}} = \frac{a^3}{12\sqrt{3}} \text{ (đvtt)}$$

$$\frac{V_{SABE}}{V_{SABC}} = \frac{SE}{SC} = \frac{2}{3} \Rightarrow V_{SABE} = \frac{2}{3}V_{SABC} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a^3}{\sqrt{3}} = \frac{a^3}{3\sqrt{3}} \text{ (đvtt)}$$

$$\text{Vậy } V_{SABEF} = V_{SAFE} + V_{SABE} = \frac{a^3}{12\sqrt{3}} + \frac{a^3}{3\sqrt{3}} = \frac{5a^3}{12\sqrt{3}} \text{ (đvtt)}$$

2.1.5. Cho khối chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $SA=2a$ và SA vuông góc với đáy. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên các đường thẳng SB và SC. Tính thể tích khối chóp ABCNM theo a.



CHUYÊN ĐỀ: THỂ TÍCH – GÓC – KHOẢNG CÁCH

2.1.6. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang, $\widehat{BAD} = \widehat{ABC} = 90^\circ$, $AB=BC=a$, $AD=2a$, $SA \perp (ABCD)$ và $SA=2a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm SA, SD. Tính thể tích khối chóp S.BCNM theo a.

2.1.7. Cho hình chóp S. ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng ABCD, $SA = a\sqrt{3}$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm A trên các cạnh SB, SD. Mặt phẳng (AHK) cắt SC tại I. Tính thể tích khối chóp S.AHIK

2.1.8. Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $AB = BC = 2a$; Hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi M là trung điểm của AB, mặt phẳng qua SM và song song với BC cắt AC tại N. Biết góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng 60° . Tính V_{SBCNM} .

(Trích đề khối A - 2011).

CHUYÊN ĐỀ: THỂ TÍCH – GÓC – KHOẢNG CÁCH

Vấn đề 2: Thể tích khối lăng trụ.

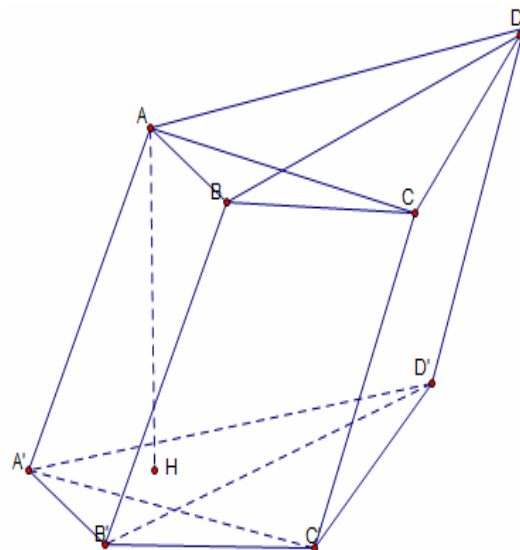
A. Kiến thức cần nhớ.

1. Hình lăng trụ: hình lăng trụ là một hình đa diện lồi có hai mặt đáy song song gọi là hai đáy và các cạnh không thuộc hai đáy đều song song với nhau, gọi là các cạnh bên
- Hình bên là lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$.

- Hai đáy là hai đa giác $ABCD$, $A'B'C'D'$.
Hai đáy là hai đa giác bằng nhau và nằm trong hai mặt phẳng song song.

- Các cạnh bên AA' , BB' , CC' , DD' song song và bằng nhau. Các mặt bên là các hình bình hành

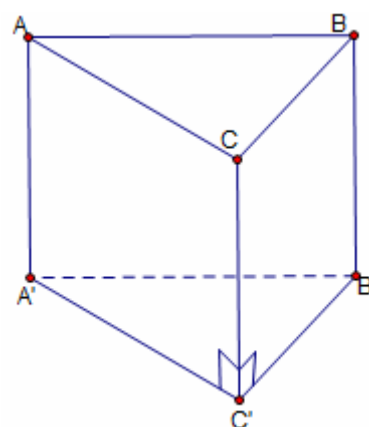
- Khoảng cách giữa hai đáy chính là chiều cao của khối lăng trụ.



2. Các hình lăng trụ đặc biệt

a) Hình lăng trụ đứng: Là hình lăng trụ có các cạnh bên vuông góc với đáy, các mặt bên chính là các hình chữ nhật. cạnh bên chính là đường cao.

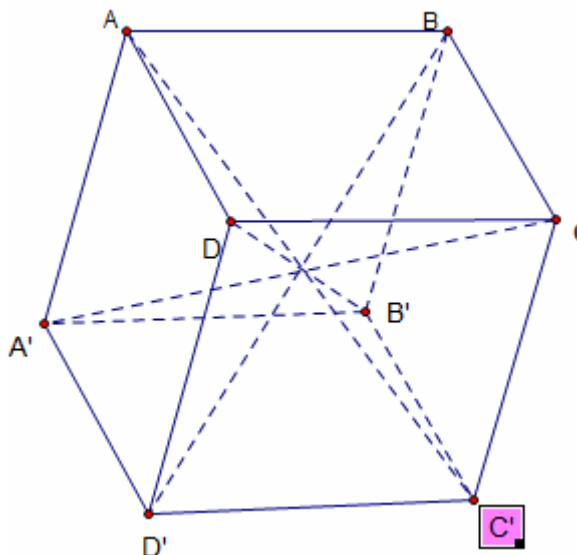
b) Hình lăng trụ đều: Là hình **lăng trụ đứng** có đáy là một đa giác đều, các mặt bên là các hình chữ nhật bằng nhau.



CHUYÊN ĐỀ: THỂ TÍCH – GÓC – KHOẢNG CÁCH

c) **Hình hộp:** là hình lăng trụ có đáy là hình bình hành, các mặt bên là các hình bình hành, các đường chéo của hình hộp đồng quy tại một điểm.

Lưu ý: Nếu dữ kiện không nói gì, thì hình hộp không phải là lăng trụ đứng.



d) **Hình hộp chữ nhật:** là lăng trụ đứng. Là đa diện có 6 mặt đều là hình chữ nhật

e) **Hình lập phương:** Là lăng trụ đứng, có tất cả các mặt đều là hình vuông.

B. Các dạng toán:

1. hình lăng trụ đứng, hình lăng trụ đều:

1.1.1. Cho hình lăng trụ đều $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh đáy a . Góc giữa đường chéo $A'C$ và đáy là 60° . Tính thể tích khối lăng trụ và diện tích xung quanh khối lăng trụ đã cho.

Giải:

- Hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lăng trụ tứ giác đều, nên hai đáy $ABCD$, $A'B'C'D'$ là các hình vuông, và các cạnh bên vuông góc với hai mặt phẳng $(ABCD)$ và $A'B'C'D'$.

- Ta có AA' vuông góc với đáy $(ABCD)$, nên AC là hình chiếu của $A'C$ trên mặt phẳng đáy.

$$\Rightarrow \widehat{(A'C; (ABCD))} = \widehat{A'CA} = 60^\circ$$

- Trong tam giác vuông $A'AC$ vuông tại A ta có: $AA' = AC \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{6}$

- Vậy thể tích của khối lăng trụ:

$$V_{ABCD.A'B'C'D'} = AA' \cdot S_{ABCD} = a^3\sqrt{6} \text{ (đvtt)}$$

* Tính diện tích xung quanh của hình lăng trụ:

$$S_{xq} = 4S_{ABB'A'} = 4AB \cdot AA' = 4a^2\sqrt{6} \text{ (đvdt)}$$

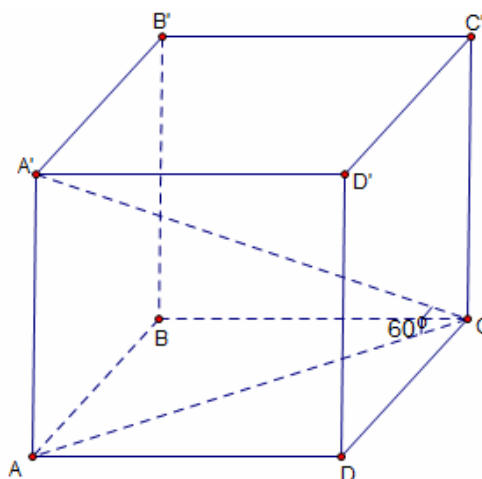
1.1.2 Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a . Khoảng cách từ trọng tâm O của tam giác ABC đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng $\frac{a}{6}$. Tính thể tích của khối lăng trụ đều đó.

Giải:

Gọi M là trung điểm của BC , H là hình chiếu của O lên $A'M$.

Ta có:

$$BC \perp AM, BC \perp AA' \Rightarrow BC \perp (AA'M)$$



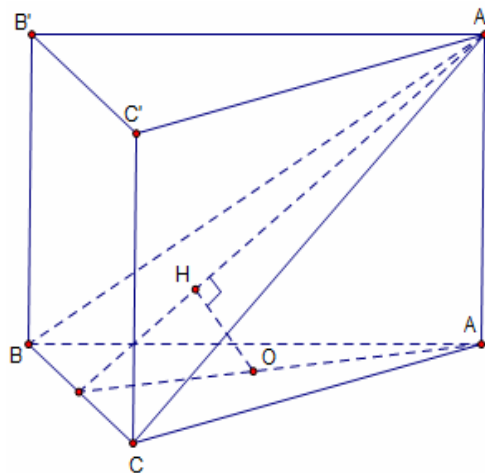
CHUYÊN ĐỀ: THỂ TÍCH – GÓC – KHOẢNG CÁCH

$$\Rightarrow BC \perp OH$$

Do đó: $OH \perp (A'BC)$

$$\Rightarrow d(O; (A'BC)) = OH = \frac{a}{6}$$

- Đặt $AA' = x$, khi đó ta có $\triangle MOH$ đồng dạng với $\triangle MA'A$ nên:



$$\frac{OH}{AA'} = \frac{MO}{MA'} \Rightarrow \frac{a}{6x} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{6}}{\sqrt{x^2 + \frac{3}{4}a^2}} \Rightarrow x = \frac{a\sqrt{6}}{4}. \text{ Vậy: } V_{ABC.A'B'C'} = AA' \cdot S_{ABC} = \frac{3\sqrt{2}}{16} a^2 \text{ (đvtt)}$$

1.1.3. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a , Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và $A'C$ bằng $\frac{a\sqrt{15}}{5}$. Tính thể tích khối lăng trụ

Giải:

Gọi M, M' lần lượt là trung điểm của AB và $A'B'$. Gọi H là hình chiếu của M trên $M'C$. khi đó ta có: $AB \parallel (A'B'C)$

$$d(AB; A'C) = d(AB; (CA'B')) = d(M; (CA'B'))$$

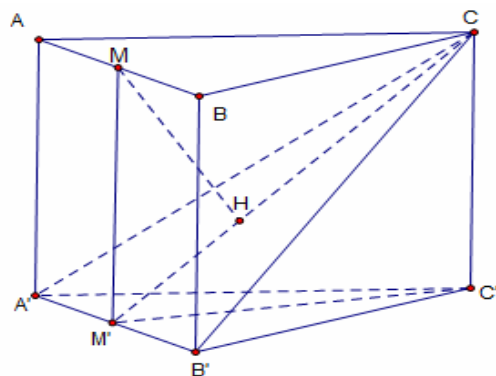
ta có: $A'B' \perp (MM'C) \Rightarrow MH \perp A'B'$

Do đó ta có:

$$MH \perp (A'B'C) \quad d(M; (CA'B')) = MH$$

- Vậy $HC = \frac{a\sqrt{15}}{10}; M'C = a\frac{\sqrt{15}}{2}, MM' = a\sqrt{3}$

$$V = \frac{3}{4} a^3 \text{ (đvtt)}$$



2. hình lăng trụ xiên:

1.2.1. Cho hình hộp xiên $ABCD.A'B'C'D'$, đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a và $\widehat{BAD} = 60^\circ$, $AA' = A'B = A'D$ và cạnh bên hợp với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc α . Xác định chân đường cao của hình hộp vẽ từ A' và góc α . Tính thể tích của khối hộp đã cho.

Giải:

* Tam giác ABD là tam giác đều, ta có $AA' = A'B = A'D$. Do vậy $A'.ABD$ là hình chóp tam giác đều.

Gọi H là trọng tâm tam giác ABD , nên hình chiếu của A' xuống đáy

CHUYÊN ĐỀ: THỂ TÍCH – GÓC – KHOẢNG CÁCH

(ABCD) chính là H.

Góc hợp bởi cạnh bên và mặt đáy là

góc $\widehat{A'AH} = \alpha$

* Tính thể tích khối chóp:

Trong tam giác đều ABD:

$$AH = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Trong tam giác vuông AA'H:

$$A'H = AH \tan \alpha = \frac{a\sqrt{3}}{3} \tan \alpha$$

$$\text{Diện tích hình thoi } ABCD: S_{ABCD} = AB \cdot AD \cdot \sin 60^\circ = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Thể tích khối hộp: } V_{ABCD.A'B'C'D'} = A'H \cdot S_{ABCD} = \frac{a^3 \tan \alpha}{2}$$

1.2.2. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại C, $\widehat{ABC} = 60^\circ$, $BC = 2a$. Gọi M là trung điểm của cạnh AB, hình chiếu vuông góc của C' trên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm I của CM. Góc giữa cạnh bên CC' và mặt phẳng đáy (ABC) bằng 45° . Tính thể tích khối lăng trụ đã cho và khoảng cách giữa hai đường thẳng BC và $C'I$.

Giải:

Tam giác ABC vuông tại C,

$$\widehat{ABC} = 60^\circ$$

$$\Rightarrow AC = BC \tan 60^\circ = 2\sqrt{3}a. AB = \frac{BC}{\cos 60^\circ} = 4a$$

$$\Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} CA \cdot CB = 2\sqrt{3}a^2,$$

$$CM = \frac{1}{2} AB = 2a \Rightarrow CI = a$$

Do $CI' \perp (ABC)$ nên IC là hình chiếu của CC' xuống mặt phẳng đáy (ABC). Vậy $\widehat{C'CI} = 45^\circ$, vậy tam giác CIC' là tam giác vuông cân tại C $\Rightarrow IC = IC' = a$

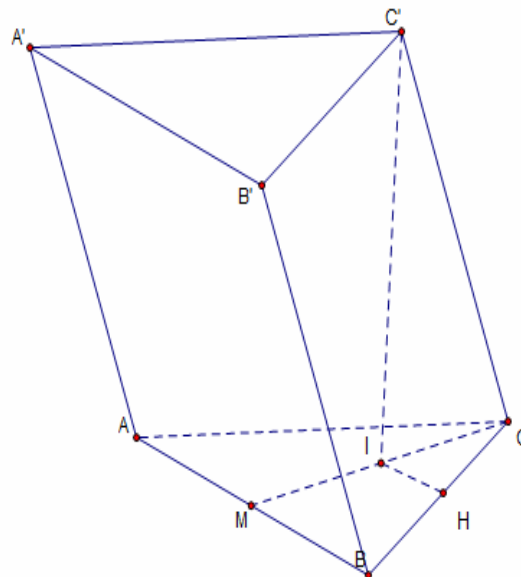
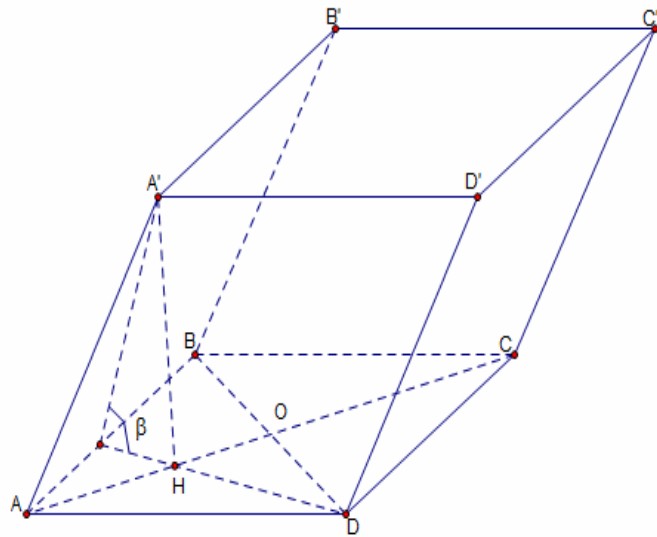
Có

$$C'I \perp (ABC) \Rightarrow V_{ABC.A'B'C'} = C'I \cdot S_{\triangle ABC} = 2\sqrt{3}a^3$$

* Từ I dựng

$$IH \perp BC (H \in BC)$$

$$C'I \perp (ABC) \Rightarrow C'I \perp IH$$



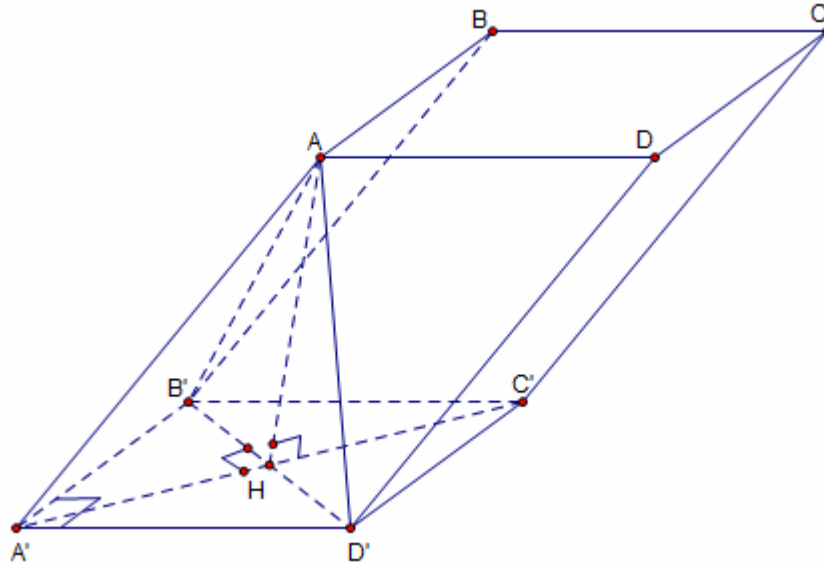
CHUYÊN ĐỀ: THỂ TÍCH – GÓC – KHOẢNG CÁCH

Vậy IH chính là đoạn vuông góc chung của BC và C'I, vậy $d(BC; C'I) = IH$

$$\Delta ICH \text{ vuông tại } I, \widehat{ICH} = \widehat{CBA} = 60^\circ \Rightarrow IH = CI \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

1.2.3. Cho hình chóp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông cạnh a . Các mặt bên là hình thoi, biết $\widehat{AA'B'} = \widehat{AA'D'} = 60^\circ$. Tính $V_{ABCD.A'B'C'D'}$ = ?

Giải:



Do các mặt bên là hình thoi nên $A'A = A'B' = A'D'$. Mà $\angle AA'B' = \angle AA'D' = 60^\circ$. $\Delta A'AB$, $\Delta A'AD$ là các tam giác đều cạnh a . Vậy nên $AA' = AB' = AD'$ suy ra chân đường cao hạ từ đỉnh A' của hình lăng trụ chính là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác $\Delta A'B'D'$. Mà tam giác $\Delta A'B'D'$ vuông tại A' nên tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác chính là trung điểm H của $B'D'$

Ta có:

$$A'H = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow AH = \sqrt{AA'^2 - A'H^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$S_{A'B'C'D'} = a^2 \Rightarrow V_{ABCD.A'B'C'D'} = AH \cdot S_{A'B'C'D'} = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}$$

1.2.4. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a , hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm O của tam giác ABC . Một mặt phẳng (P) chứa BC và vuông góc với AA' , cắt lăng trụ theo một thiết diện có diện tích bằng $a^2 \frac{\sqrt{8}}{3}$.

Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ theo a .

Giải.

CHUYÊN ĐỀ: THỂ TÍCH – GÓC – KHOẢNG CÁCH

Gọi M là trung điểm của BC, Gọi H là hình chiếu vuông góc M lên AA'. Khi đó (P) chính là mặt phẳng (HBC).

- Thật vậy: $AA' \perp HM$, và

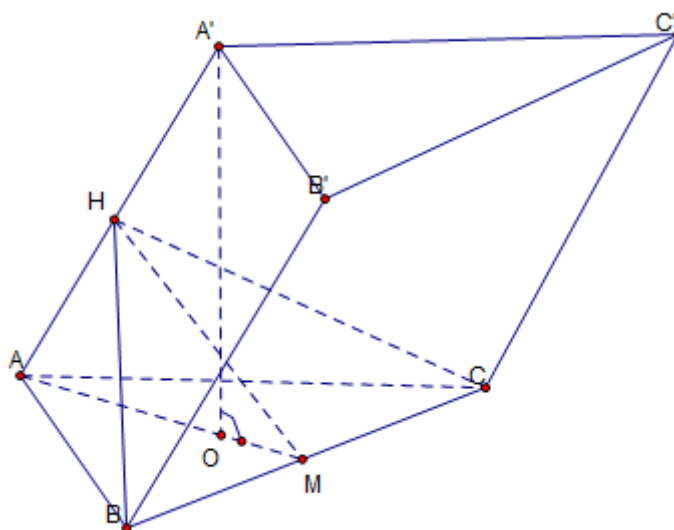
$AA' \perp BC$ (vì
 $BC \perp AM, BC \perp A'O \Rightarrow BC \perp (A'AM)$)

Vậy: $AA' \perp (BHC)$

- Theo đề bài ra:

$$S_{BHC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{8} = \frac{1}{2}HM \cdot BC \Rightarrow HM = \frac{a\sqrt{3}}{4}$$

$$AH = \sqrt{AM^2 - HM^2} = \frac{3a}{4}$$



Do hai tam giác $A'O$ và MAH đồng dạng nên ta có: $\frac{A'O}{AO} = \frac{HM}{AH} \Rightarrow A'O = \frac{AO \cdot HM}{AH} = \frac{a}{3}$

Suy ra thể tích khối lăng trụ: $V = A'O \cdot S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot A'O \cdot AM \cdot BC = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$ (đvtt)

Bài tập rèn luyện:

Bài 1. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có các đáy là tam giác đều cạnh a . Hình chiếu vuông góc của C' lên mặt phẳng (ABC) là điểm D thuộc cạnh BC sao cho $DB=2DC$. Góc giữa đường thẳng AC' và mặt phẳng (ABC) bằng 45° . Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$

Bài 2. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a , $SD = \frac{a\sqrt{17}}{2}$, hình chiếu

vuông góc H của S trên mặt phẳng (ABCD) là trung điểm của đoạn AB. Gọi K là trung điểm của đoạn AD. Tính thể tích khối chóp S.ABCD và khoảng cách giữa hai đường thẳng HK và SD theo a .

Bài 3. Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $AB=a$, SA vuông góc với mặt đáy (ABC). Góc giữa (SBC) và đáy bằng 60° . Gọi M là trung điểm của AB. Tính thể tích khối chóp S.ABC và khoảng cách giữa hai đường thẳng SM và AC theo a .

Bài 4. Cho hình chóp đều S.ABCD có độ dài cạnh đáy bằng a , mặt bên của hình chóp tạo với mặt đáy một góc 60° . Mặt phẳng (P) chứa AB và đi qua trọng tâm G của tam giác SAC cắt SC, SD lần lượt tại M, N. Tính thể tích khối chóp SABMN theo a

CHUYÊN ĐỀ: THỂ TÍCH – GÓC – KHOẢNG CÁCH

Vấn đề 3: Góc và các bài toán liên quan

A. Kiến thức cần nhớ.

1. Góc giữa hai đường thẳng:

a. Khái niệm: Góc giữa hai đường thẳng a và b trong không gian là góc giữa hai đường thẳng a' và b' cùng đi qua một điểm và lần lượt song song với hai đường thẳng a và b .

b. chú ý: góc giữa hai đường thẳng

$$0^\circ \leq (\widehat{a, b}) \leq 90^\circ$$

c. Cách xác định góc giữa hai đường thẳng a và b .

+ Nếu hai đường thẳng a và b vuông góc thì

$$(\widehat{a, b}) = 90^\circ$$

+ Nếu hai đường thẳng a và b song song hoặc trùng nhau thì $(\widehat{a, b}) = 0^\circ$

+ Nếu hai đường thẳng a và b không song song, không trùng nhau, và cũng không vuông góc với nhau. Khi đó ta xác định góc theo các bước sau:

Bước 1. Chọn điểm O trong không gian sao cho từ O có thể xác định được các đường thẳng a' và b' lần lượt song song với a và b .

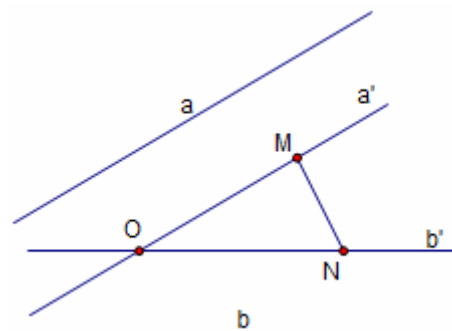
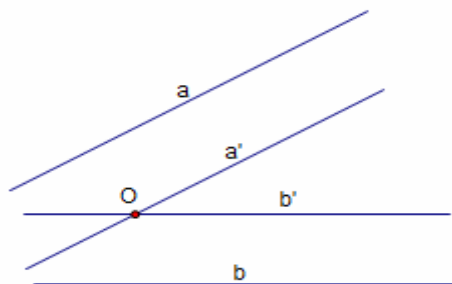
Bước 2. Trên đường thẳng a' ta chọn điểm M (khác O); trên đường thẳng b' ta chọn điểm N (khác O),

sao cho ta có thể tính được $\cos(\widehat{MON})$ dựa vào định lý cô sin trong tam giác OMN .

Bước 3. Kết luận góc giữa hai đường thẳng a và b

chính là góc $\widehat{MON}$ nếu $\cos(\widehat{MON}) \geq 0$ hoặc

$180^\circ - (\widehat{MON})$ nếu $\cos(\widehat{MON}) < 0$.



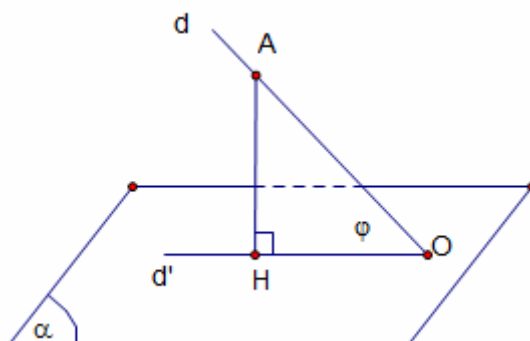
2. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng:

a. khái niệm:

Cho đường thẳng d và mặt phẳng (α)

+ Trường hợp đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (α) thì góc giữa d và (α) bằng 90° .

+ Trường hợp nếu d và (α) không vuông góc với nhau thì góc giữa d và hình chiếu d' của nó trên (α) chính là góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (α) .



b. Chú ý: $0^\circ \leq (\widehat{d, (\alpha)}) \leq 90^\circ$

CHUYÊN ĐỀ: THỂ TÍCH – GÓC – KHOẢNG CÁCH

c. Cách xác định góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (α) .

+ Nếu d và (α) vuông góc với nhau thì góc của chúng $(\widehat{d, (\alpha)}) = 90^\circ$

+ Nếu d và (α) song song với nhau thì: $(\widehat{d, (\alpha)}) = 0^\circ$

+ Nếu d và (α) không song song và cũng không vuông góc ta xác định như sau:

Bước 1. Xác định điểm $O = d \cap (\alpha)$

Bước 2. Trên đường thẳng d ta chọn điểm A (Khác O) sao cho ta có thể xác định được hình chiếu H của A trên (α)

Bước 3. Kết luận góc giữa d và (α) là: $\varphi = \widehat{AOH}$

3. Góc giữa hai mặt phẳng.

a. Khái niệm: Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó

b. Chú ý: $0^\circ \leq (\widehat{(\alpha), (\beta)}) \leq 90^\circ$

c. Cách xác định góc giữa hai mặt phẳng.

+ Nếu hai mặt phẳng vuông góc thì góc bằng 90°

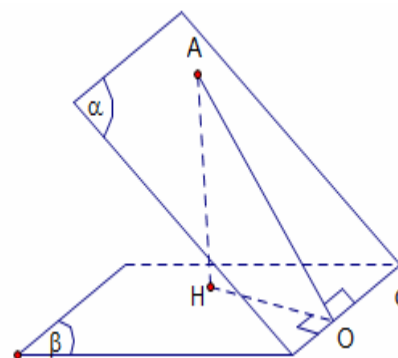
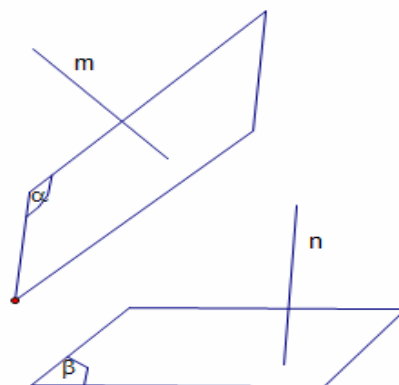
+ Nếu hai mặt phẳng song song thì góc bằng 0°

+ Nếu hai mặt phẳng không song song và vuông góc thì ta xác định theo các bước sau:

Bước 1.

Xác định giao tuyến $d = (\alpha) \cap (\beta)$

Bước 2. Lấy điểm A trên (α) , Gọi H, O lần lượt là hình chiếu của A trên $(\beta), d$. Khi đó góc giữa hai mặt phẳng (α) và (β) chính là góc $\varphi = \widehat{AOH}$.



B. BÀI TẬP MINH HỌA.

1. Hình có liên quan đến việc xác định góc giữa hai đường thẳng.

3.1.1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, $SA = a$, $SB = a\sqrt{3}$ và mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC . Tính theo a thể tích của khối chóp $S.BMDN$ và tính cosin của góc giữa hai đường thẳng SM, DN .

CHUYÊN ĐỀ: THỂ TÍCH – GÓC – KHOẢNG CÁCH

* Tính thể tích khối chóp:

+ Gọi H là trung điểm của BC. Khi đó $A'H \perp (ABC)$

+ Theo giả thiết, tam giác ABC vuông tại A nên: $BC = 2a, AH = \frac{1}{2}BC = a$.

Xét tam giác $A'AH$ vuông tại H nên $A'H = \sqrt{AA'^2 - AH^2} = a\sqrt{3}$.

$$\text{Vậy } V_{A'.ABC} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot A'H = \frac{a^3}{2} (\text{đvtt})$$

* Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng $A'A$ và $B'C'$.

Xét tam giác $A'B'H$ vuông tại A' nên $B'H = \sqrt{A'B'^2 + A'H^2} = 2a$, do đó tam giác $BB'H$ cân tại B' .

Từ đó, ta có $\varphi = \widehat{B'BH}$ (vì $A'A // BB'$ và $B'C' // BC$). Suy ra $\cos \varphi = \frac{BH}{2BB'} = \frac{1}{4}$

2. Hình có liên quan đến việc xác định góc giữa đường thẳng và mặt phẳng.

3.2.1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a . Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) là điểm H thuộc cạnh AB sao cho $HA = 2HB$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Tính thể tích của khối chóp $S.ABC$ và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC theo a .

Giải.

+ Ta có HC là hình chiếu của SC trên mặt đáy (ABC) nên

$$\left(\widehat{SC, (ABC)} \right) = \widehat{SCH} = 60^\circ$$

+ Xét $\triangle BHC$, ta có:

$$CH^2 = BH^2 + BC^2 - 2 \cdot BH \cdot BC \cdot \cos 60^\circ$$

$$\Rightarrow CH = \frac{a\sqrt{7}}{3}$$

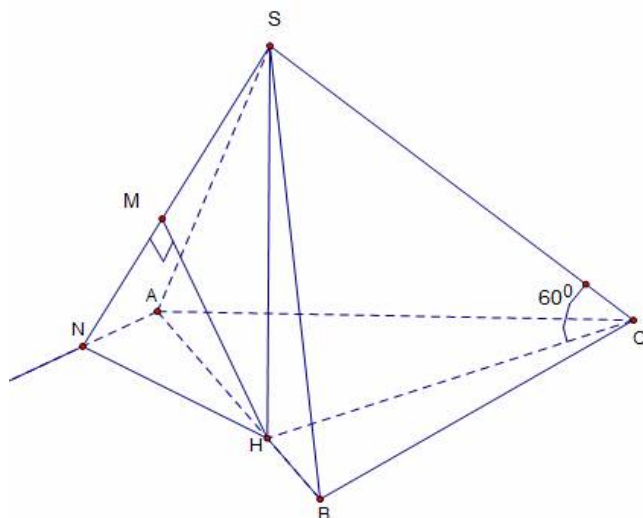
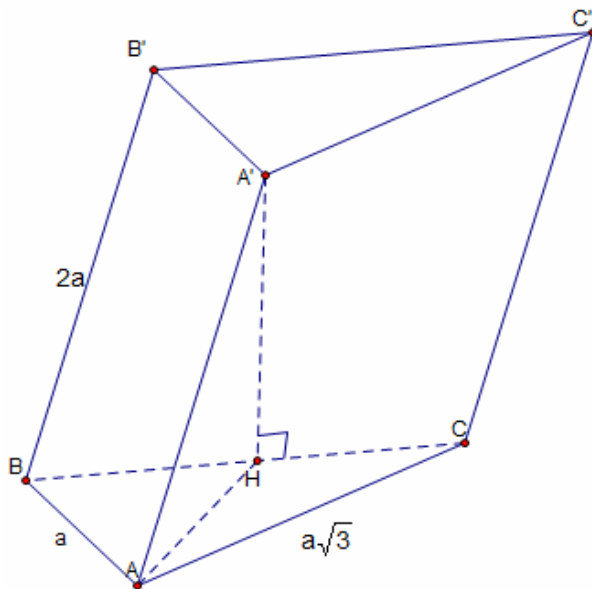
+ Trong tam giác vuông SHC ta có:

$$SH = CH \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{21}}{3}$$

Vậy:

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot SH = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{21}}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{7}}{12}$$

+ Kẻ $Ax // BC$. Gọi N, M lần lượt là hình chiếu của H trên các cạnh Ax và SN. Ta có



CHUYÊN ĐỀ: THỂ TÍCH – GÓC – KHOẢNG CÁCH

$BC \parallel (SAN)$ và $BA = \frac{3}{2}HA$ nên $d(SA;BC) = d(B;(SAN)) = \frac{3}{2}d(H,(SNA))$. Ta có:

$Ax \perp (SHN) \Rightarrow Ax \perp HM$ do đó $HM \perp (SNA)$. Suy ra $d(H,(SNA)) = HM$

+ Ta có $AH = \frac{2a}{3}$, $HN = AH \cdot \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow MH = \frac{SH \cdot HN}{\sqrt{SH^2 + HN^2}} = \frac{a\sqrt{42}}{12}$,

Vậy: $d(BC,SA) = \frac{a\sqrt{42}}{8}$

CHUYÊN ĐỀ: THỂ TÍCH – GÓC – KHOẢNG CÁCH

Vấn đề 4: Khoảng cách

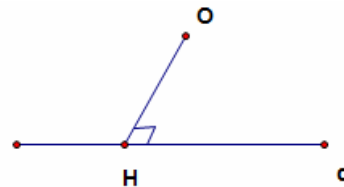
A. Kiến thức cần nhớ.

I. BÀI TOÁN 1: Tính khoảng cách từ 1 điểm đến 1 đường thẳng

1. Phương pháp: Để tính khoảng cách từ điểm O tới đường thẳng d ta thực hiện theo các bước sau :

B_1 : Trong mặt phẳng (O;d) hạ OH vuông góc d với H thuộc d

B_2 : Tính độ dài OH



Ví dụ 2: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi tâm O, $SA=AB=2a$, $\widehat{ABC} = 60^\circ$ và $SA \perp (ABCD)$

a) Tính $d(O; SC)$

b) Tính $d(O; SB)$ và $d(D; SB)$

Giải:

a)

Gọi I là hình chiếu của O trên SC

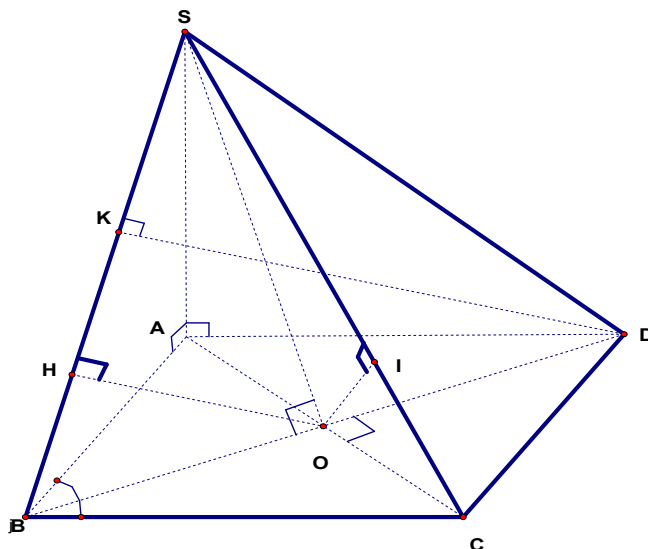
Ta có $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp AC$

Vì $\triangle CAS$ đồng dạng với $\triangle CIO$ nên

$$\frac{CS}{CO} = \frac{AS}{IO} \Rightarrow IO = \frac{AS \cdot CO}{CS}$$

$$IO = \frac{2a \cdot a}{\sqrt{SA^2 + AC^2}} = \frac{2a^2}{\sqrt{4a^2 + 4a^2}} = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$\text{Vậy } d(O; SC) = \frac{a}{\sqrt{2}}$$



b) Kẻ OH vuông góc với SB tại H, khi đó $d(O; SB) = OH$. Ta có

$BD \perp AC, BD \perp SA \Rightarrow BD \perp (SAC)$ mà $SO \subset (SAC)$ nên $BD \perp SO$. Vậy tam giác SOB vuông tại O. Do OH là đường cao của tam giác vuông $\triangle SOB$ nên

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OS^2} \Rightarrow d(O; SB) = OH = \frac{a\sqrt{30}}{4}$$

$$\text{- Ta có } \frac{d(D; SB)}{d(O; SB)} = \frac{DB}{OB} = 2 \Rightarrow d(D; SB) = 2 \cdot d(O; SB) = \frac{a\sqrt{30}}{2}$$

Bài 1. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, tâm O, $SA = a$ và vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Gọi I, M theo thứ tự là trung điểm của SC, AB.

a) Tính khoảng cách từ I đến CM

b) Tính khoảng cách từ S đến CM

Bài 2. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông đường cao $AB=a$, $BC=2a$, $SA=a$ và vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Ngoài ra còn có SC vuông góc với BD.

CHUYÊN ĐỀ: THỂ TÍCH – GÓC – KHOẢNG CÁCH

Gọi M là một điểm trên đoạn SA, đặt $AM=x$ với $0 \leq x \leq a$. Tính khoảng cách từ D đến BM theo a và x. Tìm các giá trị của x để khoảng cách này có GTNN, GTLN

II. BÀI TOÁN 2. Tính khoảng cách từ điểm M tới mặt phẳng (P)

Tính khoảng cách từ một điểm M tới mặt phẳng (P) có thể thực hiện theo 4 phương pháp như sau:

Khoảng cách $d(M;(P))$

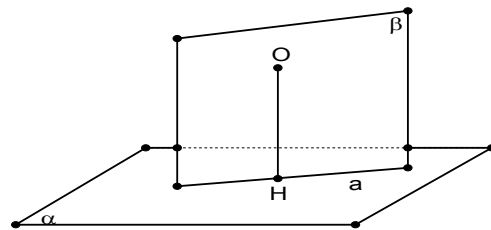
- Xác định trực tiếp
- Phương pháp đổi điểm
- Phương pháp đổi đỉnh (thể tích)
- Phương pháp tọa độ trong không gian

1. Phương pháp trực tiếp:

B₁: Dựng OH với H là hình chiếu của O lên (α) bằng cách:

- Dựng mp(P) qua O vuông góc với (α) cắt (α) theo giao tuyến a
- Trong (P) dựng $OH \perp a$ tại H
 $\Rightarrow OH \perp (\alpha)$

B₂: Tính độ dài OH



Bài mẫu 1. Khoảng cách từ chân đường vuông góc tới mặt phẳng

Cho hình chóp S.ABC, SA vuông góc với đáy, tam giác ABC không vuông tại B, C. Vẽ $AE \perp BC, AH \perp SE$. Chứng minh: $AH \perp (SBC)$

*Phân tích bài toán

Ta có sẵn $AH \perp SE$ (1)

Ta phải chứng minh: $AH \perp BC$

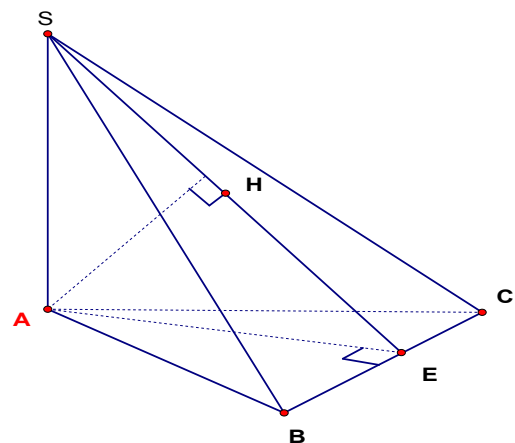
Thật vậy

$$BC \perp AE, BC \perp SA \Rightarrow BC \perp (SAE) \Rightarrow BC \perp AH \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra : $AH \perp (SBC)$

- Để tính AH ta sử dụng công thức

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AE^2}$$



Bài mẫu 2. Khoảng cách từ chân đường vuông góc tới mặt phẳng

Cho hình chóp S.ABC, SA vuông góc với đáy (ABC), tam giác ABC vuông tại B, Vẽ $AH \perp SB$. Chứng minh: $AH \perp (SBC)$

CHUYÊN ĐỀ: THỂ TÍCH – GÓC – KHOẢNG CÁCH

Ta có sẵn $AH \perp SB$ (1)

Ta phải chứng minh: $AH \perp BC$

Thật vậy

$$BC \perp AB, BC \perp SA \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH \text{ (2)}$$

Từ (1) và (2) suy ra: $AH \perp (SBC)$

- Để tính AH ta sử dụng công thức

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2}$$

Ví dụ 1: Cho hình chóp S.ABC, có

$SA \perp (ABC)$, độ dài các cạnh $SA = 4cm, AB = 3cm, AC = 4cm, BC = 5cm$

Tính $d(A; (SBC))$

Giải

* Trong tam giác ABC ta có $AB^2 + AC^2 = BC^2$ vậy tam giác vuông tại A.

Trong tam giác ABC hạ $AE \perp BC$ (1)

Ta phải chứng minh: $AH \perp BC$

Thật vậy $BC \perp AE, BC \perp SA \Rightarrow BC \perp (SAE) \Rightarrow BC \perp AH$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $AH \perp (SBC)$. Vậy $d(A; (SBC)) = AH$

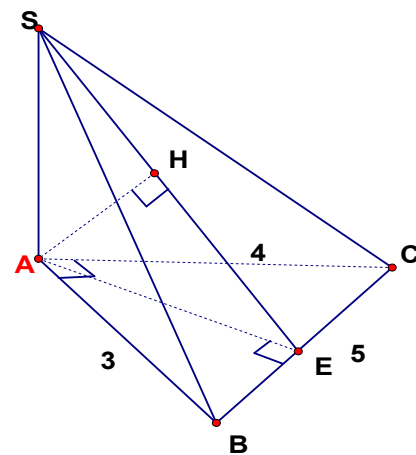
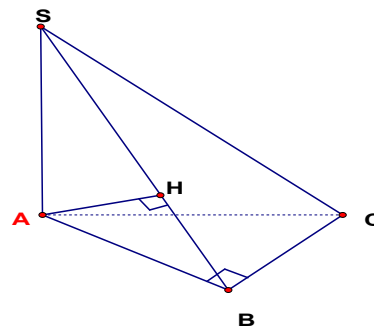
* Tính AH.

- Trong tam giác vuông ABC ta có $\frac{1}{AE^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$

- Trong tam giác vuông SAE ta có:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AE^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$$

$$\Rightarrow d(A; (SBC)) = AH = \frac{SA \cdot SE}{\sqrt{SA^2 + SE^2}} = \frac{6\sqrt{34}}{17}$$



Ví dụ 2: Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau theo giao tuyến Δ . Trên Δ lấy hai điểm A, B với $AB = a$. Trong mặt phẳng (P) lấy điểm C, trong mặt phẳng (Q) lấy điểm D sao cho AC, BD cùng vuông góc với Δ và $AC = BD = AB$. Tính khoảng cách từ A đến (BCD) theo a

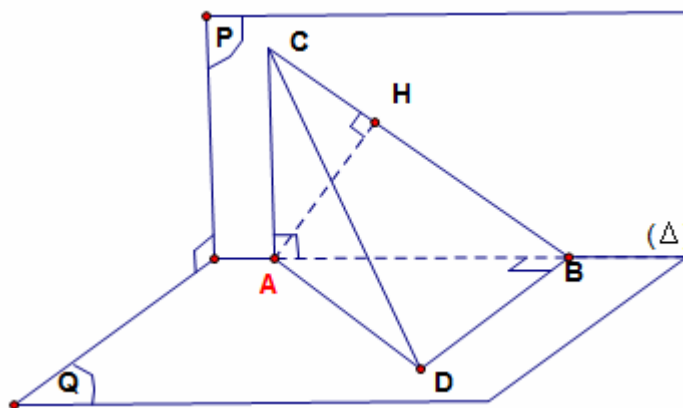
CHUYÊN ĐỀ: THỂ TÍCH – GÓC – KHOẢNG CÁCH

Giải

- Trong tam giác ABC, hạ $AH \perp BC$ (1)

- Ta cần chứng minh $AH \perp BD$. Thật vậy $BD \perp AB$ (vì $BD \perp \Delta$), $BD \perp AC$
 $\Rightarrow BD \perp (ABC) \Rightarrow BD \perp AH$ (2)

- Từ (1) và (2) ta có $AH \perp (BCD)$. Vậy $d(A, (BCD)) = AH$



- Tính AH: trong tam giác ABC vuông tại A, AH chính là đường cao ứng với cạnh huyền

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} \Rightarrow AH = \frac{AB \cdot AC}{\sqrt{AB^2 + AC^2}} = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$\text{Vậy } d(A, (BCD)) = AH = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

Ví dụ 3: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a. Mặt bên (SAB) là tam giác cân tại S và mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng (ABCD), cạnh bên SC tạo với mặt phẳng đáy một góc α . Tính khoảng cách từ chân đường cao hình chóp đến mp(SCD)

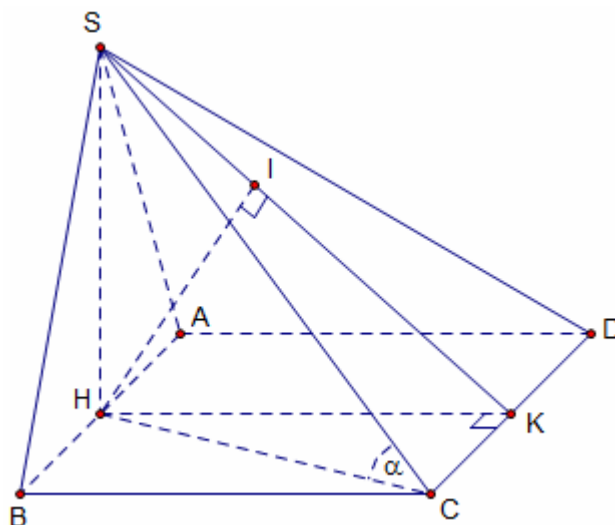
Giải

- Gọi H là trung điểm của AB suy ra $SH \perp AB \Rightarrow HS \perp (ABCD)$. Suy ra H là chân đường cao hạ từ S của hình chóp.

- $SH \perp (ABCD) \Rightarrow CH$ là hình chiếu của SC xuống mặt phẳng (ABCD). Vậy góc giữa SC và đáy là góc $\widehat{SCH} = \alpha$

- Gọi I là hình chiếu của H xuống DK, khi đó $HI \perp SK$ (1)

- Gọi K là trung điểm CD. Ta có $HK \perp CD$



Ta cần chứng minh $IH \perp CD$, thật vậy $CD \perp HK, CD \perp SH \Rightarrow CD \perp (SHK) \Rightarrow CD \perp IH$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $HI \perp (SCD)$

Vậy HI là khoảng cách từ H đến mp(SCD)

- Trong tam giác vuông BHC vuông tại B

$$HC = \sqrt{BH^2 + BC^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}a$$

Tam giác SHC vuông tại H

$$\Rightarrow SH = HC \cdot \tan \alpha = \frac{a\sqrt{5}}{2} \tan \alpha$$

Trong ΔSHK vuông với $HK = a$, ta có:

CHUYÊN ĐỀ: THỂ TÍCH – GÓC – KHOẢNG CÁCH

$$\frac{1}{HI^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HK^2} = \frac{5 \tan^2 \alpha + 4}{5a \cdot \tan^2 \alpha} \Rightarrow HI = \frac{a\sqrt{5} \tan \alpha}{\sqrt{5 \tan^2 \alpha + 4}}$$

b. Bài tập tư luyện:

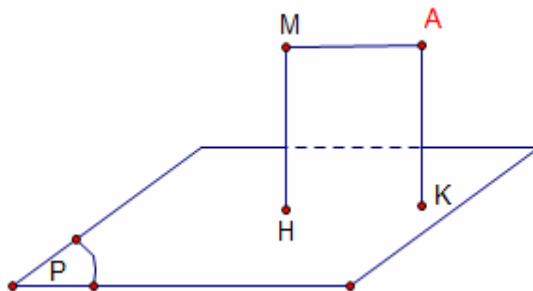
Bài 1. (Bài 62-SBT). Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi, $\hat{A} = 90^\circ$, $BD=a$, cạnh bên SA vuông góc với đáy, góc giữa mp(SBC) và mặt đáy là 60° . Tính khoảng cách từ A đến mp(SCB)

Bài 2. (Câu IV-đề thi Đại học khối D năm 2011). Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $BA=3a$, $BC=4a$; mp(SBC) vuông góc với mp(ABC). Biết $SB = 2a\sqrt{3}$ và $\hat{SBC} = 30^\circ$. Tính khoảng cách từ điểm B đến mp(SAC) theo a

2. Phương pháp đổi điểm: Tính khoảng cách từ M đến (P)

Nếu điểm A là chân đường vuông góc (ta gọi là điểm dễ). Việc tính khoảng cách từ một điểm dễ đến một mặt phẳng được trình bày ở trên thông qua hai bài mẫu. Phương pháp đổi điểm đó là thay vì tính khoảng cách từ một điểm khó đến (P) ta chuyển về tính khoảng cách từ điểm dễ đến một mặt phẳng (P) sau đó suy ra khoảng cách cần tìm thông qua hệ thức tỉ lệ.
- Để sử dụng thạo phương pháp đổi điểm khi làm bài cần tìm điểm dễ. sau đó xem bài toán thuộc trường hợp nào trong 3 trường hợp sau:

TH1: Nếu $AM \parallel (P)$ thì $d(M; (P)) = d(A; (P))$

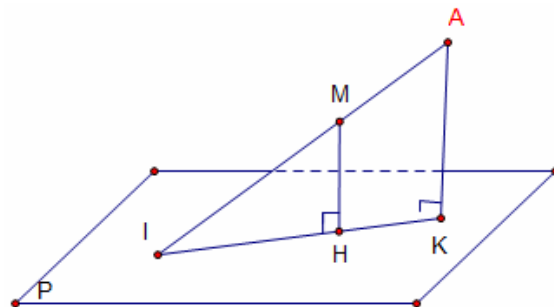


TH2: Nếu AM không song song với (P) A, M cùng phía với (P)

Gọi I là giao điểm của AM và (P).

$$\text{Vậy: } \frac{d(M; (P))}{d(A; (P))} = \frac{MI}{AI}$$

$$\Rightarrow d(M; (P)) = \frac{MI}{AI} \cdot d(A; (P))$$



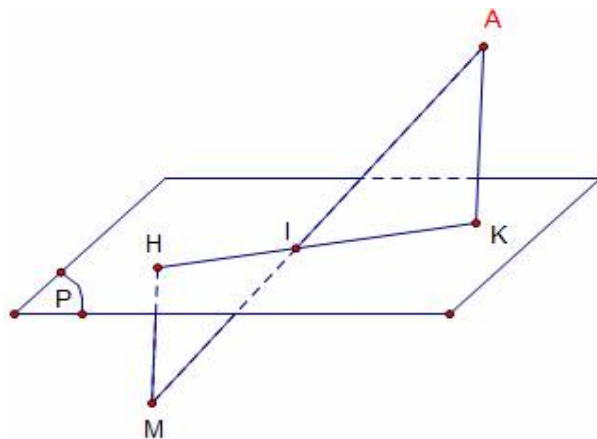
TH3: Nếu AM không song song với (P)

A, M ở hai phía với (P)

- Gọi I là giao điểm của AM và (P).

Vậy:

$$\frac{d(M; (P))}{d(A; (P))} = \frac{MI}{AI} \Rightarrow d(M; (P)) = \frac{MI}{AI} \cdot d(A; (P))$$



a. Các ví dụ:

CHUYÊN ĐỀ: THỂ TÍCH – GÓC – KHOẢNG CÁCH

Ví dụ 1: (ĐH 2013B) Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, mặt bên (SAB) là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SCD)

Giải

* Xác định khoảng cách:

- Gọi H là trung điểm của AB, vì tam giác SAB là tam giác đều nên ta có $SH \perp AB$, mặt khác giả thiết:

$$(SAB) \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp (ABCD)$$

- Ta có

$$AH // (SCD) \Rightarrow d(A; (SCD)) = d(H; (SCD))$$

- Gọi I là trung điểm CD, khi đó ta có $HI \perp CD$, và $SA \perp CD \Rightarrow CD \perp (SHI)$

- Trong tam giác vuông SHI hạ $HK \perp SI$ (1).

$$\text{Do } CD \perp (SHI) \Rightarrow HK \perp CD \text{ (2)}$$

Từ (1) và (2) ta có: $HK \perp (SCD)$ vậy

$$d(H; (SCD)) = HK$$

* Tính khoảng cách HK:

- Trong tam giác vuông SHI, ta có $\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HI^2}$

- Với SH là đường trung tuyến của tam giác đều nên $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ và $HI = BC = a$

$$\Rightarrow HK = \frac{SH \cdot HI}{\sqrt{SH^2 + HI^2}} = \frac{a \cdot a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{a^2 + \frac{3}{4}a^2}} = a \frac{\sqrt{21}}{7}$$

$$\text{Vậy: } d(A; (SCD)) = \frac{a\sqrt{21}}{7}$$

Ví dụ 2: Cho lăng trụ đứng ABC. A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông, AB=BC=a. Cạnh bên AA' = $a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC, E là trung điểm của BB'. Tính khoảng cách từ B' đến (AME)

Giải

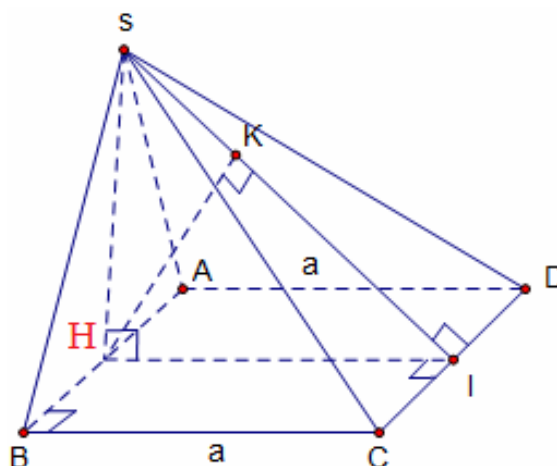
- Vì E là trung điểm của BB'

$$\Rightarrow \frac{d(B'; (AME))}{d(B; (AME))} = \frac{B'E}{BE}$$

Dễ thấy hình chóp B.AME có BA, BE, BM đôi một vuông góc.

- Hạ $BK \perp AM$, ta có $AM \perp BE \Rightarrow AM \perp (BEK)$

- Trong tam giác BEK hạ $BH \perp EK$ (1) mặt khác $AM \perp (BEK) \Rightarrow BH \perp AM$ (2)



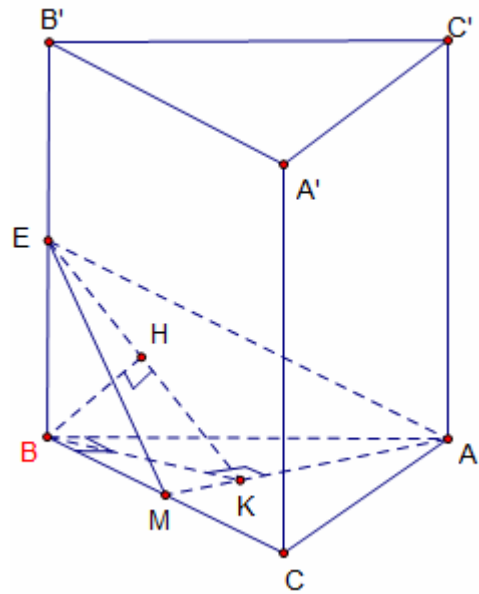
CHUYÊN ĐỀ: THỂ TÍCH – GÓC – KHOẢNG CÁCH

-Từ (1) và (2) $\Rightarrow BH \perp (AME)$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \frac{1}{BH^2} &= \frac{1}{BE^2} + \frac{1}{BK^2} = \frac{1}{BE^2} + \frac{1}{BM^2} + \frac{1}{BA^2} \\ &= \frac{1}{a^2} + \frac{1}{\frac{1}{2}a^2} + \frac{1}{\frac{a^2}{4}} = \frac{7}{a^2} \\ \Rightarrow BH &= \frac{a}{\sqrt{7}}\end{aligned}$$

Vậy khoảng cách từ B đến mp(AME) bằng

$$\frac{a}{\sqrt{7}}$$



Ví dụ 3: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông tâm O cạnh bằng a, SA $= a\sqrt{3}$ và vuông góc với mặt phẳng (ABCD)

- Tính khoảng cách từ trung điểm M của SC tới mặt phẳng (ABCD)
- Tính khoảng cách từ A đến mp (SBC), từ đó suy ra khoảng cách từ O đến mp (SBC)
- Tính khoảng cách từ trọng tâm G của tam giác SAB đến mp (SAC)

Giải

- a) Ta có $MO \parallel SA \Rightarrow MO$ vuông góc (ABCD)

$$\Rightarrow d(M; (ABCD)) = MO = \frac{1}{2}SA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

- b) Nhận xét rằng

$$\left. \begin{array}{l} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow (SAB) \perp (SBC)$$

Hạ AH vuông góc với SB $\Rightarrow AH \perp (SBC)$

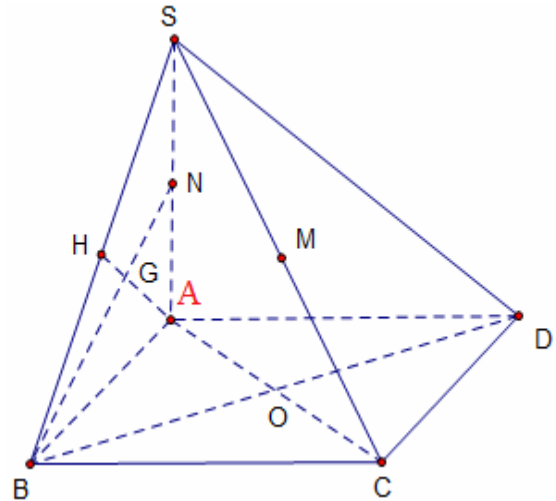
$$\Rightarrow d(A; (SBC)) = AH$$

Trong ΔSAB vuông tại A ta có

$$\begin{aligned}\frac{1}{AH^2} &= \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2} = \frac{1}{(a\sqrt{3})^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{4}{3a^2} \\ \Rightarrow AH &= \frac{a\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

Vậy khoảng cách từ A đến (SBC) bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Vì $AO \cap (SBC) = C$ nên



CHUYÊN ĐỀ: THỂ TÍCH – GÓC – KHOẢNG CÁCH

$$\frac{d(O;(SBC))}{d(A;(SBC))} = \frac{OC}{AC} = \frac{1}{2} \Rightarrow d(O;(SBC)) = \frac{1}{2} d(A;(SBC)) = \frac{1}{2} AH = \frac{a\sqrt{3}}{4}$$

c) Vì $BG \cap (SAC) = N$ nên

$$\frac{d(G;(SAC))}{d(B;(SAC))} = \frac{GN}{BN} = \frac{1}{3} \Rightarrow d(G;(SAC)) = \frac{1}{3} d(B;(SAC))$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } (BAC) \perp (SAC), BO \perp AC &\Rightarrow d(B;(SAC)) = BO = \frac{a\sqrt{2}}{2} \\ &\Rightarrow d(G;(SAC)) = \frac{1}{3} BO = \frac{a\sqrt{2}}{6} \end{aligned}$$

b. Bài tập tự luyện:

Bài 1: (Đề thi Đại học khối D năm 2009). Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $AB=a$, $AA'=2a$, $A'C=3a$. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng $A'C'$, I là giao điểm của AM và $A'C$. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (IBC)

Bài 2: (Đề thi Đại học khối A, A1 năm 2014). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SD = \frac{3a}{2}$, hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung

điểm của cạnh AB . Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBD)

III. BÀI TOÁN 3. Khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song. Khoảng cách giữa 2 mặt phẳng song song.

1. Phương pháp:

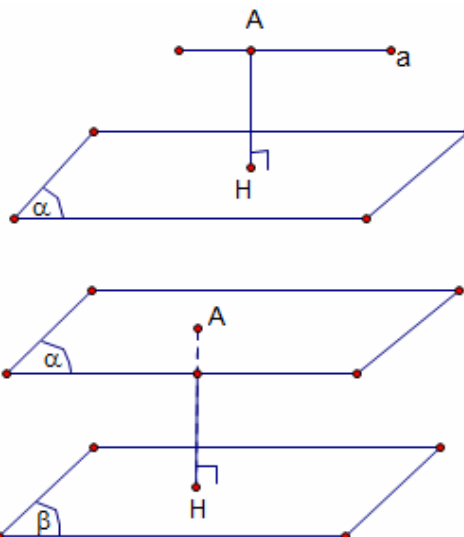
Để tính khoảng cách từ d đến

(α) với $d \parallel (\alpha)$ (hoặc khoảng cách từ (α) đến (β) với $(\alpha) \parallel (\beta)$) ta tiến hành theo các bước:

B_1 : Chọn 1 điểm A trên d (hoặc điểm A trên (α)) sao cho các khoảng cách ấy dễ tính nhất

B_2 : Kết luận $d(d;(\alpha)) = d(A;(\alpha))$

(hoặc $d((\alpha);(\beta)) = d(A;(\beta))$)



a. Một số ví dụ::

Ví dụ 1: Cho hình hộp thoi $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh đều bằng a và $\widehat{BAD} = \widehat{BAA'} = \widehat{DAA'} = 60^\circ$. Tính khoảng cách giữa 2 mặt phẳng đáy $(ABCD)$ và $(A'B'C'D')$.

Giải

Từ giả thiết suy ra các tam giác $A'AD$, BAD , $A'AB$ là các tam giác đều. Suy ra tứ diện $A'ABD$ là tứ diện đều.

Khi đó hình chiếu của A' trên mp $(ABCD)$ chính là trọng tâm H của $\triangle ABD$ đều.

Suy ra khoảng cách giữa mp $(ABCD)$ và mp $(A'B'C'D')$ chính là độ dài $A'H$.

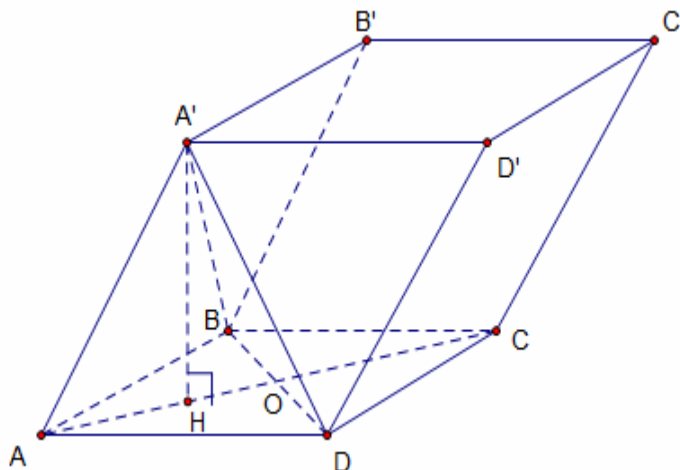
CHUYÊN ĐỀ: THỂ TÍCH – GÓC – KHOẢNG CÁCH

Ta có:

$$A'H^2 = AA'^2 - AH^2 = a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{2a^2}{3}$$

Vậy khoảng cách giữa hai mặt phẳng

$$\text{đáy của hình hộp là } A'H = A'H = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$



Ví dụ 2: Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a và các mặt phẳng $(AA'B')$, $(AA'C')$, $(AB'C')$ tạo với mặt đáy một góc 60° . Tính khoảng cách giữa 2 mặt phẳng đáy (ABC) và $(A'B'C')$.

Giải

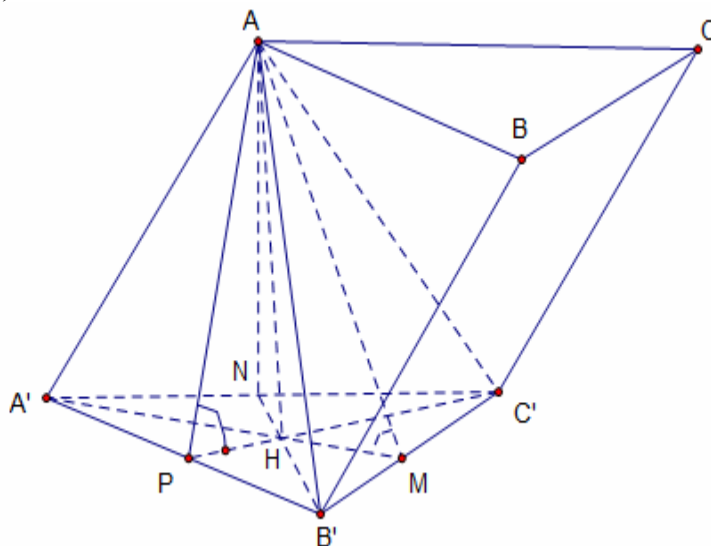
- Gọi H là hình chiếu của A xuống đáy (ABC) .

- Từ H hạ HM , HP , HN lần lượt vuông góc với $B'C'$, $A'C'$, $A'B'$

Ta dễ dàng chứng minh được

$$AM \perp B'C', \quad AN \perp A'C', \quad AP \perp A'B'$$

Do đó, góc giữa các mặt phẳng $(AA'B')$, $(AA'C')$, $(AB'C')$ tạo với mặt đáy chính là các góc $\widehat{AMH}$, $\widehat{ANH}$, $\widehat{APH}$, từ đó ta có



$\Delta AMH = \Delta ANH = \Delta APH \Rightarrow HM = HN = HP$ vậy hình chiếu của A chính là tâm đường tròn nội tiếp tam giác $A'B'C'$. (do tam giác đều nên tâm đường tròn nội tiếp chính là tâm đường tròn ngoại tiếp)

- trong tam giác ΔAMH , ta có $\tan \widehat{AMH} = \frac{AH}{HM} = \sqrt{3}$, mà

$$HM = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{2\sqrt{3}} \Rightarrow AH = \sqrt{3} \cdot \frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{a}{2}$$

Ví dụ 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA = a\sqrt{6}$ và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Đáy $ABCD$ là nửa lục giác đều nội tiếp trong đường tròn đường kính $AD=2a$. Tính khoảng cách từ AD đến mặt phẳng (SBC)

Giải

CHUYÊN ĐỀ: THỂ TÍCH – GÓC – KHOẢNG CÁCH

Vì tứ giác ABCD là nửa lục giác đều đường kính AD

$$\Rightarrow DA//BC \Rightarrow AD// (SBC)$$

$$\Rightarrow d(AD; (SBC)) = d(A; (SBC))$$

Hạ AK vuông góc với BC ta được

$$\left. \begin{array}{l} BC \perp AK \\ BC \perp AS \end{array} \right\} \Rightarrow BC \perp (SAK) \Rightarrow (SAK) \perp (SBC)$$

Hạ AH vuông góc với SK suy ra $AH \perp (SBC)$

$$\Rightarrow d(A; (SBC)) = AH$$

Do ABCD là nửa lục giác đều đường kính

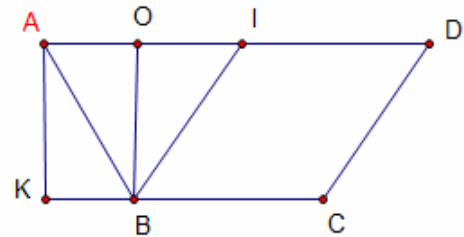
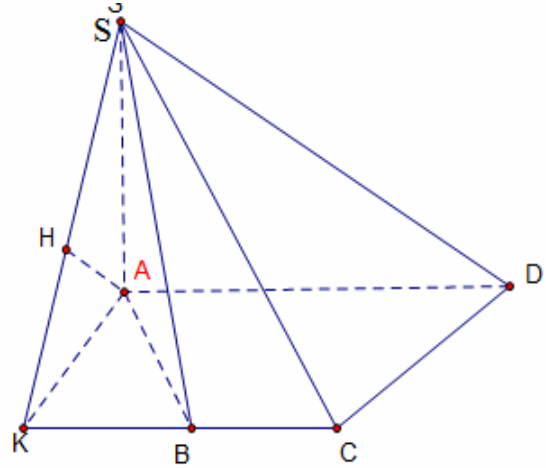
$$AD = 2a \Rightarrow AK = BO = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AK^2} = \frac{1}{(a\sqrt{6})^2} + \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{3}{2a^2}$$

$$\Rightarrow AH = \sqrt{\frac{2}{3}}a$$

Vậy khoảng cách từ AD đến mp(SBC) bằng

$$\sqrt{\frac{2}{3}}a$$



b. Bài tập tự luyện:

Bài 1. Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, và SA vuông góc với đáy (ABC). Biết $AC=2a$, $SA=a$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, BC, SB.

- tính khoảng cách từ MP đến mặt phẳng (SAC)
- Tính khoảng cách từ (MNP) đến (SAC)

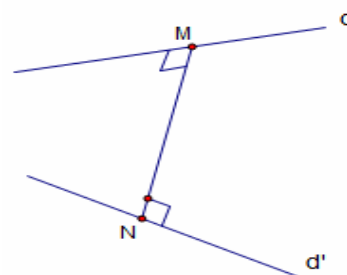
Phần IV. KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU

I. Kiến thức cần nhớ.

1. Định nghĩa đoạn vuông góc chung:

Đoạn MN được gọi là đoạn vuông góc chung của d và d'

$$\Leftrightarrow \begin{cases} MN \perp d \\ MN \perp d' \\ M \in d, N \in d' \end{cases}$$



CHUYÊN ĐỀ: THỂ TÍCH – GÓC – KHOẢNG CÁCH

2. Định nghĩa khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau:

Thế nào là khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau?

Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau d và d' kí hiệu $d(d, d')$ chính bằng độ dài đoạn vuông góc chung MN.

3. Phương pháp tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau d và d'

Cách 1:

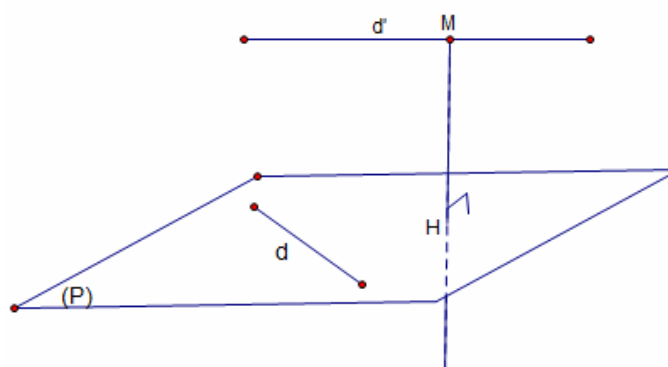
- Xác định đoạn vuông góc chung
- Tính độ dài đoạn vuông góc chung

Chú ý: Khi hai đường thẳng d và d' vuông góc với nhau, ta thường dùng cách 1.

Cách 2:

- Dựng (tìm) mặt phẳng trung gian (P) chứa d và song song với d'
- Khi đó khoảng cách từ d đến d' chính bằng khoảng cách từ một điểm M bất kì trên d' đến (P)

- Khi đó: $d(d; d') = d(M; (P)) = MH$



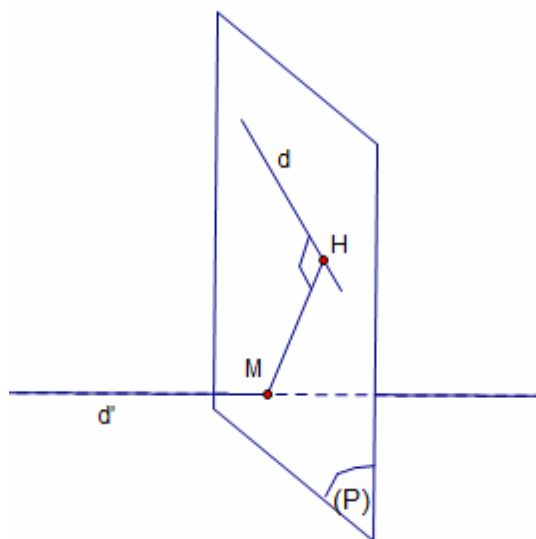
Cách 3:

- Dựng mặt phẳng trung gian (P) chứa d và vuông góc với d' .

- $M = d' \cap (P)$. Từ M kẻ $MH \perp d$

Vậy ta có: $MH \perp d', MH \perp d$

Nên MH chính là đoạn vuông góc chung của d và d' .

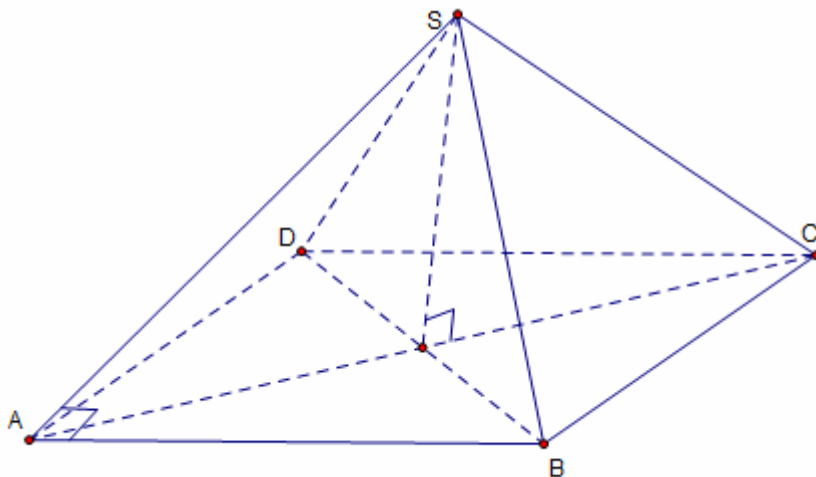


II Bài tập minh họa.

Bài 1. Cho chóp tứ giác đều ABCD đáy là hình vuông cạnh a , cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$. Tính khoảng cách giữa hai đường AD và SB.

Giải.

CHUYÊN ĐỀ: THỂ TÍCH – GÓC – KHOẢNG CÁCH



Cách 1 : tính trực tiếp gọi I là trung điểm AD, $d(AD;SB)=d(I;(SBC))$

Cách 2: $AD \parallel BC$ nên $AD \parallel (SBC)$ vậy $d(AD;SB)=d(AD;(SBC))=d(A;(SBC))$ và

Chú ý: Trong bài toán này, ta có mặt phẳng trung gian là (SBC) vì (SBC) chứa SB và song song với AD

Bài 2. (KA-2010) Cho chóp S.ABCD đáy ABCD là hình vuông cạnh a, gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và AD, H là giao điểm của CN và DM, $SH \perp (ABCD)$, $SH = a\sqrt{3}$.

Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng DM và SC.

Giải.

- Kẻ $HK \perp SC (K \in SC)$

- Dễ chứng minh được CN vuông góc với DM, vì:

$$\widehat{DCN} + \widehat{DNC} = 90^\circ \Leftrightarrow \widehat{ADM} + \widehat{DNC} = 90^\circ$$

$$\left(\text{do: } \widehat{ADM} = \widehat{DCN} \right) \Leftrightarrow \widehat{NHC} = 90^\circ$$

$$\left. \begin{array}{l} DM \perp CN \\ DM \perp SH \end{array} \right\} \Rightarrow DM \perp (SHC)$$

$$\Rightarrow DM \perp HK$$

Vậy: $DM \perp HK; SC \perp HK \Rightarrow d(DM;SC) = HK$

-Ta có $\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HC^2} + \frac{1}{SH^2}$, Mặt khác: tam giác DNC vuông tại D và DH là đường cao nên ta

$$\text{có } \frac{1}{DH^2} = \frac{1}{DN^2} + \frac{1}{DC^2} = \frac{5}{a^2} \Rightarrow DH^2 = \frac{a^2}{5}$$

Ta có :

$$HC^2 = DC^2 - DH^2 \Rightarrow HC^2 = a^2 - \frac{a^2}{5}$$

$$\Rightarrow HK = a\sqrt{\frac{12}{19}}$$

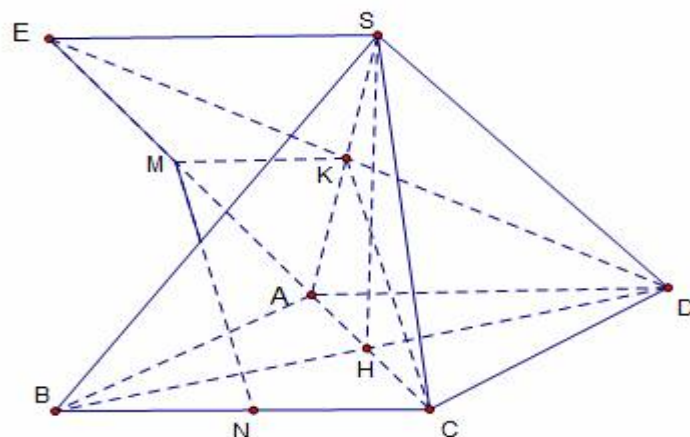
Chú ý : Trong bài toán này DM và SC vuông góc với nhau. Do vậy có thể đi theo hai hướng : xác định trực tiếp đoạn vuông góc chung như cách trên, hoặc xác định mặt phẳng trung gian là (SCN) chứa SC và vuông góc với DM và làm theo **cách 3**.

Bài 3. (KB 2007) Chóp tứ giác đều SABCD đáy ABCD là hình vuông cạnh a, E là điểm đối xứng với D qua trung điểm SA. M là trung điểm AE, N là trung điểm BC. Chứng minh rằng MN vuông góc với BD, tính khoảng cách giữa MN và AC.

GV: ĐỖ BÁ THÀNH

CHUYÊN ĐỀ: THỂ TÍCH – GÓC – KHOẢNG CÁCH

Giải.



a. $MN \perp BD$

Gọi K là trung điểm của SA, khi đó tứ giác MKCN là hình bình hành.

Vậy $MN \parallel CK$ (1)

- Ta có $BD \perp AC, BD \perp SH \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp CK$ (2)

- Từ (1) và (2) ta có : $MN \perp BD$

b. Tính khoảng cách MN và AC

- Vì $MN \parallel (SAC)$ nên $d(MN; AC) = d(MN, (SAC)) = d(N; (SAC))$

- Từ gọi K là hình chiếu của N trên AC khi đó ta có :

$$\left. \begin{array}{l} NK \perp AC \\ NK \perp SHNK \end{array} \right\} \Rightarrow NK \perp (SAC) \Rightarrow d(N; (SAC)) = NK$$

$$* \text{ Tính NK : } NK = \frac{BH}{2} = \frac{\sqrt{a^2 + a^2}}{4} = \frac{a}{2\sqrt{2}}$$

Bài 4. Cho tứ diện ABCD, $AB=a$, tất cả các cạnh còn lại bằng $3a$. Tính khoảng cách giữa hai đường chéo nhau AB và CD.

Giải.

- gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD.

- Ta có $\triangle ANB$ cân tại N vì $AN=BN$

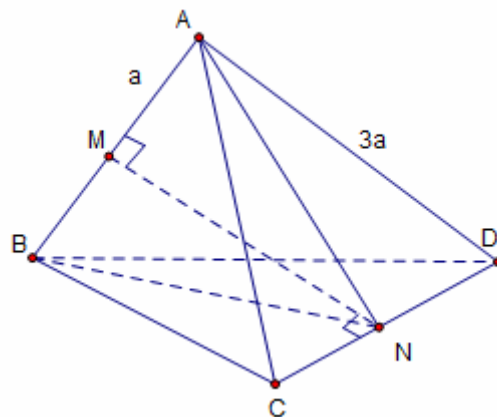
M là trung điểm của AB nên suy

ra : $MN \perp AB$ (1)

Tương tự ta chứng minh $MN \perp CD$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra MN là đoạn vuông góc chung.

$$MN^2 = BN^2 - BM^2 = \left(3a \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$



CHUYÊN ĐỀ: THỂ TÍCH – GÓC – KHOẢNG CÁCH

III Bài tập rèn luyện.

Bài 1. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông $AB=BC=a$, cạnh bên $AA'=a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của BC . Tính theo a thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng $AM, B'C$ (ĐH Khối D 2008)

Bài 2. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B , $AB=2a$. Hai mặt phẳng (SAC) và (SBC) cùng vuông góc với đáy (ABC) . Gọi M là trung điểm của AB , mặt phẳng qua SM và song song với BC cắt AC tại N . Biết góc tạo bởi (SBC) và (ABC) bằng 60° . Tính thể tích khối chóp $SBCM$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SN (ĐH Khối A 2011)

Bài 3. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , $AB=a$, $AC=2a$, $AA'=a$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB' và BC .

Bài 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a . SA vuông góc với đáy, góc tạo bởi SC và (SAB) là 30° . Gọi E, F là trung điểm của BC và SD . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau DE và CF .

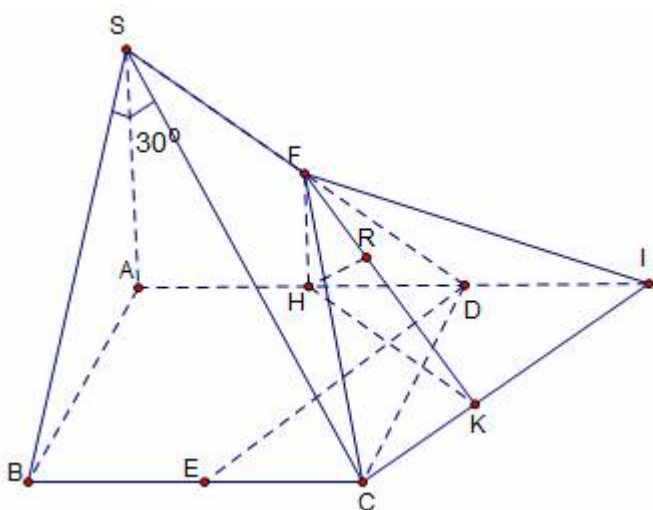
Bài 1. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}, d(AM; B'C) = \frac{a}{\sqrt{7}}$

Bài 2. $V = a^3\sqrt{3}, d(AB; SN) = \frac{2a\sqrt{39}}{13}$

Bài 3. $d(AB'; BC) = \frac{2a}{3}$

Bài 4. Thiết lập mặt phẳng trung gian là (FCI) song song với DE .

- khi đó khoảng cách giữa DE và CF chính là khoảng cách từ D đến (FCI) . Và ta chỉ việc đổi điểm sang tính khoảng cách từ điểm dễ là H đến (FCI) và chúng ta làm việc trong khối chóp $F.HCI$
- ĐS : $HR = \frac{3a\sqrt{31}}{31}$



E. BÀI TẬP THỰC HÀNH

Bài 1. (Khối A, A1 2014) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SD = \frac{3a}{2}$. Hình chiếu vuông góc của S xuống mặt phẳng $(ABCD)$ chính là trung điểm của cạnh AB , Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBD) .

CHUYÊN ĐỀ: THỂ TÍCH – GÓC – KHOẢNG CÁCH

Bài 2. (khối B 2014) Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a , hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của cạnh AB , góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt đáy bằng 60° . Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng $(ACC'A')$

Bài 3. (Khối A, A1 2013) Cho hình chóp $SABC$ có đáy là tam giác vuông tại A . $\widehat{ABC} = 60^\circ$, SBC là tam giác đều cạnh a , mặt bên SBC vuông góc với đáy. Tính khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAB)

Bài 4. (Khối B 2013) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , Mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD)

Bài 5. (Khối D 2013) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a , cạnh bên SA vuông góc với đáy, $\widehat{BAD} = 120^\circ$, M là trung điểm của cạnh BC và $\widehat{SMA} = 45^\circ$. Tính khoảng cách từ D đến (SBC)

Bài 6. (Khối D 2012) Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông, tam giác $A'AC$ vuông cân, $A'C = a$. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BCD')

Bài 7. (Khối A, A1 2012) Cho hình chóp $SABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a , hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) là điểm H thuộc cạnh AB sao cho $HA = 2HB$. Góc giữa SC và mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC theo a .

Bài 8. (Khối D 2012) Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông, tam giác $A'AC$ vuông cân, $A'C = a$. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BCD') theo a .

Bài 9. (Khối A 2011) Cho hình chóp $SABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B , $AB = BC = 2a$; hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy (ABC) . Gọi M là trung điểm của AB ; mặt phẳng qua SM và song song với BC cắt AC tại N . Biết góc giữa (SBC) và (ABC) bằng 60° , Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SN theo a

Bài 10. (Khối B 2011) Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với giao điểm của AC và BD . Góc giữa hai mặt phẳng $(ADD'A')$ và $(ABCD)$ bằng 60° , Tính khoảng cách từ B' đến mặt phẳng $(A'BD)$ theo a .

Bài 11. (ĐH Vinh) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, mặt bên SAD là tam giác vuông tại S , Hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ là điểm H thuộc cạnh AD sao cho $HA = 3HD$. Gọi M là trung điểm của AB , biết $SA = 2a\sqrt{3}$ và đường thẳng SC tạo với đáy một góc 30° . Tính khoảng cách từ M đến mặt phẳng (SBC)

Bài 12. (Chuyên Vĩnh Phúc) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, và góc giữa (SBD) và đáy 60° , Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SD